1. Елементи векторної і тензорної алгебри

1.1 Вектори і скаляри

Скаляром називається величина яка повністю характеризується одним числом (своїм числовим значенням). Прикладами скалярів у фізиці є маса, щільність, температура, робота сили. Порівнюватися можуть тільки скаляри однакової розмірності. Два скаляра однакової розмірності називаються рівними, якщо рівні їх числові значення.

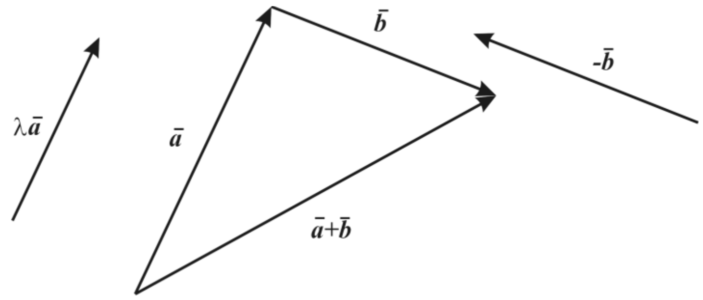

Рисунок 1.

Геометричне поняття вектора.

Вектори – це спрямовані відрізки, для яких визначені лінійні операції додавання та множення на число (скаляр), що задовольняють відомим правилам векторної алгебри (рисунок 1).

Прикладами векторів у фізиці є переміщення, швидкість, прискорення, сила, імпульс, момент сили, напруженість електричного поля, поляризація.

Види векторів у просторі.

Згідно з фізичним змістом розрізняють вектори вільні, ковзні і зв'язані.

Вільним вектором називають вектор, який можна переносити паралельно собі у будь яку точку простору. Прикладом вільного вектора є вектор швидкості при поступальному русі твердого тіла. Вільний вектор у просторі повністю визначається трьома числами, наприклад, своїми проекціями на осі декартової системи координат, або довжиною та двома незалежними кутами (сферична система координат).

Ковзним вектором називають вектор, який можна переносити уздовж прямої, яка визначає напрям вектора. Прикладом ковзного вектора може служити вектор сили прикладеної до твердого тіла. Ковзний вектор потребує для визначення у просторі п'ять чисел, наприклад, координати точки, через яку проходить пряма (три числа), кут який утворює пряма з певною віссю координат та довжина вектора.

Зв'язаним вектором називають вектор, який відноситься до певної точки простору. Прикладами таких векторів є швидкість та прискорення точки твердого тіла, що рухається довільно. Зв'язаний вектор потребує шість чисел для визначення у просторі, наприклад, координати точок початку та кінця вектора. Вільні вектори є найбільш загальним випадком визначення векторних величин, тому у подальшому будуть розглядатися тільки вільні вектори, що задані у тривимірному просторі.

1.2 Лінійна залежність векторів. Векторний базис

Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, .. \overline{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують скаляри $\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n$, хоча б один із яких не дорівнює нулю, такі що

$$\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \overline{a}_n = \overline{0}$$

Вектори $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо з рівності $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \overline{a}_n = \overline{0}$ випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Для векторів тривимірного простору справедливі наступні твердження:

– колінеарні вектори є лінійно залежними;

– два неколінеарних вектори є лінійно незалежними;

– три некомпланарних вектори є лінійно незалежними;

– будь які чотири вектори є лінійно залежними.

Розклад векторів.

Якщо три вектор $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ тривимірного простору лінійно незалежні, то будь-який вектор $\overline{b}$ може бути єдиним чином розкладений за цими векторами

$$\overline{b} = c_1 \overline{a}_1 + c_2 \overline{a}_2 + c_3 \overline{a}_3 \tag{1.1}$$

Векторний базис.

Система будь-яких трьох лінійно незалежних упорядкованих векторів $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ називається базисом тривимірного простору.

Якщо вектори базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ взаємно ортогональні і їх довжини дорівнюють одиниці, то вони називаються *ортами* прямокутної декартової системи координат і позначаються $\overline{i}_1, \overline{i}_2, \overline{i}_3$.

Положення точки M в просторі однозначно визначається її *радіус-вектором* $\overline{r}$, тобто вектором, проведеним із початку координат у точку M.

У прямокутній декартовій системі координат радіус-вектор має вигляд (рисунок 2)

$$\overline{r} = x^1 \overline{i}_1 + x^2 \overline{i}_2 + x^3 \overline{i}_3. \tag{1.2}$$

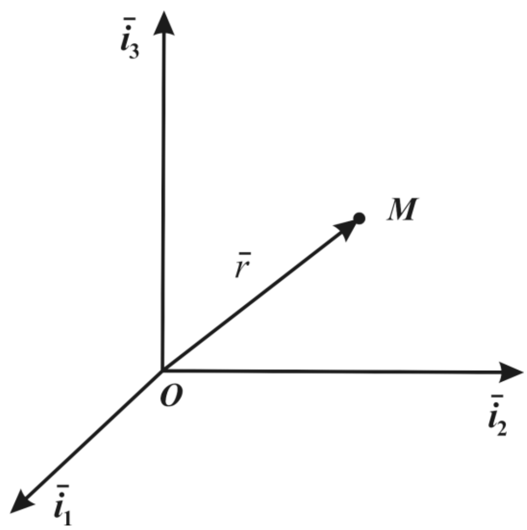

Рисунок 2.

1.3 Взаємні базиси

Два базиси $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ і $(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3)$ називаються *взаємними*, якщо їх вектори задовольняють співвідношенням

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}^k = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases}$$

З означення випливає, що кожний вектор основного базису перпендикулярний двом векторам взаємного базису, а з третім складає гострий кут. Якщо на двох взаємних базисах побудувати паралелепіпеди з об'ємами $|V| = |\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)|$ і $|V'| = |\bar{e}^1 \cdot (\bar{e}^2 \times \bar{e}^3)|$, то ребра одного з них будуть перпендикулярні граням іншого і навпаки.

Вектори одного базису виражаються через вектори іншого за формулами

$$\bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{V} \tag{1.3}$$

$$\bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{V} \tag{1.4}$$

$$\bar{e}^3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{V} \tag{1.5}$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{e}^2 \times \bar{e}^3}{V'}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\bar{e}^3 \times \bar{e}^1}{V'}, \quad \bar{e}_3 = \frac{\bar{e}^1 \times \bar{e}^2}{V'},$$

де $V' = \bar{e}^1(\bar{e}^2 \times \bar{e}^3)$

Угода про підсумовування (Правило Ейнштейна).

Якщо в будь-якому індексному виразі деякий індекс зустрічається двічі: один раз – як нижній і інший раз – як верхній, то по цьому індексу проводиться підсумовування за усіма значеннями цього індексу. Знак $\sum$ при цьому не пишеться. Якщо підсумовування по однойменному індексу не відбувається, то цей факт буде спеціально обумовлюватися.

Приклад 1.1 Згідно з правилом Ейнштейна вираз $a_{ik}b^i c^k$, $(i, k = 1,2,3)$ означає наступну суму:

$$a_{ik}b^i c^k = \sum_{k=1}^{3}(\sum_{i=1}^{3} a_{ik}b^i c^k) = \sum_{k=1}^{3} c^k (\sum_{i=1}^{3} a_{ik}b^i) = a_{11}b^1c^1 + a_{21}b^2c^1 + a_{31}b^3c^1 + \\ a_{12}b^1c^2 + a_{22}b^2c^2 + a_{32}b^3c^2 + a_{13}b^1c^3 + a_{23}b^2c^3 + a_{33}b^3c^3.$$

Властивості взаємних базисів.

1) Якщо $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ – базис прямокутної декартової системи координат, то взаємний базис $(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3)$ співпадає з основним, тобто $\bar{e}_1 = \bar{e}^1 = \bar{i}_1$, $\bar{e}_2 = \bar{e}^2 = \bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{e}^3 = \bar{i}_3$

2) Взаємні базиси є обидва праві, або обидва ліві і виконується рівність

$$V \cdot V' = 1$$

Коваріантні і контраваріантні координати вектора.

Будь який вектор $\bar{A}$ можна розкласти за векторами основного й взаємного базисів

$$\bar{A} = A^1\bar{e}_1 + A^2\bar{e}_2 + A^3\bar{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A^i\bar{e}_i = A^i\bar{e}_i . \quad (1.6)$$

$$\bar{A} = A_1\bar{e}^1 + A_2\bar{e}^2 + A_3\bar{e}^3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\bar{e}^i = A_i\bar{e}^i \quad (1.7)$$

Числа A^i називаються *контраваріантними*, а числа A_i – *коваріантними* компонентами вектора $\bar{A}$.

Наведемо геометричну ілюстрацію взаємних базисів у випадку, коли вектор $\bar{A}$ лежить в площині векторів (e_1, e_2). (рисунок 3).

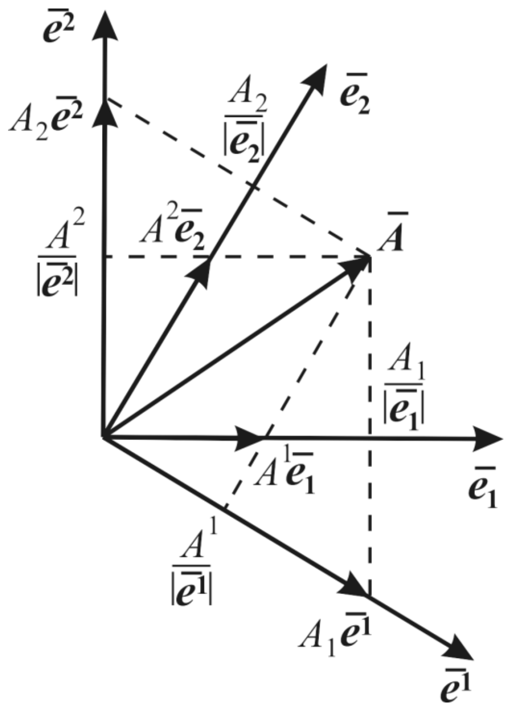

Рисунок 3.

Коваріантні компоненти A_1, A_2 можуть бути знайдені або за складовими $A_1 \cdot \bar{e}^1$, $A_2 \cdot \bar{e}^2$ вектора $\bar{A}$ у взаємному базисі, або за проекціями $\frac{A_1}{|\bar{e}_1|}, \frac{A_2}{|\bar{e}_2|}$ вектора $\bar{A}$ на осі основного базису.

1.4 Закон перетворення компонент вектора

Нехай у системі координат, що визначена базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, є відомими контраваріантні A^i й коваріантні A_i компоненти вектора $\overline{A}$. Визначимо в іншій системі координат із базисом $(\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'})$ контраваріантні $A^{i'}$ й коваріантні $A_{i'}$ компоненти того ж вектора $\overline{A}$. Для цього помножимо обидві частини рівності $\overline{A} = A_k \bar{e}^k$ на вектор $\bar{e}_{i'}$, отримаємо $\overline{A} \cdot e_{i'} = A_k (\bar{e}^k \cdot e_{i'})$, звідки $A_{i'} = A_k (\bar{e}^k \cdot e_{i'})$ або

$$A_{i'} = A_k \alpha_{i'}^k, \text{ де } \alpha_{i'}^k = (\bar{e}^k \cdot e_{i'}). \tag{1.8}$$

Аналогічно отримаємо закон:

$$A'^i = A^k \cdot \alpha_k^{i'}, \text{ де } \alpha_k^{i'} = (\bar{e}_k \cdot \bar{e}^{i'}). \tag{1.9}$$

Справедливі також і зворотні закони:

$$A_i = \alpha_i^{k'} A_{k'}, \tag{1.10}$$

Відзначимо, що закони перетворення (1.8-1.10) лежать в основі аналітичного визначення вектора.

Аналітичне поняття вектора.

Вектором називають математичний об’єкт, який в деякій системі координат визначається трьома числами A^i або A_i, які при переході до нової системи координат змінюються за законом (1.9) або (1.8).

1.5 Зв'язок між коваріантними й контраваріантними компонентами вектора

Для встановлення співвідношення між коваріантними і контраваріантними компонентами вектора $\overline{A}$ помножимо $\overline{A} = A^k \bar{e}_k$ на $\bar{e}_i$ і $\overline{A} = A_k \bar{e}^k$ на $\bar{e}^i$. Маємо $\overline{A} \cdot \bar{e}_i = A^k (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i)$ і $\overline{A} \cdot \bar{e}^i = A_k (\bar{e}^k \cdot \bar{e}^i)$. Позначимо:

$$(\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) = g_{ik}, \quad (\bar{e}^k \cdot \bar{e}^i) = g^{ki} \tag{1.11}$$

$$\bar{e}^k \cdot \bar{e}_i = g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases} \tag{1.12}$$

Тоді отримаємо формули

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k \tag{1.13}$$

які і виражають шукану залежність.

Відзначимо, що дев'ять величин g_{ik}, g^{ki}, δ_i^k утворюють *метричний тензор*.

Розглянемо квадрат довжини дуги Δs між двома нескінченно близькими точками x^i і $x^i + \Delta x^i$ в системі координат з базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ (рисунок 4).

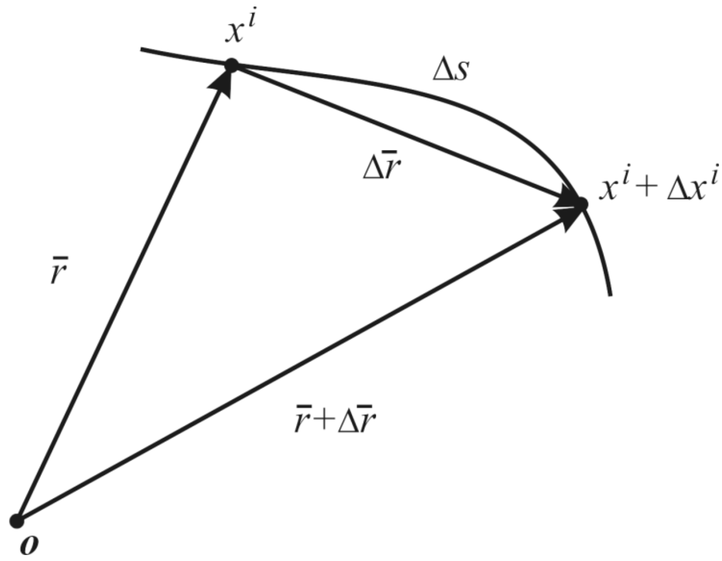

Рисунок 4.

Для довжини дуги Δs справедливе співвідношення $\Delta s = |\Delta\bar{r}| + o(|\Delta\bar{r}|)$, нехтуючи нескінченно малою більш високого порядку, для квадрата Δs отримаємо

$$\Delta s^2 = |\Delta\bar{r}|^2 = \Delta\bar{r} \cdot \Delta\bar{r} = \Delta x^i \bar{e}_i \cdot \Delta x^j \bar{e}_j = \Delta x^i \bar{e}_i \cdot \Delta x_j \bar{e}^j = \Delta x_i \bar{e}^i \cdot \Delta x_j \bar{e}^j,$$

або, враховуючи (1.11), (1.12)

$$\Delta s^2 = g_{ij} \Delta x^i \Delta x^j = \Delta x^i \Delta x_i = g^{ij} \Delta x_i \Delta x_j \tag{1.14}$$

де Δx^i – контраваріантні, а Δx_i – коваріантні компоненти вектора $\Delta\bar{r}$.

Формули (1.14) визначають квадрат елементарної дуги в обраній системі координат через компоненти метричного тензора. Кажуть, що величини g_{ij} (або g^{ij}) визначають *метрику простору,* арифметичні властивості якого встановлюються обраною системою координат.

Зв'язок між величинами g_{ik} *і* g^{ki} отримаємо, розв’язавши систему рівнянь $A_i = g_{ik} A^k$ відносно A^k, звідки $A^i = \dfrac{G^{ik} A_k}{G}$, де $G = \det\|g_{ik}\|$, G^{ik} – алгебраїчне доповнення, що відповідає елементу g_{ik} детермінанта G, $G^{ik} = \begin{vmatrix} g_{mn} & g_{ml} \\ g_{pn} & g_{pl} \end{vmatrix}$, (i, m, p) і (k, n, l) - складають циклічну перестановку чисел $(1,2,3)$.

Таким чином $g^{ik} A_k = A^i = \dfrac{G^{ik} A_k}{G}$, звідки

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G} \tag{1.15}$$

аналогічно
$$g_{ik} = \frac{G_{ik}}{G'}, \tag{1.16}$$

де $G' = \det\left\| g^{ik} \right\|$, $G_{ik} = \begin{vmatrix} g^{mn} & g^{ml} \\ g^{pn} & g^{pl} \end{vmatrix}$.

З іншого боку

$$g^{ik} = (\bar{e}^i, \bar{e}^k) = \frac{\bar{e}_p \times \bar{e}_r}{V} \cdot \frac{\bar{e}_s \times \bar{e}_t}{V} = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} \bar{e}_p \bar{e}_s & \bar{e}_p \bar{e}_t \\ \bar{e}_r \bar{e}_s & \bar{e}_r \bar{e}_t \end{vmatrix} = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix},$$

звідки $G = V^2$, $G \cdot G' = 1$.

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах основного базису визначається формулою $|V| = \sqrt{G}$, а на векторах взаємного базису – $|V'| = \sqrt{G'}$.

<u>Запитання для самоперевірки</u>

1. Сформулюйте означення скаляра та вектора. Наведіть фізичні приклади скалярних і векторних величин.

2. Перерахуйте основні види векторів у тривимірному просторі.

3. Скільки чисел потрібно для однозначного визначення вільного вектора на площині? Відповідь обґрунтуйте.

4. Сформулюйте означення лінійно залежних і незалежних векторів.

5. Доведіть, що будь-які три вектори на площині є лінійно залежними.

6. Сформулюйте означення векторного базису. Які вектори називають ортами? Що таке радіус-вектор точки?

7. Сформулюйте означення взаємного базису та його основні властивості. Що таке коваріантні й контраваріантні координати вектора?

8. У чому полягає правило Ейнштейна?

9. За яким законом змінюються компоненти вектора при переході до нової системи координат? Сформулюйте аналітичне означення вектора.

10. Запишіть формули, які зв'язують коваріантні й контраваріантні компоненти вектора. Що таке метричний тензор?