

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.З. Грищак, Н.М. Д'яченко, Є.В. Панасенко

**ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ
В ПРИКЛАДНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ**

Методичні рекомендації до самостійної роботи
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 13
від 28 червня 2022 р.

Запоріжжя
2022

УДК 519.6:517(076.5)
Г859

Гришак В.З., Д'яченко Н.М., Панасенко Є.В. Застосування математичного апарату в прикладних дослідженнях : методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2022. 75 с.

Методичні рекомендації призначені допомогти студентам якісно засвоїти програмний матеріал дисципліни «Застосування математичного апарату в прикладних дослідженнях», винесений на самостійне опрацювання.

Видання містить основні теоретичні відомості дисципліни, варіанти практичних завдань для самостійного виконання з інструкціями щодо їх виконання та питання для самоконтролю.

Для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика», які навчаються за освітньо-професійною програмою «Математика».

Рецензент

М.І. Клименко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальної математики

Відповідальний за випуск

С.М. Гребенюк, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри фундаментальної математики

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
Тема 1 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ. ВИБІР ЕМПІРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ	6
Теоретичні відомості.....	6
§1 Апроксимація та інтерполяція чисельних даних.....	6
§2 Точкове квадратичне апроксимування функцій однієї змінної. Вибір емпіричної функції.....	7
2.1 Постановка задачі.....	7
2.2 Точкове квадратичне апроксимування функції однієї змінної многочленом.....	8
2.3 Точкове квадратичне апроксимування функції однієї змінної лінійною комбінацією лінійно незалежних функцій.....	11
2.4 Двопараметрична точкова квадратична апроксимація функції однієї змінної.....	11
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ № 1 Точкове квадратичне апроксимування функцій однієї змінної засобами табличних редакторів (зокрема, MS Excel) і за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple. Вибір емпіричної функції засобами табличного редактору.....	12
§1 Завдання для виконання.....	12
§2 Варіанти практичного завдання №1 [1].....	13
§3 Методичні рекомендації щодо виконання практичного завдання №1.....	14
Питання для самоконтролю з теми 1.....	20
Тема 2 АПРОКСИМУВАННЯ ЕМПІРИЧНИХ ДАНИХ ФУНКЦІЯМИ ДВОХ ЗМІННИХ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ. ПОБУДОВА ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОБА-ДУГЛАСА.	21
Теоретичні відомості.....	21
§1 Апроксимування емпіричних даних функцією двох змінних методом найменших квадратів. Постановка задачі.....	21
§2 Трипараметричне точкове квадратичне апроксимування функції двох змінної лінійною функцією.....	22
§3 Побудова виробничої функції Кобба-Дугласа.....	23
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ №2. Апроксимування емпіричних даних функцією двох змінних засобами табличного редактора (зокрема, MS Excel) і за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple).....	24
§1 Завдання для виконання і варіанти практичного завдання №2.....	24
§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №2.....	24
Питання для самоконтролю з теми 2.....	26
Тема 3 ІНТЕГРАЛЬНИЙ і ТОЧКОВИЙ МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	26
Теоретичні відомості.....	27
§1 Загальні положення.....	27
§2 Інтегральний МНК.....	28
§3 Точковий МНК.....	28
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ № 3, 4 Інтегральний і точковий методи найменших квадратів розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.....	29
§1 Завдання для виконання і варіанти практичного завдання №3.....	29
§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №3.....	29
§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №4.....	31

Питання для самоконтролю з теми 3	32
Тема 4 ІТЕРАЦІЙНІ ТА НЕІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	33
Теоретичні відомості	33
§1 Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду. Основні поняття	33
§2 Ітераційний метод розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду: метод послідовних наближень	34
§3 Неітераційні методи розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.....	35
3.1 Загальні положення	35
3.2 Метод найменших квадратів (інтегральний).....	36
3.3 Метод моментів	37
3.4 Метод колокацій	38
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ №5 і 6 Розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду методами найменших квадратів, колокацій, моментів	38
§1 Завдання для виконання і варіанти практичних завдань №5 і 6	38
§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №5	39
§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №6	42
Питання для самоконтролю з теми 4	43
Тема 5 НЕІТЕРАЦІЙНІ ТА ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ЗВЕДЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДО ЗАДАЧІ КОШІ	44
Теоретичні відомості	44
§1 Метод суперпозиції для крайової задачі другого порядку (неітераційний метод).....	44
§2 Зведення крайової задачі третього порядку до задачі Коші методом суперпозиції.....	46
§3 Тривіточкова задача для диференціального рівняння третього порядку.....	47
§4 Метод стрільби для крайової задачі другого порядку (ітераційний метод)	48
ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ №7 і 8. Метод суперпозиції зведення крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь до задач Коші.....	49
§1 Завдання для виконання і варіанти практичних завдань №7 і 8	49
§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №7	50
§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №8	54
Питання для самоконтролю з теми 5	59
ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ	59
§1 Індивідуальне завдання 1	59
1.1 Умова індивідуального завдання 1	59
1.2 Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання 1	62
Питання для самоконтролю до індивідуального завдання 1.....	63
§2 Індивідуальне завдання 2	64
2.1 Метод кінцевих різниць	64
2.2 Умова індивідуального завдання 2	65
2.3 Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання 2	65
Питання для самоконтролю до індивідуального завдання 2.....	66
§3 Індивідуальне завдання 3	66
3.1 Умова індивідуального завдання 3	66
3.2 Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання 3	67
Питання для самоконтролю до індивідуального завдання 3.....	69
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	70
ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА	74

ПЕРЕДМОВА

Розв'язки прикладних задач, що передбачають обробку емпіричних даних, можуть бути поданими функцією, що апроксимує їх. Одним із методів пошуку апроксимуючої функції є метод найменших квадратів. Значна частина економічних, фізичних, механічних, біологічних процесів моделюються інтегральними або диференціальними рівняннями. При вивченні дисципліни «Застосування математичного апарату в прикладних дослідженнях» наближені розв'язки цих рівнянь пропонується шукати із застосуванням методу найменших квадратів та методу зведення крайових задач до задач Коші.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Застосування математичного апарату в прикладних дослідженнях» є засвоєння студентом систематичних знань із методу найменших квадратів та методів зведення крайових задач до задач Коші; набуття навичок застосування зазначених методів при розв'язанні прикладних задач.

Основними **завданнями** вивчення дисципліни «Застосування математичного апарату в прикладних дослідженнях» є:

- оволодіння студентами базовими теоретичними знаннями щодо методу найменших квадратів та методу зведення крайових задач до задач Коші;
- набуття вмінь та навичок щодо застосування методу найменших квадратів для апроксимації чисельних даних;
- набуття вмінь та навичок щодо застосування методу найменших квадратів до наближеного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та інтегральних рівнянь;
- оволодіння знаннями з неітераційних та ітераційних методів зведення крайових задач до задач Коші та вмінь і навичок щодо їх застосування;
- набуття вмінь використання спеціалізованого програмного забезпечення для розв'язання зазначених задач;
- застосування набутих навичок до розв'язання прикладних задач.

Курс «Застосування математичного апарату в прикладних дослідженнях» є логічним продовженням курсу «Застосування сучасних мов програмування до розв'язування математичних задач», передбачає застосування досвіду, набутого здобувачами вищої освіти під час проходження виробничої практики; курс ґрунтується на окремих розділах математичного аналізу, диференціальних рівнянь, чисельних методів, що вивчаються на першому (бакалаврському) рівні освіти в циклі професійної підготовки спеціальності. Засвоєні при вивченні даного курсу знання необхідні для виконання кваліфікаційної роботи магістра та подальшої дослідницької діяльності в математичних науках та інших галузях науки та техніки.

Тема 1 АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ. ВИБІР ЕМПІРИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Мета вивчення теми:

- засвоїти поняття апроксимації та інтерполяції чисельних даних;
- засвоїти метод точкового квадратичного апроксимування функцій однієї змінної многочленами, лінійною комбінацією лінійно незалежних функцій;
- знати теоретичні засади вибору вигляду емпіричної формули з двома параметрами;
- вміти застосовувати засоби MS Excel для вибору емпіричних функцій однієї змінної;
- вміти реалізовувати алгоритм методу точкової квадратичної апроксимації функції однієї змінної засобами табличного редактора (зокрема, MS Excel) та за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple).

Основні поняття теми:

- інтерполяція чисельних даних на площині;
- апроксимація чисельних даних на площині;
- квадратичне відхилення методу точкової квадратичної апроксимації функції однієї змінної.

Теоретичні відомості

§1 Апроксимація та інтерполяція чисельних даних

Пропонується студентові самостійно пригадати означення апроксимації та інтерполяції чисельних даних. В допомогу на рис. 1.1 (а) наведено числові дані на площині. На рис. 1.1 (б) і (в) зображено їх апроксимація та інтерполяція деякими функцією однієї змінної.

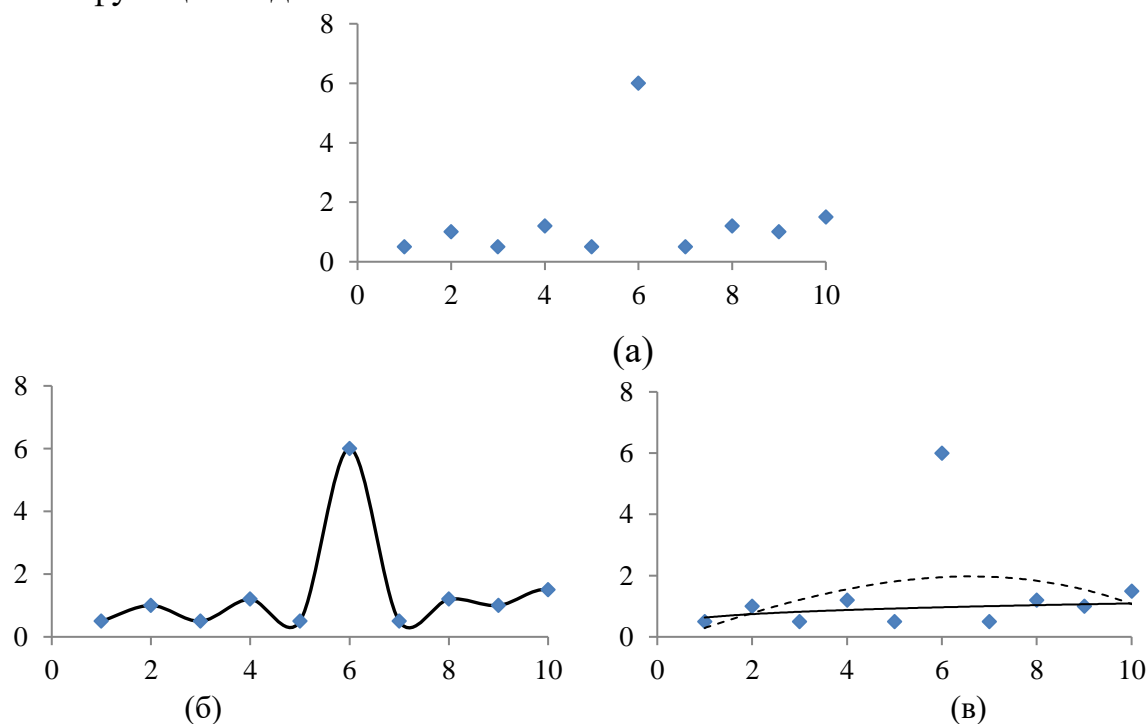


Рис. 1.1

Пропонується дати відповіді на питання:

1. Чим відрізняється інтерполяція від апроксимації?
2. Який саме рисунок серед (рис. 1.1 (а)-(в)) відповідає інтерполяції? апроксимації?
3. Які методи інтерполяції Вам відомі? апроксимації?
4. У яких випадках інтерполяція є невиправданою?
5. На рис. 1.2 показано, до чого призводить фільтрація даних, яку застосовують після процесу апроксимації.

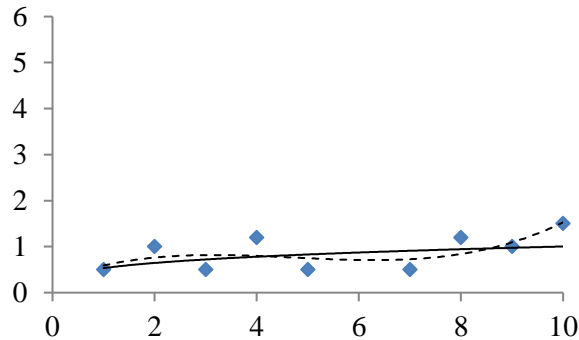


Рис. 1.2

§2 Точкове квадратичне апроксимування функцій однієї змінної. Вибір емпіричної функції.

2.1 Постановка задачі.

Розглянемо сукупність точок на площині $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$, де $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{1, n}$. Тут функція однієї змінної $f(x)$ визначає емпіричні дані.

Потрібно знайти емпіричну функцію

$$y = \tilde{f}(x, a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (1.1)$$

що апроксимує задану множину точок і визначається невідомими параметрами a_1, a_2, \dots, a_m , при цьому їх кількість $m \leq n$. (Якщо $m = n$, то функція (1.1) є інтерполюючою)

Відхилення в кожній точці визначається як

$$\varepsilon_k = |\tilde{f}(x_k, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_k| = |\tilde{f}(x_k, a_1, a_2, \dots, a_m) - f(x_k)|, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.2)$$

Загальне відхилення може характеризуватися однією із формул

$$\varepsilon = \max_{k=1, n} \varepsilon_k, \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k)^2. \quad (1.3)$$

Метою є мінімізація загального відхилення.

Формула $\varepsilon = \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k)^2$ задає *квадратичне відхилення*. А метод, що дозволяє

знайти апроксимуючу функцію (1.1), яка відповідає мінімальному значенню квадратичного відхилення, називають *методом найменших квадратів (МНК)*.

2.2 Точкове квадратичне апроксимування функції однієї змінної многочленом

Розглянемо [1] сукупність точок на площині $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$, де $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$. За апроксимуючу функцію оберемо многочлен

$$y = P(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots + a_m x^m. \quad (1.1a)$$

У загальному випадку, МНК потребує виконання обмеження $m \leq n$. Однак на практиці, $m \ll n$. Квадратичне відхилення визначається формулою

$$\begin{aligned} Q(a_0, a_1, \dots, a_m) &= \sum_{k=0}^n (P(x_k, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_k)^2 = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(a_0 + a_1 x_k + a_2 (x_k)^2 + \dots + a_i (x_k)^i + \dots + a_m (x_k)^m - y_k \right)^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Потрібно знайти мінімум зазначеної функції.

Знайдемо критичну точку функції багатьох змінних Q :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_0} &= \sum_{k=0}^n \left(a_0 + a_1 x_k + a_2 (x_k)^2 + \dots + a_i (x_k)^i + \dots + a_m (x_k)^m - y_k \right) \cdot 1 = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_1} &= \sum_{k=0}^n \left(a_0 + a_1 x_k + a_2 (x_k)^2 + \dots + a_i (x_k)^i + \dots + a_m (x_k)^m - y_k \right) \cdot x_k = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_2} &= \sum_{k=0}^n \left(a_0 + a_1 x_k + a_2 (x_k)^2 + \dots + a_i (x_k)^i + \dots + a_m (x_k)^m - y_k \right) \cdot (x_k)^2 = 0; \\ &\dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_i} &= \sum_{k=0}^n \left(a_0 + a_1 x_k + a_2 (x_k)^2 + \dots + a_i (x_k)^i + \dots + a_m (x_k)^m - y_k \right) \cdot (x_k)^i = 0; \\ &\dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_m} &= \sum_{k=0}^n \left(a_0 + a_1 x_k + a_2 (x_k)^2 + \dots + a_i (x_k)^i + \dots + a_m (x_k)^m - y_k \right) \cdot (x_k)^m = 0. \end{aligned} \right. \quad (1.5)$$

Отриману систему можна переписати у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 \cdot (n+1) + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n x_k + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^2 + \dots + a_i \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^i + \dots + a_m \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^m &= \sum_{k=0}^n y_k; \\ a_0 \cdot \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^2 + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^3 + \dots + a_i \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{i+1} + \dots + a_m \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{m+1} &= \sum_{k=0}^n x_k y_k; \\ a_0 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^2 + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^3 + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^4 + \dots + a_i \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{i+2} + \dots + a_m \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{m+2} &= \sum_{k=0}^n (x_k)^2 y_k; \\ &\dots \\ a_0 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^i + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{1+i} + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{2+i} + \dots + a_i \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{2i} + \dots + a_m \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{m+i} &= \sum_{k=0}^n (x_k)^i y_k; \\ &\dots \\ a_0 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^m + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{1+m} + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{2+m} + \dots + a_i \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{i+m} + \dots + a_m \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^{2m} &= \sum_{k=0}^n (x_k)^m y_k. \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

Уведемо позначення

$$S_r = \sum_{k=0}^n (x_k)^r, \quad r = \overline{0, 2m},$$

$$T_p = \sum_{k=0}^n (x_k)^p y_k, \quad p = \overline{0, m},$$

тоді система (1.6) набуде вигляду

$$\begin{cases} a_0 \cdot S_0 + a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_2 + \dots + a_i \cdot S_i + \dots + a_m \cdot S_m = T_0; \\ a_0 \cdot S_1 + a_1 \cdot S_2 + a_2 \cdot S_3 + \dots + a_i \cdot S_{i+1} + \dots + a_m \cdot S_{m+1} = T_1; \\ a_0 \cdot S_2 + a_1 \cdot S_3 + a_2 \cdot S_4 + \dots + a_i \cdot S_{i+2} + \dots + a_m \cdot S_{m+2} = T_2; \\ \dots \\ a_0 \cdot S_i + a_1 \cdot S_{1+i} + a_2 \cdot S_{2+i} + \dots + a_i \cdot S_{2i} + \dots + a_m \cdot S_{m+i} = T_i; \\ \dots \\ a_0 \cdot S_m + a_1 \cdot S_{1+m} + a_2 \cdot S_{2+m} + \dots + a_i \cdot S_{i+m} + \dots + a_m \cdot S_{2m} = T_m. \end{cases} \quad (1.7)$$

І спосіб. Систему (1.7) можна подати в матричній формі

$$Z \cdot A = B, \quad (1.8)$$

$$Z = \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_m \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{m+1} \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_m & S_{m+1} & S_{m+2} & \dots & S_{2m} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_m \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

За допомогою II способу нижче буде доведено, що СЛАР (1.7) має єдиний розв'язок, якщо всі абсциси заданих точок нерівні. Оскільки функція Q додатно визначена, то критична точка може бути лише точкою локального мінімуму даної функції. Відповідну точку мінімуму можна знайти за формулою

$$A = Z^{-1}B. \quad (1.10)$$

Якщо $m = n$, то апроксимуюча функція (1.1a) є інтерполяційним многочленом Лагранжа для заданої системи точок.

Для використання засобів табличного редактора (зокрема, MS Excel) зручно застосувати таблицю 1.1.

Таблиця 1.1

x^0	x^1	x^2	...	x^{2m}	y	xy	x^2y	...	$x^m y$
1	x_0	$(x_0)^2$...	$(x_0)^{2m}$	y_0	$x_0 y_0$	$(x_0)^2 y_0$...	$(x_0)^m y_0$
1	x_1	$(x_1)^2$...	$(x_1)^{2m}$	y_1	$x_1 y_1$	$(x_1)^2 y_1$...	$(x_1)^m y_1$
1	x_2	$(x_2)^2$...	$(x_2)^{2m}$	y_2	$x_2 y_2$	$(x_2)^2 y_2$...	$(x_2)^m y_2$
...
1	x_n	$(x_n)^2$...	$(x_n)^{2m}$	y_n	$x_n y_n$	$(x_n)^2 y_n$...	$(x_n)^m y_n$
S_0	S_1	S_2		S_m	T_0	T_1	T_2		T_m

II спосіб [2]. Подамо матричну форму системи (1.7) в інший спосіб. Для цього розглянемо матрицю M , вектор Y та матричні добутки

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \dots & (x_0)^m \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^m \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^m \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

$$M^t M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ (x_0)^2 & (x_1)^2 & (x_2)^2 & \dots & (x_n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_0)^m & (x_1)^m & (x_2)^m & \dots & (x_n)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \dots & (x_0)^m \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^m \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n+1 & \sum_{k=0}^n x_k & \sum_{k=0}^n (x_k)^2 & \dots & \sum_{k=0}^n (x_k)^m \\ \sum_{k=0}^n x_k & \sum_{k=0}^n (x_k)^2 & \sum_{k=0}^n (x_k)^3 & \dots & \sum_{k=0}^n (x_k)^{m+1} \\ \sum_{k=0}^n (x_k)^2 & \sum_{k=0}^n (x_k)^3 & \sum_{k=0}^n (x_k)^4 & \dots & \sum_{k=0}^n (x_k)^{m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=0}^n (x_k)^m & \sum_{k=0}^n (x_k)^{m+1} & \sum_{k=0}^n (x_k)^{m+2} & \dots & \sum_{k=0}^n (x_k)^{2m} \end{pmatrix} = Z.$$

$$M^t Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ (x_0)^2 & (x_1)^2 & (x_2)^2 & \dots & (x_n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_0)^m & (x_1)^m & (x_2)^m & \dots & (x_n)^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n y_k \\ \sum_{k=0}^n x_k y_k \\ \sum_{k=0}^n (x_k)^2 y_k \\ \dots \\ \sum_{k=0}^n (x_k)^m y_k \end{pmatrix} = B.$$

Отже, система (1.7) може бути поданою у матричному вигляді в наступний спосіб:

$$M^t M A = M^t Y, \quad (1.12)$$

а її розв'язок –

$$A = (M^t M)^{-1} M^t Y. \quad (1.13)$$

Якщо абсциси заданих точок нерівні, то визначник добутку матриць, утворених із стовпців (рядків) матриці Вандермонда $M^t M$, не дорівнює нулю, що і доводить існування єдиного розв'язку СЛАР (1.7).

Вибір способу подання системи (1.7) у матричній формі (1.8) або (1.12), а її розв'язку у вигляді (1.9) або (1.13) залежить від Ваших власних пріоритетів.

2.3 Точкове квадратичне апроксимування функції однієї змінної лінійною комбінацією лінійно незалежних функцій

Розглянемо [1] сукупність точок на площині $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^n$, де $y_k = f(x_k), k = \overline{0, n}$. За апроксимуючу функцію оберемо лінійну комбінацію лінійно незалежних функцій $\{\varphi_i(x_k)\}_{i=0}^m$

$$y = P(x, a_0, a_1, \dots, a_m) = a_0\varphi_0(x_k) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_m\varphi_m(x).$$

У загальному випадку $m \leq n$. На практиці, $m \ll n$. Квадратичне відхилення визначається формулою

$$\begin{aligned} Q(a_0, a_1, \dots, a_m) &= \sum_{k=0}^n (P(x_k, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_k)^2 = \\ &= \sum_{k=0}^n (a_0\varphi_0(x_k) + a_1\varphi_1(x_k) + a_2\varphi_2(x_k) + \dots + a_m\varphi_m(x_k) - y_k)^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Потрібно знайти мінімум зазначеної функції.

Введемо позначення

$$S_{r,p} = \sum_{k=0}^n \varphi_r(x_k)\varphi_p(x_k), \quad T_p = \sum_{k=0}^n \varphi_p(x_k)y_k, \quad r, p = \overline{0, m},$$

тоді точку мінімуму функції Q можна знайти за формулою

$$A = W^{-1}B, \quad (1.15)$$

де $W = (S_{r,p})_{r,p=0}^m$, $B = (T_0 \ T_1 \ T_2 \ \dots \ T_m)^t$.

2.4 Двопараметрична точкова квадратична апроксимація функції однієї змінної

Розглянемо лінійну функцію (1.1а) з двома параметрами a, b [2], тобто

$$y = P(x, a, b) = a + bx.$$

Це найпростіший випадок МНК. Однак його можна поширити на випадки інших функцій, які після логарифмування і певних заміни зводяться до лінійного випадку.

Розглянемо на прикладах. Спочатку оберемо апроксимуючу функцію виду $y = ae^{bx}$. Після логарифмування отримаємо

$$\ln y = \ln a + bx.$$

Позначення $Y = \ln y$, $A = \ln a$, $B = b$, $X = x$ зводять розв'язання до лінійної функції $Y = A + BX$.

Розглянемо іншу функцію $y = ax^b$, тоді $\ln y = \ln a + b \ln x$. Позначення $Y = \ln y$, $A = \ln a$, $B = b$, $X = \ln x$ зводять розв'язання до лінійної функції $Y = A + BX$.

Деякі функції, що дозволяють двопараметричну апроксимацію наведено в табл. 1.2 [2].

Таблиця 1.2

	Функція	Y	X	A	B
1	$y = a + \frac{b}{x}$	y	$\frac{1}{x}$	a	b
2	$y = \frac{1}{a + bx}$	$\frac{1}{y}$	x	a	b
3	$y = \frac{x}{a + bx}$	$\frac{x}{y}$	x	a	b
4	$y = a b^x$	$\ln y$	x	$\ln a$	$\ln b$
5	$y = a e^{bx}$	$\ln y$	x	$\ln a$	b
6	$y = \frac{1}{a + b e^x}$	$\frac{1}{y}$	e^x	a	b
7	$y = a x^b$	$\ln y$	$\ln x$	$\ln a$	b
8	$y = a + b \ln x$	y	$\ln x$	a	b
9	$y = \frac{a}{b + x}$	$\frac{1}{y}$	x	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$
10	$y = \frac{ax}{b + x}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{b}{a}$
11	$y = a e^{\frac{b}{x}}$	$\ln y$	$\frac{1}{x}$	$\ln a$	b
12	$y = a + b x^n$	y	x^n	a	b

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ № 1 Точкове квадратичне апроксимування функцій однієї змінної засобами табличних редакторів (зокрема, MS Excel) і за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple. Вибір емпіричної функції засобами табличного редактору

§1 Завдання для виконання

Вибір емпіричної функції засобами табличного редактору

- 1, а. Внести дані відповідно до Вашого варіанту до табличного редактору.
- 1, б. Побудувати точковий графік (як приклад, див. рис 1.1 (а)).
- 1, в. Побудувати лінію тренда. Помістити на діаграму рівняння лінії тренда і значення достовірності апроксимації.
- 1, г. Змінюючи параметри лінії тренда, обрати ту, що має найближче до одиниці значення достовірності апроксимації.

Реалізація МНК засобами табличних редакторів

2. Доповнити таблицю табличного редактора відповідно до теоретичної частини.
3. Для розв'язання застосувати один із способів реалізації методу найменших квадратів, викладених в теоретичній частині. Знайти апроксимуючу функцію за допомогою МНК. Її графік зобразити на тій самій діаграмі, що була побудовано для пошуку лінії тренда.
4. За допомогою табличного редактора знайти значення квадратичного відхилення.

5. Порівняти рівняння апроксимуючої функції з рівнянням лінії тренда.

Реалізація МНК засобами системи комп'ютерної алгебри

6. За допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple) методом найменших квадратів визначити рівняння апроксимуючої функції і значення квадратичного відхилення.

7. Побудувати графік знайденої функції і вхідних даних засобами системи комп'ютерної алгебри.

8. Порівняти результати, отримані за допомогою табличного редактора і системи комп'ютерної алгебри.

§2 Варіанти практичного завдання №1 [1]

Номер Вашого варіанта визначається як залишок від ділення на 10 порядкового номера Вашого ПІБ в журналі академгрупи. (Якщо залишок дорівнює 0, то Ваш варіант – 10.)

Через s позначено число, що дорівнює 0, якщо Ваше ПІБ має номер в журналі академгрупи ДЕННОЇ форми навчання від 1 до 10;

1 – номер в списку для ДЕННОЇ форми навчання від 11 до 20;

2 – номер в списку для ЗАОЧНОЇ форми навчання від 1 до 10;

3 – номер в списку для ЗАОЧНОЇ форми навчання від 11 до 20

Вимірювання температури корпусу працюючого агрегату, проведене з інтервалом 5 хвилин, дало наступні результати

Варіант 1

X	0	5	10	15	20	25
Y	$21+s$	$39+s$	$51+s$	$63+s$	$70+s$	$90+s$

Варіант 2

X	1	6	11	16	21	26
Y	$10+s$	$37+s$	$19+s$	$61+s$	$68+s$	$90+s$

Значення питомої електропровідності у скла залежно від температури X визначається таблицею

Варіант 3

X	14.5	30	64.5	74.5	86.7	94.5
Y	$0+s$	0.004	0.018	0.029	0.051	0.073

Варіант 4

X	42	53	61	74	83	90
Y	$0.005+\frac{s}{100}$	$0.011+\frac{s}{100}$	$0.023+\frac{s}{100}$	$0.027+\frac{s}{100}$	$0.063+\frac{s}{100}$	$0.0125+\frac{s}{100}$

Кількість Y речовини, (%), що залишився в системі через X хвилин від початку хімічної реакції, визначається таблицею.

Варіант 5

X	7	12	17	22	27	32	37
Y	$83.7+s$	$72.9+s$	$63.2+s$	$54.7+s$	$47.5+s$	$41.4+s$	$36.3+s$

Варіант 6

X	2	4	6	8	10	12	14
Y	$65.4+s$	$44.7+s$	$38.0+s$	$35.3+s$	$32.8+s$	$31.2+s$	$30.4+s$

На хімічному виробництві протягом п'яти робочих змін отримані наступні дані залежності виходу продукту Y (кг/год) від температури реакції X.

Варіант 7

X	51	32	80	73	64	45	83
Y	$52.7+s$	15.2	$89.5+s$	$94.8+s$	$76+s$	$39.3+s$	$114.8+s$

Варіант 8

X	28	35	40	29	53	58
Y	$5.3+s$	$20.7+s$	$21.7+s$	$9.2+s$	$55.4+s$	$64.3+s$

Для дослідження залежності тиску Y насиченої пари (Н/см) від питомої об'єму X (m^3/kg) складена таблиця даних.

Варіант 9

X	3.33	1.63	0.87	0.42	0.27	0.17
Y	$0.48+\frac{s}{10}$	$1.03+\frac{s}{10}$	$2.02+\frac{s}{10}$	$4.25+\frac{s}{10}$	$7.16+\frac{s}{10}$	$11.5+\frac{s}{10}$

Варіант 10

X	7.4	10.0	12.8	20.0	26.0	32.0
Y	$16.3+s$	$15.2+s$	$14.5+s$	$13.5+s$	$13.1+s$	$12.8+s$

§3 Методичні рекомендації щодо виконання практичного завдання №1

Задача 1.1 Виконати завдання, надані в ПЗ 1 відповідно до таблиці

X	7	12	17	22	27	32	37
Y	83	74	60	51	45	41	37

Розв'язання. Дані, що підлягають апроксимації, розміщено в таблиці MS Excel в комірках C2:D8 (рис. 1.3). Для побудови точкового графіка потрібно у вкладці меню MS Excel в блоці «Діаграма» обрати «Точечная». Далі можна обрати вигляд графіка такий, як позначено на рис. 1.2. Результуючим буде, наприклад, графік, зображений на рис. 1.3, який відповідає даним, розміщеним в комірках C2:D8.

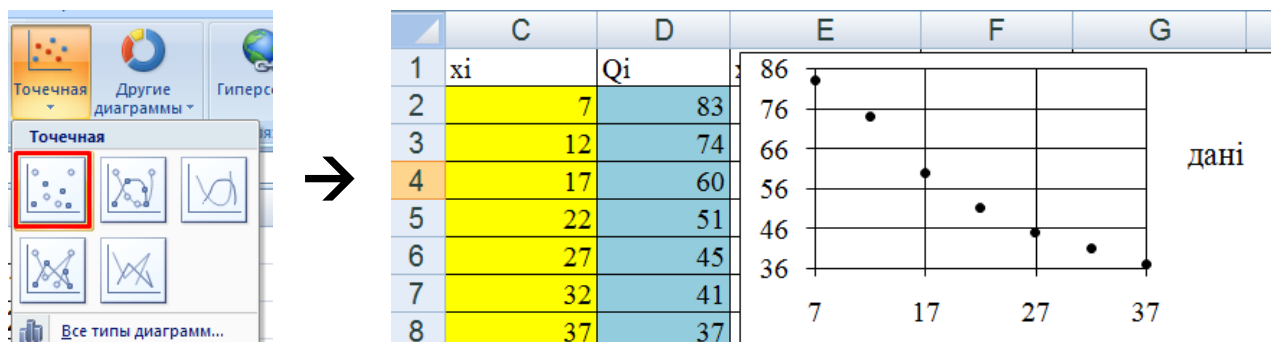
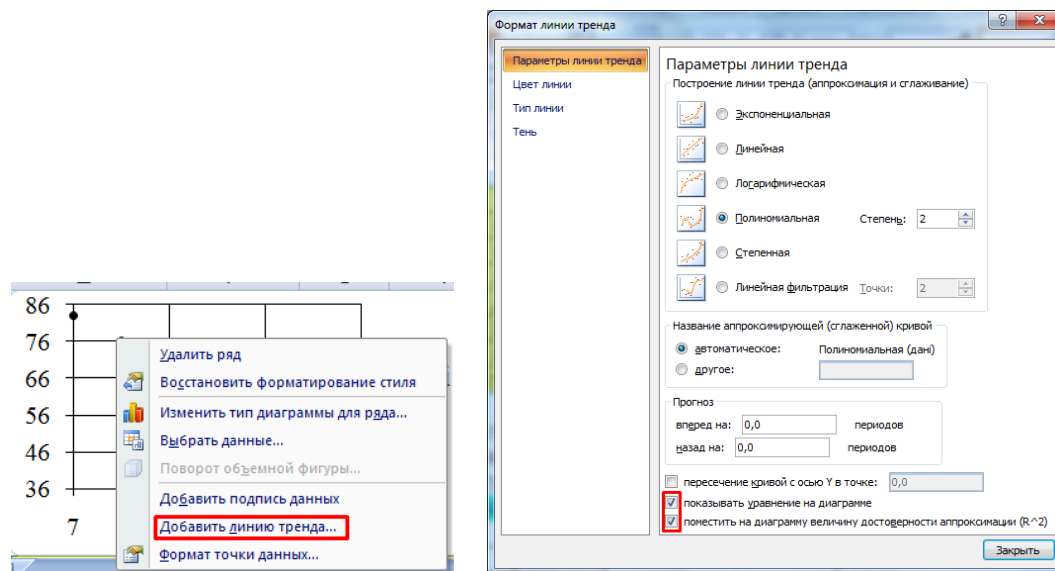


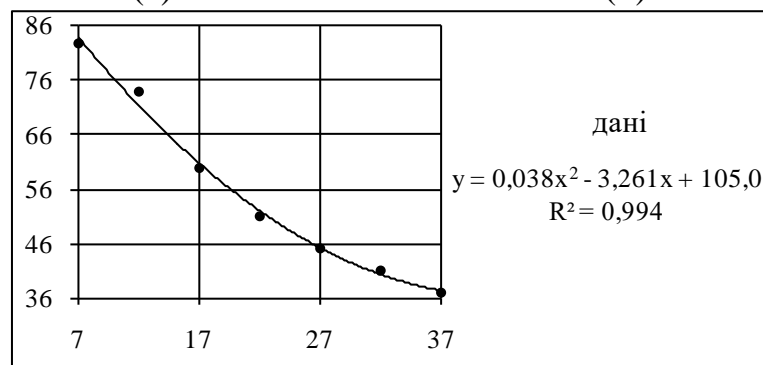
Рис. 1.3

Щоб додати до діаграми лінію тренда, клацніть правою кнопкою миші на будь-яку точку графіка і у спадному меню оберіть «Добавить линию тренда» (див. рис. 1.4 (а)). Після цього у вікні форматування лінії тренда оберіть параметри лінії тренда і поставте прапорці на «Показывать уравнение на диаграмме» і «Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)» (див. рис.1.4 (б)). На рис. 1.4 (в) наведено результат побудови.



(а)

(б)



(в)

Рис. 1.4

Змінюючи параметри лінії тренда, можна обрати ту, що має найближче до одиниці значення достовірності апроксимації. У даному випадку вхідних даних такі значення рівні для поліноміальної лінії тренда степеня 2 і 3, а для 4 – дорівнює майже 1. Однак для такої кількості даних степінь 4 не виправданий для апроксимації. Отже, обираємо степінь 2.

Реалізація I способу в MS Excel. Заповнюємо таблицю Excel відповідно до табл. 1.1 (див рис. 1.5). Утворюємо матриці Z і B у позначеннях формул (1.9) і розміщуємо в комірках B11:E13.

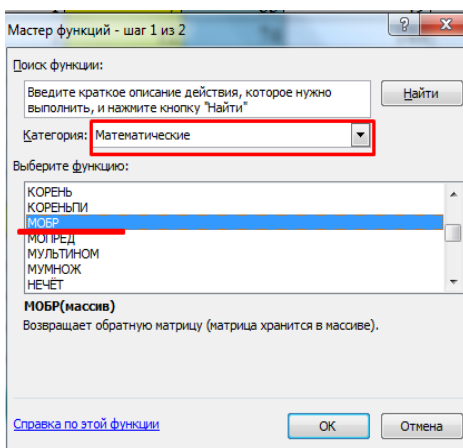
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			xi	Qi	xi^2	xi^3	xi^4	xi*Qi	Qi*xi^2		
2		1	7	83	49	343	2401	581	4067		
3		1	12	74	144	1728	20736	888	10656		
4		1	17	60	289	4913	83521	1020	17340		
5		1	22	51	484	10648	234256	1122	24684		
6		1	27	45	729	19683	531441	1215	32805		
7		1	32	41	1024	32768	1048576	1312	41984		
8		1	37	37	1369	50653	1874161	1369	50653		
9	Summ	7	154	391	4088	120736	3795092	7507	182189		
10		матрица Z			права частина B						
11	система	7	154	4088	391		3.642971429	-0.353257	0.007314286		105.0829 c
12		154	4088	120736	7507	Z^(-1)	-0.35325714	0.038305	-0.0008381	Z^(-1)*B	-3.261429 b
13		4088	120736	3795092	182189		0.007314286	-0.000838	1.90476E-05		0.038571 a
14											Зворотня матриця

Рис. 1.5

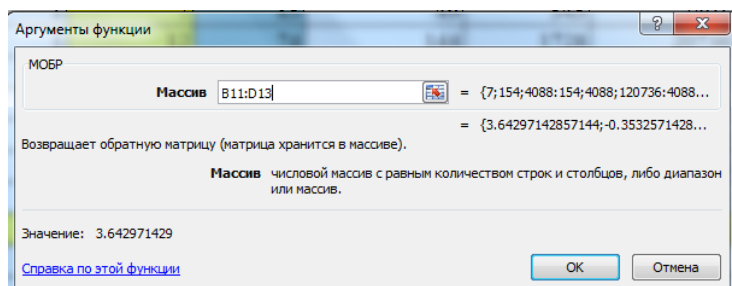
Для того, щоб застосувати формулу (1.10), потрібно знайти зворотню матрицю, а потім добуток матриць.

Зворотню матрицю можна знайти, виділивши діапазон, що відповідає розміру матриці Z , у даному випадку це G11:I13. В категоріях майстра функції обираємо «Математические», а в списку вибору функції – «МОБР» (рис. 1.6, (а)). У вікно майстра функції вносимо діапазон, де розміщені елементи матриці, яка потребує обертання. У даному випадку B11:D13 (рис. 1.6, (б)).

УВАГА!!! Для заповнення діапазону G11:I13 елементами зворотної матриці потрібно після одночасного натискання клавіш **Ctrl+Shift** клацнути на **Enter**. Та сама дія виконується і при використанні функцій МОБР, МУМНОЖ, ТРАНСП та ін.



(а)



(б)

Рис. 1.6

Щоб знайти добуток матриць, потрібно застосувати функцію МУМНОЖ (див рис. 1.7). В результаті отримаємо шуканий набір коефіцієнтів a, b, c (див рис. 1.5, комірки K11:K13).

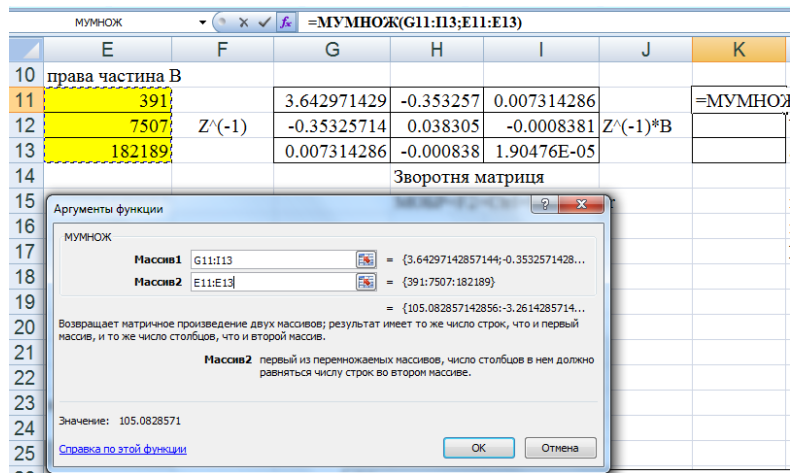


Рис. 1.7

Реалізація II способу в MS Excel. Для застосування формули (1.13) можна поступово використати функції **ТРАНСП**, **МУМНОЖ** та **МОБР** до матриць M і Q . Сукупність дій показано на рис. 1.8 з результатом на рис. 1.9.

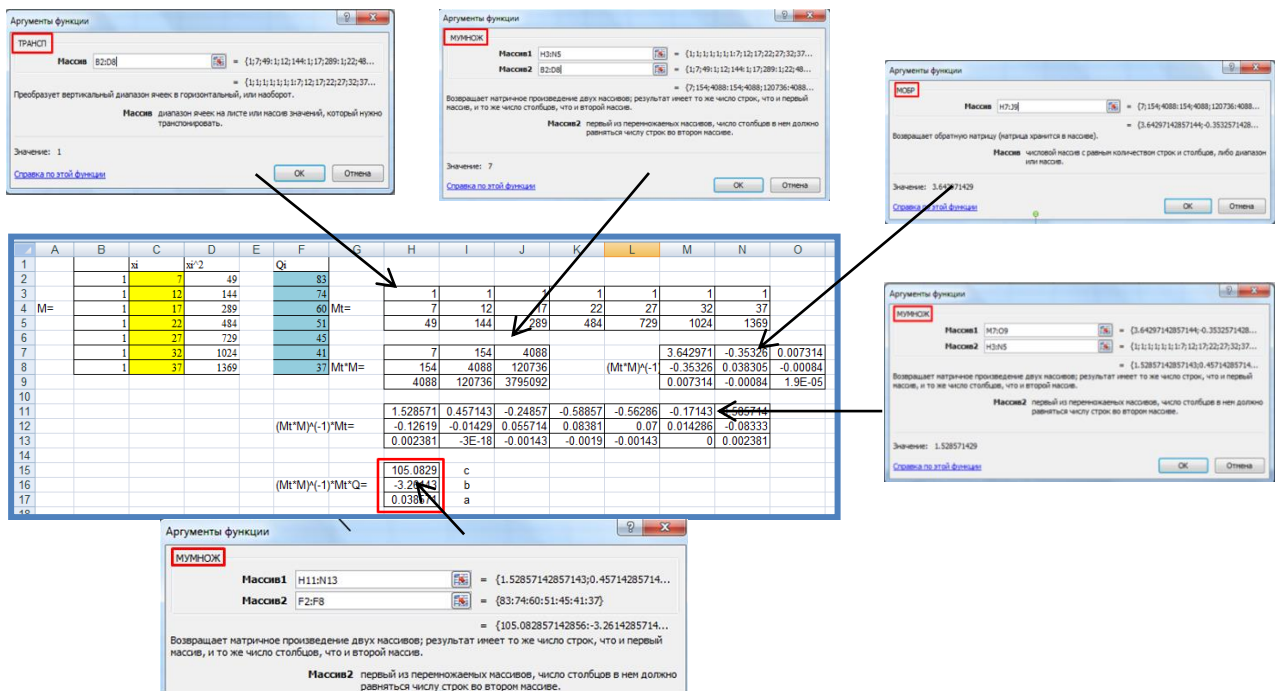


Рис. 1.8

14	F	G	H	I
15			105.0829	c
16	(Mt*M) ⁽⁻¹⁾ *Mt*Q=		-3.26143	b
17			0.038571	a

Рис. 1.9

Порівнюючи значення параметрів a, b, c апроксимуючої функції $y = ax^2 + bx + c$ (див. рис. 1.5 і рис. 1.9) з відповідними коефіцієнтами лінії тренда, приходимо до висновку про високу узгодженість результатів.

Для обчислення **квадратичного відхилення** заповнюємо дані за зразком рис. 1.10. Діапазон A18:A24 заповнюємо абсцисами вхідних даних, діапазон D18:D24 – ординатами. До комірки B18 вносимо формулу

$$= \$D\$15 * A18^2 + \$C\$15 * A18 + \$B\$15$$

До комірки D18 – формулу і

$$= (B18 - C18)^2$$

Дані формули копіюються до комірок B19:B24 і D19:D24 за допомогою маркера заповнювання.

	A	B	C	D	E
15		105.0828571	-3.2614286	0.038571429	
16		c	b	a	
17	xi	$a * xi^2 + b * xi + c$	Qi	$(a * xi^2 + b * xi + c - Qi)^2$	
18	7	84.14285714	83	1.306122449	
19	12	71.5	74	6.25	
20	17	60.78571429	60	0.617346939	
21	22	52	51	1	
22	27	45.14285714	45	0.020408163	
23	32	40.21428571	41	0.617346939	кв. откл.
24	37	37.21428571	37	0.045918367	9.857143

Рис. 1.10

Значення квадратичного відхилення знаходимо підсумовуванням елементів діапазону D18:D24. Результат вносимо до комірки E24, куди вписуємо формулу

$$= СУММ(D18:D24).$$

Відповідно до діапазону A18:B24 (див. рис. 1.10) додаємо на діаграму **графік апроксимуючої функції** $y = ax^2 + bx + c$ (штрихова лінія на рис. 1.13). Реалізацію процесу обчислень продемонстровано на рис. 1.11:

✓ правою кнопкою миші потрібно клацнути по діаграмі → у спадному меню клацнути «*Выбрать данные*» (рис. 1.11 (а)) → у вікні вибору джерела даних клацнути «*Добавить*» (рис. 1.11 (б)) → у вікні зміни ряду внести відповідні діапазони даних (рис. 1.11 (в)).

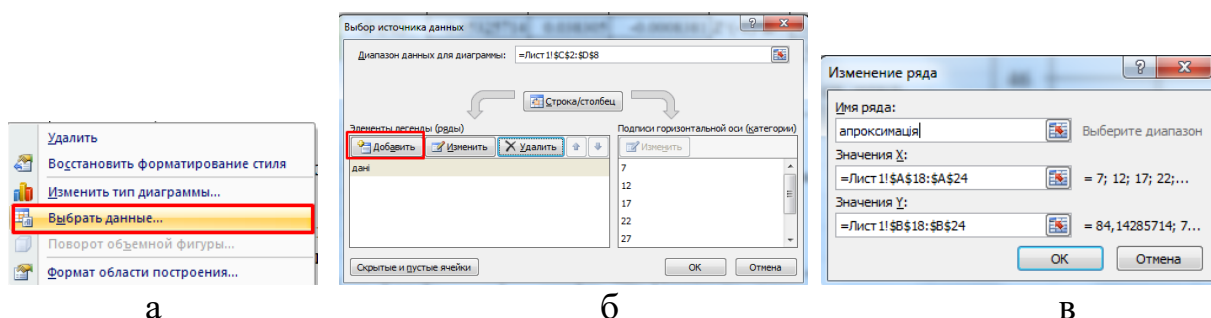


Рис. 1.11

Форматувати ряд даних побудованого графіка можна такими діями: клацнути по цьому графіку правою кнопкою миші і у спадному меню обрати «*Формат ряду даних*» (рис. 1.12 (а)) → у вікні формату ряду даних у вкладниці «*Цвет линии*» поставити прапорець «*Сплошная линия*» (рис. 1.12 (б)) → у вкладниці «*Тип линии*» обрати потрібні параметри лінії, наприклад, як показано на рис. 1.12 (в) → краще зняти маркер на графіку спочатку через вкладку

«Цвет маркера» (рис. 1.12 (г)) →, а потім можна ще прибрати лінію маркера через вкладнику «Тип линии маркера», обравши «Нет линии».

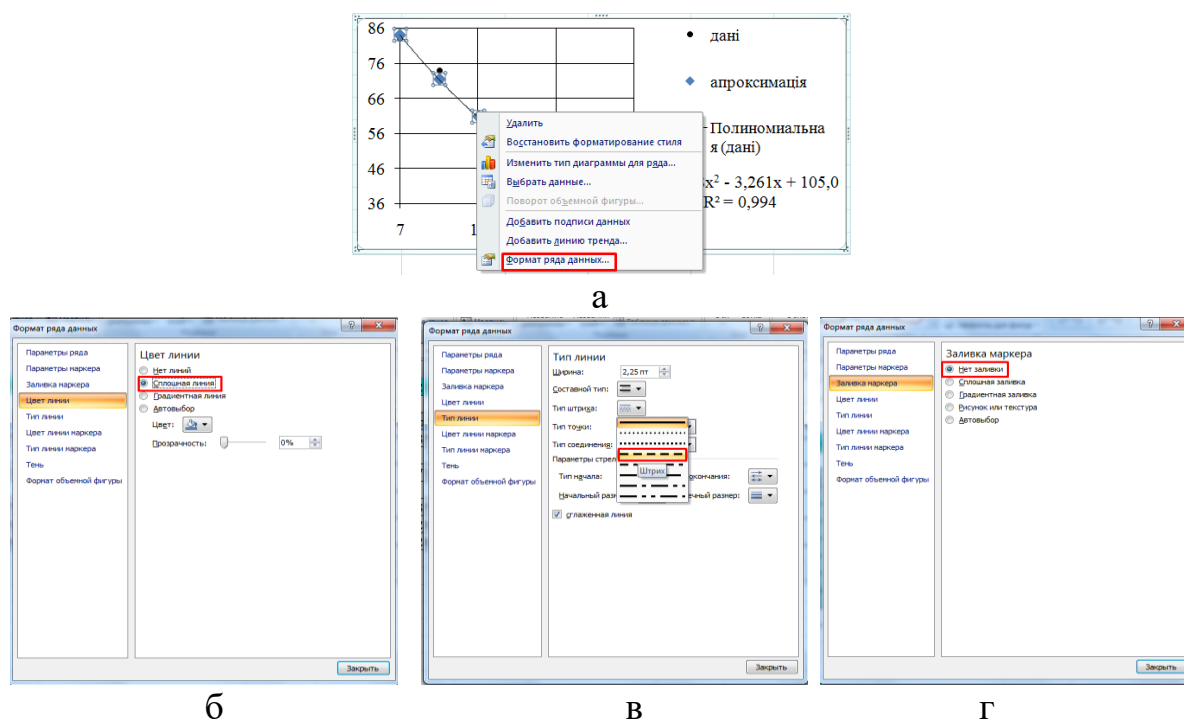


Рис. 1.12

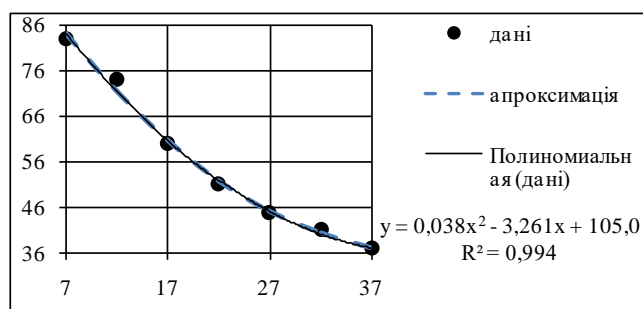


Рис. 1.13

Зауваження. МНК може бути реалізованим з використанням інструмента «Поиск решения» в табличному процесорі MS Excel на основі таблиці, аналогічній до рис. 1.10. Самостійна реалізація зазначеного завдання буде нагороджена додатковими балами.

Реалізація МНК в системі комп'ютерної алгебри Maple:

1) Внести вхідні дані у матрицю-вектор можна за допомогою операторів присвоювання:

```
> restart
> X := [ 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37 ] :
> Y := [ 83, 74, 60, 51, 45, 41, 37 ] :
```

2) Відразу визначимо апроксимуючу функцію (у даному випадку маємо многочлен степеня st)

$$y := \text{sum}(a[i] * x^i, i=0..st);$$

3) Формула квадратичного відхилення може бути визначеною як

$$Q := \text{sum}(\text{subs}(x=X[j], y) - Y[j])^2, j=1..N);$$

тут N - кількість вхідних даних.

- 4) Далі потрібно утворити систему (1.5), що виражає необхідні умови локального екстремуму функції багатьох змінних Q і розв'язати її:

- > **for** *k* **from** 0 **to** *st* **do** $eq[k] := \text{diff}(Q, a[k]) = 0$: **od**;
- > $sys := \{seq(eq[h], h = 0..st)\}$:
- > $var := \{seq(a[h], h = 0..st)\}$:
- > $R := \text{solve}(sys, var); \text{assign}(R)$:

- 5) Значення квадратичного відхилення містить змінна Q, яку необхідно вивести на екран.

- 6) Потрібно порівняти значення коефіцієнтів апроксимуючої функції, отриманих за допомогою двох різних інструментів (MS Excel і Maple). Якщо розв'язок системи в Maple ($a[h], h=0..st$) визначається звичайними дробами, то порівняння здійснювати незручно. Для подання звичайного дроби у вигляді десяткового можна застосувати в Maple оператор $\text{evalf}(z)$, де z – число, що підлягає поданню десятковим дробом.

- 7) Щоб побудувати графік точкової функції, що відповідає вхідним даним, можна виконати такі дії:

- подати дані матрицею

$$data := [seq([X[j], Y[j]], j = 1..N)]:$$

- графік будується, наприклад, із застосуванням оператора

$$\text{plot}(data, \text{style} = \text{point});$$

- 8) Для побудови графіка апроксимуючої функції достатньо вписати оператор

$$\text{plot}(y, x=X[1]..X[N]);$$

- 9) Щоб побудувати два графіка на одному рисунку можна, наприклад, спочатку підключити пакет графіки $\text{with}(plots)$;, а потім застосувати оператор display . Пропонується студентові реалізувати цей крок самостійно. Наведемо тут лише результат (див рис. 1.14).

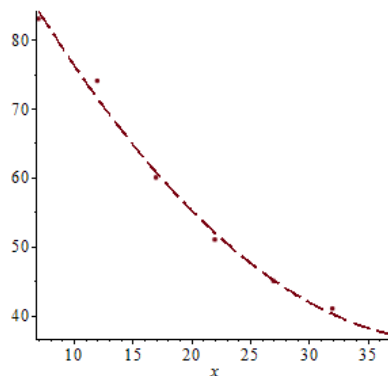


Рис. 1.14

Питання для самоконтролю з теми 1:

1. Апроксимація та інтерполяція чисельних даних.

2. Точкове квадратичне апроксимування функцій однієї змінної многочленами.
3. Точкове квадратичне апроксимування функцій однієї змінної лінійною комбінацією лінійно незалежних функцій.
4. Теоретичні засади вибору вигляду емпіричної формули з двома параметрами.
5. Застосування засобів MS Excel для вибору емпіричних функцій однієї змінної.
6. Реалізація алгоритму засобами табличного редактора (зокрема, MS Excel) та за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple).

Тема 2 АПРОКСИМУВАННЯ ЕМПІРИЧНИХ ДАНИХ ФУНКЦІЯМИ ДВОХ ЗМІННИХ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ. ПОБУДОВА ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ КОБА-ДУГЛАСА.

Мета вивчення теми:

- засвоїти метод точкового квадратичного апроксимування емпіричних даних лінійною функцією двох змінних;
- знати основні ідеї методу, способи отримання розв'язку задачі апроксимації, вигляд СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів і методи її розв'язання;
- вміти реалізовувати алгоритм методу точкової квадратичної апроксимації лінійної функції двох змінних засобами табличного редактора (зокрема, MS Excel) та за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple);
- засвоїти економічні поняття, що характеризують виробничу функцію Кобба-Дугласа;
- засвоїти основні принципи пошуку функції Кобба-Дугласа методом найменших квадратів.

Основні поняття теми:

- апроксимація чисельних даних в просторі;
- квадратичне відхилення методу точкової квадратичної апроксимації функції двох змінних.

Теоретичні відомості

§1 Апроксимування емпіричних даних функцією двох змінних методом найменших квадратів. Постановка задачі

Розглянемо сукупність точок в просторі $\{(x_k, y_k, z_k)\}_{k=1}^n$, де $z_k = f(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, n}$. Тут функція двох змінної $f(x, y)$ визначає емпіричні дані.

Потрібно знайти емпіричну функцію

$$z = \tilde{f}(x, y, a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (2.1)$$

що апроксимує задану множину точок і визначається невідомими параметрами a_1, a_2, \dots, a_m , при цьому їх кількість $m \leq n$. (Якщо $m = n$, то функція (1) є інтерполюючою)

Відхилення в кожній точці визначається як

$$\varepsilon_k = \left| \tilde{f}(x_k, y_k, a_1, a_2, \dots, a_m) - z_k \right| = \left| \tilde{f}(x_k, y_k, a_1, a_2, \dots, a_m) - f(x_k, y_k) \right|, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Формула $\varepsilon = \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k)^2$ задає *квадратичне відхилення*. А метод, що дозволяє знайти апроксимуючу функцію (1), яка відповідає мінімальному значенню квадратичного відхилення, є *методом найменших квадратів (МНК)*.

§2 Трипараметричне точкове квадратичне апроксимування функції двох змінної лінійною функцією

Розглянемо сукупність точок в просторі $\{(x_k, y_k, z_k)\}_{k=0}^n$, де $z_k = f(x_k, y_k)$, $k = \overline{0, n}$. За емпіричну функцію оберемо лінійну функцію

$$z = P(x, y, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 y. \quad (2.1a)$$

Квадратичне відхилення визначається формулою

$$Q(a_0, a_1, a_2) = \sum_{k=0}^n (P(x_k, y_k, a_0, a_1, a_2) - z_k)^2 = \sum_{k=0}^n (a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k)^2. \quad (2.2)$$

Потрібно знайти мінімум зазначеної функції.

Знайдемо критичну точку функції ТРЬОХ змінних Q :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_0} = \sum_{k=0}^n (a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k) \cdot 1 = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_1} = \sum_{k=0}^n (a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k) \cdot x_k = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial a_2} = \sum_{k=0}^n (a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k - z_k) \cdot y_k = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Отриману систему можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} a_0 \cdot (n+1) + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n x_k + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n y_k = \sum_{k=0}^n z_k; \\ a_0 \cdot \sum_{k=0}^n x_k + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n (x_k)^2 + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n x_k y_k = \sum_{k=0}^n x_k z_k; \\ a_0 \cdot \sum_{k=0}^n y_k + a_1 \cdot \sum_{k=0}^n x_k y_k + a_2 \cdot \sum_{k=0}^n (y_k)^2 = \sum_{k=0}^n y_k z_k. \end{cases} \quad (2.4)$$

Уведемо матриці [2]

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Система (2.4) може бути поданою у матричному вигляді в наступний спосіб:

$$M^t M A = M^t Z, \quad (2.6)$$

а її розв'язок –

$$A = (M^t M)^{-1} M^t Z. \quad (2.7)$$

Якщо точки попарно нерівні, то визначник добутку матриць, $M^t M$, не дорівнює нулю. Це означає існування єдиного розв'язку СЛАР (2.4). До того ж, унаслідок невід'ємності квадратичного відхилення, цей розв'язок може відповідати лише точці локального мінімуму функції Q .

§3 Побудова виробничої функції Кобба-Дугласа

Розглянемо [2] так звану виробничу функцію, яка являє собою математичну модель, що виражає залежність обсягу виробленої продукції від обсягу матеріальних і трудових витрат. В мікроекономіці найчастіше використовують двофакторні функції типу $Z = F(x, y)$, однією з яких є функція Кобба-Дугласа. На базі статистичних даних в оброблювальній промисловості США Charles Cobb і Paul Douglas в 1928 р. отримали залежність вигляду:

$$q = a x^\alpha y^\beta. \quad (2.8)$$

Тут a, α, β – додатні константи, де a – технологічний коефіцієнт, α – коефіцієнт еластичності по трудовим ресурсам, β – коефіцієнт еластичності по вкладеному капіталу, q – обсяг виробленої продукції, x, y – обсяг використаних ресурсів(труда і капіталу).

Якщо сума коефіцієнтів еластичності (показників степеня функції (2.8)) $\alpha + \beta$ дорівнює 1, тоді функція є однорідною, тобто вона вказує на постійну віддачу при зміні обсягів виробництва. Якщо $\alpha + \beta > 1$, то функція виражає зростаючу віддачу, а якщо $\alpha + \beta < 1$ – спадну.

Нехай відома статистична інформація $\{(q_i, x_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$. Потрібно визначити параметри виробничої функції a, α, β , які найкраще апроксимують статистичні дані.

Логарифмуємо обидві частини функції Кобба-Дугласа (2.8):

$$\ln q = \alpha \ln x + \beta \ln y. \quad (2.9)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} A_0 &= \ln a, \quad A_1 = \alpha, \quad A_2 = \beta, \\ Z_i &= \ln q_i, \quad X_i = \ln x_i, \quad Y_i = \ln y_i. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отримаємо сукупність точок в просторі $\{(X_i, Y_i, Z_i)\}_{i=0}^N$, де $Z_i = f(X_i, Y_i), i = \overline{0, N}$.
За емпіричну функцію оберемо лінійну функцію

$$Z = P(X, Y, A_0, A_1, A_2) = A_0 + A_1 X + A_2 Y. \quad (2.11)$$

Після застосування МНК буде отримано точку мінімуму (A_0, A_1, A_2) квадратичного відхилення, звідки можна знайти параметри функції Кобба-Дугласа:

$$a = e^{A_0}, \alpha = A_1, \beta = A_2. \quad (2.12)$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ №2. Апроксимування емпіричних даних функцією двох змінних засобами табличного редактора (зокрема, MS Excel) і за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple)

§1 Завдання для виконання і варіанти практичного завдання №2

Методом найменших квадратів побудувати апроксимуючі залежності $z = a_0 + a_1 x + a_2 y$ для функції, що задана таблично (див. табл. 2.1).

Таблиця 2.1

x_i	0	0	0	1	1	2	2	2
y_i	1,5	2,5	3,5	1,5	3,5	1,5	2,5	3,5
z_i	2,3	$4 + 0,3 \cdot n$	$2 - 0,1 \cdot n$	$5 + 0,2 \cdot n$	$4 - 0,2 \cdot n$	$6,1 + 0,2 \cdot n$	$6,5 - 0,1 \cdot n$	7,2

Знайти

- 1) квадратичне відхилення,
- 2) значення функції у точці $(x; y) = (1.5; 3)$.

Тут n – номер варіанту.

§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №2

Задача 2.1 Розв'язати задачу, запропоновану в ПЗ 2 відповідно до таблиці з даними

x_i	0	0	0	1	1	2	2	2
y_i	1.5	2.5	3.5	1.5	3.5	1.5	2.5	3.5
z_i	2.3	10	0	9	0	10.1	4.5	7.2

Розв'язання.

Реалізація ПЗ 2 у табличному процесорі MS Excel.

Розв'яжемо ту саму задачу, що і вище, при $n=20$. Викладений в теоретичній частині алгоритм розв'язання даної задачі, аналогічний до II способу випадку функції однієї змінної. Вносимо дані до таблиці (див. рис. 2.1). Дії над матрицями виконуємо згідно з формулою (2.7). Відповідні дії підписано на рис. 2.1.

Після отримання коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 лінійної функції $z = a_0 + a_1 x + a_2 y$ обчислюємо **квадратичне відхилення** (див. діапазон B32:G40 на рис. 2.1). Формули, що відповідають коміркам E33, F33 таблиці розрахунку, винесено

поруч з таблицею. В комірки E34:F40 формули копіюються за допомогою маркера заповнювача.

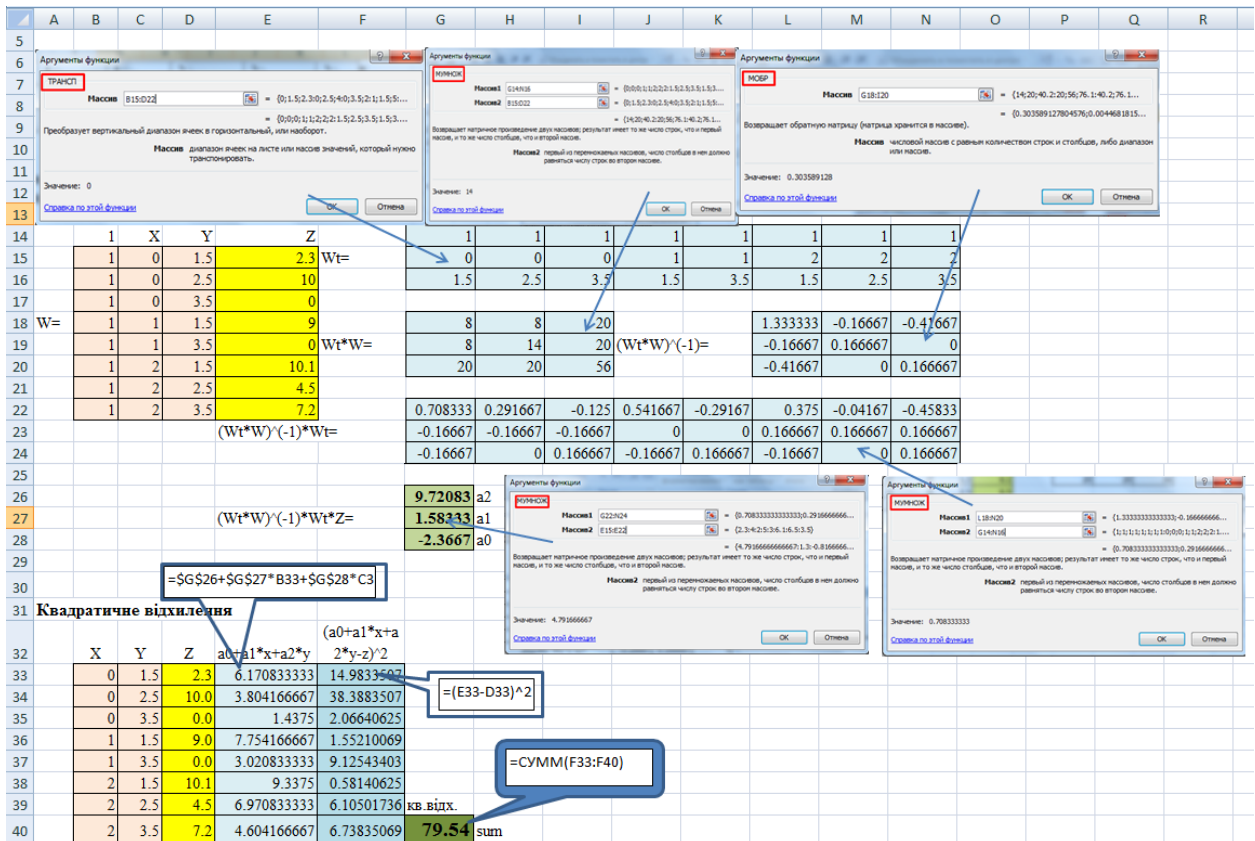


Рис. 2.1

Реалізація ПЗ 2 в системі комп'ютерної алгебри Maple

- Вносимо дані, що підлягають апроксимації:
 - > restart
 - > $X := [0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2]$:
 - > $Y := [1.5, 2.5, 3.5, 1.5, 3.5, 1.5, 2.5, 3.5]$:
 - > $Z := [2.3, 10.0, 0., 9.0, 0., 10.1, 4.5, 7.2]$:
- Квадратичне відхилення зручно записати у вигляді

$$Q := \text{sum}((a[0] + a[1]*X[j] + a[2]*Y[j] - Z[j])^2, j=1..8);$$
- Утворення системи і пошук її розв'язку реалізується аналогічно ПЗ 1.
- Якщо після отримання розв'язку системи буде застосовано оператор assign, то квадратичне відхилення набуде числового значення.
- Шукана функція матиме вигляд $z = a[0] + a[1]*x + a[2]*y$.

Обидві реалізації (в MS Excel і в Maple) дають однаковий результат.

Значення отриманої апроксимуючої функції

$$z = 9.720833333 + 1.583333333 x - 2.366666667 y$$

в точці $(x; y) = (1.5; 3)$ дорівнює 4.995833329.

За бажанням можете побудувати графік знайденої площини разом з точками, що підлягали апроксимуванню, наприклад так, як це показана на рис. 2.2.

З рис. 2.2 видно, що сума квадратів відстаней від заданих точок до площини вздовж напрямків, паралельних осі аплікату, є значною. Це дає візуальне підтвердження причини такого значення квадратичного відхилення як $Q \approx 79.54$.

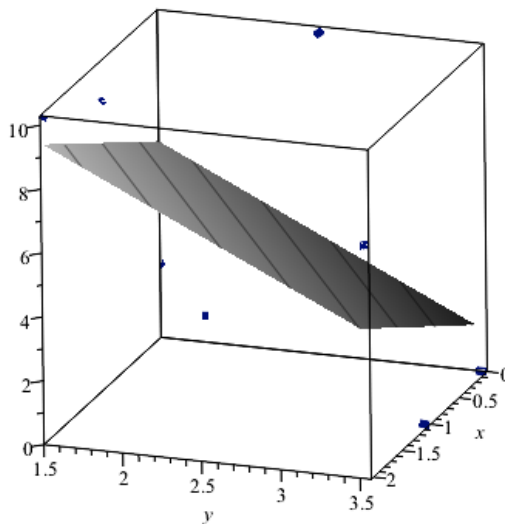


Рис. 2.2

Питання для самоконтролю з теми 2:

1. Апроксимування емпіричних даних функцією двох змінних: основні ідеї, способи отримання розв'язку, вигляд СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів і методи її розв'язання.
2. Виробнича функція Кобба-Дугласа. Побудова виробничої функції методом найменших квадратів.
3. Апроксимування емпіричних даних функцією двох змінних засобами табличного редактора (зокрема, MS Excel) і за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple).

Тема 3 ІНТЕГРАЛЬНИЙ і ТОЧКОВИЙ МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Мета вивчення теми:

- засвоїти поняття повної система функцій та її лінійно незалежної підсистеми;
- знати принципи вибору функцій цієї системи.
- знати інтегральний метод найменших квадратів (МНК) розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: основні ідеї, способи отримання розв'язку, вигляд СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів;
- знати точковий метод найменших квадратів (МНК) розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь;

- знати недоліки і переваги інтегрального і точкового МНК;
- вміти реалізовувати алгоритм інтегрального методу найменших квадратів за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple);
- вміти реалізовувати алгоритм точкового методу найменших квадратів за допомогою системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple);
- вміти доводити збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

Основні поняття теми:

- повна система функцій та її підсистема;
- квадратичне відхилення інтегрального методу найменших квадратів розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння;
- квадратичне відхилення точкового методу найменших квадратів.

Теоретичні відомості

§1 Загальні положення

Розглянемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку [1]

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (3.1)$$

$$\Gamma_a(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \Gamma_b(y) \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \quad (3.2)$$

де функції $p(x), q(x), f(x)$ – неперервні на $[a; b]$, $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Розглянемо систему лінійно незалежних функцій

$$\{u_j(x)\}_{j=0}^n, \quad (3.3)$$

яка утворюється з таких функцій, що

- $u_0(x)$ задовольняє ті самі крайові умови (3.2), що і невідома функція $y(x)$:

$$\Gamma_a(u_0) = A, \quad \Gamma_b(u_0) = B, \quad (3.4)$$

- $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ задовольняють однорідні крайові умови:

$$\Gamma_a(u_j) = 0, \quad \Gamma_b(u_j) = 0 \quad \text{при } j = \overline{1, n}. \quad (3.5)$$

Для прикладу, якщо крайова умова має вигляд

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (3.6)$$

то за потрібну систему можна обрати

$$u_0(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a), \quad u_j(x) = (x-a)^j(x-b), \quad j = \overline{1, n} \quad (3.7)$$

або

$$u_0(x) = A + (B-A) \sin \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}, \quad u_j(x) = \sin \frac{\pi j(x-a)}{2(b-a)}, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.8)$$

залежно від вигляду функцій $p(x), q(x), f(x)$ і передбачуваного вигляду розв'язку даної крайової задачі.

Наближений розв'язок крайової задачі (1), (2) подається сумою

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x), \quad (3.9)$$

в якій коефіцієнти $\{C_j\}_{j=1}^n$ підлягають визначенню.

Розглянемо **нев'язку**

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = L(\bar{y}) - f(x) = L(u_0) - f(x) + \sum_{j=1}^n C_j L(u_j). \quad (3.10)$$

Дана невязка у всіх точках $x \in [a; b]$ за абсолютним значенням повинна бути близькою до 0.

§2 Інтегральний МНК

Дана модифікація методу найменших квадратів передбачає мінімізацію квадратичного відхилення, що подається інтегралом [1]

$$Q(C_1, C_2, \dots, C_n) = \int_a^b R^2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) dx. \quad (3.11)$$

Шукана точка локального мінімуму функції n змінних $Q(C_1, C_2, \dots, C_n)$ може бути знайденою із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial C_1} = \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial C_1} dx = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial C_2} = \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial C_2} dx = 0; \\ \dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial C_n} = \int_a^b R \frac{\partial R}{\partial C_n} dx = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Наведена система є СЛАР і має єдиний розв'язок.

§3 Точковий МНК

Дана модифікація методу найменших квадратів початково передбачає розбиття відрізка $[a; b]$ на m рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{m} k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (3.13)$$

де $m > n$. Випадок $m = n$ відповідає методу колокацій.

Квадратичне відхилення у цьому випадку визначається сумою, що утворюється із значень квадратів невязки в точках розбиття. А саме [1]:

$$Q(C_1, C_2, \dots, C_n) = \sum_{k=1}^m R^2(x_k, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (3.14)$$

Саме воно й підлягає мінімізації. Точку мінімуму шукаємо описаним вище методом на основі системи (3.12).

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ № 3, 4 Інтегральний і точковий методи найменших квадратів розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

§1 Завдання для виконання і варіанти практичного завдання №3

1. Інтегральним і точковим методом найменших квадратів розв'язати крайову задачу
2. Побудувати графіки отриманих наближених розв'язків у випадку їх подання лінійною комбінацією трьох і десятих лінійно незалежних функцій повної системи простору $C[a,b]$.
3. Знайти точний або чисельний розв'язок засобами системи комп'ютерної алгебри Maple (або ін.) і побудувати його графік.
4. Зробити висновок про збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

Номер варіанта збігається з тим, що надано в ПЗ 1, а s позначено число, що дорівнює

0, якщо Ваше ПІБ має номер в журналі академгрупи ДЕННОЇ форми здобуття освіти від 1 до 10;

1 – номер в списку для ДЕННОЇ форми здобуття освіти від 11 до 20;

2 – номер в списку для ЗАОЧНОЇ форми здобуття освіти від 1 до 10;

3 – номер в списку для ЗАОЧНОЇ форми здобуття освіти від 11 до 20.

Варіант	Крайова задача
1	$y'' - 2xy' + 2y = 5x + 1, \quad y(0) = s, y(1) = s + 1$
2	$y'' + 2y' - 4xy = 2x, \quad y(0) = s, y(1) = s + 1$
3	$y'' - 2xy' - 3y + 2x = 0, \quad y(-1) = y(1) = s$
4	$y'' - 2y' + 5xy = x, \quad y(0) = s, y(1) = s + 1$
5	$y'' - 2xy' + 2y = 3x, \quad y(0) = s, y(1) = s + 1$
6	$y'' - x^2 y' + y = x, \quad y(0) = y(1) = s$
7	$y'' + y' - 2xy = x - 2, \quad y(-1) = y(1) = s$
8	$y'' - 2xy' - 2y = 5x, \quad y(0) = y(1) = s$
9	$y'' - 2xy' + 2y = 3x - 1, \quad y(0) = s, y(1) = s + 1$
10	$y'' + 3y' - 4xy = 2x + 1, \quad y(0) = s, y(1) = s + 2$

§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №3

Задача 3.1 Розв'яжемо крайову задачу

$$y'' - (x+1)y' + (3-2x)y = x-5; \quad y(1) = -1; \quad y(3) = 2. \quad (3.15)$$

Розв'язання. Відповідно до (3.1) у даному випадку маємо:

$$p(x) = -(x+1); \quad q(x) = 3-2x; \quad f(x) = x-5, \quad (3.16)$$

а в крайовій умові (3.6) потрібно покласти:

$$a = 1; \quad b = 3; \quad A = -1; \quad B = 2. \quad (3.17)$$

Розв'язання проведемо в системі комп'ютерної алгебри Maple.

1. Спочатку потрібно ввести вхідні дані відповідно до (3.16) і (3.17).

2. Далі визначаємо нев'язку:

$$R := \text{diff}(y(x), x^2) + p(x) \cdot \text{diff}(y(x), x) + q(x) \cdot y(x) - f(x);$$

3. Оскільки коефіцієнти диференціального рівняння є многочленами, то систему лінійно незалежних функцій задаємо через формули (3.7):

$$> u(x)[0] := A + \frac{(B - A)}{(b - a)} \cdot (x - a) :$$

$$> \text{for } k \text{ from } 1 \text{ to } n \text{ do } u(x)[k] := (x - a)^k \cdot (x - b) : \text{od}$$

тут n – кількість лінійно незалежних функцій, що задовольняють однорідні крайові умови.

4. Наближений розв'язок подамо за формулою (3.9):

$$> y := x \rightarrow u(x)[0] + \text{sum}(c[j] \cdot u(x)[j], j = 1 .. n) :$$

5. Квадратичне відхилення інтегрального МНК визначається через (3.11):

$$Q := \text{int}(R^2, x = a..b):$$

6. Пошук критичної точки функції багатьох змінних, що передбачає утворення СЛАР та його розв'язання, проводиться аналогічно ПЗ 1 і ПЗ 2. Пропонується студентові виконати цю частину самостійно. **Зверніть увагу**, що частинні похідні обчислюються за змінними $c[k]$, для k від 1 до n .

7. Якщо після розв'язання системи застосувати оператор `assign`, то як наближений розв'язок, так і квадратичне відхилення набудуть конкретного вигляду: розв'язок буде подано многочленом з числовими коефіцієнтами, а квадратичне відхилення набуде числового значення.

8. Обираючи $n = 3$, отримаємо наближений розв'язок $y(x)$ у вигляді

$$1.976689405 - 11.45108585x + 13.13459156x^2 - 5.437797191x^3 + 0.7776020770x^4 ,$$

а відповідне квадратичне відхилення дорівнюватиме

$$Q = 12.1222022221701.$$

При $n = 10$, отримаємо наближений розв'язок $y(x)$ –

$$68.34263346x + 0.02551509636x^{11} + 4.582163629x^9 - 0.5087566912x^{10} - 446.7764123x^4 \\ + 367.0165640x^5 - 212.5136599x^6 + 86.82319787x^7 - 24.55189897x^8 \\ + 375.0622834x^3 - 12.09089855 - 206.4107312x^2; Q_{10} = 0.000007854146151$$

і відповідне квадратичне відхилення $Q = 0.000007854146151$.

9. Система комп'ютерної алгебри Maple містить функціонал, що відповідає за можливість пошуку чисельного розв'язку диференціального рівняння, побудову графіку функції-розв'язку та ін. Застосувати зазначений функціонал можна в такий спосіб:

```

> with(plots) :
RR := diff(yyy(x), x$2) + p(x)·diff(yyy(x), x) + q(x)·yyy(x) - f(x) :
> F := dsolve({RR, yyy(a) = A, yyy(b) = B}, numeric);
> odeplot(F, color = blue);

```

10. Одночасне зображення трьох розв'язків дозволяє оператор `display`. У даному випадку графіки набудуть вигляду, зображеному на рис. 2.3.

Для випадку $n=10$ графік наближеного розв'язку, отриманого за допомогою МНК і чисельного – засобами Maple візуально майже не відрізняються. Таким чином, як значення квадратичного відхилення, так і зображення графіків свідчить про збіжність послідовності наближених розв'язків, отриманих інтегральним МНК, до точного.

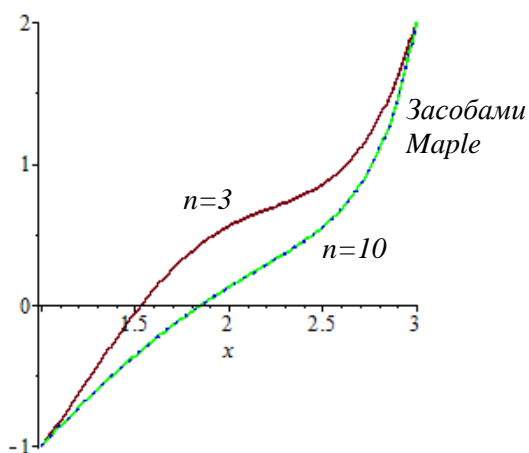


Рис. 2.3

§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №4

Розглянемо ту саму крайову задачу (3.15), що була розв'язаною наближено інтегральним МНК.

Усі кроки алгоритму реалізації задачі в Maple, виписаного вище, крім кроку 5, залишаються незмінними. Випишемо крок 5. Він передбачає розбиття відрізка $[a;b]$ на m рівних частин з відповідними змінами в формі квадратичного відхилення (див. (3.13) і (3.14)):

```

> m := 20 : for i from 0 to m do X[i] := a + (b - a) / m * i od:
> Q := sum(subs(x = X[ii], R^2), ii = 1 .. m);

```

Кількість m точок розбиття повинна бути більшою за n . Тут обрано $m = 20$. Випишемо результати точкового МНК:

- при $n = 3$ наближений розв'язок $y(x)$ набув вигляду

$$2.929277713 - 13.76715972x + 15.03397215x^2 - 6.036106558x^3 + 0.8400164090x^4$$

а квадратичне відхилення – $Q = 165.9420397$;

- при $n = 10$ функція $y(x)$ дорівнює

$$124.6246876x - 21.22772663 + 0.03240173001x^{11} + 6.165844082x^9 - 0.6645918865x^{10} \\ + 627.6870971x^3 - 716.8670497x^4 + 566.1508612x^5 - 315.8681328x^6 \\ + 124.6024045x^7 - 34.08763520x^8 - 361.5481600x^2$$

а квадратичне відхилення – $Q = 0.0000439318700848579$.

Графічне зображення всіх отриманих результатів обома методами наведено на рис. 2.4.

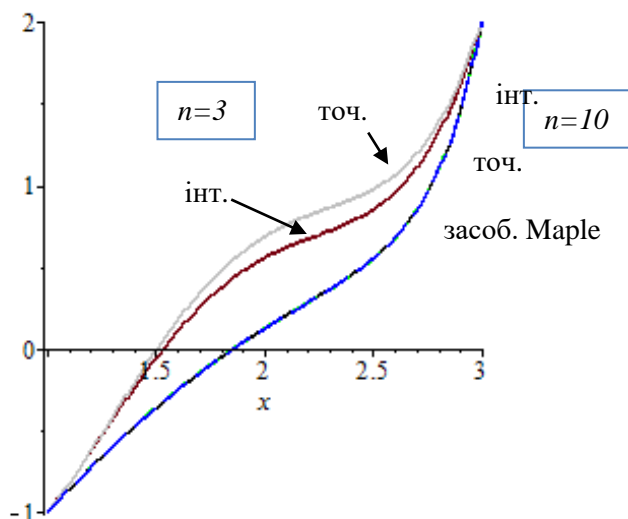


Рис. 2.4

Для даного диференціального рівняння значною є відстань між точками графіків наближених розв’язків, отриманих інтегральним, точковим МНК при $n = 3$, чисельного розв’язку, одержаного засобами Maple.

Хоча при $n = 10$ рівняння функцій, що виражають наближені розв’язки, суттєво різняться, однак квадратичні відхилення близькі до 0, а графіки візуально не відрізняються. Таким чином, послідовність наближених розв’язків, отриманих точковим МНК, збігається до точного.

Питання для самоконтролю з теми 3:

1. Повна система функцій та її лінійно незалежна підсистема. Принципи вибору функцій цієї системи.
2. Розв’язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь інтегральним методом найменших квадратів (МНК).
3. Розв’язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь точковим методом найменших квадратів (МНК).
4. Реалізація алгоритму інтегрального методу найменших квадратів за допомогою системи комп’ютерної алгебри (зокрема, Maple).
5. Реалізація алгоритму точкового методу найменших квадратів за допомогою системи комп’ютерної алгебри (зокрема, Maple).
6. Збіжність послідовності наближених розв’язків до точного.
7. Недоліки і переваги інтегрального МНК.
8. Недоліки і переваги точкового МНК.

Тема 4 ІТЕРАЦІЙНІ ТА НЕІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Мета вивчення теми:

- засвоїти основні принципи класифікації інтегральних рівнянь;
- знати умови існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду;
- засвоїти основні теоретичні засади неітераційного методу найменших квадратів розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду: принципи вибору координатних функцій, основні ідеї методу, способи отримання розв'язку, вигляд СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів;
- засвоїти основні теоретичні засади неітераційних методів моментів і колокацій розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду: принципи вибору координатних функцій, основні ідеї методу, способи отримання розв'язку, вигляд СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів;
- вміти реалізовувати алгоритм методу найменших квадратів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду засобами системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple);
- вміти реалізовувати алгоритми методів моментів і колокацій розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду засобами системи комп'ютерної алгебри (зокрема, Maple).

Основні поняття теми:

- інтегральне рівняння Фредгольма другого роду;
- система координатних функцій;
- квадратичне відхилення методу найменших квадратів розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Теоретичні відомості

§1 Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду. Основні поняття

Розглянемо інтегральне рівняння виду

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds - f(x) = 0, \quad (4.1)$$

В ньому

невідома функція – це $y(x)$,

відомими є

$\lambda = const \in \mathbb{R}$ – параметр інтегрального рівняння,

функція $f(x)$ (як правило, неперервна на $[a; b]$), яку називають *вільним членом*,

функція $K(x,s)$ (як правило, неперервна на $[a; b] \times [a; b]$) – *ядро* інтегрального рівняння.

Таке рівняння називають інтегральним рівнянням другого роду. Воно є лінійним, оскільки невідома функція входить в нього лінійно.

Розрізняють ітераційні та не ітераційні методи наближеного розв'язання інтегральних рівнянь.

§2 Ітераційний метод розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду: метод послідовних наближень

Ідея методу послідовних наближень (МПН).

Крок 0. За нульове наближення $y_0(x)$ можна обрати будь-яку функцію із простору розв'язків. Таким простором може бути $C_{[a;b]}$ або $L_2[a;b]$. Однак, як правило обирають

$$y_0(x) = 0 \text{ або } y_0(x) = f(x). \quad (4.2)$$

Крок 1. Перше наближення (перша ітерація):

$$y_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_0(s) ds + f(x).$$

Крок 2. Друге наближення (друга ітерація):

$$y_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_1(s) ds + f(x).$$

Крок n . n -е наближення (n -а ітерація):

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_{n-1}(s) ds + f(x). \quad (4.3)$$

Постає питання: чи збігається послідовність наближених розв'язків до точного? Відповідь на це питання НЕ завжди позитивна!

МПН може бути застосований у наступних випадках.

Випадок 1. Розв'язок шукаємо у просторі $C_{[a;b]}$. Якщо функції $f(x)$ і $K(x,s)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ або на квадраті $[a;b] \times [a;b]$ відповідно, тобто $f(x) \in C_{[a;b]}$ і $K(x,s) \in C_{[a;b] \times [a;b]}$, тоді єдиний розв'язок рівняння (4.1) у просторі $C_{[a;b]}$ можна знайти методом послідовних наближень, а послідовність наближених розв'язків буде збігатися до точного розв'язку рівняння (4.1), якщо

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \quad (4.4)$$

де

$$M = \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq s \leq b}} |K(x,s)|. \quad (4.5)$$

Випадок 2. Розв'язок шукаємо у просторі $L_2[a;b]$. Якщо $f(x) \in L_2[a;b]$ і $K(x,s) \in L_2([a;b] \times [a;b])$, тоді єдиний розв'язок рівняння (1) у просторі $L_2[a;b]$ можна знайти методом послідовних наближень, якщо

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad (4.6)$$

де

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,s) dx ds}. \quad (4.7)$$

Швидкість збіжності послідовності наближень (4.3) має порядок

$$\frac{q^n}{1-q},$$

де

$$q = |\lambda| M(b-a),$$

якщо виконується нерівність (4.4) для розв'язків в просторі $C_{[a;b]}$, або

$$q = |\lambda| B,$$

якщо має місце умова (4.6) для розв'язків в $L_2[a;b]$.

§3 Неітераційні методи розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

До таких методів відносять:

- метод найменших квадратів;
- метод колокацій;
- метод моментів.

3.1 Загальні положення

Розглянемо інтегральне рівняння

$$R(y) \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds - f(x) = 0, \quad (4.1a)$$

Всі зазначені методи беруть початок з вибору системи *координатних функцій*

$$u_0(x), \{u_j(x)\}_{j=1}^n,$$

де функції $\{u_j(x)\}_{j=1}^n$ – лінійно незалежні.

Наближений розв'язок рівняння (4.1a) подається сумою

$$\bar{y}_n(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x), \quad (4.8)$$

в якій коефіцієнти $\{C_j\}_{j=1}^n$ підлягають визначенню.

Розглянемо **нев'язку**

$$\begin{aligned} R(\bar{y}_n) &= W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) = \bar{y}_n(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \bar{y}_n(s) ds - f(x) = \\ &= u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \left[u_0(s) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(s) \right] ds - f(x). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Уведемо позначення

$$\varphi_0(x, \lambda) = u_0(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) u_0(s) ds - f(x);$$

$$\varphi_j(x, \lambda) = u_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) u_j(s) ds, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тоді нев'язку (4.9) можна переписати у вигляді

$$R(\bar{y}_n) = W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x, \lambda). \quad (4.10)$$

3.2 Метод найменших квадратів (інтегральний).

Метод передбачає [1] мінімізацію квадратичного відхилення, що подається інтегралом

$$Q(C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) = \int_a^b W^2(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) dx = \int_a^b \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x, \lambda) \right]^2 dx. \quad (4.11)$$

Шукана точка локального мінімуму функції n змінних $Q(C_1, C_2, \dots, C_n)$ може бути знайденою із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial C_1} = \int_a^b W \frac{\partial W}{\partial C_1} dx = \int_a^b \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x, \lambda) \right] \varphi_1(x, \lambda) dx = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial C_2} = \int_a^b W \frac{\partial W}{\partial C_2} dx = \int_a^b \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x, \lambda) \right] \varphi_2(x, \lambda) dx = 0; \\ \dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial C_n} = \int_a^b W \frac{\partial W}{\partial C_n} dx = \int_a^b \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x, \lambda) \right] \varphi_n(x, \lambda) dx = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Уведення позначень $(\varphi_k, \varphi_l) = \int_a^b \varphi_k(x, \lambda) \varphi_l(x, \lambda) dx$ призводить до системи

$$\begin{cases} C_1 \cdot (\varphi_1, \varphi_1) + C_2 \cdot (\varphi_1, \varphi_2) + \dots + C_i \cdot (\varphi_1, \varphi_i) + \dots + C_n \cdot (\varphi_1, \varphi_n) = -(\varphi_0, \varphi_1); \\ C_1 \cdot (\varphi_2, \varphi_1) + C_2 \cdot (\varphi_2, \varphi_2) + \dots + C_i \cdot (\varphi_2, \varphi_i) + \dots + C_n \cdot (\varphi_2, \varphi_n) = -(\varphi_0, \varphi_2); \\ C_1 \cdot (\varphi_3, \varphi_1) + C_2 \cdot (\varphi_3, \varphi_2) + \dots + C_i \cdot (\varphi_3, \varphi_i) + \dots + C_n \cdot (\varphi_3, \varphi_n) = -(\varphi_0, \varphi_3); \\ \dots \\ C_1 \cdot (\varphi_j, \varphi_1) + C_2 \cdot (\varphi_j, \varphi_2) + \dots + C_i \cdot (\varphi_j, \varphi_i) + \dots + C_n \cdot (\varphi_j, \varphi_n) = -(\varphi_0, \varphi_j); \\ \dots \\ C_1 \cdot (\varphi_n, \varphi_1) + C_2 \cdot (\varphi_n, \varphi_2) + \dots + C_i \cdot (\varphi_n, \varphi_i) + \dots + C_n \cdot (\varphi_n, \varphi_n) = -(\varphi_0, \varphi_n). \end{cases} \quad (4.13)$$

Наведена система є СЛАР. Головна матриця системи є симетричною. Якщо її визначник не дорівнює нулю, то система (13) має єдиний розв'язок.

Ті значення параметра λ , при яких $D(\lambda) = 0$, дозволяють знайти наближені власні значення $\{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^n$ інтегрального рівняння. Якщо розглянути $f(x) = 0$, $u_0(x) = 0$, $\lambda = \bar{\lambda}_k$, то система (4.13) перетворюється на однорідну, з якої можна знайти наближені власні функції рівняння (1).

3.3 Метод моментів

Першою відмінністю методу моментів наближеного розв'язання інтегрального рівняння (4.1а) [1] є вибір функції $u_0(x) = f(x)$. Це призводить до зміни вигляду наближеного розв'язку

$$\bar{y}_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x), \quad (4.14)$$

а також нев'язки:

$$\begin{aligned} R(\bar{y}_n) &= W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) = \\ &= \sum_{j=1}^n C_j \left[u_j(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u_j(s) ds \right] - \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds. \end{aligned} \quad (4.15)$$

По-друге, невідомі коефіцієнти потрібно знаходити із умови ортогональності нев'язки до координатних функцій:

$$\begin{cases} \int_a^b W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) u_1(x, \lambda) dx = 0; \\ \int_a^b W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) u_2(x, \lambda) dx = 0; \\ \dots \\ \int_a^b W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) u_n(x, \lambda) dx = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Підставляючи (4.15) до системи (4.16), перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n C_j \left[\int_a^b u_i(x) u_j(x) dx - \lambda \int_a^b dx \int_a^b K(x, s) u_i(x) u_j(s) ds \right] = \\ = \lambda \int_a^b dx \int_a^b K(x, s) u_i(x) f(s) ds, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.17)$$

В позначеннях

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \int_a^b u_i(x) u_j(x) dx; \quad b_{i,j} = \int_a^b dx \int_a^b K(x, s) u_i(x) u_j(s) ds; \\ g_i &= \int_a^b dx \int_a^b K(x, s) u_i(x) f(s) ds \end{aligned}$$

система (4.17) набуде вигляду:

$$\left\{ \sum_{j=1}^n C_j [a_{i,j} - \lambda b_{i,j}] = \lambda g_i, \quad i = \overline{1, n}. \right. \quad (4.18)$$

Щодо існування єдиного розв'язку системи (4.18), який визначатиме наближений розв'язок інтегрального рівняння (4.1а), то висновки аналогічні до тих, що виписано для МНК в пп. 4.3.3.

3.4 Метод колокацій

Метод колокацій наближеного розв'язання інтегрального рівняння (4.1a) початково передбачає розбиття відрізка $[a; b]$ на n рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Тобто кількість точок, що обирається дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів НА ВІДМІНУ ВІД ТОЧКОВОГО МНК для диференціальних рівнянь.

Сутність методу полягає в пошуку тих коефіцієнтів, за яких нев'язка дорівнює нулю в кожній із точок розбиття (19). Тобто система відносно невідомих коефіцієнтів набуде вигляду:

$$\{W(x_k, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (4.20)$$

або

$$\left\{ \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x_k, \lambda) = -\varphi_0(x_k, \lambda), \quad k = \overline{1, n}. \quad (4.21) \right.$$

Щодо існування єдиного розв'язку системи (4.21), який визначатиме наближений розв'язок інтегрального рівняння (1a), то висновки аналогічні до тих, що виписано для МНК.

Питання про збіжність послідовності наближених розв'язків $\{\bar{y}_n(x)\}$ інтегрального рівняння (1) до точного $y(x)$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n(x) = y(x)$ вимагає глибинних досліджень методами функціонального аналізу.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ №5 і 6 Розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду методами найменших квадратів, колокацій, моментів

§1 Завдання для виконання і варіанти практичних завдань №5 і 6

Перевірити умови існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (табл. 4.1,):
практичне завдання №5: методом найменших квадратів,
практичне завдання №6: методом колокацій,
методом моментів.

Порівняти результати

Таблиця 4.1 [5]

№ 1. $y(x) - \int_0^1 x \cdot t \cdot y(t) dt = 2x;$	№ 2. $y(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 t \cdot y(t) dt = 1;$
№ 3. $y(x) - \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-x) \sin(2\pi t) y(t) dt = \frac{1}{2}(1-x);$	№ 4. $y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin x \cdot y(t) \cdot t dt = 2 \sin x;$
№ 5. $y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \sin t \cdot y(t) dt = \sin x;$	№ 6. $y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 y(t) dt = \sin \pi x;$
№ 7. $y(x) - \int_0^1 (1-x) \cos(2\pi t) y(t) dt = x;$	№ 8. $y(x) - \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 2^{x+t} y(t) dt = x;$
№ 9. $y(x) - \int_0^1 (1-2xt) y(t) dt = -\frac{1}{6}(x+3);$	№ 10. $y(x) - \int_0^1 (2x-t) y(t) dt = \cos 2\pi x;$
№ 11. $y(x) + \int_0^1 (x - \sqrt{t}) y(t) dt = \frac{5}{3}x + \sqrt{x} - \frac{1}{6};;$	№ 12. $y(x) - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{x}{1+t^2} y(t) dt = 1 + x^2 ;$
№ 13. $y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi y(t) dt = \sin x;$	№ 14. $y(x) + \int_0^1 x \sin(2\pi t) y(t) dt = \cos(2\pi x);$
№ 15. $y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x e^t y(t) dt = e^{-x};$	№ 16. $y(x) - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t y(t) dt = 1;$
№ 17. $y(x) - \int_0^1 x \left(1 - \frac{3}{2}t\right) y(t) dt = 1;$	№ 18. $y(x) - \int_0^1 \sin(2\pi x) y(t) dt = x;$
№ 19. $y(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^\pi (x \sin t + \sin 2x) y(t) dt = \sin x ;$	№ 20. $y(x) - \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (x^2 + 1 + xt) y(t) dt = 1.$

§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №5

Задача 4.1 Розглянемо інтегральні рівняння

$$(a) \quad y(t) - \frac{5}{2} \int_0^1 (1-2x^2) t y(t) dt = x \sin \pi x ;$$

$$(б) \quad y(t) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos \pi x \cos 3\pi t y(t) dt = \cos 3\pi x$$

Розв'язання. (а) Відповідно до загального вигляду інтегрального рівняння (4.1) уведемо позначення

$$a = 0, b = 1, \lambda = \frac{5}{2}, K(x, t) = (1 - 2x^2) t, f(x) = x \sin \pi x.$$

Крок 0. Спочатку перевіримо умови існування єдиного розв'язку в просторі $C_{[a;b]}$ (4.4) – (4.5) або $L_2[a;b]$ (4.6) – (4.7). Всі варіанти практичних завдань дозволяють перевірити умови (4.4) – (4.7) без допомоги технічних засобів. Однак можна їх перевірити з використанням Maple:

```
> M := maximize(abs(K(x, t)), x = a..b, t = a..b) :
    conditionC := evalf( abs( lambda) -  $\frac{1}{M \cdot (b - a)}$  );
                                conditionC := 1.500000000
> B := sqrt(int(int( (K(x, t))^2, x = a..b), t = a..b)) :
> conditionL := evalf( abs(lambda) -  $\frac{1}{B}$  );
                                conditionL := -0.035462764
```

Розглянемо змінні, що виражають різницю між лівою і правою частиною двох зазначених умов (conditionC, conditionL). Якщо хоча б одна з цих змінних від'ємна, то відповідна умова виконується, а рівняння має єдиний розв'язок. У даному прикладі виконується умова в просторі $L_2[a;b]$.

Крок 1. Здійснюємо вибір координатних функцій. Якщо ядро рівняння і вільний його член виражаються лише тригонометричними функцією, то краще й за координатні функції обирати тригонометричні. У супротивному випадку – степеневі.

В табл. 4.2 пропонується універсальний вибір координатних функцій, який розповсюджується на всі неітераційні методи.

Таблиця 4.2

Тригонометрична система	Система степеневих функцій
<pre>> n := 5 : kon := 2·n : > u(x)[0] := f(x) : > for k from 1 to kon do u(x)[2· k] := cos($\frac{\text{Pi} \cdot (k - 1) \cdot x}{b - a}$) : u(x)[2· k - 1] := sin($\frac{\text{Pi} \cdot k \cdot x}{b - a}$) : od:</pre>	<pre>> n := 10 : kon := n : > u(x)[0] := f(x) : > for k from 1 to kon do u(x)[k] := x^{k-1} : od:</pre>

Крок 2. Самостійно подайте наближений розв'язок лінійною комбінацією координатних функцій в системі Maple. **Зверніть увагу**, що нумерація функцій від 0 до kon.

Крок 3. Визначаємо нев'язку

$$R := y(x) - \text{lambda} \cdot \text{int}(K(x, t) \cdot \text{subs}(x = t, y(x)), t = a..b) - f(x) :$$

Крок 4. Реалізація МНК. Випишемо квадратичне відхилення

$$Q := \text{int}(R^2, x = a..b) :$$

і мінімізуємо його в той же спосіб, як і в попередніх роботах. **Зверніть увагу**, що частинні похідні обчислюються за змінними $s[k]$, для k від 1 до kon.

Крок 5. Виносимо на екран результат: наближений розв'язок

$$x \sin(\pi x) + \frac{5}{2} \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} - \frac{5(\pi^2 - 4)x^2}{\pi^3}$$

і квадратичне відхилення $Q = 1.5667 \cdot 10^{-29}$.

Будуємо графік отриманої функції (див. рис. 4.1).

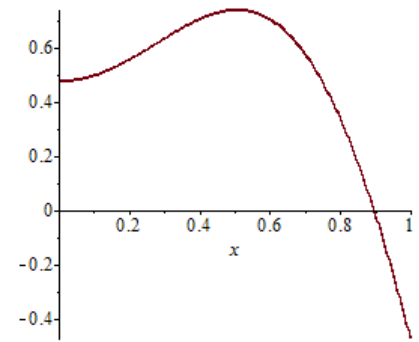


Рис. 4.1

(б) Крок 0 дозволяє запевнитися у виконанні умови існування єдиного розв'язку в просторі $L_2[a; b]$, оскільки $\text{conditionL} = -0.5$.

Дослідимо вплив вибору координатних функцій відповідно до табл. 4.2. Якщо за координатні обрати степеневі функції, то наближений розв'язок набуде вигляду

$$\cos(9.424777962x) + 0.4994620383 - 2.469088544x^2 + 2.026842117x^4 - 0.6365413758x^6 + 0.08666450858x^8$$

з квадратичним відхиленням $Q = 3.1612 \cdot 10^{-10}$. Якщо тригонометричні, то при $n = 5$ отримаємо відповідно

$$\begin{aligned} & -\frac{80}{21} \frac{341775 \pi^2 - 3375104}{2480625 \pi^4 - 48214800 \pi^2 + 234225664} \\ & + \frac{60}{7} \frac{\pi(33075 \pi^2 - 326912) \cos\left(\frac{1}{2} \pi x\right)}{2480625 \pi^4 - 48214800 \pi^2 + 234225664} \\ & + \frac{16}{441} \frac{(69711075 \pi^2 - 687788032) \cos(\pi x)}{2480625 \pi^4 - 48214800 \pi^2 + 234225664} \\ & - \frac{2500 \pi(441 \pi^2 - 4352) \cos\left(\frac{3}{2} \pi x\right)}{2480625 \pi^4 - 48214800 \pi^2 + 234225664} \\ & + \frac{32(61425 \pi^2 - 606208) \cos(2 \pi x)}{2480625 \pi^4 - 48214800 \pi^2 + 234225664} \end{aligned}$$

$$Q = 0.0307598903,$$

а при $n = 7$

$$\frac{1}{2} \cos(\pi x) + \cos(3 \pi x)$$

$$Q = 0.$$

Тобто функція $y(x) = \frac{1}{2} \cos \pi x + \cos 3 \pi x$ визначає точний розв'язок. Будь-яка кількість степеневих функцій не дає можливості отримати точний розв'язок, а може лише наближатися до нього з певним ступенем точності.

Графічне подання трьох розв'язків наведено на рис. 4.2, де суцільній лінії відповідає перший з наведених наближених розв'язків, штрих-пунктирній – другий, штриховій – третій. Перший і третій (точний) візуально накладаються.

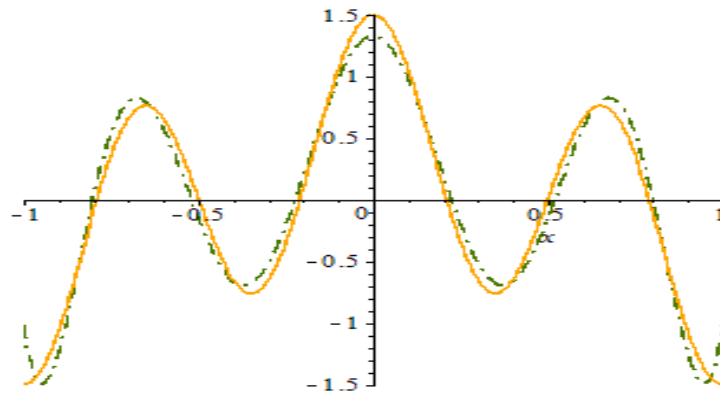


Рис. 4.2

§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №6

Проведено розв'язання задачі 4.1 (а) і (б) методами моментів і колокацій. Кроки 0-3 залишаються незмінними як для методу моментів, так і для методу колокацій, особливо зважаючи на вибір координатних функцій в табл. 4.2.

СЛАР (4.16) методу моментів для пошуку невідомих коефіцієнтів подання (4.14) наближеного розв'язку визначається із умови ортогональності нев'язки до кожної з лінійно незалежних координатних функцій з номерами від 1 до kon . В системі Maple зазначену СЛАР можна утворити в такий спосіб:

> **for** k **from** 1 **to** kon **do** $eq[k] := \text{int}(R \cdot u(x)[k], x = a .. b) :$ **od**:

Метод колокацій передбачає початкове розбиття відрізка $[a; b]$ точками в кількості, що збігається з кількістю координатних функцій. У даних позначеннях – це kon . При цьому, СЛАР утворюється підстановкою точок розбиття до нев'язки. В системі Maple зазначені ідеї можуть бути реалізовані в такий спосіб:

> **for** k **from** 1 **to** kon **do** $X[k] := a + \frac{(b - a)}{n} \cdot k ;$ **od**;
for k **from** 1 **to** kon **do** $eq[k] := \text{subs}(x = X[k], R) ;$ **od**;

В кожному із методів отримуємо систему. Її можна розв'язати засобами Maple так само, як і в попередніх роботах:

> $sys := \{seq(eq[h], h = 1 .. kon)\} :$
 > $var := \{seq(c[h], h = 1 .. kon)\} :$
 > $RRR := \text{solve}(sys, var) : \text{assign}(RRR) :$

Якщо МНК має квадратичне відхилення, яке дозволяє оцінити точність наближеного розв'язку, то методи моментів і колокацій не мають такої величини. Звісно, що квадратичне відхилення можна додатково обчислити, однак частіше на практиці оцінка точності здійснюється порівнянням наближених розв'язків задачі, отриманих різними методами.

Інтегральне рівняння задачі 4.1 (а) має однакові розв'язки за трьома методами (моментів, колокацій і МНК).

Для зручності порівняння випишемо наближені розв'язки інтегрального рівняння задачі 4.1 (б) при застосуванні кожного методу з використанням степеневих координатних функцій:

метод найменших квадратів дав такий наближений розв'язок

$$\cos(9.424777962x) + 0.4994620383 - 2.469088544x^2 + 2.026842117x^4 - 0.6365413758x^6 + 0.08666450858x^8$$

метод моментів –

$$\cos(9.424777962x) + 0.4999823655 - 2.466577446x^2 + 2.022304446x^4 - 0.6460752188x^6 + 0.09042695314x^8$$

метод колокацій –

$$\cos(9.424777962x) + 0.4999026131 - 0.00001612900073x - 2.466903124x^2 + 0.0005740356164x^3 + 2.028340424x^4 - 0.004777796441x^5 - 0.6623019114x^6 + 0.01312581441x^7 + 0.1030915470x^8 - 0.01093817867x^9$$

Коефіцієнти при степеневих функціях степенів від 0 до 8 за трьома методами збігаються до другого знаку після коми, доданок зі степенем 9 наявний лише для методу колокацій і має коефіцієнт, менший за 0.02. Загальна похибка обчислення є незначною для всіх методів при виборі $n = 10$.

Застосування тригонометричних координатних функцій при розв'язанні інтегрального рівняння задачі 4.1 (б) методом моментів, як при $n = 5$, так і при $n = 7$ дає ті самі розв'язки, що і методом найменших квадратів. А метод колокацій при $n = 5$ дає наближений розв'язок із дуже значним відхиленням від відповідних розв'язків іншими методами: $y(x) = -\cos(2\pi x)$. Однак, при $n = 7$ маємо повну збіжність розв'язків за трьома методами.

Деякі висновки.

1. Застосування наближених методів потребує аналізу точності отриманих розв'язків. У випадку МНК заміником оцінки точності може слугувати квадратичне відхилення. Для методів моментів і колокацій такого аналогу ми не маємо, тому можна його обчислити для знайденої функції. На практиці для аналізу збіжності послідовності наближених розв'язків до точного збільшують кількість координатних функцій. Однак, існують випадки, коли при розв'язанні СЛАР з великою кількістю рівнянь і невідомих система Maple може дати хибні результати. Тому потрібно застосовувати різні методи і порівнювати розв'язки. У даному випадку можна запропонувати порівнювати результати, з розв'язками, отриманими за допомогою МНК.

2. Вибір як вигляду координатних функцій, так і їх кількості, залежить від конкретного інтегрального рівняння, а висновки в кожному випадку можуть суттєво відрізнятись!

Питання для самоконтролю з теми 4:

1. Класифікація інтегральних рівнянь.
2. Умови існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.
3. Ітераційний метод послідовних наближень розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Збіжність послідовності наближених розв'язків до точного. Швидкість збіжності МПН.
4. Неітераційний метод найменших квадратів розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.
5. Принципи вибору координатних функцій.

6. Реалізація в Maple алгоритму методу послідовних наближень і методу найменших квадратів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду
7. Особливості неітераційних методу колокацій і методу моментів. Вибір координатних функцій.
8. Різні способи реалізації запису систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів лінійної комбінації лінійно незалежних функцій.
9. Реалізація в Maple алгоритму методу колокацій і методу моментів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Аналіз збіжності послідовності наближених розв'язків до точного.

Тема 5 НЕІТЕРАЦІЙНІ ТА ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ЗВЕДЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДО ЗАДАЧІ КОШІ

Мета вивчення теми:

- засвоїти алгоритм неітераційного методу суперпозиції зведення до задач Коші крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку;
- знати ідею методу суперпозиції триточкової задачі для диференціального рівняння третього порядку;
- вміти реалізовувати алгоритм неітераційний метод суперпозиції в системі комп'ютерної алгебри (зокрема, в Maple);
- засвоїти алгоритм ітераційного методу стрільби зведення до задачі Коші крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку;
- вміти реалізовувати алгоритму методу пристрілки в системі комп'ютерної алгебри (зокрема, в Maple).

Основні поняття теми:

- крайова задача для диференціального рівняння другого/третього порядку;
- задача Коші для диференціального рівняння другого / третього порядку.

Теоретичні відомості

§1 Метод суперпозиції для крайової задачі другого порядку (неітераційний метод)

Розглянемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (5.1)$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (5.2)$$

Мета: звести крайову задачу (5.1), (5.2) до **задачі Коші** з умовами

$$y(a) = A, \quad y'(a) = \mu, \quad (5.3)$$

що передбачає пошук (в загальному випадку наближеного) значення μ такого, щоб виконувала друга крайова умова (5.2).

Для цього подамо розв'язок у вигляді [4]

$$y(x) = y_1(x) + \mu^* y_2(x) \quad (5.4)$$

і доведемо, що $\mu = \mu^*$.

Підставимо функцію (5.4) в рівняння (5.1)

$$\begin{aligned} & \left[y_1(x) + \mu^* y_2(x) \right]'' + p(x) \left[y_1(x) + \mu^* y_2(x) \right]' + q(x) \left[y_1(x) + \mu^* y_2(x) \right] = f(x), \\ & \left[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) - f(x) \right] + \mu^* \left[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Прирівняємо обидва доданки із (5.5) до нуля

$$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = f(x), \quad (5.6a)$$

$$y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0. \quad (5.6b)$$

Отримано два рівняння відносно допоміжних функцій.

Перша із крайових умов (5.2) $y(a) = A$ і подання шуканої функції у вигляді (5.4) дає співвідношення

$$y_1(a) + \mu^* y_2(a) = A. \quad (5.7)$$

Якщо покласти

$$y_1(a) = A, \quad y_2(a) = 0, \quad (5.8)$$

то буде виконуватися умова (5.7).

Оскільки $y'(a) = \mu$, а $y'(a) = y_1'(a) + \mu^* y_2'(a)$, то при

$$y_1'(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1 \quad (5.9)$$

матимемо $\mu = \mu^*$.

Однак, значення константи μ поки що не визначено.

Застосуємо другу умову із (5.2) $y(b) = B$, знаючи, що $\mu = \mu^*$:

$$y_1(b) + \mu y_2(b) = B. \quad (5.10)$$

Звідки

$$\mu = \frac{B - y_1(b)}{y_2(b)}. \quad (5.11)$$

Таким чином, приходимо до *алгоритму метода суперпозиції зведення крайової задачі до задачі Коші*

1. Розв'язується задача Коші №1

$$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = f(x), \quad (5.12a)$$

$$y_1(a) = A, \quad y_1'(a) = 0. \quad (5.12б)$$

2. Обчислюється значення $y_1(b)$.

3. Розв'язується задача Коші №2

$$y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0, \quad (5.12в)$$

$$y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1. \quad (5.12г)$$

4. Обчислюється значення $y_2(b)$.

5. Знаходиться значення константи

$$\mu = \frac{B - y_1(b)}{y_2(b)}. \quad (5.12д)$$

6. Отже, крайові задачу (5.1), (5.2) зведено до задачі Коші (5.1), (5.3):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A, \quad y'(a) = \mu. \quad (5.12 е)$$

Розв'язок можна знайти, розв'язавши задачу (5.12е) або подавши суперпозицією отриманих розв'язків

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x) \quad (5.12е)$$

§2 Зведення крайової задачі третього порядку до задачі Коші методом суперпозиції

Розглянемо крайову задачу вигляду

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad (5.13)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (5.14)$$

Її розв'язок подамо сумою [4]

$$y(x) = y_1(x) + \mu y_2(x). \quad (5.15)$$

Метод передбачає розв'язання двох задач Коші.

Задача Коші №1

$$y_1''' + p(x)y_1'' + q(x)y_1' + r(x)y_1 = f(x), \quad (5.16)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_1''(0) = 0. \quad (5.17)$$

Задача Коші №2

$$y_2''' + p(x)y_2'' + q(x)y_2' + r(x)y_2 = 0, \quad (5.18)$$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0, \quad y_2''(0) = 1. \quad (5.19)$$

Константу μ обчислюємо, знаючи значення функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ в точці $x = 1$:

$$\mu = -\frac{y_1(1)}{y_2(1)}.$$

Із крайових умов (5.17), (5.19) і подання (5.15) отримаємо, що

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = \mu. \quad (5.20)$$

Отже, крайову задачу (5.13), (5.14) зведено до задачі Коші (5.13), (5.20).

Наближений розв'язок можна знайти, розв'язавши задачу Коші (5.13), (5.20), або суперпозицією отриманих функцій за формулою (5.15).

§3 Триточкова задача для диференціального рівняння третього порядку

Розглянемо крайову задачу вигляду

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad (5.21)$$

$$y'(0) = 0, y(b) = 0, y'(c) = 0. \quad (5.22)$$

Її розв'язок подамо сумою з двома константами [4]

$$y(x) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \lambda y_2(x). \quad (5.23)$$

У даному випадку потрібно розв'язання три задачі Коші.

Задача Коші №1

$$y_0''' + p(x)y_0'' + q(x)y_0' + r(x)y_0 = f(x), \quad (5.24)$$

$$y_0(0) = 0, y_0'(0) = 0, y_0''(0) = 0. \quad (5.25)$$

Задача Коші №2

$$y_1''' + p(x)y_1'' + q(x)y_1' + r(x)y_1 = 0, \quad (5.26)$$

$$y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_1''(0) = 0. \quad (5.27)$$

Задача Коші №3

$$y_2''' + p(x)y_2'' + q(x)y_2' + r(x)y_2 = 0, \quad (5.28)$$

$$y_2(0) = 0, y_2'(0) = 0, y_2''(0) = 1. \quad (5.29)$$

Константи μ і λ обчислюємо, знаючи значення функцій в точках $x = b$ і $x = c$. Утворюємо систему

$$\begin{cases} y_0(b) + \mu y_1(b) + \lambda y_2(b) = 0, \\ y_0'(c) + \mu y_1'(c) + \lambda y_2'(c) = 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

Розв'язуємо її за допомогою пакета комп'ютерної алгебри Maple

```
> restart
> eq1 := y0(b) + mu*y1(b) + lambda*y2(b) :
= eq2 := y01(c) + mu*y11(c) + lambda*y21(c) :
> solve( {eq1, eq2}, {mu, lambda} )
{ lambda = (y01(c) y1(b) - y11(c) y0(b)) / (y11(c) y2(b) - y1(b) y21(c) ), mu =
- (y01(c) y2(b) - y0(b) y21(c)) / (y11(c) y2(b) - y1(b) y21(c) }
```

В результаті отримаємо

$$\lambda = \frac{y_0'(c) y_1(b) - y_1'(c) y_0(b)}{y_1'(c) y_2(b) - y_2'(c) y_1(b)}, \mu = - \frac{y_0'(c) y_2(b) - y_2'(c) y_0(b)}{y_1'(c) y_2(b) - y_2'(c) y_1(b)}. \quad (5.31)$$

Із крайових умов (5.25), (5.27), (5.29) і подання (5.23) отримаємо, що

$$y(0) = \mu, y'(0) = 0, y''(0) = \lambda. \quad (5.32)$$

Отже, крайову задачу (5.21), (5.22) зведено до задачі Коші (5.21), (5.32).

Наближений розв'язок можна знайти, розв'язавши задачу Коші (5.21), (5.32), або суперпозицією отриманих функцій за формулою (5.23).

Розглянути самостійно [4] розв'язання задачі про розрахунок тришарової балки методом суперпозиції триточкової задачі для диференціального рівняння третього порядку.

§4 Метод стрільби для крайової задачі другого порядку (ітераційний метод)

Розглянемо крайову задачу вигляду

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (5.33)$$

$$y(a) = A, y(b) = B. \quad (5.34)$$

Мета: звести крайову задачу (5.33), (5.34) до задачі Коші з умовами

$$y(a) = A, y'(a) = \operatorname{tg} \alpha, \quad (5.35)$$

що передбачає пошук наближеного значення кута нахилу α^* кривої-розв'язку $y(x, \alpha^*)$ в точці $x = a$, або іншими словами, куту нахилу стріляючої «пушки», таким, щоб в точці $x = b$ задовольнити нерівність

$$|y(b, \alpha^*) - B| \leq \varepsilon \quad (5.36)$$

для наперед заданого ε (рис. 5.1).

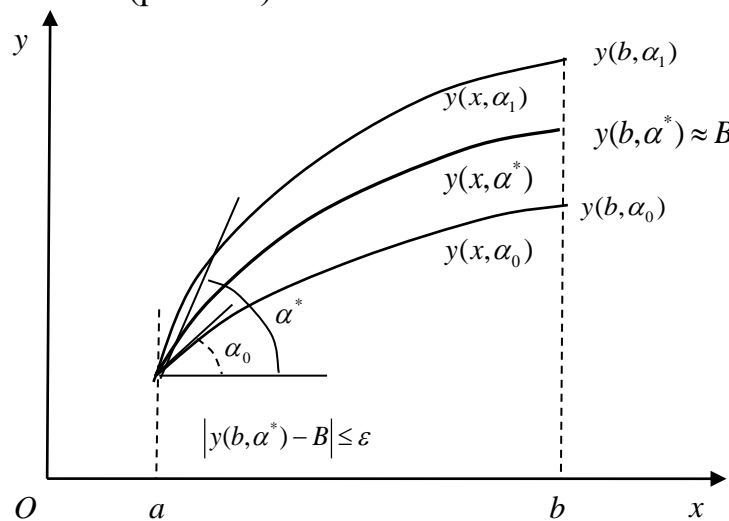


Рис. 5.1

Алгоритм розв'язання задачі методом стрільби (пристрільки)

1. Обираємо довільне значення кута α_0 . Будь-яким методом розв'язуємо задачу Коші

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = A, y'(a) = \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (5.37)$$

2. Якщо $y(b, \alpha_0) > B$, то підбираємо такий кут α_1 , щоб розв'язок задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), y(a) = A, y'(a) = \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (5.38)$$

задовольняв умову $y(b, \alpha_1) < B$.

Якщо $y(b, \alpha_0) < B$, то підбираємо такий кут α_1 , щоб розв'язок задачі (5.38) задовольняв нерівність $y(b, \alpha_1) > B$ (рис. 5.1).

Одним із способів підбору кутів α_0 і α_1 , що задовольняють умову

$$(y(b, \alpha_0) - B)(y(b, \alpha_1) - B) < 0, \quad (5.39)$$

може бути табуляція значень $y(b, \alpha) - B$ для різних кутів α із певного діапазону, після чого і вибираються потрібні кути α_0 і α_1 .

3. Далі реалізуємо метод половинного ділення.

$$3.1. \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}.$$

3.2. Розв'язуємо задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A, \quad y'(a) = \operatorname{tg} \alpha_s \quad (s = 0, 1, 2). \quad (5.40)$$

3.3. Якщо $(y(b, \alpha_0) - B)(y(b, \alpha_2) - B) < 0$, то $\alpha_1 := \alpha_2$.

Якщо $(y(b, \alpha_1) - B)(y(b, \alpha_2) - B) < 0$, то $\alpha_0 := \alpha_2$.

3.4. Якщо $|y(b, \alpha_2) - B| \leq \varepsilon$, то $\alpha^* := \alpha_2$, і алгоритм завершує роботу. У супротивному випадку перехід до кроку 3.1.

Таким чином, крайову задачу (5.33), (5.34) зведено до задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A, \quad y'(a) = \operatorname{tg} \alpha^*. \quad (5.41)$$

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ №7 і 8. Метод суперпозиції зведення крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь до задач Коші

§1 Завдання для виконання і варіанти практичних завдань №7 і 8

Нехай дана крайова задача

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (5.42)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \quad (5.43)$$

Диференціальні рівняння звести до задач Коші методами:

практичне завдання №7: методом суперпозиції;

практичне завдання №8: методом стрільби.

Порівняти отримані результати з результатами, отриманими іншими методами (наприклад, чисельний розв'язок засобами Maple)

Таблиця 5.1 Таблиця варіантів [5]

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_1	-1	2	-3	-1	-2	-4	-3	-4	2	-2.7
k_2	-4.8	-3.1	2.5	1.7	2	1.2	2	3.2	3	-1.3
Шифр по горизонталі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0.5	1.3	2.4	-1	0	1	0	0.8	-4	0
B	0.5	0.7	0	1	-2	0.5	0	0.3	-0.6	2
a	1	-1	-1	0.5	0	2	-1	-0.5	-1	0
b	2	0	1.4	1.5	1	3	0	1.5	1	1
α_1	2	0	0	-3	2	0	0	-1	0	0
α_0	0	2	-1	0	0	5	-4	0	1	-1
β_0	-1	0	0	3	-2	0	0	-1	0	0
β_1	0	-1	2	0	0	-5	4	0	1	-1
h	0.1	0.1	0.25	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1
$p(x)$	k_1x	$\frac{k_1}{x+k_2}$	k_1x+k_2	k_2x	$k_2x^2-k_1$	k_1-x	k_2+x^2	k_1x^3	$k_2x^3-k_1$	$x^2k_1^2$
$q(x)$	$\frac{k_1x}{x^2+k_2^2}$	k_2x	k_1x^2	$k_2x^3+k_1$	k_2-x	k_2+x^3	k_2x	k_2x-k_1	k_1x+k_2	$\frac{k_2}{x+1}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+k_1^2}}$	k_2+x^3	$\frac{k_2+x}{x^2-k_1}$	$\frac{x^2+k_2}{x}$	$\frac{1}{k_1x-k_2}$	$\sqrt{x^2+k_2^2}$	$\frac{k_1x^2}{k_2+x}$	$\frac{1}{k_2x^2-k_1}$	$k_2x^2+k_1x$	$\frac{k_1x+k_2}{(k_1-x)^3}$

h - крок розбиття відрізка $[a,b]$ в методі кінцевих різниць (див. індивідуальне завдання)

§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №7

Задача 5.1 Розв'язати крайову задачу (5.42), (5.43) з параметрами

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -\frac{x}{x^2 + 4.8^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad A = 0.5, \quad B = 0.5,$$

(а) $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 0, \beta_0 = -1, \beta_1 = 0;$

(б) $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 2, \beta_0 = -1, \beta_1 = 0;$

(в) $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 0, \beta_0 = 0, \beta_1 = -1.$

Розв'язання. (а) Визначаємо допоміжні параметри один з яких (eq) відповідає лівій частині неоднорідного диференціального рівняння, що підлягатиме розв'язанню:

$$> AA := \frac{A}{\alpha 0}; \quad BB := \frac{B}{\beta 0};$$

$$AA := 0.2500000000$$

$$BB := -0.5$$

$$> eq := \text{diff}(y(x), x\$2) + p(x) \cdot \text{diff}(y(x), x) + q(x) \cdot y(x) :$$

Реалізуємо метод суперпозиції.

Крок 1. Засобами Maple чисельно розв'язуємо задачу Коші №1 (див. (5.12а), (5.12б)) для диференціального рівняння з правою частиною $f(x)$:

> $F1 := dsolve(\{eq = f(x), y(a) = AA, D(y)(a) = 0\}, numeric)$:

Система Maple дозволяє знайти значення чисельного розв'язку в будь-якій точці відрізка $[a; b]$, наприклад, на його кінцях:

> $F1(a)$;

$$\left[x = 1., y(x) = 0.2500000000000000, \frac{d}{dx} y(x) = 0. \right]$$

> $F1(b)$;

$$\left[x = 2., y(x) = 0.807771774509359, \frac{d}{dx} y(x) = 1.54335754908018 \right]$$

Крок 2. Обираємо значення h_1 функції-розв'язку в точці b :

> $h1 := rhs(F1(b)[2])$

$$h1 := 0.807771774509359$$

Крок 3. Розв'язуємо задачу Коші №2 (див. 5.12в, 5.12г) для диференціального рівняння з нульовою правою частиною:

> $F2 := dsolve(\{eq, y(a) = 0, D(y)(a) = 1\}, numeric)$:

Крок 4. Знаходимо значення функції-розв'язку h_2 в точці b :

> $h2 := rhs(F2(b)[2])$

$$h2 := 2.16447954980673$$

Крок 5. Обчислюємо значення шуканого параметру μ за формулою (5.12д):

> $\mu := \frac{(BB - h1)}{h2}$;

$$\mu := -0.604196872465776$$

Отже, крайову задачу 5.1 (а) зведено до задачі Коші (5.12е):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A_A, \quad y'(a) = \mu.$$

Знайдемо її чисельний розв'язок засобами Maple:

> $F := dsolve(\{eq = f(x), y(a) = AA, D(y)(a) = \mu\}, numeric)$;

Перевірте самостійно, які значення набуває отриманий розв'язок на кінцях відрізка!

Також знайдемо чисельний розв'язок даної крайової задачі:

> $KU := \alpha_0 \cdot y(a) + \alpha_1 \cdot D(y)(a) = A, \beta_0 \cdot y(b) + \beta_1 \cdot D(y)(b) = B$:

> $FKZ := dsolve(\{eq = f(x), KU\}, numeric)$:

Функція `odeplot` дозволяє побудувати графіки розв'язків $F1$ і FKZ , а `display` – об'єднати їх в один рисунок. Графічне подання наближеного розв'язку крайової задачі (пунктирна лінія) і остаточної задачі Коші (суцільна лінія) наведено на рис. 5.2.

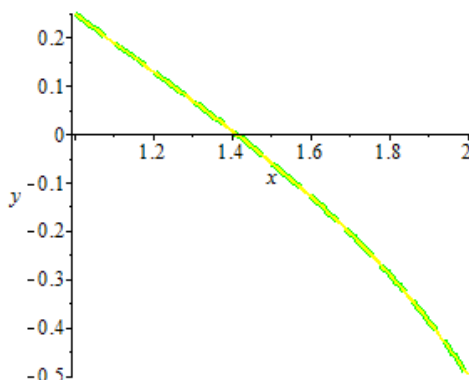


Рис. 5.2

Зауваження. Розв'язки задач Коші №1 і №2 краще знайти програмним кодом методом Рунге-Кутти, а даної крайової задачі – будь-яким із чисельних або наближених методів (методом кінцевих різниць, точковим методом найменших квадратів або ін.). Написання програмних кодів методу Рунге-Кутти буде стимульовано додатковими балами.

(б) В задачах (б) і (в) зупинимося лише на відмінностях, які диктують крайові умови:

1) допоміжні параметри

$$> AA := \frac{A}{\alpha l}; BB := \frac{B}{\beta \theta};$$

$$AA := 0.2500000000$$

$$BB := -0.5$$

2) розв'язуємо модифіковані задачі Коші №1 і №2 і знаходимо значення чисельних розв'язків в точці b :

$$> F1 := dsolve(\{eq = f(x), y(a) = 0, D(y)(a) = AA\}, numeric) :$$

$$> h1 := rhs(F1(b)[2]);$$

$$h1 := 1.08733151368690$$

$$> F2 := dsolve(\{eq, y(a) = 1, D(y)(a) = 0\}, numeric) :$$

$$> h2 := rhs(F2(b)[2]);$$

$$h2 := 1.04624052578778$$

3) обчислюємо значення параметру μ :

$$> \mu := \frac{(BB - h1)}{h2}$$

$$\mu := -1.51717647573602$$

Отже, крайову задачу 5.1 (б) зведено до задачі Коші:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = \mu, \quad y'(a) = A_A.$$

Зверніть увагу на відмінності в записі задачі Коші (а) і (б)!

Графічне подання наближеного розв'язання крайової задачі (пунктирна лінія) і остаточної задачі Коші (суцільна лінія) наведено на рис. 5.3.

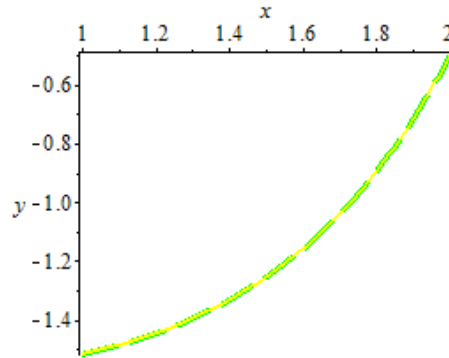


Рис. 5.3

(в) Зупинимось лише на відмінностях:

1) допоміжні параметри

$$> AA := \frac{A}{\alpha 0}; \quad BB := \frac{B}{\beta 1};$$

$$AA := 0.2500000000$$

$$BB := -0.5$$

2) розв'язуємо задачі Коші №1 і №2 і знаходимо значення похідних чисельних розв'язків в точці b :

$$> F1 := dsolve(\{eq = f(x), y(a) = AA, D(y)(a) = 0\}, numeric) :$$

$$> h1 := rhs(F1(b)[3]);$$

$$h1 := 1.54335754908018$$

$$> F2 := dsolve(\{eq, y(a) = 0, D(y)(a) = 1\}, numeric) :$$

$$> h2 := rhs(F2(b)[3]);$$

$$h2 := 4.57264001035732$$

3) обчислюємо μ :

$$> \mu := \frac{(BB - h1)}{h2}$$

$$\mu := -0.446866043347355$$

Отже, крайову задачу 5.1 (в) зведено до задачі Коші:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A_A, \quad y'(a) = \mu.$$

Графічне подання наближеного розв'язання крайової задачі (пунктирна лінія) і остаточної задачі Коші (суцільна лінія) наведено на рис. 5.4.

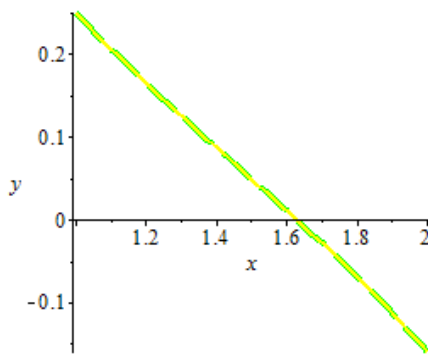


Рис. 5.4

§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №8

Методом пристрілки будемо розв'язувати задачу 5.1

У кожному випадку задачі 5.1 (а), (б), (в) вводяться такі самі допоміжні параметри, як і в методі суперпозиції.

(а) Для того, щоб знайти кути пристрілки α_0 і α_1 , при яких розв'язки відповідні їм задачі Коші (5.37) і (5.38) задовольняють умову (5.39), проведемо табуляцію значень $y(b, \alpha) - B_B$ для різних кутів α із діапазону $[-1.5; 1.5]$:

```
> for i from -1.5 to 1.5 by 0.1 do
  alpha0 := i; KU0 := y(a) = AA, D(y)(a) = tan(alpha0);
  F0 := dsolve({eq - f(x), KU0}, numeric) :
  print(i, rhs(F0(b)[2]) - BB); od:
-1.5, -29.2144632266896
-1.4, -11.2416297797325
-1.3, -6.48890600238538
-1.2, -4.25959827343709
-1.1, -2.94491059790068
-1.0, -2.06320555759559
-0.9, -1.41981501188885
-0.8, -0.920859971231741
-0.7, -0.515344404526355
-0.6, -0.173028503794042
-0.5, 0.125311065382734
-0.4, 0.392644375650990
-0.3, 0.638219699929295
-0.2, 0.869010006487403
-0.1, 1.09059939569908
0., 1.30777177450936
0.1, 1.52494409456395
0.2, 1.74653346397626
0.3, 1.97732374820057
0.4, 2.22289905836303
0.5, 2.49023232735570
0.6, 2.78857191746202
0.7, 3.13088785473440
0.8, 3.53640358080957
```

```

0.9, 4.03535878290554
1.0, 4.67874922964050
1.1, 5.56045398038259
1.2, 6.87514131577521
1.3, 9.10444904590501
1.4, 13.8571733912688
1.5, 31.8300080082007

```

Першій колонці відповідають значення кута, другій – різниці $y(b, \alpha) - B_B$.

Отже, зміна знаку значення $y(b, \alpha) - B_B$ має місце при переході від $\alpha_0 = -0.6$ до $\alpha_1 = -0.5$.

Тепер реалізуємо метод половинного ділення для рівняння $y(b, \alpha) - B_B$ на відрізьку $[\alpha_0; \alpha_1]$

> $eps := 0.001$:

> **while** $abs(rhs(F1(b)[2]) - BB) \geq eps$ **do**

$alpha2 := \frac{(alpha1 + alpha0)}{2}$;

$KU0 := y(a) = AA, D(y)(a) = \tan(alpha0); KU1 := y(a) = AA, D(y)(a) = \tan(alpha1); KU2 := y(a) = AA, D(y)(a) = \tan(alpha2)$;

$F0 := dsolve(\{eq - f(x), KU0\}, numeric) : F1 := dsolve(\{eq - f(x), KU1\}, numeric) :$

$F2 := dsolve(\{eq - f(x), KU2\}, numeric) :$

if $(rhs(F1(b)[2]) - BB) \cdot (rhs(F2(b)[2]) - BB) < 0$ **then** $alpha0 := alpha2$ **fi**;

$print(evalf(abs(rhs(F2(b)[2]) - BB), evalf(alpha0), evalf(alpha1))$);

if $(rhs(F0(b)[2]) - BB) \cdot (rhs(F2(b)[2]) - BB) < 0$ **then** $alpha1 := alpha2$ **fi**;

$print(evalf(abs(rhs(F2(b)[2]) - BB), evalf(alpha0), evalf(alpha1))$);

od;

```

0.0192820383002849, -0.5500000000, -0.5
0.0192820383002849, -0.5500000000, -0.5
0.0540616300294289, -0.5500000000, -0.5
0.0540616300294289, -0.5500000000, -0.5250000000
0.0176630342704856, -0.5500000000, -0.5250000000
0.0176630342704856, -0.5500000000, -0.5375000000
0.000739704411351294, -0.5437500000, -0.5375000000
0.000739704411351294, -0.5437500000, -0.5375000000
0.00847892572190945, -0.5437500000, -0.5375000000
0.00847892572190945, -0.5437500000, -0.5406250000
0.00387394928422480, -0.5437500000, -0.5406250000
0.00387394928422480, -0.5437500000, -0.5421875000
0.00156820998884050, -0.5437500000, -0.5421875000
0.00156820998884050, -0.5437500000, -0.5429687500
0.000414525082631234, -0.5437500000, -0.5429687500
0.000414525082631234, -0.5437500000, -0.5433593750
0.000162521699190066, -0.5435546875, -0.5433593750
0.000162521699190066, -0.5435546875, -0.5433593750

```

Отже, крайову задачу зведено до задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A_A, \quad y'(a) = \operatorname{tg} \alpha^*.$$

де $\alpha^* = 0.543359750$.

Додатково потрібно знайти чисельний розв'язок даної крайової задачі і побудувати його графіки разом з графіком розв'язку задачі Коші. Результати

візуально не відрізняються і відповідають рис. 5.2. Вони також повторюються на рис. 5.5 (суцільна і пунктирна лінії). На рис. 5.5 додатково побудуємо розв'язки задачі Коші для початкових значень кутів $\alpha_0 = -0.6$ і $\alpha_1 = -0.5$. Можна спостерігати, що вони розміщувалися нижче і вище отриманого розв'язку задачі Коші.

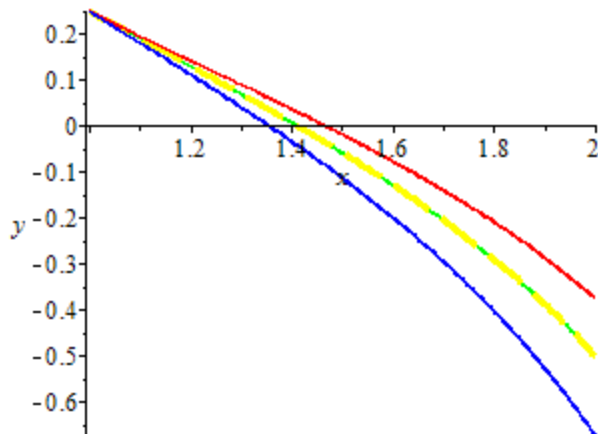


Рис. 5.5

(б) Запропонуємо один із способів розв'язання даної задачі. Оскільки значення функції в точці b є відомим, то пристрілку будемо проводити в точку b .

У даному випадку будемо шукати, на якому відрізку зміни кута має місце чергування знаку значення різниці $y'(a, \alpha) - A_A$ в точці a . Проведемо табуляцію значень кута і $y'(a, \alpha) - A_A$:

```
> for i from -1.5 to 1.5 by 0.1 do
  alpha0 := i; KU0 := y(b) = BB, D(y)(b) = tan(alpha0);
  F0 := dsolve({eq - f(x), KU0}, numeric) :
  print(i, rhs(F0(a)[3]) - AA); od:
-1.5, -3.86147214857765
-1.4, -1.92302967940220
-1.3, -1.41042945850960
-1.2, -1.16998980108077
-1.1, -1.02819544862981
-1.0, -0.933099938436718
-0.9, -0.863707726953325
-0.8, -0.809893423957404
-0.7, -0.766156947343909
-0.6, -0.729236798764262
-0.5, -0.697059674359197
-0.4, -0.668226718549239
-0.3, -0.641740461418478
-0.2, -0.616848805480116
-0.1, -0.592949417061898
0., -0.569526469952599
0.1, -0.546103577144596
0.2, -0.522204322835559
0.3, -0.497312652234889
```

0.4, -0.470826372443877
 0.5, -0.441993412376673
 0.6, -0.409816293193756
 0.7, -0.372896155033395
 0.8, -0.329159657649768
 0.9, -0.275345337896210
 1.0, -0.205953081755186
 1.1, -0.110857656686424
 1.2, 0.0309366497449001
 1.3, 0.271376368893798
 1.4, 0.783976792389130
 1.5, 2.72241945511566

Отже, зміна знаку значення $y'(a, \alpha) - A_A$ має місце при переході від $\alpha_0 = 1.1$ до $\alpha_1 = 1.2$.

Метод половинного ділення матиме вигляд:

```
> eps := 0.001 :
> while abs(rhs(F1(a)[3]) - AA) ≥ eps do
  alpha2 := (alpha1 + alpha0) / 2;
  KU0 := y(b) = BB, D(y)(b) = tan(alpha0); KU1 := y(b) = BB, D(y)(b) = tan(alpha1); KU2
  := y(b) = BB, D(y)(b) = tan(alpha2);
  F0 := dsolve({eq - f(x), KU0}, numeric) : F1 := dsolve({eq - f(x), KU1}, numeric) :
  F2 := dsolve({eq - f(x), KU2}, numeric) :
  if (rhs(F1(a)[3]) - AA) · (rhs(F2(a)[3]) - AA) < 0 then alpha0 := alpha2 fi:
  print(evalf(abs(rhs(F2(a)[3]) - AA), evalf(alpha0), evalf(alpha1)));
  if (rhs(F0(a)[3]) - AA) · (rhs(F2(a)[3]) - AA) < 0 then alpha1 := alpha2 fi:
  print(evalf(abs(rhs(F2(a)[3]) - AA), evalf(alpha0), evalf(alpha1)));
od:
```

0.0478880803494740, 1.150000000, 1.2
 0.0478880803494740, 1.150000000, 1.2
 0.0108342686282351, 1.175000000, 1.2
 0.0108342686282351, 1.175000000, 1.2
 0.00940373054513044, 1.175000000, 1.2
 0.00940373054513044, 1.175000000, 1.187500000
 0.000869327022813310, 1.181250000, 1.187500000
 0.000869327022813310, 1.181250000, 1.187500000
 0.00422775073187076, 1.181250000, 1.187500000
 0.00422775073187076, 1.181250000, 1.184375000
 0.00166946856340844, 1.181250000, 1.184375000
 0.00166946856340844, 1.181250000, 1.182812500
 0.000397649800985056, 1.181250000, 1.182812500
 0.000397649800985056, 1.181250000, 1.182031250
 0.000236442189802039, 1.181640625, 1.182031250
 0.000236442189802039, 1.181640625, 1.182031250

Щоб реалізувати перехід до задачі Коші, потрібно додатково (!) ще знайти значення μ чисельного розв'язку в точці a , після чого й отримати шукану задачу Коші:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \mu, \quad y'(a) = A_A.$$

Реалізація в системі Maple може бути поданою у вигляді:

```
> mu := rhs(F2(a)[2]);
   KU3 := y(a) = mu, D(y)(a) = AA; F3 := dsolve({eq - f(x), KU3}, numeric) :
```

```
      mu := -1.51668742138398
```

```
      KU3 := y(1) = -1.51668742138398, D(y)(1) = 0.2500000000
```

Графічного зображення потребують розв'язки для задачі Коші і чисельний розв'язок, отриманий в Maple. Пропонуємо студентові реалізувати це самостійно. На рис. 5.6, окрім зазначених розв'язків (суцільна і пунктирна лінія, які майже зливаються), побудуємо ще й розв'язки задач

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(b) = B_B, \quad y'(b) = \operatorname{tg}(\alpha_s), \quad s = 0, 1.$$

для значень кутів $\alpha_0 = 1.1$ і $\alpha_1 = 1.2$.

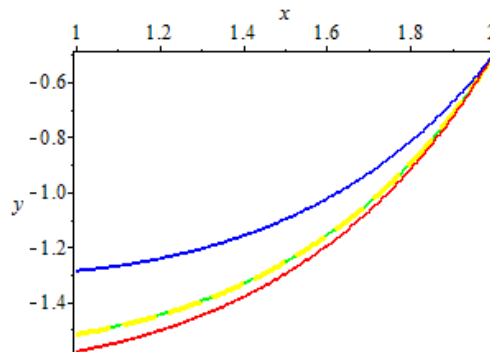


Рис. 5.6

(в) Реалізація в системі Maple алгоритму методу пристрілки для задачі 5.1 (в) незначною мірою відрізняється від задачі 5.1 (а), тому наведемо лише відмінності. Базуються вони на тому, що в даному випадку потрібно добитися того, щоб розв'язок задачі Коші мав в точці b похідну із значенням B_B .

1) при табуляції потрібно оператор $\operatorname{print}(i, \operatorname{rhs}(F0(b)[2]) - BB)$; замінити на оператор $\operatorname{print}(i, \operatorname{rhs}(F0(b)[3]) - BB)$;

2) значення кутів пристрілки, при яких різниця $y'(b, \alpha) - B_B$ змінює знак, дорівнюють $\alpha_0 = -0.5$ і $\alpha_1 = -0.4$;

3) в методі половинного ділення потрібно замінити $Fs(b)[2]$ на $Fs(b)[3]$ ($s=0,1,2$), що і буде відповідати значенням саме похідних розв'язків в точці b , замість значень в цій точці.

При зазначених змінах буде отримано зведення крайової задачі до задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A_A, \quad y'(a) = \operatorname{tg} \alpha^*.$$

де $\alpha^* = -0.4202148438$.

Так само, як і у випадках задачі 5.1 (а) і (б), на рис. 5.7 наведемо на одному рисунку відразу чотири графіки для задачі 5.1 (в): розв'язок отриманої

задачі Коші (суцільна жирна лінія), чисельний розв'язок даної крайової задачі (пунктирна жирна лінія), розв'язки задачі Коші

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A_a, \quad y'(a) = \operatorname{tg} \alpha_s, \quad s = 0, 1,$$

де $\alpha_0 = -0.5$ і $\alpha_1 = -0.4$.

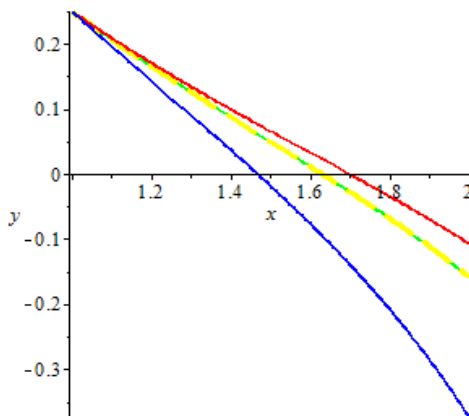


Рис. 5.7

Питання для самоконтролю з теми 5:

1. Неітераційний метод суперпозиції (або метод часткових розв'язків, або метод додаткових функцій) зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку до задач Коші.
2. Метод суперпозиція для диференціальних рівнянь третього порядку.
3. Метод суперпозиції триточкової задачі для диференціального рівняння третього порядку.
4. Ітераційний метод стрільби зведення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку до задач Коші: основні ідеї та алгоритм розв'язання. Реалізація алгоритму в Maple.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

§1 Індивідуальне завдання 1

1.1 Умова індивідуального завдання 1

За показниками роботи торговельної організації за п'ять років знайти параметри a, α, β виробничої функції Кобба-Дугласа $q = a x^\alpha y^\beta$, яка найкращим чином описує табличні дані [2]. Реалізувати метод найменших квадратів засобами MS Excel та за допомогою пакету комп'ютерної алгебри, наприклад, Maple.

Варіант 1

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	33325.916	10.328	178.290
2016	7456.660	11.049	457.400
2017	5972.977	12.779	311.712
2018	9307.309	11.969	565.618
2019	7935.696	12.021	463.173

Варіант 2

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	1895.135	10.054	325.503
2016	1418.926	11.733	236.428
2017	1657.533	11.598	285.322
2018	1133.045	10.564	197.178
2019	2308.818	14.025	363.235

Варіант 3

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	5611.238	10.585	360.045
2016	3939.846	11.191	218.389
2017	5801.396	11.679	342.347
2018	8050.955	10.978	549.398
2019	5432.970	12.108	304.544

Варіант 4

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	860.077	10.587	259.183
2016	1230.323	12.626	391.441
2017	1163.283	11.969	380.064
2018	1135.407	12.614	338.585
2019	1221.822	10.583	491.550

Варіант 5

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	3644.123	10.463	250.034
2016	5753.890	10.890	448.471
2017	6665.193	13.515	443.004
2018	7083.088	14.284	455.768
2019	6196.282	12.651	428.020

Варіант 6

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	127.267	10.607	226.443
2016	130.757	11.697	211.804
2017	183.183	12.669	389.869
2018	135.821	11.234	242.107
2019	165.273	13.621	286.813

Варіант 7

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	998.413	10.671	396.205
2016	921.302	11.109	331.514
2017	990.338	13.511	316.146
2018	1135.277	11.996	447.902
2019	972.091	11.530	352.690

Варіант 8

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	657.705	10.117	386.040
2016	596.661	11.442	298.210
2017	820.542	11.128	490.277
2018	569.862	11.617	274.937
2019	929.283	13.302	497.280

Варіант 9

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	761.852	9.993	299.346
2016	782.683	12.584	220.896
2017	886.545	13.542	265.456
2018	976.940	10.704	442.624
2019	1007.238	11.059	448.203

Варіант 10

Рік	Товарообіг, млн. грн	Чисельність робітників, тис. осіб	Площа торг. зала, тис. м ²
2015	1352.722	10.634	187.040
2016	2037.230	11.773	333.737
2017	1769.832	13.199	224.608
2018	2841.208	13.711	487.258
2019	2247.151	13.280	337.760

1.2 Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання 1

Завдача 6.1 В табл.. 6.1 наведено статистична інформація за ряд років

Таблиця 6.1 [2]

Рік	Товарообіг, млн. грн. q_i	Чисельність робітників, тис. осіб x_i	Площа торг. зала, тис. м ² y_i
2015	340.205	10.397	284.141
2016	339.733	11.730	223.956
2017	374.022	11.436	298.007
2018	408.768	10.950	403.415
2019	587.608	14.382	578.106

Розв'язання. Реалізація в системі Maple. Вводимо дані

- > $Xx := [10.397, 11.730, 11.436, 10.950, 14.382]$;
- > $Yy := [284.141, 223.956, 298.007, 403.415, 578.106]$;
- > $Zz := [340.205, 339.733, 374.022, 408.768, 587.608]$;

Відповідно до формул (2.10) логарифмуємо дані:

- > **for** i **from** 1 **to** 5 **do** $X[i] := \ln(Xx[i]); Y[i] := \ln(Yy[i]); Z[i] := \ln(Zz[i])$: **od**;

Далі діємо відповідно до алгоритму МНК апроксимування емпіричних даних функцією двох змінних (2.11), реалізованому в пп. 2.4.2. Проводимо мінімізацію квадратичного відхилення

- > $Q := \text{sum} ((A[0] + A[1] \cdot X[j] + A[2] \cdot Y[j] - Z[j])^2, j = 1..5)$;

В результаті отримуємо невідомі допоміжні коефіцієнти

$$A_0 = 1.671551660, A_1 = 0.7932613894, A_2 = 0.4071932581$$

Їм відповідає квадратичне відхилення

- > Q ;

$$1.10^{-7}$$

Згідно з формулою (2.12) знаходимо параметри функції Кобба-Дугласа $q = a x^\alpha y^\beta$:

- > $AA := \exp(A[0]); \alpha := A[1]; \beta := A[2];$
 $AA := 5.320416874$
 $\alpha := 0.7932613894$
 $\beta := 0.4071932581$

Сума $\alpha + \beta > 1$, тому виробнича функція Кобба-Дугласа виражає зростаючу віддачу.

За бажанням можете навести графічне зображення функції Кобба-Дугласа і емпіричних даних так, як на рис. 6.1.

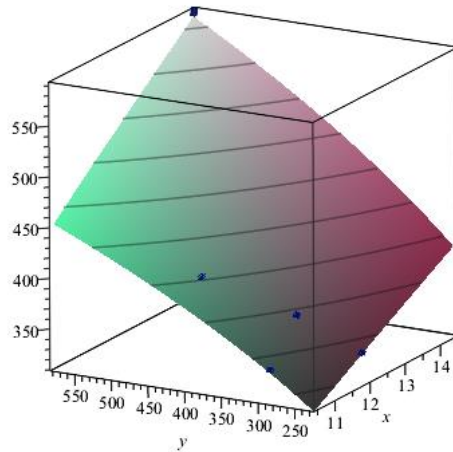


Рис. 6.1

Реалізацію в MS Excel наведено на рис. 6.2.

Питання для самоконтролю до індивідуального завдання 1:

1. Ідея методу найменших квадратів апроксимації емпіричних даних функцією двох змінних.
2. Виробнича функція Кобба-Дугласа. Економічні поняття, що характеризують виробничу функцію Кобба-Дугласа;
3. Алгоритм пошуку функції Кобба-Дугласа методом найменших квадратів.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1			x	y	z											
2			10.397	284.14	340.205											
3			11.73	223.96	339.733											
4			11.436	298.01	374.022											
5			10.95	403.42	408.768											
6			14.382	578.11	587.608											
7																
8																
9			1	X	Y	Z	1	1	1	1	1					
10			1	2.3415	5.6495	5.82954838	Wt=	2.3415	2.4621	2.4368	2.3933	2.666				
11			1	2.4621	5.4114	5.82816001		5.6495	5.4114	5.6971	6	6.3598				
12			1	2.4368	5.6971	5.92431462										
13	W=		1	2.3933	6	6.01314776		5	12.3	29.118			101.83	-33.569	-3.2717	
14			1	2.666	6.3598	6.37606006	Wt*W=	12.3	30.318	71.75	(Wt*W) ⁽⁻¹⁾ =		-33.569	29.49	-6.6929	
15								29.118	71.75	170.1			-3.2717	-6.6929	3.389	
16																
17								4.7452	1.4744	1.3919	1.8589	-8.4703				
18						(Wt*W) ⁽⁻¹⁾ *Wt=		-2.3275	2.823	0.1625	-3.1451	2.4871				
19								0.2027	-1.4113	-0.2733	1.0437	0.4383				
20																
21								1.6716	A2			A=	0.5138			
22						(Wt*W) ⁽⁻¹⁾ *Wt*Z=		0.7933	A1			alpha=	0.7933	=LN(G21)		
23								0.4072	A0			beta=	0.4072			
24																
25						=G521+G522*B28+G523*C28										
26			Квадратичне відхилення			a0+a1*X+a2*Y-Z						alpha+beta	1.2005	>1		
27			X	Y	Z	(a0+a1*X+a2*Y-Z) ²										
28			2.34	5.6495	5.8	5.829413329	1.82E-08									
29			2.46	5.4114	5.8	5.828185729	6.61E-10									
30			2.44	5.6971	5.9	5.924371899	3.28E-09									
31			2.39	6	6.0	6.013241095	8.71E-09									
32			2.67	6.3598	6.4	6.376018776	1.7E-09									
33																
34																
35						Кв. відх.	3E-08	sum								

Рис. 6.2

§2 Індивідуальне завдання 2

2.1 Метод кінцевих різниць

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad (6.1)$$
$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – неперервні функції на $[a, b]$, $\alpha_i, \beta_i, A, B \in \mathbb{R}$ – сталі, що задовольняють нерівності $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин і побудуємо систему рівновіддалених вузлів

$$x_i = x_0 + i h \quad (i=1, \dots, n-1); \quad x_0 = a; \quad x_n = b,$$

де $h = \frac{b-a}{n}$. Розв'язок задачі будемо шукати чисельно. Для цього в рівнянні (6.1) похідні замінимо кінцевими різницями другого порядку точності.

Введемо позначення $y(x_i) = y_i$, $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$. Випишемо розклади за формулою Маклорена до h^3 включно. Потім додамо і віднімемо розклади, отримаємо:

$$y_{i+1} = y_i + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3)$$
$$y_{i-1} = y_i - h y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + o(h^3)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{2h} = y'(x_i) + o(h)$$

$$\frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} = y''(x_i) + o(h)$$

Підставляючи отримані подання похідних в рівняння (6.1), одержимо:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (6.2)$$

Тепер розглянемо крайові умови. Обчислимо значення похідної в лівій точці відрізка $x = a$ через кінцеві різниці «вперед», а в правій $x = b$ – через різниці «назад»:

$$x = a = x_0$$

$$y_1 = y_0 + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + o(h^2) \rightarrow 4y_1 = 4y_0 + 4h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2)$$

$$y_2 = y_0 + 2h y'(x_0) + 2h^2 y''(x_0) + o(h^2)$$

$$4y_1 - y_2 = 3y_0 + 2h y'(x_0) + o(h^2)$$

$$y'(x_0) = \frac{4y_1 - y_2 - 3y_0}{2h} + o(h)$$

$$x = b = x_n$$

$$y_{n-1} = y_n - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + o(h^2) \rightarrow 4y_{n-1} = 4y_n - 4hy'(x_n) + h^2y''(x_n) + o(h^2)$$

$$y_{n-2} = y_n - 2hy'(x_n) + 2h^2y''(x_n) + o(h^2)$$

$$4y_{n-1} - y_{n-2} = 3y_n - 2hy'(x_n) + o(h^2)$$

$$y'(x_n) = -\frac{4y_{n-1} - y_{n-2} - 3y_n}{2h} + o(h)$$

Отримане дозволяє записати крайові умови у вигляді:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A; \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \quad (6.3)$$

Таким чином одержимо систему $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $n+1$ невідомими. Розв'язуючи систему, можна знайти значення функції $y(x)$ у вузлах розбиття.

2.2 Умова індивідуального завдання 2

1. Розв'язати крайові задачі практичних завдань №3, №7 методом кінцевих різниць.
2. Порівняти результати.

2.3 Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання 2

Розв'яжемо задачу 5.1 (б) методом кінцевих різниць.

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -\frac{x}{x^2 + 4.8^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad A = 0.5, \quad B = 0.5,$$

$$(б) \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2, \quad \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 0;$$

Розв'язання. Реалізуємо алгоритм методу в системі Maple.

1. Щоб знайти кількість проміжків розбиття N відрізка $[a; b]$, знаючи крок h , можна застосувати оператор $N := \text{trunc}((b - a) / h)$;
2. Визначаємо вузли розбиття:

> **for** i **from** 0 **to** N **do** $X[i] := a + h \cdot i$: **od**;

3. Утворюємо рівняння (6.2), що відповідають даному звичайному диференціальному рівнянню:

> **for** i **from** 1 **to** $N - 1$ **do**

$p_{ii} := \text{subs}(x = X[i], p(x)) :$

$q_i := \text{subs}(x = X[i], q(x)) :$

$f_{ii} := \text{subs}(x = X[i], f(x)) :$

$eq[i] := \text{evalf}\left(\frac{(y[i+1] - 2 \cdot y[i] + y[i-1]))}{h^2} + \frac{p_{ii} \cdot (y[i+1] - y[i-1])}{(2 \cdot h)} + q_i \cdot y[i] - f_{ii}\right);$ **od**:

4. Доповнюємо систему рівняннями (6.3) що відповідають крайовим умовам:

> $eq[0] := \alpha_0 \cdot y[0] + \frac{\alpha_1 \cdot (-3 \cdot y[0] + 4 \cdot y[1] - y[2])}{(2 \cdot h)} - A :$

$eq[N] := \beta_0 \cdot y[N] + \frac{\beta_1 \cdot (3 \cdot y[N] - 4 \cdot y[N-1] + y[N-2])}{(2 \cdot h)} - B :$

5. Таким чином утворено систему із $N + 1$ рівняння $\{seq(eq[j], j = 0 .. N)\}$ відносно такої ж кількості змінних $\{seq(y[j], j = 0 .. N)\}$. СЛАР може бути розв'язаною за допомогою функціонала solve.

6. Для порівняння потрібно побудувати графіки розв'язків, отриманих в роботі 7 (суцільна лінія на рис. 6.2), а також методом кінцевих різниць (точкова лінія, побудована за точками, що відповідають вузлам).

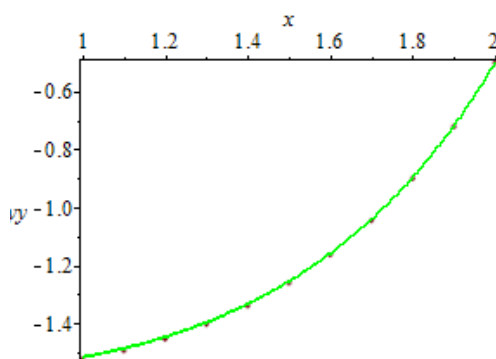


Рис. 6.2

Висновок: спостерігаємо високу узгодженість результатів.

Питання для самоконтролю до індивідуального завдання 2:

1. Сутність методу кінцевих різниць.
2. Чим метод кінцевих різниць відрізняється від наближених методів, що вивчалися в цьому курсі?

§3 Індивідуальне завдання 3

3.1 Умова індивідуального завдання 3

Методом послідовних наближень розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, перевіривши попередньо умови існування єдиного розв'язку.

Інтегральні рівняння до розв'язання наведено в табл. 4.1.
Порівняти результати, отримані різними методами.

3.2 Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання 3

Розв'яжемо два інтегральні рівняння задачі 4.1 і одне додаткове

$$(a) \quad y(t) - \frac{5}{2} \int_0^1 (1 - 2x^2) t y(t) dt = x \sin \pi x;$$

$$(б) \quad y(t) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos \pi x \cos 3\pi t y(t) dt = \cos 3\pi x;$$

$$(в) \quad y(t) - \frac{5}{2} \int_0^1 (1 - 2x) t y(t) dt = 1 - \frac{x}{2}.$$

(а), (б) Для перших двох рівнянь вже перевіримо умови існування єдиного розв'язку, які одночасно визначають умови можливості застосування методу послідовних наближень (МПН) для розв'язання даних рівнянь.

Кожне із інтегральних рівнянь індивідуальних варіантів можливо розв'язати за допомогою МПН без використання технічних засобів. Однак, зустрічаються випадки, коли зручніше застосувати засоби систем комп'ютерної алгебри (наприклад, Maple). Тому продемонструємо, як можна провести обчислення за допомогою Maple.

Для рівняння задачі 4.1 (а) матимемо:

```
> Y(x)[0] := 0;
for k from 1 to 5 do
  z(x) := Y(x)[k - 1];
  Y(x)[k] := lambda·int(K(x, t)·subs(x = t, z(x)), t = a..b) + f(x);
print(k, Y(x)[k]); od;
```

$$\begin{aligned}
 & Y(x)_0 := 0 \\
 & 1, x \sin(\pi x) \\
 & 2, -\frac{5}{2} \frac{2\pi^2 x^2 - \pi^2 - 8x^2 + 4}{\pi^3} + x \sin(\pi x) \\
 & 3, -\frac{5}{2} \frac{2\pi^2 x^2 - \pi^2 - 8x^2 + 4}{\pi^3} + x \sin(\pi x) \\
 & 4, -\frac{5}{2} \frac{2\pi^2 x^2 - \pi^2 - 8x^2 + 4}{\pi^3} + x \sin(\pi x) \\
 & 5, -\frac{5}{2} \frac{2\pi^2 x^2 - \pi^2 - 8x^2 + 4}{\pi^3} + x \sin(\pi x)
 \end{aligned}$$

Для задачі 4.1 (б) –

```
> Y(x)[0] := 0;
for k from 1 to 5 do
  z(x) := Y(x)[k - 1];
  Y(x)[k] := lambda·int(K(x, t)·subs(x = t, z(x)), t = a..b) + f(x);
print(k, Y(x)[k]); od;
```

$$Y(x)_0 := 0$$

- 1, $\cos(3\pi x)$
- 2, $\frac{1}{2} \cos(\pi x) + \cos(3\pi x)$
- 3, $\frac{1}{2} \cos(\pi x) + \cos(3\pi x)$
- 4, $\frac{1}{2} \cos(\pi x) + \cos(3\pi x)$
- 5, $\frac{1}{2} \cos(\pi x) + \cos(3\pi x)$

В обох випадках маємо стаціонарну послідовність функцій. Отже, задача

4.1 (а) має точний розв'язок $y(x) = -\frac{5}{2} \frac{2\pi^2 x^2 - \pi^2 - 8x^2 + 4}{\pi^3} + x \sin \pi x$, а задача

4.1 (б) – $y(x) = \frac{1}{2} \cos \pi x + \cos 3\pi x$.

У даному випадку рис. 4.1 і 4.2 відображають порівняння результатів застосування наближених методів з точним розв'язком, який і дав метод послідовних наближень для даних рівнянь.

(в) Розглянемо рівняння (в). Перевірка умови існування єдиного розв'язку дає такі результати:

- > $M := \text{maximize}(\text{abs}(K(x, t)), x = a..b, t = a..b) :$
 $\text{conditionC} := \text{evalf}\left(\text{abs}(\text{lambd}) - \frac{1}{M \cdot (b - a)}\right);$
 $\text{conditionC} := 1.500000000$
- > $B := \text{sqrt}(\text{int}(\text{int}((K(x, t))^2, x = a..b), t = a..b)) :$
- > $\text{conditionL} := \text{evalf}\left(\text{abs}(\text{lambd}) - \frac{1}{B}\right);$
 $\text{conditionL} := -0.500000000$

Отже, умова виконується в просторі $L_2[a; b]$, що означає можливість застосування методу послідовних наближень. МНП має високу швидкість збіжності (див. підрозділ 4.2). Як правило, достатньо знайти до 10 ітерацій для досягнення високої точності. Крім того, додатково ще й обчислимо квадратичне відхилення. В результаті отримаємо:

- > $Y(x)[0] := 0;$
for k **from** 1 **to** 10 **do**
 $z(x) := Y(x)[k - 1] :$
 $Y(x)[k] := \text{lambd} \cdot \text{int}(K(x, t) \cdot \text{subs}(x = t, z(x)), t = a..b) + f(x) :$
 $Q := \text{evalf}\left(\text{int}((z(x) - \text{lambd} \cdot \text{int}(K(x, t) \cdot \text{subs}(x = t, Y(x)[k]), t = a..b) - f(x))^2, x = a..b)\right) :$
 $\text{print}(k, Y(x)[k], Q);$ **od**:

- $Y(x)_0 := 0$
- 1, $1 - \frac{1}{2}x, 0.9537037037$
- 2, $-\frac{13}{6}x + \frac{11}{6}, 0.07876800412$

$$\begin{aligned}
3, & \frac{107}{72} - \frac{53}{36} x, 0.01367500071 \\
4, & \frac{1409}{864} - \frac{761}{432} x, 0.002374132068 \\
5, & \frac{16283}{10368} - \frac{8507}{5184} x, 0.0004121757063 \\
6, & \frac{198521}{124416} - \frac{105209}{62208} x, 0.00007155828235 \\
7, & \frac{2366627}{1492992} - \frac{1246883}{746496} x, 0.00001242331291 \\
8, & \frac{28477649}{17915904} - \frac{15040721}{8957952} x, 0.000002156825158 \\
9, & \frac{341341163}{214990848} - \frac{180098027}{107495424} x, 3.744488121 \cdot 10^{-7} \\
10, & \frac{4098047081}{2579890176} - \frac{2163129449}{1289945088} x, 6.500847432 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}$$

Наведемо наближення з номерами 7 і 10, у яких коефіцієнти мають вигляд десяткових дробів:

> $evalf(Y(x)[7]); evalf(Y(x)[10]);$

$$\begin{aligned}
& 1.585157188 - 1.670314375x \\
& 1.588457958 - 1.676915916x
\end{aligned}$$

Отже, можна вважати, що $y(x) \approx y_{10}(x)$. Звертаємо увагу, що в деяких випадках можна знайти закономірність в послідовності ітераційних функцій, щоб знайти граничну функцію. У даному випадку така задача не ставиться.

Застосування методів найменших квадратів, моментів і колокацій при $n = 3$ дає однакові наближені розв'язки

$$y_{МНК}(x) = y_{ММ}(x) = y_{МК}(x) = 1.588235294 - 1.676470588x$$

з квадратичним відхиленням $Q = 6.500847432 \cdot 10^{-8}$. Візуально графіки отриманих розв'язків за чотирма методами майже не відрізняються.

Питання для самоконтролю до індивідуального завдання 3:

1. Сутність методу послідовних наближень.
2. Умови збіжності МПН.
3. Швидкість збіжності МПН.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Мусяка В.Г. Основи числових методів : підручник. Дніпро : ЛІРА, 2017. 256 с.
URL: http://ecat.diit.edu.ua/ft/Musijaka_Osnovy_chyslovyeh_metodiv.pdf
2. Вербіцький В. В., Реут В.В. Введення в чисельні методи аналізу і диференціальних рівнянь : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл., що навч. за спец. «Прикладна математика». Одеса : ОНУ ім. І.І. Мечникова, 2018. 116 с.
3. Лиходєєва Г.В., Пастирєва К.Ю. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно : навчальний посібник. Ч. 2 : Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь. Київ : Центр учбової літератури, 2018. 140 с.
4. Грищак Д.В. Комп'ютерна алгебра у розв'язанні прикладних задач механіки конструкцій зі змінними параметрами : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2020. 220 с.
5. Нікітенко О.М. Maple. Розв'язання інженерних та наукових задач : навчальний посібник. Харків : ХНУРЕ, 2014. 289 с. URL: <https://openarchive.nure.ua/bitstream/document/4192/1/posibn.pdf>

Додаткова

1. Грищак В. З., Гребенюк С. М., Левчук С. А. Методи обчислень : методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів освітнього ступеня «бакалавр» напряму підготовки «Математика». Запоріжжя : ЗНУ, 2015. 86 с.
URL: <http://ebooks.znu.edu.ua/files/metodychky/2015/02/0034407.doc>
2. Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи : підручник. Київ : Либідь, 1996. 288 с.
3. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. Москва : Наука, 1967. 368 с.
URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/mathbooks/vychislitelnye_metody_demid.djvu
4. Алексеев Е. Р. Чеснокова О. В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. Москва : ИТ Пресс, 2006, 496 с.
URL: <http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Dyachenko/0030989.djvu>
5. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. Москва : Мир, 1982. 296 с.
6. Гребенюк С. М., Клименко М. І., Д'яченко Н. М., Красікова І. В., Тітова О. О., Леонтьєва В. В. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : навч. посіб. для студ. математ. фак-тів вищ. навч. закл. рек. МОНУ. Ч. 2. Запоріжжя : ЗНУ, 2013. 499 с. URL: <http://ebooks.znu.edu.ua/files/metodychky/2013/12/0030893.pdf>
7. Гребенюк С. М., Д'яченко Н. М., Клименко М. І., Красікова І. В., Тітова О. О., Леонтьєва В. В. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної : навч. пос. Ч. 1. Запоріжжя : ЗНУ, 2013. 231 с.

- URL: <http://ebooks.znu.edu.ua/files/metodychky/2014/04/0032177.pdf>
8. Диференціальні рівняння : підруч. для математичних і фізичних спец. ун-тів / І. І. Ляшко, О. К. Боярчук, Я. Г. Гай, О. Ф. Калайда. Київ : Вища школа, 1981. 504 с.
 9. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння : навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. реком. МОНУ. Київ : Техніка, 2003. 368 с.
 10. Диференціальні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гай, О. В. Махней. Вид. 2-ге, випр. та доп. Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2014. 360 с.
URL: https://www.bohdan-books.com/userfiles/file/books/lib_file_2122996887.pdf
 11. Краснов М. Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. Задачи и упражнения с подробными решениями. Москва : URSS, 2007. 192 с.
 12. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. Москва : Наука, 2000, 630 с.
 13. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. Москва : Высшая школа, 2000, 190 с.
 14. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. Москва : СОЛОН-Пресс, 2006. 720 с.
URL: <http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Dyachenko/0030973.djvu>
 15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. Москва: Наука: гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. 576 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/mathbooks/2008-1/spravochniki/BOOKS/kamke_ode.djvu
 16. Математика : методичні вказівки до написання курсових ік валіфікаційних робіт для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра там агістра математичного факультету / Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Зіновєєв І. В., Манько Н. І.-В., Спиця О. Г., Ткаченко І. Г. Запоріжжя : ЗНУ, 2017. 52 с.
 17. Перестюк М. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь : навчальний посібник для ун-тів та технічних вищих закладів освіти, Київ : Либідь, 1997. 192 с.
 18. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння : підручн. для студ. математ. спец. вузів, Київ : Либідь, 2003. 800 с.
 19. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння в задачах : навч. посіб. для студ. внз. Київ : Вища школа, 1994. 455 с.; Київ : Либідь, 2003. 504 с.

**Наукові публікації авторів посібника
за тематикою дисципліни за 2017-2021 рр.**

1. Грищак В.З., Дьяченко Н.Н. Определение областей устойчивости конической оболочки при комбинированном нагружении на базе гибридного асимптотического подхода. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2017, №2. С. 33-46. URL: <https://bit.ly/3IPYf9r> (Index Copernicus)

2. Дьяченко Н. Н., Мухин В. В., Мистюк В. Ю., Юрченко А. К. Решение плоской контактной задачи с учетом трения и шероховатости, деформирующейся по нелинейным законам. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018, №2. С. 29-43. DOI: 10.26661/2413-6549-2018-2-04
URL: <http://visnykznu.org/issues/2018/2018-mf-2/6.pdf> (Index Copernicus)
3. Грищак В.З., Грищак Д.Д., Дьяченко Н.Н. Эффективное приближенное аналитическое решение задачи устойчивости трехслойной конической оболочки при комбинированном нагружении. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2018. Т. 61, № 3. С. 63-77 URL: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/2487> (Zentralblatt MATH, видання категорії «А»)
Те саме: Gristchak V. Z., Hryshchak D. D., Dyachenko N. M. Efficient approximate analytic solution for the problem of stability of a three-layer conic shell under combined loading. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 254, No. 1. P. 71–88.
Doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05289-3>. (Scopus)
4. Дегтяренко П.Г., Грищак В.З., Дьяченко Н.Н. К расчету на устойчивость комбинированной оболочечной конструкции с учетом дискретности расположения промежуточных шпангоутов. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Т.29. С. 113-131. Doi: <https://doi.org/10.15421/42190010>
URL: <https://pommk.dp.ua/index.php/journal/article/view/460/467> (Index Copernicus).
5. Дегтяренко П.Г., Грищак В.З., Грищак Д.Д., Дьяченко Н.Н. К проблеме равноустойчивости подкрепленной оболочечной конструкции при комбинированном нагружении. *Космическая наука и технология*. 2019. Т.25, №6 (121). С. 3-14.
Doi: <https://doi.org/10.15407/knit2019.06.003>
URL: <https://www.mao.kiev.ua/biblio/jscans/knit/2019-25/knit-2019-25-6-01-degtyarenko.pdf> (Web of Science)
6. Дегтяренко П.Г., Грищак В.З., Грищак Д.Д., Дьяченко Н.Н. Постановка и основные разрешающие уравнения задачи устойчивости оболочечной конструкции типа «бочка-оживало» при действии внешнего давления. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Т. 30. С. 33-52. Doi: <https://doi.org/10.15421/4219025> URL: <https://pommk.dp.ua/index.php/journal/article/view/436> (Index Copernicus).
7. Gristchak V., Hryshchak D., Dyachenko N., Degtiarenko P. Stability and rational design of the «barrel-ogive» type strengthened shell structures under combined loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 4/7 (106) 2020. P. 6-15.
URL: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/209228/210801> (Scopus)
8. Gristchak V.Z, Dyachenko N.M. Axial force effect on the overall buckling of a compound reinforced shell structure with the positive gaussian curvature at an external pressure. In collective monograph: O. V. Choporova, S. V. Choporov, A.

O. Lisnyak, S. ets. *Mathematical and computer modelling of engineering systems* / In edition by V. S. Hudramovich. Riga, Latvia : «Baltija Publishing», 2020. С. 35-49.

URL:

<http://www.baltijapublishing.lv/omp/index.php/bp/catalog/view/89/2217/4792-1> .

9. Дегтярьов О. В., Грищак В. З., Акімов Д. В., Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Дегтяренко П. Г., Д'яченко Н. М., Клименко Д. В., Клименко М. І., Кудін О. В., Ларіонов І. Ф., Сіренко В. М., Чопоров С. В. Математичні моделі та прогнозування руйнівних навантажень в ракетно-космічних системах : колективна монографія / за ред. О. В. Дегтярьова, В. З. Грищака, В. М. Сіренка. Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2020. 260 с.
10. Панасенко Є.В. Задача оптимізації крайової задачі для рівняння Ляпунова в просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ, 2017. №2. С.216-223.
11. Панасенко Є.В., Анохін А.І., Гужва А.А., Чміль М.М. Збурення крайової задачі для рівняння Ляпунова у просторі Гільберта. *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки*. Запоріжжя : ЗНУ, 2019. №2. С.125-134.
12. Bihun D. S., Pokutnyi O. O., Panasenko E. V .Autonomous Nonlinear Boundary-Value Problems for the Lyapunov Equation in the Hilbert Space. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2021. Vol. 73, No. 7. P. 1009–1022.

Інформаційні ресурси

1. Застосування математичного апарату в прикладних дослідженнях: дисципліна в СЕЗН ЗНУ Moodle. URL: <https://moodle.znu.edu.ua/course/view.php?id=6239>
2. Наукова бібліотека Запорізького національного університету. URL: <http://library.znu.edu.ua/>
3. Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського. URL: <http://www.nbuv.gov.ua/>
4. Бібліотека TWIRPX. Електронні ресурси з математичного аналізу. URL: [:https://www.twirpx.com/files/mathematics/analysis/](https://www.twirpx.com/files/mathematics/analysis/)
5. Maplesoft Media Releases. URL: <https://www.maplesoft.com/company/news/releases/2021/2021-03-10-maple-2021-provides-even-more-tools-to-help-students-learn-math.aspx>

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. Москва : Наука, 1967. 368 с.
URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/mathbooks/vychislitel'naya_matematika/BOOKS/vych_metody/demid.djv
2. Комисаров В.В., Комисарова Н.В. Функции нескольких переменных. Аппроксимация : лекции. Новосибирск : Новосибирский гос. техн. ун-т, 2016. 21 с.
3. Метод наименьших квадратов : методические указания к лабораторной работе для студентов 2-го курса строительных специальностей / сост. О.А. Романчук, Г.И. Целоусова. Хабаровск : Хабар. политехн. ин-т, 1991. 16 с.
4. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. Москва : Мир, 1982. 296 с.
5. Чисельні методи (частина 2) : методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів спеціальності «Інформатика» / уклад.: С.А. Левчук, С.М. Гребенюк. Запоріжжя : ЗНУ, 2008. 61 с.

Навчально-методичне видання
(українською мовою)

Віктор Захарович Грищак
Наталія Миколаївна Д'яченко
Євгеній Валерійович Панасенко

**ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ
В ПРИКЛАДНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ**

Методичні рекомендації до самостійної роботи
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Математика»
освітньо-професійної програми «Математика»

Рецензент *М.І. Клименко*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Н.М. Д'яченко*