ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
„ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРІЇНИ

Ю.М. Стреляєв, М.І. Клименко

ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО І ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного
рівня «бакалавр» напряму підготовки «Фізика»

ЗАТВЕРДЖЕНО
вченою радою ЗНУ
Протокол № від 2012

Запоріжжя 2012

УДК: 514.743.4 (075.8)
ББК: 22.151.5 я73

Основи векторного і тензорного аналізу: навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Фізика» / Стреляєв Ю.М, Клименко М.І. – Запоріжжя: ЗНУ, 2012. – 69 с.

Навчальний посібник містить основні поняття векторного і тензорного аналізу. Розглянуто типові приклади розв'язання практичних задач. Для самостійної роботи студентів пропонуються варіанти індивідуального завдання, які охоплюють усі основні розділи курсу.

Призначається для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Фізика».

Рецензент *С.А. Левчук*, к. ф-м. н., доц. каф. прикладної математики

Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*, к. т. н., доц. каф. математичного аналізу

ЗМІСТ

ВСТУП

Векторний і тензорний аналіз є математичним апаратом, що дозволяє представити в найбільш загальній і компактній аналітичній формі основні операції над багатокомпонентними величинами, які застосовуються при дослідженні різних проблем геометрії й фізики.

Важливе значення векторний і тензорний аналіз має в механіці суцільного середовища, де за його допомогою основні рівняння й закони набувають вигляд, незалежний від системи координат. Постановка основних задач теорії пружності, пластичності, в'язкопружності для тіл складної конфігурації потребує введення криволінійних систем координат, де поверхні, що обмежують тіло, описуються найбільш простим способом. Отримання рівнянь, що описують рух таких об'єктів, без застосування апарата тензорного числення потребує багаторазового повторення складних і громіздких викладок у кожному окремому випадку. Застосування тензорного апарату дозволяє уникнути цих негативних явищ, і більш того, допомагає узагальнити відомі методи розв'язання на велике коло прикладних задач.

Найпростішими тензорними величинами є скаляри, вектори, а також величини, що характеризують деформації, напруження, пружні константи матеріалів тощо. Усіх їх об'єднує не фізична природа, а сукупність певних математичних операцій, які складають основу тензорного числення, головною характеристикою якого є інваріантність математичних записів по відношенню до перетворення системи координат, у якій розглядається об'єкт

Основною метою даного посібника є допомога студентам у оволодіванні основними поняттями та методами тензорного аналізу в найбільш простій для сприймання формі, методом поступового узагальнення від окремих випадків до загальних понять. Зміст посібника потребує від студента елементарних знань із векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу. Для організації самостійної роботи студента в посібнику пропонуються варіанти індивідуального типового завдання, які допоможуть засвоїти основний теоретичний й практичний матеріал.

1. Елементи векторної і тензорної алгебри

1.1 Вектори і скаляри

Скаляром називається величина яка повністю характеризується одним числом (своїм числовим значенням). Прикладами скалярів у фізиці є маса, щільність, температура, робота сили. Порівнюватися можуть тільки скаляри однакової розмірності. Два скаляра однакової розмірності називаються рівними, якщо рівні їх числові значення.

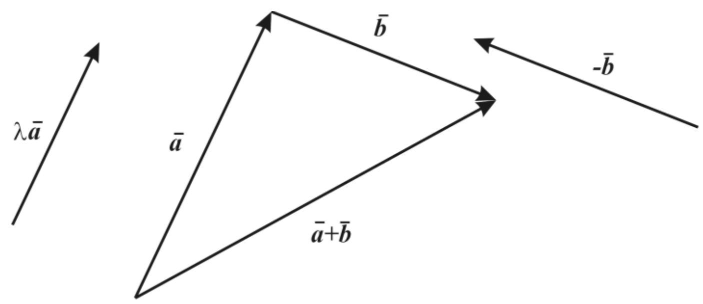

Рисунок 1.

Геометричне поняття вектора.

Вектори – це спрямовані відрізки, для яких визначені лінійні операції додавання та множення на число (скаляр), що задовольняють відомим правилам векторної алгебри (рисунок 1).

Прикладами векторів у фізиці є переміщення, швидкість, прискорення, сила, імпульс, момент сили, напруженість електричного поля, поляризація.

Види векторів у просторі.

Згідно з фізичним змістом розрізняють вектори вільні, ковзні і зв'язані.

Вільним вектором називають вектор, який можна переносити паралельно собі у будь яку точку простору. Прикладом вільного вектора є вектор швидкості при поступальному русі твердого тіла. Вільний вектор у просторі повністю визначається трьома числами, наприклад, своїми проекціями на осі декартової системи координат, або довжиною та двома незалежними кутами (сферична система координат).

Ковзним вектором називають вектор, який можна переносити уздовж прямої, яка визначає напрям вектора. Прикладом ковзного вектора може служити вектор сили прикладеної до твердого тіла. Ковзний вектор потребує для визначення у просторі п'ять чисел, наприклад, координати точки, через яку проходить пряма (три числа), кут який утворює пряма з певною віссю координат та довжина вектора.

Зв'язаним вектором називають вектор, який відноситься до певної точки простору. Прикладами таких векторів є швидкість та прискорення точки твердого тіла, що рухається довільно. Зв'язаний вектор потребує шість чисел для визначення у просторі, наприклад, координати точок початку та кінця вектора. Вільні вектори є найбільш загальним випадком визначення векторних величин, тому у подальшому будуть розглядатися тільки вільні вектори, що задані у тривимірному просторі.

1.2 Лінійна залежність векторів. Векторний базис

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, .. \bar{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують скаляри $\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_n$, хоча б один із яких не дорівнює нулю, такі що

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0}$$

Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо з рівності $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0}$ випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Для векторів тривимірного простору справедливі наступні твердження:

– колінеарні вектори є лінійно залежними;

– два неколінеарних вектори є лінійно незалежними;

– три некомпланарних вектори є лінійно незалежними;

– будь які чотири вектори є лінійно залежними.

Розклад векторів.

Якщо три вектор $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ тривимірного простору лінійно незалежні, то будь-який вектор $\bar{b}$ може бути єдиним чином розкладений за цими векторами

$$\bar{b} = c_1 \bar{a}_1 + c_2 \bar{a}_2 + c_3 \bar{a}_3 \tag{1.1}$$

Векторний базис.

Система будь-яких трьох лінійно незалежних упорядкованих векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ називається базисом тривимірного простору.

Якщо вектори базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ взаємно ортогональні і їх довжини дорівнюють одиниці, то вони називаються *ортами* прямокутної декартової системи координат і позначаються $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$.

Положення точки M в просторі однозначно визначається її *радіус-вектором* $\bar{r}$, тобто вектором, проведеним із початку координат у точку M.

У прямокутній декартовій системі координат радіус-вектор має вигляд (рисунок 2)

$$\bar{r} = x^1 \bar{i}_1 + x^2 \bar{i}_2 + x^3 \bar{i}_3. \tag{1.2}$$

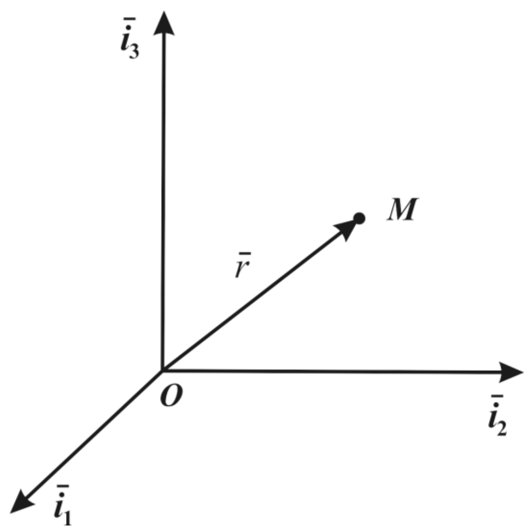

Рисунок 2.

1.3 Взаємні базиси

Два базиси $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ і $(\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3)$ називаються *взаємними*, якщо їх вектори задовольняють співвідношенням

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}^k = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases}$$

З означення випливає, що кожний вектор основного базису перпендикулярний двом векторам взаємного базису, а з третім складає гострий кут. Якщо на двох взаємних базисах побудувати паралелепіпеди з об'ємами $|V| = |\bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)|$ і $|V'| = \left|\bar{e}^1 \cdot (\bar{e}^2 \times \bar{e}^3)\right|$, то ребра одного з них будуть перпендикулярні граням іншого і навпаки.

Вектори одного базису виражаються через вектори іншого за формулами

$$\bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{V} \quad (1.3)$$

$$\bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{V} \quad (1.4)$$

$$\bar{e}^3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\bar{e}_1(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)} = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{V} \quad (1.5)$$

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{e}^2 \times \bar{e}^3}{V'}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\bar{e}^3 \times \bar{e}^1}{V'}, \quad \bar{e}_3 = \frac{\bar{e}^1 \times \bar{e}^2}{V'},$$

де $V' = \bar{e}^1(\bar{e}^2 \times \bar{e}^3)$

Угода про підсумовування (Правило Ейнштейна).

Якщо в будь-якому індексному виразі деякий індекс зустрічається двічі: один раз – як нижній і інший раз – як верхній, то по цьому індексу проводиться підсумовування за усіма значеннями цього індексу. Знак $\sum$ при цьому не пишеться. Якщо підсумовування по однойменному індексу не відбувається, то цей факт буде спеціально обумовлюватися.

Приклад 1.1 Згідно з правилом Ейнштейна вираз $a_{ik} b^i c^k$, $(i, k = 1,2,3)$ означає наступну суму:

$$a_{ik} b^i c^k = \sum_{k=1}^{3} (\sum_{i=1}^{3} a_{ik} b^i c^k) = \sum_{k=1}^{3} c^k (\sum_{i=1}^{3} a_{ik} b^i) = a_{11} b^1 c^1 + a_{21} b^2 c^1 + a_{31} b^3 c^1 + \\ a_{12} b^1 c^2 + a_{22} b^2 c^2 + a_{32} b^3 c^2 + a_{13} b^1 c^3 + a_{23} b^2 c^3 + a_{33} b^3 c^3 .$$

Властивості взаємних базисів.

1) Якщо $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ – базис прямокутної декартової системи координат, то взаємний базис $(\overline{e}^1, \overline{e}^2, \overline{e}^3)$ співпадає з основним, тобто $\overline{e}_1 = \overline{e}^1 = \overline{i}_1$, $\overline{e}_2 = \overline{e}^2 = \overline{i}_2$, $\overline{e}_3 = \overline{e}^3 = \overline{i}_3$

2) Взаємні базиси є обидва праві, або обидва ліві і виконується рівність

$$V \cdot V' = 1$$

Коваріантні і контраваріантні координати вектора.

Будь який вектор $\overline{A}$ можна розкласти за векторами основного й взаємного базисів

$$\overline{A} = A^1\overline{e}_1 + A^2\overline{e}_2 + A^3\overline{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A^i\overline{e}_i = A^i\overline{e}_i . \tag{1.6}$$

$$\overline{A} = A_1\overline{e}^1 + A_2\overline{e}^2 + A_3\overline{e}^3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\overline{e}^i = A_i\overline{e}^i \tag{1.7}$$

Числа A^i називаються *контраваріантними*, а числа A_i – *коваріантними* компонентами вектора $\overline{A}$.

Наведемо геометричну ілюстрацію взаємних базисів у випадку, коли вектор $\overline{A}$ лежить в площині векторів (e_1, e_2). (рисунок 3).

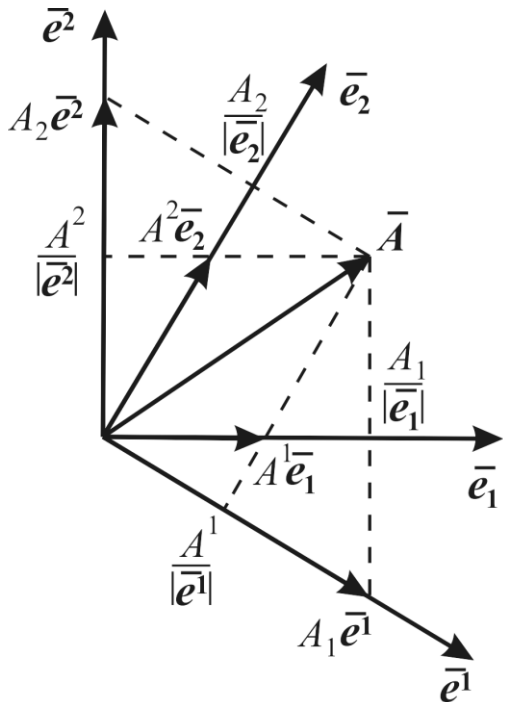

Рисунок 3.

Коваріантні компоненти A_1, A_2 можуть бути знайдені або за складовими $A_1 \cdot \overline{e}^1$, $A_2 \cdot \overline{e}^2$ вектора $\overline{A}$ у взаємному базисі, або за проекціями $\frac{A_1}{|\overline{e}_1|}$, $\frac{A_2}{|\overline{e}_2|}$ вектора $\overline{A}$ на осі основного базису.

1.4 Закон перетворення компонент вектора

Нехай у системі координат, що визначена базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, є відомими контраваріантні A^i й коваріантні A_i компоненти вектора $\bar{A}$. Визначимо в іншій системі координат із базисом $(\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'})$ контраваріантні $A^{i'}$ й коваріантні $A_{i'}$ компоненти того ж вектора $\bar{A}$. Для цього помножимо обидві частини рівності $\bar{A} = A_k \bar{e}^k$ на вектор $\bar{e}_{i'}$, отримаємо $\bar{A} \cdot e_{i'} = A_k (\bar{e}^k \cdot e_{i'})$, звідки $A_{i'} = A_k (\bar{e}^k \cdot e_{i'})$ або

$$A_{i'} = A_k \alpha_{i'}^k, \text{ де } \alpha_{i'}^k = (\bar{e}^k \cdot e_{i'}). \tag{1.8}$$

Аналогічно отримаємо закон:

$$A'^i = A^k \cdot \alpha_k^{i'}, \text{де } \alpha_k^{i'} = (\bar{e}_k \cdot \bar{e}^{i'}). \tag{1.9}$$

Справедливі також і зворотні закони:

$$A_i = \alpha_i^{k'} A_{k'}, \tag{1.10}$$

Відзначимо, що закони перетворення (1.8-1.10) лежать в основі аналітичного визначення вектора.

Аналітичне поняття вектора.

Вектором називають математичний об’єкт, який в деякій системі координат визначається трьома числами A^i або A_i, які при переході до нової системи координат змінюються за законом (1.9) або (1.8).

1.5 Зв'язок між коваріантними й контраваріантними компонентами вектора

Для встановлення співвідношення між коваріантними і контраваріантними компонентами вектора $\bar{A}$ помножимо $\bar{A} = A^k \bar{e}_k$ на $\bar{e}_i$ і $\bar{A} = A_k \bar{e}^k$ на $\bar{e}^i$. Маємо $\bar{A} \cdot \bar{e}_i = A^k (\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i)$ і $\bar{A} \cdot \bar{e}^i = A_k (\bar{e}^k \cdot \bar{e}^i)$. Позначимо:

$$(\bar{e}_k \cdot \bar{e}_i) = g_{ik}, \ (\bar{e}^k \cdot \bar{e}^i) = g^{ki} \tag{1.11}$$

$$\bar{e}^k \cdot \bar{e}_i = g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases} \tag{1.12}$$

Тоді отримаємо формули

$$A_i = g_{ik} A^k, \ A^i = g^{ik} A_k \tag{1.13}$$

які і виражають шукану залежність.

Відзначимо, що дев'ять величин g_{ik}, g^{ki}, δ_i^k утворюють *метричний тензор*.

Розглянемо квадрат довжини дуги Δs між двома нескінченно близькими точками x^i і $x^i + \Delta x^i$ в системі координат з базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ (рисунок 4).

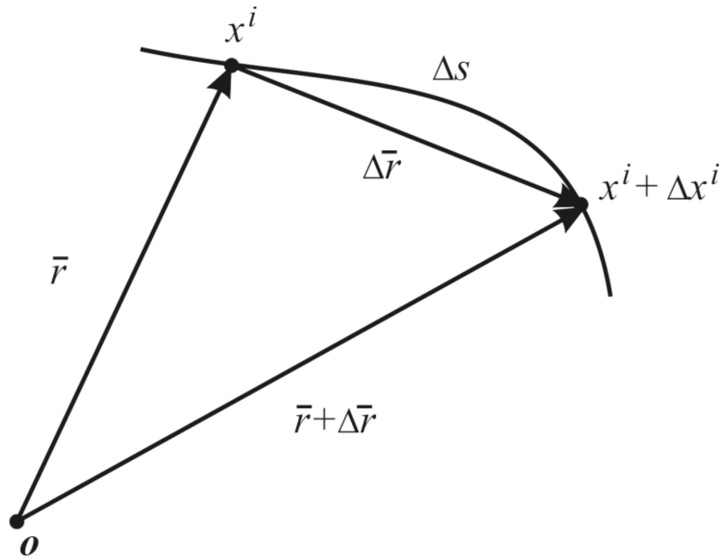

Рисунок 4.

Для довжини дуги Δs справедливе співвідношення $\Delta s = |\Delta\bar{r}| + o(|\Delta\bar{r}|)$, нехтуючи нескінченно малою більш високого порядку, для квадрата Δs отримаємо

$$\Delta s^2 = |\Delta\bar{r}|^2 = \Delta\bar{r} \cdot \Delta\bar{r} = \Delta x^i \bar{e}_i \cdot \Delta x^j \bar{e}_j = \Delta x^i \bar{e}_i \cdot \Delta x_j \bar{e}^j = \Delta x_i \bar{e}^i \cdot \Delta x_j \bar{e}^j,$$

або, враховуючи (1.11), (1.12)

$$\Delta s^2 = g_{ij} \Delta x^i \Delta x^j = \Delta x^i \Delta x_i = g^{ij} \Delta x_i \Delta x_j \tag{1.14}$$

де Δx^i – контраваріантні, а Δx_i – коваріантні компоненти вектора $\Delta\bar{r}$.

Формули (1.14) визначають квадрат елементарної дуги в обраній системі координат через компоненти метричного тензора. Кажуть, що величини g_{ij} (або g^{ij}) визначають *метрику простору,* арифметичні властивості якого встановлюються обраною системою координат.

Зв'язок між величинами g_{ik} *і* g^{ki} отримаємо, розв'язавши систему рівнянь $A_i = g_{ik} A^k$ відносно A^k, звідки $A^i = \dfrac{G^{ik} A_k}{G}$, де $G = \det\|g_{ik}\|$, G^{ik} – алгебраїчне доповнення, що відповідає елементу g_{ik} детермінанта G, $G^{ik} = \begin{vmatrix} g_{mn} & g_{ml} \\ g_{pn} & g_{pl} \end{vmatrix}$, (i, m, p) і (k, n, l) - складають циклічну перестановку чисел $(1,2,3)$.

Таким чином $g^{ik} A_k = A^i = \dfrac{G^{ik} A_k}{G}$, звідки

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G} \tag{1.15}$$

аналогічно
$$g_{ik} = \frac{G_{ik}}{G'}, \tag{1.16}$$

де $G' = \det \left\| g^{ik} \right\|$, $G_{ik} = \begin{vmatrix} g^{mn} & g^{ml} \\ g^{pn} & g^{pl} \end{vmatrix}$.

З іншого боку

$$g^{ik} = (\bar{e}^i, \bar{e}^k) = \frac{\bar{e}_p \times \bar{e}_r}{V} \cdot \frac{\bar{e}_s \times \bar{e}_t}{V} = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} \bar{e}_p \bar{e}_s & \bar{e}_p \bar{e}_t \\ \bar{e}_r \bar{e}_s & \bar{e}_r \bar{e}_t \end{vmatrix} = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix},$$

звідки $G = V^2$, $G \cdot G' = 1$.

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах основного базису визначається формулою $|V| = \sqrt{G}$, а на векторах взаємного базису – $|V'| = \sqrt{G'}$.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення скаляра та вектора. Наведіть фізичні приклади скалярних і векторних величин.
2. Перерахуйте основні види векторів у тривимірному просторі.
3. Скільки чисел потрібно для однозначного визначення вільного вектора на площині? Відповідь обґрунтуйте.
4. Сформулюйте означення лінійно залежних і незалежних векторів.
5. Доведіть, що будь-які три вектори на площині є лінійно залежними.
6. Сформулюйте означення векторного базису. Які вектори називають ортами? Що таке радіус-вектор точки?

7. Сформулюйте означення взаємного базису та його основні властивості. Що таке коваріантні й контраваріантні координати вектора?

8. У чому полягає правило Ейнштейна?

9. За яким законом змінюються компоненти вектора при переході до нової системи координат? Сформулюйте аналітичне означення вектора.

10. Запишіть формули, які зв’язують коваріантні й контраваріантні компоненти вектора. Що таке метричний тензор?

2. Криволінійні координати. Поняття тензора. Операції над тензорами.

2.1 Ортогональні базиси

Векторний базис називають *ортогональним*, якщо його вектори взаємно перпендикулярні.

Для ортогонального базису основний базис співпадає за напрямами з взаємним, звідки випливає, що матриця метричного тензора g_{ik} має діагональний вигляд, тобто відмінні від нуля тільки g_{11}, g_{22}, g_{33}. З формул (1.13), що зв'язують коваріантні й контраваріантні компоненти вектора, маємо

$$A_1 = g_{11}A^1,\ A_2 = g_{22}A^2,\ A_3 = g_{33}A^3 \text{ і } A^1 = g^{11}A_1,\ A^2 = g^{22}A_2,\ A^3 = g^{33}A_3$$

звідки отримаємо $g_{11} = \dfrac{1}{g^{11}};\ g_{22} = \dfrac{1}{g^{22}};\ g_{33} = \dfrac{1}{g^{33}}$.

Враховуючи (1.14), для квадрата елементарної дуги отримаємо

$$\Delta s^2 = g_{11}\left(\Delta x^1\right)^2 + g_{22}\left(\Delta x^2\right)^2 + g_{33}\left(\Delta x^3\right)^2 = g_{ii}\left(\Delta x^i\right)^2 \qquad (2.1)$$

або
$$\Delta s^2 = \left(H_1\Delta x^1\right)^2 + \left(H_2\Delta x^2\right)^2 + \left(H_3\Delta x^3\right)^2 = \left(H_i\Delta x^i\right)^2 \qquad (2.2)$$

Величини $H_1 = \sqrt{g_{11}}$, $H_2 = \sqrt{g_{22}}$, $H_3 = \sqrt{g_{33}}$ називаються *коефіцієнтами Ламе*.

У прямокутній декартовій системі координат $H_i = 1$, коваріантні й контраваріантні компоненти вектора співпадають.

2.2 Криволінійні координати

Положення точки M у просторі однозначно визначається її радіус-вектором $\bar{r}$ відносно деякої точки O. Цей вектор не залежить від вибраної системи координат, і визначається в будь-якій системі координат трьома числами q^1, q^2, q^3, які вже залежать від прийнятої системи координат (способи їх визначення).

Наприклад, якщо числа q^1, q^2, q^3 означають взяті з певним знаком відстані до трьох взаємно перпендикулярних площин, що проходять через точку O, то матимемо прямокутну декартову систему координат (ПДСК).

Нехай тепер q^1, q^2, q^3 – «довільні», зафіксуємо $q^1 = const$ і будемо неперервним чином змінювати числа q^2, q^3, отримаємо поверхню у просторі, надаючи константі q^1 різні значення, матимемо сімейство поверхонь, аналогічно фіксуючи q^2 і q^3, отримаємо ще два сімейства. Припустимо тепер, що ці поверхні такі, що через кожну точку M простору проходить одна і лише одна поверхня кожного сімейства. Тоді положення точки M однозначно визначається перетином цих поверхонь, які називаються *координатними поверхнями*, а величини констант q^1, q^2, q^3 – криволінійними координатами точки M.

Лінія перетину пари координатних поверхонь $q^i = const$, $q^j = const$ називається *координатною лінією* $\left(q^k\right)$. Вздовж цієї лінії змінюється тільки координата q^k, зростання координати q^k визначає додатний напрям на координатній лінії.

Вид координатних поверхонь і ліній залежить від способу визначення q^1, q^2, q^3.

У криволінійній системі координат уводять *локальний базис* $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, вектори якого дотичні до відповідних координатних ліній і направлені у бік зростання координат. Базисні вектори довільної системи координат є локальними, тобто залежать від положення точки M простору (вектори локального базису – різні для різних точок простору) (рисунок 5).

Якщо вектори базису взаємно перпендикулярні, то система координат називається *ортогональною*.

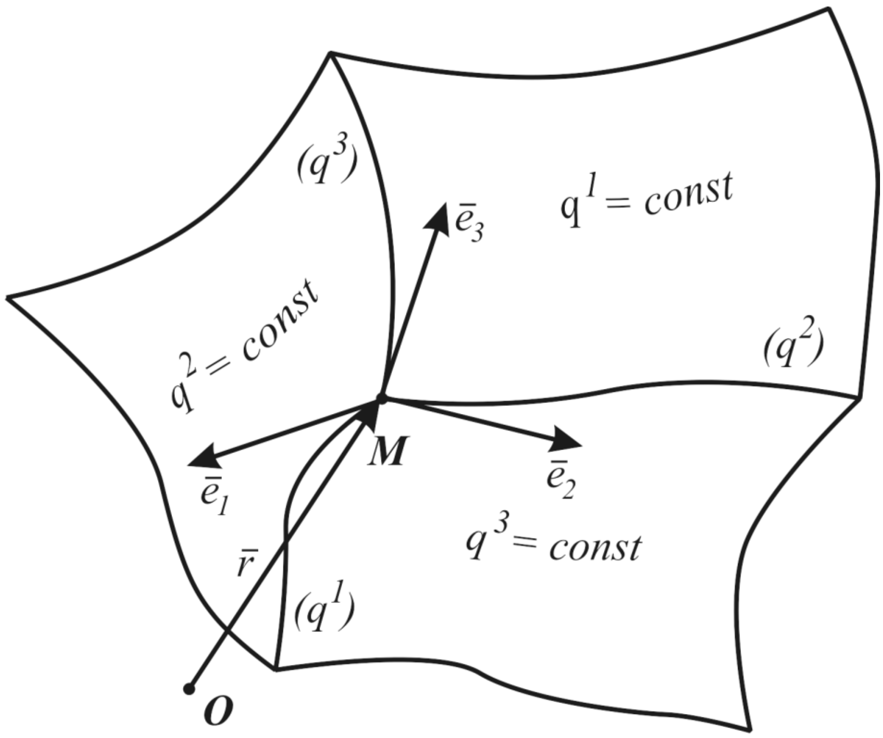

Рисунок 5.

Основною характеристикою будь-якої системи координат є *метрика*, тобто співвідношення, що визначає квадрат елементарної дуги

$$ds^2 = g_{ik} dq^i dq^k \tag{2.3}$$

Основні елементи простору із системою координат q^1, q^2, q^3.

1) Елемент дуги уздовж координатної лінії q^i

$$ds_i = |e_i| dq^i = \sqrt{g_{ii}} dq^i \text{ (немає суми по i)} \qquad (2.4)$$

2) Елемент площі в координатній поверхні $q^i = const$

$$d\sigma_i = \sqrt{g_{jj} g_{kk} - g_{jk}{}^2}\, dq^j dq^k \qquad (2.5)$$

де i, j, k - складають парну перестановку чисел 1,2,3.

3) Елемент об'єму

$$dV = \sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3 \qquad (2.6)$$

де $G = \det \| g_{ik} \|$.

Ортогональні координати. Коефіцієнти Ламе.

$$ds^2 = H_1^2 (dq^1)^2 + H_2^2 (dq^2)^2 + H_3^2 (dq^3)^2 \qquad (2.7)$$

де $H_1 = \sqrt{g_{11}}, H_2 = \sqrt{g_{22}}, H_3 = \sqrt{g_{33}}$ - коефіцієнти Ламе, які можна визначити як границю: $H_i = \lim\limits_{\Delta q_i \to 0} \dfrac{\Delta s_i}{\Delta q_i}$, де Δs_i – приріст довжини дуги i-ої координатної лінії, що відповідає приросту координати Δq^i

Елементи простору в ортогональній системі координат.

1) $ds_i = H_i dq^i$ (немає суми по i)

2) $d\sigma_i = H_j H_k dq_j dq_k$ (немає суми по j, k)

3) $dV = H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3$

Приведемо дві, найбільш поширені у фізичних застосуваннях, ортогональні системи криволінійних координат.

Циліндрична система координат (ЦСК).

Визначимо у просторі початок відліку – точку O, проведемо через цю точку пряму з визначеним додатним напрямом – вісь відліку Oz, деяку площину, що проходить через вісь Oz, будемо вважати площиною відліку кута. Положення будь якої точки M визначається трьома величинами: r – відстань від точки M до осі Oz, φ – кут між площиною відліку і площиною, що проходить через точку M та вісь Oz, z – проекція радіус-вектора точки M на вісь Oz.

Сферична система координат (ССК).

Визначимо у просторі початок відліку – точку O, проведемо через цю точку вісь відліку першого кута Oz, площину, що проходить через вісь Oz, будемо вважати площиною відліку другого кута. Положення будь якої точки M визначається трьома величинами: ρ – відстань від точки M до точки O (довжина радіус-вектора точки M), θ – кут між радіус-вектором точки M і віссю Oz, φ – кут між площиною відліку і площиною, що проходить через точку M та вісь Oz.

Метрика в ортогональних координатах.

Виразимо квадрат елементарної дуги в прямокутній декартовій, циліндричній і сферичній системах координат.

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$
$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Коефіцієнти Ламе у прямокутній декартовій системі координат $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, у циліндричній – $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_\varphi = r$, $H_3 = H_z = 1$, у сферичній – $H_1 = H_\rho = 1$, $H_2 = H_\theta = \rho$, $H_3 = H_\varphi = \rho\sin\theta$.

Зв'язок криволінійних координат з прямокутними декартовими координатами.

Нехай у просторі крім системи координат q^1, q^2, q^3 задано прямокутну декартову систему координат x_1, x_2, x_3, тоді можна отримати співвідношення які виражають пряму та зворотну залежність одних координат від інших.

$$x_1 = x_1(q^1, q^2, q^3),\ \ x_2 = x_2(q^1, q^2, q^3),\ \ x_3 = x_3(q^1, q^2, q^3)$$

$$q^1 = q^1(x_1, x_2, x_3),\ \ q^2 = q^2(x_1, x_2, x_3),\ \ q^3 = q^3(x_1, x_2, x_3)$$

Передбачається, що якобіан $I = \det\left\|\dfrac{\partial x_i}{\partial q^j}\right\| \neq 0$.

Запишемо співвідношення прямої та зворотної залежності у явному вигляді для циліндричних і сферичних координат.

Циліндричні координати.

$$x_1 = r\cos\varphi,\ \ x_2 = r\sin\varphi,\ \ x_3 = z$$

$$q^1 = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,,\quad q^2 = \varphi = arctg\,\frac{x_2}{x_1}\,,\quad q^3 = z = x_3,\ \text{де}\ x_1 > 0\,.$$

Сферичні координати.

$$x_1 = \rho\sin\theta\cos\varphi\,,\quad x_2 = \rho\sin\theta\sin\varphi\,,\quad x_3 = \rho\cos\theta$$

$$q^1 = \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,,\quad q^2 = \theta = arctg\,\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}\,,\quad q^3 = \varphi = arctg\,\frac{x_2}{x_1}\,,$$

де $x_1 > 0$, $x_3 > 0$.

Вектори локального базису.

Обчислимо повний диференціал радіус-вектора в системі координат q^1, q^2, q^3

$$d\bar{r} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^1}dq^1 + \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^2}dq^2 + \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^3}dq^3 = \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^i}dq^i\,.$$

Звідси знайдемо вираз для метрики

$$ds^2 = d\bar{r}\cdot d\bar{r} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^i}dq^i\,\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^k}dq^k = \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^i}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^k}dq^i dq^k \tag{2.8}$$

Для векторів локального базису отримаємо вираз

$$\bar{e}_i = \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^i} \tag{2.9}$$

і для метричного тензора

$$g_{ik} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial q^i}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q^k} = \frac{\partial x_p}{\partial q^i}\frac{\partial x_p}{\partial q^k}\ \text{(сума по } p\text{)} \tag{2.10}$$

де $\bar{r} = x_1\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3$, $x_p = x_p(q^1, q^2, q^3)$.

У разі ортогональних координат маємо формулу для коефіцієнтів Ламе

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q^i}\right)^2} \tag{2.11}$$

2.3 Поняття тензора

Визначимо окремі випадки тензорів у тривимірному просторі.

Тензор нульового рангу (скаляр) – це об'єкт, який повністю визначається в деякій системі координат одним числом (або функцією), яке не міняється при зміні системи координат, $u = u'$.

Тензор першого рангу (вектор) – це об'єкт, який у деякій системі координат визначається трьома числами A^i, які при зміні системи координат перетворюються згідно із законом

$$A^{i'} = \alpha^{i'}_k A^k \tag{2.12}$$

Приклад 2.1 Нехай задано два лінійно незалежних вектори у системі координат із базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. З компонент цих векторів a^i і b^i складемо всілякі добутки, позначимо їх $A^{ik} = a^i b^k$, всього отримаємо 9 чисел. Знайти закон перетворення цих чисел при переході до іншої системи координат із базисом $\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'}$.

<u>Розв’язання</u>: Використовуючи закон перетворення компонент вектора (2.12), отримаємо:

$$a^{i'} = \alpha^{i'}_l a^l, \; b^{k'} = \alpha^{k'}_m b^m$$

$$A^{i'k'} = a^{i'} b^{k'} = \alpha^{i'}_l a^l \alpha^{k'}_m b^m = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m a^l b^m = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m A^{lm}.$$

Величини A^{ik} представляють приклад якісно нового, в порівнянні з вектором і скаляром, об'єкта, що має називається тензором другого рангу.

Тензор другого рангу – це об'єкт, який визначається в деякій системі координат 9 числами, які при зміні системи координат перетворюються згідно із законом

$$A^{i'k'} = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m A^{lm} \tag{2.13}$$

Прикладами тензорів другого рангу можуть служити тензор напружень σ^{ij}, тензор деформацій ε^{ij}, тензор моментів інерції I^{ij}, метричний тензор g^{ij}.

Відзначимо, що вектор (тензор першого рангу) ми визначили трьома його контраваріантними компонентами, але він також однозначно визначається і за допомогою трьох його коваріантних компонент A_i, які перетворюються згідно із законом $A_{i'} = \alpha^k_{i'} A_k$.

Аналогічно, для тензорів другого рангу і вище можна розглядати компоненти різного роду A^{ik} - контраваріантні, A_{ik}- коваріантні, $A_i^{\cdot k}$, $A^i_{\cdot k}$ – змішані, закони перетворення для них виглядатимуть таким чином

$$A_{i'k'} = \alpha^l_{i'} \alpha^m_{k'} A_{lm} \qquad A^{i'k'} = \alpha^{i'}_l \alpha^{k'}_m A^{lm}$$

$$A_{i'}^{\cdot k'} = \alpha_{i'}^{l}\alpha_{m}^{k'}A_{l}^{\cdot m} \quad A_{\cdot k'}^{i'} = \alpha_{l}^{i'}\alpha_{k'}^{m}A_{\cdot m}^{l}$$

Нагадаємо, що $\alpha_{i'}^{k}, \alpha_{i}^{k'}$ – коефіцієнти прямого й зворотного перетворення векторів базисів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ і $\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'}$, тобто $e_{i'} = \alpha_{i'}^{k}e_k$, $e_i = \alpha_{i}^{k'}e_{k'}$.

Тензором n-го рангу r-разів контраваріантним і s-разів коваріантним (n=r+s) називається об'єкт, який у деякій системі координат визначається 3^n числами (компонентами) $A_{k_1k_2\dots k_s}^{i_1i_2\dots i_r}$, що перетворюються при зміні системи координат згідно із законом

$$A_{k_1'k_2'\dots k_s'}^{i_1'i_2'\dots i_r'} = \alpha_{k_1'}^{l_1}\alpha_{k_2'}^{l_2}\dots\alpha_{k_s'}^{l_s}\alpha_{m_1}^{i_1'}\alpha_{m_1}^{i_1'}\dots\alpha_{m_r}^{i_r'}A_{l_1l_2\dots l_s}^{m_1m_2\dots m_r} \tag{2.14}$$

тензор такого вигляду називають тензором типу $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ і позначають $\hat{A}$.

Приклад 2.2 Нехай задано коваріантні компоненти тензора другого рангу $A_{11} = 1,\ A_{12} = -2,\ A_{13} = 3,\ A_{21} = 2,\ A_{22} = -4,\ A_{23} = 6,\ A_{31} = 5,\ A_{32} = 1,\ A_{33} = 4$ і матриця переходу від старої системи координат до нової

$$\left\| \alpha_{i'}^{k} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{matrix} \right\|.$$

Знайти $A_{i'k'}$ – коваріантні компоненти того ж тензора в новій системі координат.

Розв’язання: За законом перетворення компонент тензора (2.13) отримаємо:

$$a_{1'1'} = \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{1}a_{11} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{2}a_{12} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{3}a_{13} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{1}a_{21} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{2}a_{22} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{3}a_{23} + \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{1}a_{31}$$
$$+ \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{2}a_{32} + \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{3}a_{33} = 33$$

аналогічно

$$a_{1'2'} = \alpha_{1'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm} = 93,\ a_{1'3'} = \alpha_{1'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm} = 37,\ a_{2'1'} = \alpha_{2'}^{l}\alpha_{1'}^{m}a_{lm} = 116,$$
$$a_{2'2'} = \alpha_{2'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm} = 131,\ a_{2'3'} = \alpha_{2'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm} = -60,\ a_{3'1'} = \alpha_{3'}^{l}\alpha_{1'}^{m}a_{lm} = 92,$$
$$a_{3'2'} = \alpha_{3'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm} = 79,\ a_{3'3'} = \alpha_{3'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm} = -95$$

Зв'язок між різними компонентами тензора.

Компоненти тензора 2-го рангу, у системі координат із базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, пов'язані між собою формулами:

$$A^{ik} = g^{il}g^{km}A_{lm},\ \ A_{ik} = g_{il}g_{km}A^{lm},$$
$$A_{ik} = g_{kl}A_{i}^{\cdot l} = g_{il}A_{\cdot k}^{l},\ \ A_{i}^{\cdot k} = g^{kl}A_{il},\ \ A_{i}^{\cdot k} = g_{il}A^{lk}$$
$$A_{k}^{l} = g^{il}A_{ik},\ \ A_{\cdot k}^{l} = g_{ki}A^{li},\ \ A^{ik} = g^{il}A_{l}^{\cdot k} = g^{kl}A_{\cdot l}^{i}.$$

Крапка підкреслює порядок проходження індексів, так у $A_{i}^{\cdot k}$ перший індекс нижній (коваріантний), а другий – верхній (контраваріантний).

Правило одержання одних компонент тензора через інші за допомогою метричного тензора називають операцією підняття (опускання) індексів у компонентів тензора.

Це правило полягає в тім, що індекс, який піднімається (опускається) переходить у метричний тензор, а на те місце, куди він повинен бути піднятий (опущений), ставиться «німий» індекс підсумовування; другим «німим» індексом підсумовування є вільний індекс метричного тензора.

Наприклад, для тензора третього рангу будуть справедливі співвідношення

$$A_{ikl} = g_{im}A^{m}_{\cdot kl} = g_{im}g_{kn}A^{mn}_{\cdot\cdot l} = g_{km}A^{\cdot m}_{i\cdot l} = g_{im}g_{kn}g_{lr}A^{mnr} = g_{im}g_{ln}A^{m\cdot n}_{\cdot k\cdot}$$

2.4 Дії над тензорами

Додавання тензорів.

Додавання визначається тільки для тензорів одного рангу й структури. Сумою двох тензорів $\hat{A}, \hat{B}$ називається тензор $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ того ж рангу й структури що й тензори $\hat{A}, \hat{B}$, компоненти якого в деякій системі координат дорівнюють сумам відповідних компонент тензорів $\hat{A}, \hat{B}$

$$C^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} + B^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} \tag{2.15}$$

Множення тензора на скаляр.

Добутком тензора $\hat{A}$ на скаляр λ називається тензор $\hat{B} = \lambda\hat{A}$, компоненти якого в деякій системі координат дорівнюють добутку компонент тензора $\hat{A}$ на число λ

$$B^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} = \lambda \cdot A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} \tag{2.16}$$

Множення тензорів.

Ця операція визначається для двох тензорів, незалежно від їх рангу й структури. Добутком двох тензорів $\hat{A}$ і $\hat{B}$ рангу n_1 і n_2 з компонентами в деякій системі координат $A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s}$ і $B^{k_1 k_2 \dots k_r}_{l_1 l_2 \dots l_q}$ називається тензор $\hat{C}$ рангу $n_1 + n_2$ з компонентами

$$C^{i_1 i_2 \dots i_r k_1 \dots k_p}_{j_1 j_2 \dots j_s l_1 \dots l_q} = A^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} \cdot B^{k_1 k_2 \dots k_r}_{l_1 l_2 \dots l_q} \tag{2.17}$$

Взагалі $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$, тобто добуток тензорів не комутативний.

Операція перестановки індексів, або утворення ізомеру.

Два тензори $\hat{A}$ и $\hat{B}$ одного рангу й структури називаються рівними, якщо рівні відповідні компоненти цих тензорів у деякій системі координат

$$\hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow A^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s} = B^{i_1 i_2 \cdots i_r}_{j_1 j_2 \cdots j_s}.$$

Відзначимо, що з рівності компонент тензорів у якій-небудь системі координат випливає їх рівність у будь-якій іншій системі координат.

Ізомер утворюється при зміні порядку проходження верхніх або нижніх індексів. Наприклад,

$$A^{ij}_{\cdot\cdot pqr} = B^{ji}_{\cdot\cdot pqr}$$

По суті, ця операція є формальною. Її значення виявляється тільки тоді, коли вона комбінується з іншими операціями.

Згортання змішаного тензора (згортка).

Згортання – це операція, що застосовується тільки до змішаних компонент тензора.

Згортанням називається підсумовування компонент тензора по двох різнойменних («верхній», «нижній») індексах.

Властивості:

1) Згортання можна проводити для тензорів рангу $n \geq 2$;
2) При згортанні тензора рангу n по двох індексах одержимо тензор рангу $n-2$;
3) Операцію згортання можна проводити кілька разів.

Приклад 2.3 Знайти вектор, який утворюється множенням тензора $\hat{T}$ на вектор $\overline{A}$ з наступним згортанням по першому (другому) індексу тензора й індексу вектора, якщо компоненти тензорів задані матрицями

$$\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}, \quad \left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язання: У результаті добутку тензора на вектор одержимо тензор 3-го рангу $\hat{C}$ з компонентами $C^{ij}_{\cdot\cdot k} = T^{ij} A_k$, щоб не шукати всі 27 компонент, проведемо згортку тензора $\hat{C}$ по першому верхньому індексу й нижньому індексу

$$B^j = C^{lj}_{\cdot\cdot l} = T^{lj}A_l = T^{1j}A_1 + T^{2j}A_2 + T^{3j}A_3$$
$$B^1 = T^{11}A_1 + T^{21}A_2 + T^{31}A_3 = 10$$
$$B^2 = T^{12}A_1 + T^{22}A_2 + T^{32}A_3 = 17$$
$$B^3 = T^{13}A_1 + T^{23}A_2 + T^{33}A_3 = 16$$

Якщо, провести згортку по другому верхньому індексу тензора й індексу (нижньому) вектора, одержимо інший результат

$$D^i = C^{il}_{\cdot\cdot l} = T^{il}A_l = T^{i1}A_1 + T^{i2}A_2 + T^{i3}A_3$$
$$D^1 = T^{1l}A_l = T^{11}A_1 + T^{12}A_2 + T^{13}A_3 = 7$$
$$D^2 = T^{2l}A_l = T^{21}A_1 + T^{22}A_2 + T^{23}A_3 = 14$$
$$D^3 = T^{3l}A_l = T^{31}A_1 + T^{32}A_2 + T^{33}A_3 = 19$$

Множення з наступним згортанням часто називають *скалярним добутком* тензорів.

Одиничний тензор.

Відомий з алгебри символ Кронекера $\delta^i_k = \alpha^{j'}_k \alpha^i_{j'} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases}$ є тензором другого рангу з одиничною матрицею

$$\left\| \delta^i_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Компоненти одиничного тензора однакові у всіх координатних системах.

Множення на δ^i_k з наступним згортанням часто використовується в алгебраїчних виразах.

Приклад 2.4 Спростити вирази $\delta^i_k \cdot A_{kj}$; $\delta^l_i \delta^m_k b^i b^k - b^l \delta^m_j a^j$; $A^{\cdot k}_i B_k - B^i$

Розв’язання:

1) $\delta^i_k \cdot A_{kj} = A_{ij}$ - тотожне перетворення (перейменування індексу)

2) $\delta^l_i \delta^m_k b^i b^k - b^l \delta^m_j a^j = b^l b^m - b^l a^m = b^l (b^m - a^m)$

3) $A^{\cdot k}_i B_k - B^i = A^{\cdot k}_i B_k - \delta^{\cdot k}_i B_k = (A^{\cdot k}_i - \delta^{\cdot k}_i) B_k = T^{\cdot k}_i B_k$

Діадний добуток векторів.

Якщо розглянути всілякі добутки компонент двох векторів $A^i B^k = C^{ik}$, одержимо дев'ять компонент, що утворюють тензор другого рангу, який називається *діадним добутком* векторів $\overline{A}, \overline{B}$.

Діадний добуток не комутативний $\overline{A}\overline{B} \neq \overline{B}\overline{A}$. Але матриця $\overline{B}\overline{A}$ є транспонована матриця $\overline{A}\overline{B}$. Аналогічно до запису вектора $\overline{A} = A^i \overline{e}_i$ тензор з компонентами C^{ik} можна записати так

$$\hat{C} = A^i B^k \overline{e}_i \overline{e}_k = C^{ik} \overline{e}_i \overline{e}_k$$

Узагальнюючи цей спосіб на випадок тензора будь-якого рангу, одержимо

$$\hat{T} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_s} \overline{e}^{\,j_1} \dots \overline{e}_{i_1} \dots$$

у виразі $\overline{e}^{\,j_1} \dots \overline{e}_{i_1} \dots$ вектори мають визначений порядок, підсумовування проводиться за усіма індексами $i_1 \dots i_p$, $j_1 \dots j_s$.

2.5 Фізичні приклади тензорів.

Розглянемо деякі фізичні приклади тензорів другого рангу.

Тензор напруження.

Механічним напруженням називається міра інтенсивності внутрішніх сил, розподілених по перетинах, тобто зусилля, що припадають на одиницю площі перетину тіла. Напруження є векторною величиною.

Напружений стан суцільного середовища вважають відомим, якщо відоме напруження на будь-якій елементарній площинці, що проходить через задану точку. Вектор напруження $\overline{p}$ в даній точці можна визначити як границю відношення зусилля $\Delta\overline{F}$ до площі площинки ΔS, коли остання стягується до точки. Вектор напруження є функцією точки та орієнтації площинки, тобто для визначення напруженого стану в точці необхідно знати нескінченну сукупність векторів $\overline{p}_n$ на всіх площинках, що проходять через дану точку. Для визначення напруженого стану в точці потрібна величина, яка є однозначною функцією точки, тобто не залежить від орієнтації площинки і визначає напруження на будь якій площинці з нормаллю $\overline{n}$. Такою величиною є *тензор напруження*.

Розглянемо елементарний тетраедр, що вирізаний в середовищі навколо точки M, три ребра якого напрямлені уздовж осей декартової системи координат (рисунок 6). Нехай $d\sigma_i$ – площа грані ортогональної до осі x_i, а $d\sigma_n$ – площа грані з нормаллю $\overline{n}$.

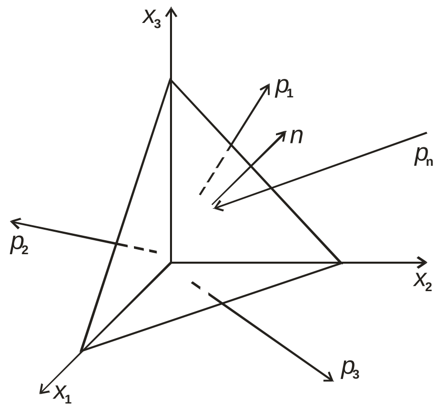

Рисунок 6.

Сила, що діє на тетраедр виражається через напруження $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{p}_3, \overline{p}_n$, що прикладені до внутрішніх сторін граней тетраедра. Нехай $\overline{W}$ – прискорення центру інерції тетраедра, $\overline{F}$ – вектор масових сил, dm – маса тетраедра. Запишемо закон руху центру інерції тетраедра

$$\overline{W}dm = \overline{p}_n d\sigma_n - \overline{p}_1 d\sigma_1 - \overline{p}_2 d\sigma_2 - \overline{p}_3 d\sigma_3 + \overline{F}dm$$

Перейдемо до границі, стягуючи тетраедр до точки M. Відзначимо, що члени з dm пропорційні об'єму, тобто мають більш високий порядок малості, ніж члени з $d\sigma_i$, тому, відкидаючи їх, отримаємо співвідношення

$$\overline{p}_n d\sigma_n = \overline{p}_1 d\sigma_1 + \overline{p}_2 d\sigma_2 + \overline{p}_3 d\sigma_3$$

далі врахуємо, що $d\sigma_i = d\sigma_n \cos(\overline{n}, x_i) = n_i d\sigma_n$ звідки $\overline{p}_n = \overline{p}_i n_i$ (сума по i),

або в проекціях на осі координат $p_{nk} = p_{ik} n_i$.

Тут p_{ik} – сукупність дев'яти компонент напружень, нормальних при $i = k$ і дотичних при $i \neq k$ на трьох взаємно ортогональних площадках в точці M (рисунок 7). Ці дев'ять величин не залежать від орієнтації площадки, а тільки від точки M і мають назву *тензора напружень*.

Розглянемо закон перетворення компонент тензора напружень при зміні системи координат. Нехай i–та вісь нової системи координат направлена по нормалі $\overline{n}$. Якщо $\overline{i}_1, \overline{i}_2, \overline{i}_3$ – орти старої системи координат, а $\overline{i}_{1'}, \overline{i}_{2'}, \overline{i}_{3'}$ – орти нової системи координат, тоді $\overline{n} = \overline{i}_{i'}$. Знайдемо проекцію вектора $\overline{n}$ на l–у координатну вісь старої системи координат $n_l = \overline{n} \cdot \overline{i}_l = \overline{i}_{i'} \cdot \overline{i}_l = \alpha_{i'l}$.

Таким чином, $\overline{p}_n = \overline{p}_{i'} = \overline{p}_l n_l = \alpha_{i'l} \overline{p}_l = \alpha_{i'l} p_{lm} \overline{i}_m$ (сума по l, m). Далі розглянемо добуток $\overline{p}_{i'} \cdot \overline{i}_{k'} = \alpha_{i'l} p_{lm} \overline{i}_m \cdot \overline{i}_{k'} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} p_{lm}$, або $p_{i'k'} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} p_{lm}$. З останньої формули випливає, що компоненти p_{ik} змінюються за тензорним законом.

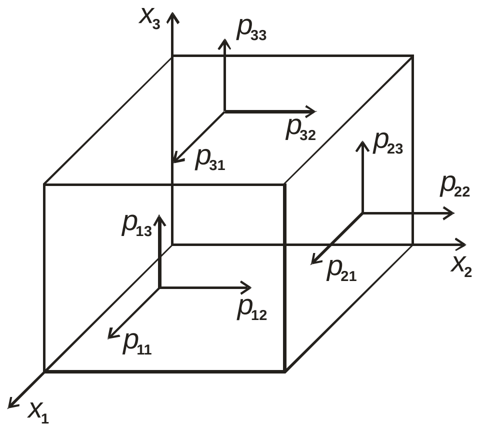

Рисунок 7.

Тензор моментів інерції.

Розглянемо систему матеріальних точок, яка довільно рухається у просторі. *Вектор моменту імпульсу* $\overline{L}$ цієї системи відносно початку деякої системи координат є сумою усіх моментів імпульсу точок системи $\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{p}_i$, де $\overline{r}_i$ – радіус-вектор, $\overline{p}_i$ – імпульс i-ої точки системи. Якщо в процесі руху відстані між точками системи не змінюються і зберігаються відстані від точок до початку координат, то система моделює *тверде тіло з нерухомою точкою* у початку координат. *Вектор імпульсу* i-ої точки системи виражається за формулою $\overline{p}_i = m_i \overline{V}_i$ (немає суми по i), де $m_i, \overline{V}_i$ – маса та швидкість i-ої точки. Причому у випадку твердого тіла з нерухомою точкою швидкість виражається за формулою Ейлера через миттєву кутову швидкість системи $\overline{\omega}$: $\overline{V}_i = \overline{\omega} \times \overline{r}_i$. Тоді для вектору $\overline{L}$ отримаємо:

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{r}_i \times \overline{V}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overline{r}_i \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}_i \right) \right)$$

За формулою для подвійного векторного добутку $\overline{a} \times \left(\overline{b} \times \overline{c} \right) = \overline{b} \left(\overline{a} \cdot \overline{c} \right) - \overline{c} \left(\overline{a} \cdot \overline{b} \right)$ отримаємо $\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\overline{\omega} \left(\overline{r}_i \cdot \overline{r}_i \right) - \overline{r}_i \left(\overline{\omega} \cdot \overline{r}_i \right) \right]$.

Запишемо останню рівність в проекціях на вісі декартової системи координат $\left(x_1, x_2, x_3 \right)$, де $x_j^{(i)}$ – координати i-ої точки, $j = 1,2,3$.

$$L_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\omega_j x_l^{(i)} x_l^{(i)} - x_j^{(i)} \omega_k x_k^{(i)} \right] \text{ (сума по } l, k\text{)}.$$

Заміняючи в останній формулі $\omega_j = \delta_{jk} \omega_k$, запишемо

$$L_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\delta_{jk}\omega_k x_l^{(i)} x_l^{(i)} - x_j^{(i)}\omega_k x_k^{(i)}\right] = \omega_k \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\delta_{jk} x_l^{(i)} x_l^{(i)} - x_j^{(i)} x_k^{(i)}\right] = \omega_k I_{jk},$$

де

$$I_{jk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\delta_{jk} x_l^{(i)} x_l^{(i)} - x_j^{(i)} x_k^{(i)}\right].$$

Дев'ять величин I_{jk} складають тензор другого рангу, що називається *тензором моментів інерції* системи матеріальних точок. Осьові та центробіжні моменти інерції системи виражаються через компоненти I_{jk} наступним чином

$$I_{x_1x_1} = I_{11} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(x_2^{(i)}\right)^2 + \left(x_3^{(i)}\right)^2\right],$$

$$I_{x_2x_2} = I_{22} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(x_3^{(i)}\right)^2 + \left(x_1^{(i)}\right)^2\right],$$

$$I_{x_3x_3} = I_{33} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(x_1^{(i)}\right)^2 + \left(x_2^{(i)}\right)^2\right],$$

$$I_{x_1x_2} = -I_{12} = -I_{21} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)},$$

$$I_{x_1x_3} = -I_{13} = -I_{31} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_3^{(i)} x_1^{(i)},$$

$$I_{x_2x_3} = -I_{23} = -I_{32} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_2^{(i)} x_3^{(i)}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Визначить поняття координатної поверхні та координатної лінії. Що таке криволінійні координати точки у просторі?

2. Які координатні поверхні і лінії має прямокутна декартова система координат?

3. Чому векторний базис в криволінійній системі координат називають локальним?

4. Яку систему координат називають ортогональною? Що таке коефіцієнти Ламе?

5. Запишіть формули для основних елементів простору в довільній криволінійній системі координат.

6. Як визначаються у просторі циліндричні та сферичні координати точки? Побудуйте координатні поверхні та лінії сферичної та циліндричної системи координат. Чому дорівнюють коефіцієнти Ламе для цих систем координат?

7. Запишіть формули зв'язку циліндричних та сферичних координат з прямокутними декартовими координатами.

8. Сформулюйте поняття тензору другого рангу. Які назви мають тензори нульового і першого рангу? Визначте тензор довільного рангу.

9. Перерахуйте основні операції над тензорами. Як визначається операція згортання тензора?

10. Наведіть фізичні приклади тензорів другого рангу. Запишіть формули, за якими осьові і центробіжні моменти інерції системи матеріальних точок виражаються через компоненти тензора моментів інерції.

3 Векторний і тензорний аналіз

3.1 Тензорне поле. Тензор-функція

Тензорне поле.

Якщо кожній точці M деякої множини X тривимірного простору R^3 однозначно поставлено у відповідність значення деякої тензорної величини $\hat{T}$, то кажуть, що задано поле цього тензора і пишуть $\hat{T} = \hat{T}(M)$, $M \in X \subset R^3$.

Прикладами окремих видів тензорних полів є скалярне поле $u = u(M)$, векторне поле $\overline{A} = \overline{A}(M)$, поле тензора 2-го рангу $P_{ik} = P_{ik}(M)$. Положення точки M однозначно визначає її радіус-вектор $\bar{r}$, таким чином, ми можемо розглядати дані поля як функції радіуса-вектора $\bar{r}$: $u = u(\bar{r})$, $\overline{A} = \overline{A}(\bar{r})$, $P_{ik} = P_{ik}(\bar{r})$, $\hat{T} = \hat{T}(\bar{r})$.

Тензор-функція скалярного аргументу.

Якщо кожному значенню скалярної величини $t \in X \subset R^1$ однозначно зіставлене значення тензорної величини $\hat{T}$, то кажуть, що задана тензор-функція скалярного аргументу і пишуть $\hat{T} = \hat{T}(t)$, $t \in X \subset R^1$.

Похідною тензор-функції за скалярним аргументом називається границя

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{T}(t + \Delta t) - \hat{T}(t)}{\Delta t}.$$

Похідна тензор-функції за скалярним аргументом є тензором того ж рангу що й $\hat{T}$, і обчислюється за звичайними правилами диференціювання компонент тензора.

Приклад 3.1 Задано компоненти тензора другого рангу

$$\|P_{ik}\| = \begin{Vmatrix} tx_1 & x_2 \sin t & x_3 \\ -x_2 \sin t & t^2 x_2^2 & e^t x_3 \\ -x_3 & -e^t x_3 & t^3 x_3^3 \end{Vmatrix}$$

знайти $\dfrac{\partial \hat{P}}{\partial t}$.

<u>Розв'язання</u>:

$$\left\| \frac{\partial P_{ik}}{\partial t} \right\| = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \cos t & 0 \\ -x_2 \cos t & 2tx_2^2 & e^t x_3 \\ 0 & -e^t x_3 & 3t^2 x_3^3 \end{Vmatrix}.$$

<u>Потік тензорного поля.</u>

Потоком тензорного поля $\hat{T}(\bar{r})$ через двосторонню поверхню S називається поверхневий інтеграл $W = \iint\limits_S \bar{n} \cdot \hat{T} dS$.

Для тензора другого рангу, в координатній формі, отримаємо $W_i = \iint\limits_S n_k T_{ki} dS$.

Потік тензора другого рангу є вектором.

Приклад 3.2 Знайти потік одиничного тензора δ_{ik} через довільну замкнену поверхню S.

<u>Розв'язання</u>: $W_i = \iint\limits_S n_k \delta_{ki} dS = \iint\limits_S n_i dS$ або $\overline{W} = \iint\limits_S \bar{n} dS$, помножимо скалярно обидві частини останньої рівності на довільний сталий вектор $\overline{C}$, і застосуємо теорему Остроградського – Гауса $\overline{C} \cdot \overline{W} = \iint\limits_S \bar{n} \cdot \overline{C} dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \overline{C} dV = 0$ звідки, за умови довільності вектора $\overline{C}$, отримаємо $W_i = 0$.

Розглянемо докладніше окремі випадки тензорних полів.

3.2 Скалярні поля і їх характеристики

Нехай задано скалярне поле $u = u(M),\ M \in X \subset R^3$.

Фізичними прикладами скалярних полів можуть служити: поле об'ємної щільності речовини, що заповнює деяку просторову область X, поле температури в нагрітому тілі.

Види скалярних полів.

Якщо скалярне поле у всіх точках області визначення приймає стале значення, то його називають *однорідним,* якщо скалярне поле змінюється від точки до точки, його називають *неоднорідним.*

На практиці часто зустрічаються приклади скалярних величин, які залежать не тільки від точки простору, але й від часу, наприклад, температура нагрітого тіла змінюється з часом за рахунок теплообміну з оточуючим середовищем.

Якщо скалярне поле залежить від часу, його називають *нестаціонарним.*

Якщо скалярне поле не залежить від часу, його називають *стаціонарним скалярним полем.*

В подальшому будуть розглядатися лише стаціонарні скалярні поля.

Геометричні властивості.

В загальному випадку скалярне поле $u = u(M)$, $M \in X \subset R^3$ називають *тривимірним.*

Скалярне поле називають *плоским*, якщо в деякій прямокутній системі координат воно залежить лише від двох координат.

Наприклад, поле розподілу температури середовища навколо рівномірно нагрітого циліндра нескінченної довжини є плоским, тому що в будь якій площині перпендикулярній осі симетрії циліндра розподіл температур буде однаковим.

Скалярне поле називають *одновимірним*, якщо в деякій прямокутній системі координат воно залежить лише від однієї координати.

Наприклад, температурне поле сталої води водойма залежить лише від глибини.

Скалярне поле називають *осесиметричним*, якщо в деякій циліндричній системі координат воно не залежить від кутової координати φ. Якщо скалярне поле залежить лише від координати r, його називають *осевим.*

Скалярне поле називають *центральним,* якщо в деякій сферичній системі координат воно залежить лише від координати ρ. Наприклад, гравітаційний потенціал матеріальної точки M_0 маси m_0 дорівнює $u(\rho) = G\dfrac{m_0}{\rho}$, де G - гравітаційна стала.

Визначимо основні характеристики скалярних полів.

Поверхні рівня.

Поверхнею рівня скалярного поля $u = u(M)$ називають сукупність точок деякої множини $S \subset R^3$, у яких функція $u = u(M)$ приймає одне і теж стале значення.

Рівняння поверхні рівня має вигляд:

$$u(M) = C = const\,,\ M \in S \tag{3.1}$$

Надаючи константі C різні значення, отримаємо сімейство поверхонь, щільність розподілу яких може характеризувати швидкість зміни скалярного поля в різних точках.

Похідна за напрямом.

Нехай у скалярному полі $u = u(M)$ зафіксована точка M_0 і деякий напрям, який визначається одиничним вектором $\bar{l}$. Виберемо іншу точку M таким чином, щоб вектор $\overline{M_0M}$ був колінеарний до вектора $\bar{l}$.

Позначимо $\Delta u = u(M) - u(M_0)$, $\Delta l = \left|\overline{M_0M}\right|$.

Похідною скалярного поля $u = u(M)$ в точці M_0 за напрямом $\bar{l}$ називають границю

$$\frac{\partial u}{\partial l} \equiv \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}.$$

Якщо у просторі обрано ПДСК, похідна за напрямом визначається формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\cos\alpha_3,$$

де $\cos\alpha_i$ - напрямні косинуси вектора $\bar{l}$.

Фізичний зміст.

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни скалярного поля в даній точці в даному напрямі.

Якщо напрям вектора $\bar{l}$ є дотичним до поверхні рівня, яка проходить через дану точку, то $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ (на поверхні рівня скалярне поле є сталим).

Градієнт скалярного поля.

Визначимо в точці M вектор, похідна за напрямом якого набуває найбільшого значення. Цей вектор називають градієнтом скалярного поля в точці M.

Нехай у просторі R^3 визначено прямокутну декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) і задано скалярне поле $u = u(M)$, що має неперервні похідні першого порядку. Градієнтом скалярного поля $u = u(x_1, x_2, x_3)$ в точці $M(x_1, x_2, x_3)$ називають вектор $\mathrm{grad}\,u$, який має координатами частинні похідні поля в даній точці.

Тобто в ПДСК, за означенням:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\bar{i}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\bar{i}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\bar{i}_3 \tag{3.2}$$

Властивості градієнта.

1) Градієнт в точці M є ортогональним до поверхні рівня, що проходить через точку M .

2) Похідна за напрямом в точці M дорівнює проекції градієнта на даний напрям, тобто $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \overline{\operatorname{grad} u} \cdot \bar{l}$.

3) За напрямом градієнта скалярне поле $u = u(M)$ має найбільшу швидкість зростання, і величина цієї швидкості дорівнює модулю градієнта.

$$\frac{\partial u}{\partial l}_{\max} = \left|\operatorname{grad} u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2}\ .$$

Оператор $\overline{\nabla}$ *– «набла».*

Якщо ввести символічний оператор-вектор:

$$\overline{\nabla} = \bar{i}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{i}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{i}_3\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{3.3}$$

то формула (3.2) приймає більш простий вигляд $\operatorname{grad} u = \nabla u$.

Запишемо за допомогою оператора ∇ властивості градієнта, пов’язані з арифметичними операціями. Нехай u, v – довільні диференційовні скалярні поля, c – стале скалярне поле.

1) $\overline{\nabla}(cu) = c\overline{\nabla}u$

2) $\overline{\nabla}(u+v) = \overline{\nabla}u + \overline{\nabla}v$

3) $\overline{\nabla}(uv) = v\overline{\nabla}u + u\overline{\nabla}v$

4) $\overline{\nabla}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\overline{\nabla}u - u\overline{\nabla}v}{v^2}$

Якщо у просторі задана ортогональна криволінійна система $\left(q^1, q^2, q^3\right)$, з локальним базисом $\left(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\right)$, то градієнт визначається формулою:

$$\operatorname{grad} u = \overline{\nabla}u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\bar{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\bar{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\bar{e}_3 \tag{3.4}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

Приклад 3.3 Для скалярного поля $u = \left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2\right)^3$ й точок $M_0(2;1;2)$, $M_1(1;0;1)$.

Знайти:

а) поверхні рівня, що проходять через точки M_0, M_1;

б) похідну поля u в точці M_0 за напрямом вектора $\overline{M_0 M_1}$;

в) напрям та швидкість найшвидшого зростання поля u в точці M_0.

Розв'язання: а) знайдемо поверхню рівня, що проходить через точку $M_0(2;1;2)$, за рівнянням (3.1) отримаємо:

$\left(x_1^2+2x_2^2-x_3^2\right)^3=C=u(M_0)=8 \Leftrightarrow x_1^2+2x_2^2-x_3^2=2 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{2}+x_2^2-\frac{x_3^2}{2}=1$ це однопорожнинний гіперболоїд (рисунок 8).

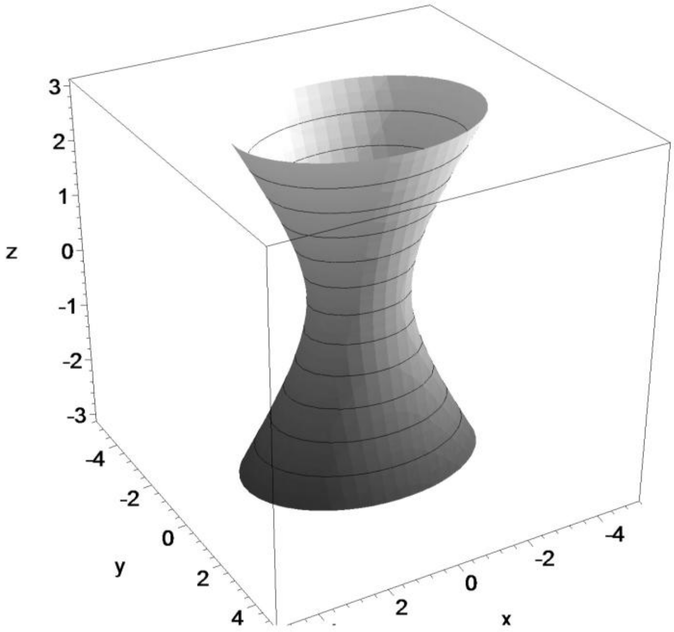

Рисунок 8.

Аналогічно для точки $M_1(1;0;1)$ отримаємо

$\left(x_1^2+2x_2^2-x_3^2\right)^3=C=u(M_1)=0 \Leftrightarrow x_3^2=x_1^2+2x_2^2$ – конус (рисунок 9).

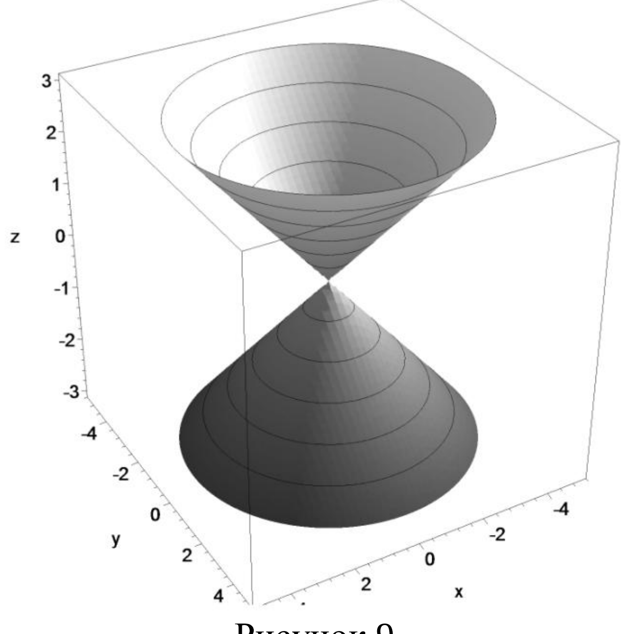

Рисунок 9.

На графіках координати x_1, x_2, x_3 позначені x, y, z відповідно.

б) знайдемо напрямні косинуси вектора $\overline{M_0M_1}$, для цього нормуємо вектор $\overline{M_0M_1} = (-1;-1;-1)$, $\left|\overline{M_0M_1}\right| = \sqrt{3}$. Позначимо $\bar{l} = \dfrac{\overline{M_0M_1}}{\left|\overline{M_0M_1}\right|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Знайдемо частинні похідні скалярного поля в точці $M_0(2;1;2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 6x_1\left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2\right)^2 = 48$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 12x_2\left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2\right)^2 = 48$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = -6x_3\left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2\right)^2 = -48$$

тоді $\operatorname{grad} u(M_0) = 48(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - \bar{i}_3)$ і похідна за напрямом вектора $\overline{M_0M_1}$ дорівнює проекції градієнта на цей вектор $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \overline{\operatorname{grad} u} \cdot \bar{l} = -48\dfrac{1+1-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{48}{\sqrt{3}}$.

в) напрямом найшвидшого зростання скалярного поля в точці M_0 буде напрям градієнта поля в цій точці, тобто напрям вектора:

$$\operatorname{grad} u(M_0) = 48(\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - \bar{i}_3)$$

Максимальна швидкість зростання поля дорівнює модулю градієнта:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right._{\max} = \left|\operatorname{grad} u\right| = 48\sqrt{3}$$

Приклад 3.4 Знайти $grad u$, де $u = 2\rho^2 \sin\theta$ – скалярне поле, що задане в сферичній системі координат.

<u>Розв’язок:</u> В сферичній системі координат: $H_\rho = 1$, $H_\theta = \rho$, $H_\varphi = \rho\sin\theta$,

тоді за формулою (3.4) отримаємо:

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi,$$

$$grad u = 4\rho\sin\theta\bar{e}_\rho + 2\rho\cos\theta\bar{e}_\theta + 0\bar{e}_\varphi = 4\rho\sin\theta\bar{e}_\rho + 2\rho\cos\theta\bar{e}_\theta.$$

3.3 Векторні поля та їх характеристики

Нехай у просторі задано прямокутну декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) і векторне поле $\overline{A}(M) = A_1(x_1,x_2,x_3)\bar{i}_1 + A_2(x_1,x_2,x_3)\bar{i}_2 + A_3(x_1,x_2,x_3)\bar{i}_3$, $M \in X \subset R^3$.

<u>*Види векторних полів.*</u>

Як і скалярні поля, векторні поля можуть бути *стаціонарними* і *нестаціонарними*. У першому випадку вектор залежить тільки від точки простору, у другому – від точки і часу.

Можна також виділити *однорідні* і *неоднорідні* векторні поля. Значенням однорідного векторного поля у всіх точках простору є один сталий вектор.

В подальшому векторним полем будемо вважати стаціонарне векторне поле.

Векторне поле називають *двовимірним (одновимірним),* якщо в деякій прямокутній системі координат (x_1, x_2, x_3) воно не залежить від координати x_3 (координат x_2, x_3).

Двовимірне векторне поле $\overline{A}(M) = (A_1(x_1, x_2), A_2(x_1, x_2), A_3(x_1, x_2))$ називають *плоским*, якщо в тій системі координат, в якій воно не залежить від координати x_3 компонента вектора $A_3 \equiv 0$.

Двовимірне векторне поле, яке не є плоским, називають *плоскопаралельним.*

Векторне поле називають *осесиметричним*, якщо в деякій циліндричній системі координат (r, φ, z) воно не залежить від кутової координати φ, причому в кожній точці вектор поля паралельний площині, що проходить через точку і вісь z.

Осесиметричне векторне поле називають *осевим,* якщо його вектор у всіх точках паралельний площині, перпендикулярній осі z.

Векторне поле $\overline{A}(M)$ називають *центральним,* якщо його вектор має вигляд $\overline{A}(M) = f(|\overline{r}|)\overline{r}$, де $\overline{r}$ – радіус-вектор точки M, $f(|\overline{r}|)$ – довільна скалярна функція довжини радіус-вектора.

Приклад 3.5 Тверде тіло, що обертається навколо осі з сталою кутовою швидкістю $\overline{\Omega}$, замітає деяку осесиметричну замкнену область простору $X \subset R^3$. Вектори швидкості точок твердого тіла в області X утворюють векторне поле $\overline{V}(M)$, яке можна визначити умовою $\overline{V}(M) = \overline{\Omega} \times \overline{r}$, де $\overline{r}$ – радіус-вектор точки M. Переконатись, що це векторне поле є плоским.

<u>Розв’язання:</u> Оберемо прямокутну декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) таким чином щоб вісь обертання співпадала з віссю x_3 і вектори $\overline{\Omega}$ і $\overline{i}_3$ були співнаправлені (рисунок 10). Тоді $\overline{\Omega} = \omega \overline{i}_3$, де $\omega = |\overline{\Omega}|$ – модуль вектора кутової швидкості.

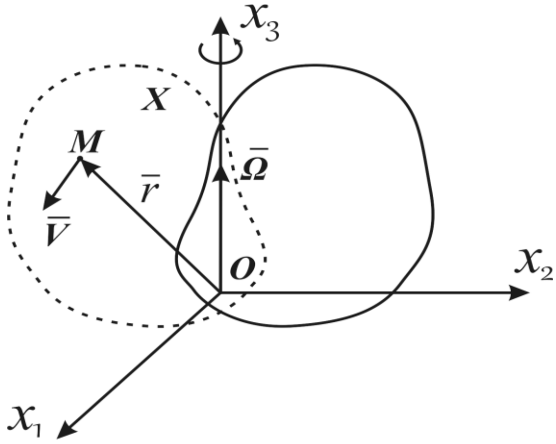

Рисунок 10.

Радіус-вектор матиме вигляд $\bar{r} = x_1\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3$ і для векторного добутку отримаємо:

$$\bar{V}(M) = \bar{\Omega} \times \bar{r} = \omega\bar{i}_3 \times \left(x_1\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2 + x_3\bar{i}\right) = \omega\left(-x_2\bar{i}_1 + x_1\bar{i}_2\right).$$

У введеній системі координат вектор $\bar{V}(M)$ не залежить від координати x_3, причому $V_3(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$, тобто маємо приклад *плоского* векторного поля.

Якщо, тверде тіло буде поступово і рівномірно рухатися уздовж осі обертання x_3 з швидкістю, абсолютна величина якої дорівнює v_0, то отримаємо приклад *плоскопаралельного* векторного поля з вектором

$$\bar{V}(M) = \omega\left(-x_2\bar{i}_1 + x_1\bar{i}_2\right) + v_0\bar{i}_3.$$

Визначимо основні характеристики векторних полів.

Векторні лінії.

Гладка крива Γ називається *векторною лінією* векторного поля $\bar{A}(M)$, якщо в кожній її точці $P \in \Gamma$ дотичний вектор є колінеарним вектору поля $\bar{A}(P)$.

Якщо поле $\bar{A}(M)$ неперервно-диференційовне, то для визначення векторних ліній маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \frac{dx_3}{A_3} \tag{3.5}$$

Якщо поле задано в криволінійних ортогональних координатах $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ то система матиме вигляд:

$$\frac{H_1 dq_1}{A_1} = \frac{H_2 dq_2}{A_2} = \frac{H_3 dq_3}{A_3} \tag{3.6}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

Приклад 3.6 Знайти векторні лінії поля $A = (y+z)\bar{i} - x\bar{j} - x\bar{k}$.

Розв'язання: Із означення виходить, що векторними лініями поля $A = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ є інтегральні криві системи диференціальних рівнянь $\dfrac{dx}{A_x} = \dfrac{dy}{A_y} = \dfrac{dz}{A_z}$, яка може бути розв'язана або методом знаходження інтегральних комбінацій, або зведена до нормальної системи та розв'язана в параметричному вигляді. Розглянемо обидва способи.

Перший спосіб.

Запишемо систему (3.5) для заданого векторного поля:

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{-x}$$

Використаємо таку властивість рівних відношень:

Якщо $\frac{U_1}{V_1}=\frac{U_2}{V_2}=\ldots=\frac{U_n}{V_n}=D$, то $\frac{A_1U_1+A_2U_2+\ldots+A_nU_n}{A_1V_1+A_2V_2+\ldots+A_nV_n}=D$ для будь яких $A_1,A_2,\ldots,A_n\in R$.

$\frac{xdx}{x(y+z)}=\frac{ydy}{-xy}=\frac{zdz}{-xz}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0}$ звідки $xdx+ydy+zdz=0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2+z^2\right)=0$ $\Rightarrow$ $x^2+y^2+z^2=C_1$ це один інтеграл системи, другий знайдемо з умови $\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{-x}=\frac{dy-dz}{0}$ звідки $d(y-z)=0$ $\Rightarrow$ $y-z=C_2$ очевидно, що знайдені перші інтеграли незалежні, так що векторні лінії цього поля це лінії перетину поверхонь $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C_1\ (\textit{сфера}) \\ y-z=C_2\ (\textit{площина}) \end{cases}$, тобто кола у просторі.

Другий спосіб.

Перейдемо від (3.5) до системи диференціальних рівнянь у нормальному вигляді: $\frac{\frac{dx}{dt}}{A_x}=\frac{\frac{dy}{dt}}{A_y}=\frac{\frac{dz}{dt}}{A_z}=\phi(x,y,z,t)$, де $\phi(x,y,z,t)$ будь-яка наперед вибрана функція, візьмемо, наприклад, $\phi\equiv 1$, тоді $\frac{\frac{dx}{dt}}{y+z}=\frac{\frac{dy}{dt}}{-x}=\frac{\frac{dz}{dt}}{-x}=1$ звідки отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y+z \\ \frac{dy}{dt}=-x \\ \frac{dz}{dt}=-x \end{cases}$$

Диференціюючи перше рівняння, отримаємо $\frac{d^2x}{dr^2}=\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}$, користуючись другим та третім рівняннями, отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами $\frac{d^2x}{dr^2}+2x=0$ загальний розв'язок якого має вигляд $x=C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t$. Невідомі y та z знайдемо, інтегруючи друге та трете рівняння системи. Остаточно отримаємо параметричні рівняння векторних ліній поля:

$$\begin{cases} x=C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t \\ y=\frac{C_1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t-\frac{C_2}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}+C_3 \\ z=\frac{C_1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t-\frac{C_2}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}+C_4 \end{cases}$$

Векторні поверхні.

Гладка крива L називається *трансверсальною* векторному полю $\overline{A}(M)$, якщо в кожній її точці $P\in L$ дотичний вектор не є колінеарним вектору поля $\overline{A}(P)$.

Множина усіх векторних ліній, що проходять через точки трансверсальної кривої L, утворює поверхню S, яка називається *векторною поверхнею* векторного поля $\overline{A}(M)$. Якщо крива L замкнена, векторну поверхню S називають векторною трубкою.

Потік векторного поля.

Якщо у певному векторному полі $\overline{A}(M)$ задана двостороння поверхня S з вектором нормалі $\overline{n}$, то потоком векторного поля $\overline{A}(M)$ через поверхню S за напрямом нормалі $\overline{n}$ називається поверхневий інтеграл

$$\Pi_S=\iint_S \overline{n}\cdot\overline{A}dS \tag{3.7}$$

або $\Pi_S=\iint_S A_n dS$ де A_n – проекція вектора $\overline{A}$ на вектор нормалі $\overline{n}$.

Якщо поверхня S є векторною поверхнею поля $\overline{A}(M)$, то $\Pi_S=0$, тому що в цьому випадку $\overline{n}\cdot\overline{A}\equiv 0$.

Фізичний зміст потоку векторного поля.

Якщо векторне поле $\overline{A}(M)$ описує поле швидкостей при течії рідини в області X, то потік векторного поля $\overline{A}(M)$ через поверхню $S \subset X$ виражає об'єм рідини, що проходить за одиницю часу через поверхню S.

Розглянемо потік Π_S векторного поля $\overline{A}(M)$ через замкнену поверхню S, що обмежує область D, за напрямом зовнішньої нормалі $\overline{n}$. Можливі три випадки для значення потоку Π_S.

1) Якщо $\Pi_S > 0$, то в області D існують джерела рідини.

2) Якщо $\Pi_S < 0$, то в області D існують стоки рідини.

3) Якщо $\Pi_S = 0$, то виникає невизначеність, або в області D не має джерел і стоків, або вони мають рівну інтенсивність.

Третій випадок показує, що для визначення інтенсивності джерел та стоків потік векторного поля не є задовільною характеристикою, потрібна нова характеристика, яка визначатиме їх інтенсивність в кожній точці області D, такою характеристикою є дивергенція векторного поля.

<u>Дивергенція векторного поля.</u>

Дивергенцією векторного поля $\overline{A}$ в точці M називається границя

$$\lim_{\substack{\tau \to 0 \\ (S \to M)}} \frac{1}{\tau} \iint \overline{n} \cdot \overline{A} dS \equiv \operatorname{div} \overline{A} \tag{3.8}$$

де S – замкнена поверхня, яка обмежує деякий окіл точки M, τ – об'єм, що обмежує поверхня S, $\overline{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S, $(S \to M)$ означає, що поверхня стягується в точку M.

Дивергенція векторного поля є скалярною величиною (утворює скалярне поле), яка не залежить від системи координат, але формула для її обчислення залежить від обраної системи координат.

В прямокутній декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) у випадку неперервно-диференційовного поля, дивергенцію в кожній точці можна знайти за формулою:

$$\operatorname{div} \overline{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \tag{3.9}$$

Якщо поле задано в криволінійних ортогональних координатах (q^1, q^2, q^3), то

$$\operatorname{div} \overline{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial (A_1 H_2 H_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial (A_2 H_1 H_3)}{\partial q^2} + \frac{\partial (A_3 H_1 H_2)}{\partial q^3} \right) \tag{3.10}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

За допомогою оператора $\overline{\nabla}$ дивергенцію записується як скалярний добуток векторів $\operatorname{div}\overline{A} = \overline{\nabla}\cdot\overline{A}$.

Циркуляція векторного поля.

Циркуляцією векторного поля $\overline{A}$ вздовж замкненої кривої L, яка задана параметричним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(s)$, називається криволінійний інтеграл

$$Ц = \oint_L \overline{A}\cdot d\bar{r} \tag{3.11}$$

Векторний елемент $d\bar{r}$ можна записати у вигляді $d\bar{r} = \bar{\tau}dl$, де $\bar{\tau}$ - одиничний дотичний вектор кривої L, dl - елемент довжини дуги кривої L, тоді $Ц = \oint_L \overline{A}\cdot\bar{\tau}dl$.

В прямокутній декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) цей інтеграл має вигляд

$$Ц = \oint_L A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3 \tag{3.12}$$

Ротор векторного поля.

Ротором векторного поля $\overline{A}$ в точці M називається границя

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ (S\to M)}} \frac{1}{\tau}\iint_S \bar{n}\times\overline{A}dS \equiv \operatorname{rot}\overline{A} \tag{3.13}$$

де S – замкнена поверхня, яка обмежує деякий окіл точки M, τ – об’єм, що обмежує поверхня S, $\bar{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S, $(S\to M)$ означає, що поверхня стягується в точку M.

Ротор є вектором, напрям якого залежить від орієнтації системи координат. Такі вектори називають *аксіальними*, або псевдовекторами.

У прямокутній декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) справедлива формула $\operatorname{rot}\overline{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\bar{i}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\bar{i}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\bar{i}_3$, або

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \overline{\nabla}\times\overline{A} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

Якщо поле задано в криволінійних ортогональних координатах $\left(q^1, q^2, q^3\right)$, то

$$\operatorname{rot}\overline{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\begin{vmatrix} H_1\overline{e}_1 & H_2\overline{e}_2 & H_3\overline{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 A_1 & H_2 A_2 & H_3 A_3 \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

де H_i – коефіцієнти Ламе.

Основна властивість ротора векторного поля.

Проекція $\operatorname{rot}\overline{A}(M)$ на будь який напрям $\overline{l}$ в кожній точці поля дорівнює границі відношення циркуляції вздовж контуру, що обмежує плоску площинку, яку проведено через точку M перпендикулярно $\overline{l}$, до площі цієї площинки, коли контур стягується в точку M.

Градієнт, дивергенцію й ротор можна розглядати як диференціальні операції, які застосовуються до скалярних і векторних полів. За допомогою комбінацій цих операцій можна утворити диференціальні операції більш високого порядку.

Диференціальні операції другого порядку.

Якщо поле двічі неперервно-диференційовне, то можна утворити такі операції другого порядку:

1) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u) = \overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}u = \nabla^2 u = \Delta u$, де $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – *оператор Лапласа* в декартових координатах.
2) $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\overline{A}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla}\cdot\overline{A})$
3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overline{A}) = \overline{\nabla}\cdot(\overline{\nabla}\times\overline{A}) \equiv 0$
4) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u) = \overline{\nabla}\times\overline{\nabla}u \equiv \overline{0}$
5) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}A) = \overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\times\overline{A}) = \overline{\nabla}(\overline{\nabla}\cdot\overline{A}) - (\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla})\overline{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\overline{A}) - \Delta\overline{A}$.

Запис $\Delta\overline{A}$ означає покоординатне застосування оператору Лапласа до векторного поля $\overline{A}$.

3.4 Інтегральні теореми у векторному вигляді

Теорема Остроградського-Гауса у векторному вигляді коротко може бути записана так

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div}\overline{A}\,d\tau = \iint_{S} \overline{n}\cdot\overline{A}\,dS \tag{3.16}$$

де S – замкнена поверхня, яка обмежує об'єм τ, $\overline{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S, векторне поле $\overline{A}$ – неперервно-диференційовне в області τ і на поверхні S.

Теорема Стокса у векторному вигляді коротко може бути записана так

$$\iint_S \overline{n} \cdot \operatorname{rot} \overline{A} dS = \oint_L \overline{A} \cdot d\overline{r} \tag{3.17}$$

де L – замкнений контур, який обмежує поверхню S, $\overline{n}$ – вектор нормалі до поверхні S, напрям якого узгоджений з напрямом обходу контуру L, векторне поле $\overline{A}$ – неперервно-диференційовне на контурі L і на поверхні S.

Приклад 3.7 Знайти потік векторного поля $\overline{A} = (x_1 + 3x_2)\overline{i}_1 + (x_3 - x_2)\overline{i}_2 + (2x_1 - x_3)\overline{i}_3$ через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежена поверхнями $x_1^2 + x_2^2 = 4 - x_3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ і знаходиться у першому октанті.

Обчислення провести двома способами: безпосередньо за означенням потоку та за теоремою Остроградського - Гауса.

Розв'язання: *А)* Перший спосіб (безпосередньо).

Поверхня S є кусково-гладкою і складається з гладких поверхонь:

S_{OCB}: $x_1 = 0$, S_{OAC}: $x_2 = 0$, S_{OAB}: $x_3 = 0$ – площини,

S_{ACB}: $x_1^2 + x_2^2 = 4 - x_3$ – параболоїд,

Побудуємо замкнену поверхню, яка обмежується цими поверхнями і розташовується в першому октанті (рисунок 11).

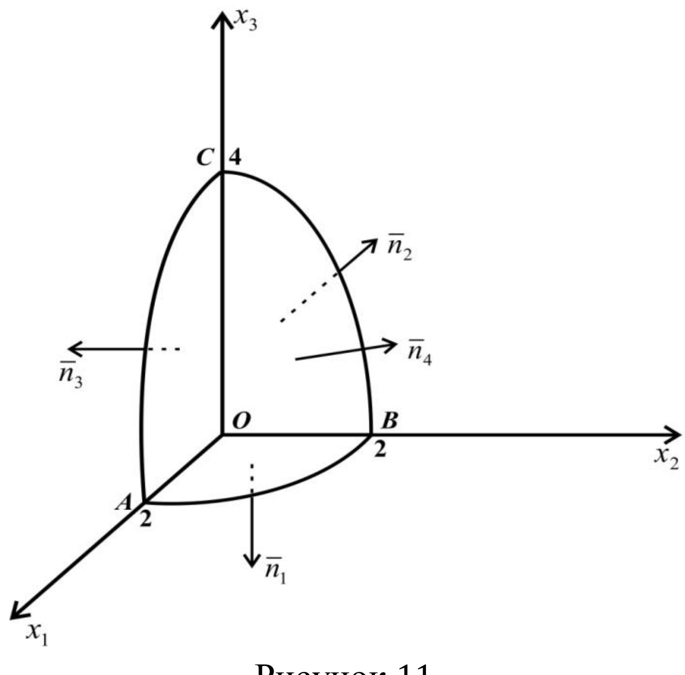

Рисунок 11.

За властивістю адитивності поверхневого інтеграла, маємо

$$\Pi_S = \Pi_{S_{OAB}} + \Pi_{S_{OBC}} + \Pi_{S_{OAC}} + \Pi_{S_{ABC}}$$

Розглянемо окремо кожний інтеграл:

1) S_{OAB}: $x_3 = 0$, $\bar{n}_1 = -\bar{i}_3$, $\bar{n}_1 \cdot \bar{A} = x_3 - 2x_1$, розглянемо проекцію поверхні S_{OAB} на площину Ox_1x_2 – D_{OAB}: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le \sqrt{4 - x_1^2}$, тоді для елемента площі маємо $dS = dx_1 dx_2$ звідки отримуємо

$$\Pi_{S_{OAB}} = \iint\limits_{S_{OAB}} (x_3 - 2x_1) dS = \iint\limits_{D_{OAB}} (-2x_1) dx_1 dx_2 = -2\int_0^2 dx_2 \int_0^{\sqrt{4-x_2^2}} x_1 dx_1 = -\int_0^2 \left(4 - x_2^2\right) dx_2 = -\frac{16}{3}$$

.

2) $S_{OBC}: x_1 = 0$, $\bar{n}_2 = -\bar{i}_1$, $\bar{n}_2 \cdot \bar{A} = -x_1 - 3x_2$, проекція – D_{OBC}: $0 \le x_2 \le 2$, $0 \le x_3 \le 4 - x_2^2$, $dS = dx_2 dx_3$ звідки

$$\Pi_{S_{OBC}} = \iint\limits_{S_{OBC}} (-x_1 - 3x_2) dS = \iint\limits_{D_{OBC}} (-3x_2) dx_2 dx_3 = -3\int_0^2 dx_2 \int_0^{4-x_2^2} x_2 dx_3 =$$

$$= -3\int_0^2 x_2 \left(4 - x_2^2\right) dx_2 = -12$$

3) S_{OAC}: $x_2 = 0$, $\bar{n}_3 = -\bar{i}_2$, $\bar{n}_3 \cdot \bar{A} = x_2 - x_3$, проекція – D_{OAC}: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_3 \le 4 - x_1^2$, $dS = dx_1 dx_3$ звідки

$$\Pi_{S_{OAC}} = \iint\limits_{S_{OAC}} (x_2 - x_3) dS = \iint\limits_{D_{OAC}} (-x_3) dx_1 dx_3 = -\int_0^2 dx_1 \int_0^{4-x_1^2} x_3 dx_3 = -\frac{1}{2}\int_0^2 \left(4 - x_1^2\right)^2 dx_1 =$$

$$= -\frac{128}{15}$$

4) $S_{ABC}: x_1^2 + x_2^2 = 4 - x_3$, $u = x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 4$,

$$\bar{n}_4 = \frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|} = \frac{2x_1\bar{i}_1 + 2x_2\bar{i}_2 + \bar{i}_3}{\sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}},$$

$\bar{n}_4 \cdot \bar{A} = \dfrac{2x_1(x_1 + 3x_2) + 2x_2(x_3 - x_2) + 2x_1 - x_3}{\sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}}$, проекція – D_{ABC}: $0 \le x_1 \le 2$, $0 \le x_2 \le \sqrt{4 - x_1^2}$, елемент площі – $dS = \sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}\, dx_1 dx_2$, звідки отримуємо

$$\Pi_{S_{ABC}} = \iint\limits_{S_{ABC}} \frac{2x_1(x_1 + 3x_2) + 2x_2(x_3 - x_2) + 2x_1 - x_3}{\sqrt{1 + 4x_1^2 + 4x_2^2}} dS =$$

$$= \iint\limits_{D_{ABC}} \left[2x_1(x_1 + 3x_2) + 2x_2\left(4 - x_1^2 - x_2^2 - x_2\right) + 2x_1 - 4 + x_1^2 + x_2^2\right] dx_1 dx_3 =$$

$$= -2\pi + 12 + \frac{16}{3} + \frac{128}{15}$$

Підсумовуючи результати 1) – 4) отримаємо відповідь: $П_S = -2\pi$.

Б) Другий спосіб – за теоремою Остроградського-Гауса.

$$П_S = \iiint\limits_V \operatorname{div} \overline{A} dV .$$

Знайдемо дивергенцію і елемент об’єму в прямокутній декартовій системі координат $\operatorname{div} \overline{A} = -1$, $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, далі перейдемо в потрійному інтегралі до циліндричних координат (r, φ, z), отримаємо

$$П_S = -\iiint\limits_V dx_1 dx_2 dx_3 = -\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^2 r dr \int\limits_0^{4-r^2} dz = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^2 \left(4r - r^3\right) dr = -\frac{\pi}{2}\left(2r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = -2\pi .$$

Приклад 3.8 Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{A} = x_2 \bar{i}_1 + x_3 \bar{i}_2 + x_1 \bar{i}_3$ уздовж контуру L, що є перетином двох поверхонь $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, напрям обходу контру вибрати самостійно. Обчислення провести двома способами: безпосередньо за означенням циркуляції та за теоремою Стокса.

Розв’язання:

А) Перший спосіб – безпосередньо.

Контур L є лінією перетину циліндра $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ та площини $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, тобто – це еліпс (рисунок 12). Виберемо на контурі додатний напрям обходу, тоді циркуляція визначається формулою (3.11).

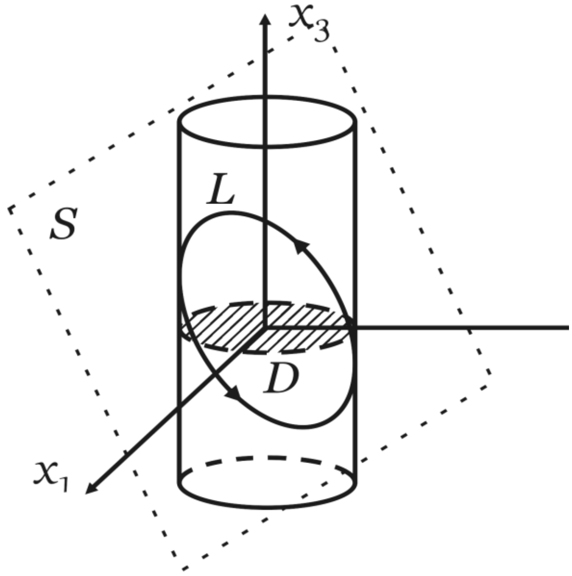

Рисунок 12.

Запишемо параметричні рівняння контуру L

$$\begin{cases} x_1 = R\cos t \\ x_2 = R\sin t \qquad , \; 0 \le t \le 2\pi . \\ x_3 = -R\cos t - R\sin t \end{cases}$$

Підставляючи в (3.12) отримаємо

$$Ц=\oint_L \overline{A}\cdot d\overline{r}=\oint_L x_2dx_1+x_3dx_2+x_1dx_3=\int_0^{2\pi} R\sin t(-R\sin t)+$$
$$+(-R\cos t-R\sin t)R\cos t+R\cos t(R\sin t-R\cos t)dt=-3\pi R^2$$

Б) Другий спосіб – за формулою Стокса.

В якості поверхні S, яку обмежує контур L виберемо площину $x_1+x_2+x_3=0$, тоді циркуляцію можна обчислити за формулою Стокса (3.17).

Знайдемо нормальний вектор $\overline{n}$ до площини $S: x_1+x_2+x_3=0$, напрям якого узгоджений з напрямом обходу контуру L, з врахуванням нормування, отримаємо $\overline{n}=\dfrac{\overline{i}_1+\overline{i}_2+\overline{i}_3}{\sqrt{3}}$, далі знайдемо ротор векторного поля, його проекцію на вектор нормалі та елемент площі поверхні dS в проекції на площину Ox_1x_2.

$$\operatorname{rot}\overline{A}=\begin{vmatrix}\overline{i}_1 & \overline{i}_2 & \overline{i}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ x_2 & x_3 & x_1\end{vmatrix}=-(\overline{i}_1+\overline{i}_2+\overline{i}_3),\ \overline{n}\cdot\operatorname{rot}\overline{A}=-\sqrt{3},\ dS=\sqrt{3}dx_1dx_2.$$

Підставляючи в (3.17) і враховуючи, що проекцією поверхні S на площину Ox_1x_2 є круг $D: x_1^2+x_2^2\le R^2$, остаточно отримаємо

$$Ц=\iint_S \overline{n}\cdot\operatorname{rot}\overline{A}dS=-\iint_S\sqrt{3}dS=-3\iint_D dx_1dx_2=-3\pi R^2.$$

Наведемо також приклади знаходження потоку та циркуляції для полів, які задані у сферичних координатах.

Приклад 3.9 Знайти потік векторного поля $A=\rho\overline{e}_\rho+a^2\sin\theta\overline{e}_\theta$ через поверхню сфери $S:\rho=a$ за напрямом зовнішньої нормалі.

Розв’язання:

А) Перший спосіб – за означенням.

Поверхня сфери $\rho=a$ є координатною поверхнею сферичної системи координат, тому $dS=d\sigma_\rho$, де $d\sigma_\rho$ – елемент площі координатної поверхні $\rho=const$ який за формулою (2.5) дорівнює: $d\sigma_\rho=H_\theta H_\varphi d\theta d\rho=\rho^2\sin\theta d\theta d\rho$, вектор нормалі до сфери $\rho=a$ співпадає за напрямом з вектором локального базису $\overline{e}_\rho$, тобто можна покласти $\overline{n}=\overline{e}_\rho$, тому скалярний добуток

$\left(\overline{A},\overline{e}_{\rho}\right)=\left(\rho\overline{e}_{\rho}+a^{2}\sin\theta\ \overline{e}_{\theta}\right)\cdot\overline{e}_{\rho}=\rho$, замість ρ треба підставити рівняння поверхні $\rho=a$

$$\Pi_S=\iint\limits_S a^3\sin\theta d\theta d\varphi=a^3\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=a^3\cdot 2\cdot 2\pi=4\pi a^3$$

Б) Другий спосіб – за теоремою Остроградського-Гауса.

Знайдемо дивергенцію векторного поля в сферичній системі координат:

$$div\overline{A}=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial\left(A_\rho\rho^2\right)}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial\left(A_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\rho\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\left(A_\rho\rho^2\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\left(A_\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\rho^3}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\left(a^2\sin^2\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial 0}{\partial\varphi}=3+\frac{2a^2\cos\theta}{\rho}.$$

Елемент об'єму в сферичній системі координат має вигляд:

$dV=H_\rho H_\theta H_\varphi d\rho d\theta d\varphi=\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$, звідки за (3.16) для потоку отримаємо

$$\Pi_S=\iiint\limits_V divAdv=\iiint\limits_V\left(3+\frac{2a^2\cos\theta}{\rho}\right)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi=$$

$$=\iiint\limits_V\left(3\rho^2\sin\theta+2a^2\rho\cos\theta\sin\theta\right)d\rho d\theta d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{a}\left(3\rho^2\sin\theta+2a^2\rho\cos\theta\sin\theta\right)d\rho=$$

$$=\left(\int\limits_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta=0\right)=2\pi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{a}3\rho^2d\rho=2\pi\cdot 2\cdot a^3=4\pi a^3.$$

Приклад 3.10 Обчислити циркуляцію векторного поля, що задане в сферичних координатах $\overline{A}=\rho\sin\frac{\varphi}{2}\overline{e}_\rho+\left(\cos2\varphi+\rho\right)\overline{e}_\varphi-\rho^3\sin\varphi\overline{e}_\theta$, уздовж кола $L:\rho=2,\ \theta=\frac{\pi}{6}$.

Розв’язання: $\rho=2$ – сфера, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ – конус, L – лінія перетину сфери та конуса.

За формулою (3.11) циркуляція векторного поля уздовж контуру L дорівнює

$$Ц=\int_L \overline{A}\cdot d\overline{r}\text{, де } d\overline{r}=H_1dq_1\overline{e}_1+H_2dq_2\overline{e}_2+H_3dq_3\overline{e}_3.$$

В нашому випадку: $\overline{A}=\rho\sin\dfrac{\varphi}{2}\overline{e}_\rho+(\cos2\varphi+\rho)\overline{e}_\varphi-\rho^3\sin\varphi\overline{e}_\theta$, $H_\rho=1$, $H_\theta=\rho$, $H_\varphi=\rho\sin\theta$.

Підставляючи в (3.11), отримаємо

$$Ц=\int_L\left(\rho\sin\frac{\varphi}{2}\overline{e}_\rho+(\cos2\varphi+\rho)\overline{e}_\varphi-\rho^3\sin\varphi\overline{e}_\theta\right)\cdot\left(d\rho\overline{e}_\rho+\rho d\theta\overline{e}_\theta+\rho\sin\theta d\varphi\overline{e}_\varphi\right)=$$

$$=\int_L\rho\sin\frac{\varphi}{2}d\rho+\rho\sin\theta(\cos2\varphi+\rho)d\varphi-\rho^2\sin\varphi d\theta=$$

$$=\begin{vmatrix}\rho=2,\ d\rho=0\\ \theta=\dfrac{\pi}{6},\ d\theta=0\\ \varphi=\varphi,\ 0\le\varphi\le2\pi\end{vmatrix}=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\pi}{6}(\cos2\varphi+2)d\varphi=\int_0^{2\pi}(\cos2\varphi+2)d\varphi=4\pi.$$

3.5 Спеціальні векторні поля

Потенціальні векторні поля.

Якщо векторне поле $\overline{A}$ є полем градієнта деякого скалярного поля u, то векторне поле $\overline{A}$ називається *потенціальним*, а поле u його *скалярним потенціалом.*

Тобто за означенням $\overline{A}=\operatorname{grad}u$, u – *скалярній потенціал.*

Критерій потенціальності. Для того щоб диференційовне векторне поле $\overline{A}$ в однозв'язній області $X\subset R^3$ було потенціальним, необхідно і достатньо, щоб $\operatorname{rot}\overline{A}(M)=0$, $\forall M\in X$.

Наслідок. Циркуляція потенціального поля $\overline{A}$ уздовж будь якого замкненого контуру L, що знаходиться усередині X, дорівнює нулю.

Скалярний потенціал потенціального векторного поля $\overline{A}$ можна знайти розв’язуючи систему диференціальних рівнянь $\operatorname{grad}u=\overline{A}$ або за формулою

$$u(M)=\int_{x_1^0}^{x_1} A_1\left(t,x_2^0,x_3^0\right)dt+\int_{x_2^0}^{x_2} A_1\left(x_1^0,t,x_3^0\right)dt+\int_{x_3^0}^{x_3} A_1\left(x_1^0,x_2^0,t\right)dt+u(M_0) \qquad (3.18)$$

де $M_0\left(x_1^0,x_2^0,x_3^0\right)$ – деяка фіксована точка поля, $M(x_1,x_2,x_3)$ – довільна точка поля.

<u>*Соленоїдальні векторні поля.*</u>

Якщо поле $\overline{A}$ є полем ротора деякого векторного поля $\overline{W}$, то векторне поле $\overline{A}$ називається *соленоїдальним*, а вектор $\overline{W}$ його *векторним потенціалом*, тобто за означенням $\overline{A}=\mathrm{rot}\overline{W}$, $\overline{W}$ – векторний потенціал.

Критерій соленоїдальності.

Для того щоб диференційовне векторне поле $\overline{A}$ в однозв'язній області $X\subset R^3$ було соленоїдальним, необхідно й достатньо, щоб $div\overline{A}(M)=0$, $\forall M\in X$.

Векторний потенціал соленоїдального поля в області X визначається з точністю до градієнта довільного скалярного поля, тобто якщо $\overline{W_0}$– векторний потенціал поля $\overline{A}$, то вектор $\overline{W}=\overline{W_0}+gradu$ також є векторним потенціалом векторного поля $\overline{A}$.

Таким чином, для знаходження векторного потенціалу достатньо знайти деякий розв’язок системи диференціальних рівнянь $\mathrm{rot}\overline{W}=\overline{A}$, наприклад, можна вважати, що $W_3=0$, тоді отримаємо

$$\overline{W}=\bar{i}_2\int_{x_1^0}^{x_1} A_3(t,x_2,x_3)dt+\bar{i}_3\left(-\int_{x_1^0}^{x_1} A_2(t,x_2,x_3)dt+\int_{x_2^0}^{x_2} A_1\left(x_1^0,x_2,x_3\right)dt\right) \qquad (3.19)$$

<u>*Квазіпотенціальне векторне поле.*</u>

Якщо існує скалярне поле $\mu(M)$ таке, що $\mu\overline{A}=\mathrm{grad}\,u$ для деякого скалярного поля $u(M)$, то векторне поле $\overline{A}$ називається *квазіпотенціальним*.

Критерій квазіпотенціальності – $\overline{A}\cdot rot\overline{A}\equiv 0$.

<u>*Гармонічне векторне поле.*</u>

Якщо векторне поле $\overline{A}$ є одночасно потенціальним і соленоїдальним, то його називають *гармонічним (лапласовим)* векторним полем.

Потенціал гармонічного векторного поля задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta u=0$, тобто є гармонічною функцією.

Критерій гармонічності векторного поля – $div\overline{A}\equiv 0,\ \mathrm{rot}\,\overline{A}\equiv 0.$

Приклад 3.11 Переконатись, що векторне поле
$\overline{A}=2x_1x_2\bar{i}_1+\left(x_1^2-2x_2x_3\right)\bar{i}_2-x_2^2\bar{i}_3$ потенціальне, та знайти його скалярний потенціал.

<u>Розв’язання</u>: Перевіримо критерій потенціальності

$$\operatorname{rot}\overline{A}=\begin{vmatrix}\bar{i}_1 & \bar{i}_2 & \bar{i}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ 2x_1x_2 & x_1^2-2x_2x_3 & -x_2^2\end{vmatrix}=i_1(-2x_2+2x_2)+i_2\cdot 0+i_3(2x_1-2x_1)\equiv 0 \Rightarrow$$

$\overline{A}=\operatorname{grad}u$.

Потенціал знайдемо за формулою (3.18). За M_0 візьмемо початок координат, а за контур інтегрування візьмемо ламану, яка з'єднує точки M_0 і M та має ланки паралельні осям координат. Тоді отримаємо

$$u(x_1,x_2,x_3)=\int_0^{x_1}2t\cdot 0dt+\int_0^{x_2}\left(x_1^2-2t\cdot 0\right)dt+\int_0^{x_3}\left(-x_2^2\right)dt=x_1^2x_2-x_2^2x_3+C.$$

Приклад 3.12 Переконатись, що векторне поле $\overline{A}=x_1^2x_2\bar{i}_1+\left(x_3-x_1x_2^2\right)\bar{i}_2+2x_1\bar{i}_3$ соленоїдальне та знайти його векторний потенціал.

Розв'язання:

Перевіримо критерій соленоїдальності.

$$\operatorname{div}\overline{A}=2x_1x_2-2x_1x_2\equiv 0,$$

векторне поле $\overline{A}$ – соленоїдальне.

Знайдемо векторний потенціал $\overline{W}$ з векторного рівняння

$$\overline{A}=\operatorname{rot}\overline{W}=\left(\frac{\partial W_3}{\partial x_2}-\frac{\partial W_2}{\partial x_3}\right)\bar{i}_1+\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_3}-\frac{\partial W_3}{\partial x_1}\right)\bar{i}_2+\left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1}-\frac{\partial W_1}{\partial x_2}\right)\bar{i}_3,$$

нехай $W_3=0$, тоді отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial W_2}{\partial x_3}=x_1^2x_2\\ \dfrac{\partial W_1}{\partial x_3}=x_3-x_1x_2^2\\ \dfrac{\partial W_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial W_1}{\partial x_2}=2x_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}W_2=-x_1^2x_2x_3+\varphi(x_1,x_2)\\ W_1=\dfrac{1}{2}x_3^2-x_1x_2^2x_3+\psi(x_1,x_2)\\ \dfrac{\partial W_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial W_1}{\partial x_2}=2x_1\end{cases}$$

нехай $\psi(x_1,x_2)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial W_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial W_1}{\partial x_2}=-2x_1x_2x_3+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+2x_1x_2x_3=2x_1\Rightarrow\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}=2x_1$

$\Rightarrow \varphi = x_1^2$ таким чином $\overline{W_0} = \left(\frac{1}{2}x_3^2 - x_1 x_2^2 x_3\right)\bar{i}_1 + \left(x_1^2 - x_1^2 x_2 x_3\right)\bar{i}_2$, у загальному випадку $\overline{W} = \overline{W_0} + grad u$, де u – довільне диференційовне скалярне поле.

Основна терема векторного аналізу.

Довільне неперервно-диференційовне векторне поле $\overline{A}(M)$, що задане у будь-якій точці $M \in R^3$ тривимірного простору і таке, що, $\lim\limits_{|OM| \to \infty} \overline{A}(M) = \lim\limits_{|OM| \to \infty} rot\overline{A}(M) = \overline{0}$, $\lim\limits_{|OM| \to \infty} div\overline{A}(M) = 0$, може бути єдиним чином представлене у вигляді суми потенціального $\overline{A}_1$ й соленоїдального $\overline{A}_2$ векторних полів, тобто $\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$, де $\mathrm{rot}\,\overline{A}_1 = \overline{0}$, $\mathrm{div}\,\overline{A}_2 = 0$.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте поняття скалярного поля. Перерахуйте основні види скалярних полів, наведіть фізичні приклади.

2. Що таке поверхні рівня, які характеристики скалярного поля вони визначають? Наведіть приклад скалярного поля, яке має поверхнями рівня концентричні сфери.

3. Що називають градієнтом скалярного поля? Як визначається градієнт в прямокутній декартовій системі координат? Які властивості має градієнт скалярного поля?

4. Запишіть формулу для градієнта скалярного поля в ортогональній криволінійній системі координат. Що таке оператор «набла»?

5. Сформулюйте поняття векторного поля. Перерахуйте основні види векторних полів, наведіть фізичні приклади.

6. Що називають векторною лінією векторного поля? Запищіть систему диференціальних рівнянь для визначення векторних ліній.

7. Сформулюйте поняття потоку векторного поля. В чому полягає фізичний зміст потоку?

8. Яку характеристику векторного поля називають дивергенцією? Запишіть формули для обчислення дивергенції в основних ортогональних системах координат.

9. Що таке циркуляція векторного поля? Визначте циркуляцію в прямокутній декартовій системі координат.

10. Сформулюйте поняття ротора векторного поля. Запишіть формулу для ротора в ортогональних координатах. Яким чином ротор пов'язаний з циркуляцією векторного поля?

11. Запишіть за допомогою оператора «набла» основні диференціальні операції першого і другого порядку.

12. Запишіть теореми Острогадського-Гаусса і Стокса у векторному вигляді. Сформулюйте умови цих теорем.

13. Яке векторне поле називають потенціальним? Що таке скалярний потенціал векторного поля і як він знаходиться? Як переконатися, що задане векторне поле є потенціальним? Доведіть рівність нулю циркуляції потенціального векторного поля за будь-яким замкненим контуром.

14. Яке векторне поле називають соленоїдальним? Що таке векторний потенціал векторного поля і як його знайти? Як переконатися, що задане векторне поле є соленоїдальним? Доведіть рівність нулю потоку соленоїдального векторного поля через будь-яку замкнену поверхню.

15. Які векторні поля називають гармонічними? Запишіть критерій гармонічності векторного поля. Наведіть приклад гармонічного поля.

16. Сформулюйте основну теорему векторного аналізу.

Індивідуальне завдання

1. Довести, що вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ утворюють базис, знайти координати вектора $\bar{d}$ в цьому базисі.

2. Задано базис $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$, вектори якого виражені через орти прямокутної декартової системи координат $(\bar{i}_1,\bar{i}_2,\bar{i}_3)$.

Визначити:

а) праву чи ліву систему координат утворює базис $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$;

б) вектори взаємного базису $\bar{e}^1,\bar{e}^2,\bar{e}^3$;

в) об'єми паралелепіпедів побудованих на векторах основного й взаємного базисів;

г) ко– і контраваріантні компоненти вектора $\bar{a}$;

д) ко– і контраваріантні компоненти метричного тензора.

3. Задано компоненти тензора другого рангу $\hat{A}$ в базисі $(\bar{i}_1,\bar{i}_2,\bar{i}_3)$ й новий базис $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$. Знайти аналогічні за будовою компоненти тензора $\hat{A}$ в новій системі координат.

4. Задано тензор T^{ij} і вектор A_k. Знайти вектор, утворений множенням тензора на вектор із подальшою згорткою за першим індексом тензора й індексом вектора.

5. Задано скалярне поле $u(x_1,x_2,x_3)$ й точки M_0, M.

Знайти:

а) поверхні рівня, що проходять через точки M_0 і M.

б) похідну поля u в точці M_0 в напрямку вектора $\overline{M_0M}$.

в) напрям і швидкість найбільшого зростання поля u в точці M_0.

6. Знайти потік векторного поля $\bar{A}$ через поверхню S. Обчислення провести двома способами: безпосередньо і за теоремою Остроградського - Гауса.

7. Знайти циркуляцію векторного поля $\bar{A}$ уздовж контуру L. Обчислення провести двома способами: безпосередньо і за теоремою Стокса.

8. Переконатися, що векторне поле $\bar{A}$ є потенціальним і знайти його скалярний потенціал.

9. Переконатися, що векторне поле $\bar{A}$ є соленоїдальним і знайти його векторний потенціал.

10. Обчислити в криволінійній системі координат.

11. Обчислити потік векторного поля $\bar{A}$ через поверхню S, в криволінійній системі координат.

12. Обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{A}$ уздовж контуру L в криволінійній системі координат.

<u>Зауваження:</u> В задачах 1 - 6 використовуються нижні індекси для позначення декартових координат, тому що в прямокутній декартовій системі координат взаємний базис збігається з основним, коваріантні компоненти вектора збігаються з контраваріантними компонентами, при виконанні роботи допускається замінити декартові координати (x_1, x_2, x_3) на (x, y, z). *В задачах 11-12 циліндричні координати позначені* (r, φ, z), *сферичні –* (ρ, θ, φ).

Варіант 1

1. $\bar{a} = \bar{i}_1,\ \bar{b} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{c} = 2\bar{i}_1 + \bar{i}_3,\ \bar{d} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + \bar{i}_3$.
2. $\bar{e}_1 = -4\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2,\ \bar{e}_2 = 3\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = 2\bar{i}_3,\ \bar{a} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 5\bar{i}_3$.
3. $\hat{A} = \left\|a^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix},\ \bar{e}_1 = -4\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2,\ \bar{e}_2 = 3\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = 2\bar{i}_3$.
4. $\left\|T^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{Vmatrix},\ \left\|A_k\right\| = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$.
5. $u = \left(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2\right)^5\ M_0(1;1;1),\ M(0;1;0)$.
6. $\bar{A} = x_1^2\bar{i}_1 + x_2^2\bar{i}_2 + x_3^2\bar{i}_3,\ S: x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1,\ x_1 = 0, x_2 = 0,\ x_3 = 0$
7. $\bar{A} = \left(x_1^2 + x_3^2\right)\bar{i}_1 - 3x_1x_2\bar{i}_3,\ L: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 = \frac{1}{2}$.
8. $\bar{A} = 2x_1x_2\bar{i}_1 + \left(x_1^2 - 2x_2x_3\right)\bar{i}_2 - x_2^2\bar{i}_3$.
9. $\bar{A} = 3x_1x_2^2\bar{i}_1 - \left(x_2^3 + x_3^2x_2\right)\bar{i}_2 + \frac{1}{3}x_3^3\bar{i}_3$.
10. $grad(U)$, де $U = 2\rho^2\cos\varphi(1 - 2\sin\theta)$.
11. $\bar{A} = \frac{1}{\rho}\sin\theta\bar{e}_\rho + b^3\cos\varphi\bar{e}_\theta$ через поверхню сфери $\rho = b$.
12. $\bar{A} = \sin^2 2\varphi\bar{e}_\rho + \rho^2\bar{e}_\varphi$, уздовж кола $\rho = 1,\ \theta = \frac{\pi}{2}$.

Варіант 2

1. $\bar{a} = 3\bar{i}_1 - \bar{i}_2,\ \bar{b} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 5\bar{i}_3,\ \bar{c} = 7\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2,\ \bar{d} = 4\bar{i}_1 - 2\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3$.
2. $\bar{e}_1 = \bar{i}_1,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 5\bar{i}_3,\ \bar{a} = 7\bar{i}_1 - 3\bar{i}_2 + 2\bar{i}_3$.
3. $\hat{A} = \left\|a^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & -5 \\ 8 & -3 & 8 \end{Vmatrix},\ \bar{e}_1 = \bar{i}_1,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 + 5\bar{i}_3$.

4. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{Vmatrix}, \ \left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{Vmatrix}.$

5. $u = \left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3\right)^3 \ M_0(1;1;2), \ M(0;0;1).$

6. $\overline{A} = \left(x_1^2 - x_2^2\right)\bar{i}_1 + 2x_1x_3\bar{i}_2 - x_2\bar{i}_3, \ S: x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1, \ x_1 = 0, x_2 = 0,$ $x_3 = 0$

7. $\overline{A} = \left(x_1^2 + 2x_2x_3\right)\bar{i}_1 + \left(x_2^2 - x_1\right)\bar{i}_3, \ L: x_1^2 + x_2^2 = 4, \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$

8. $\overline{A} = x_3x_2^2\bar{i}_1 + 2x_1x_2x_3\bar{i}_2 + x_1x_2^2\bar{i}_3.$

9. $\overline{A} = 2x_2x_3\bar{i}_1 + \left(x_2 + x_3^2x_1\right)\bar{i}_2 + \left(x_1^3 - x_3\right)\bar{i}_3.$

10. $rot(\bar{e}_r)$, де $\bar{e}_r$ - одиничний орт циліндричної системи координат.

11. $\overline{A} = \frac{\sin^4\theta}{\rho^2}\bar{e}_\rho + \frac{\theta\sin\varphi}{\rho^2}\bar{e}_\theta + a^3\rho\bar{e}_\varphi$ через поверхню сфери $\rho = a$.

12. $\overline{A} = \cos^2 2\varphi\bar{e}_r + \left(r^3 + z^3\right)\bar{e}_\varphi + 5r\bar{e}_z$, уздовж кола $r = 1, \ z = 1$.

Варіант 3

1. $\bar{a} = 2\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 - \bar{i}_3, \ \bar{b} = -\bar{i}_3, \ \bar{c} = 5\bar{i}_2 + 2\bar{i}_3, \ \bar{d} = 2\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 + 7\bar{i}_3.$

2. $\bar{e}_1 = -\bar{i}_3, \ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + 5\bar{i}_2, \ \bar{e}_3 = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2, \ \bar{a} = 3\bar{i}_1 - 4\bar{i}_2 + 2\bar{i}_3.$

3. $\hat{A} = \left\| a^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} -5 & 3 & 10 \\ 8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{Vmatrix}, \ \bar{e}_1 = -\bar{i}_3, \ \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + 5\bar{i}_2, \ \bar{e}_3 = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2.$

4. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ \left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{Vmatrix}.$

5. $u = \left(x_1^2 + 3x_2 - x_3^2\right)^4, \ M_0(2;-1;0), \ M(1;1;1).$

6. $\overline{A} = (x_1 + 3x_2x_3)\bar{i}_1 + (3x_1 - x_3)\bar{i}_2 + (x_1 + x_2)\bar{i}_3, \ S: x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 1,$ $x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0.$

7. $\overline{A} = x_1x_2\bar{i}_1 - x_1^2\bar{i}_2 + x_2\bar{i}_3, \ L: x_1^2 + x_3^2 = 16, \ x_1 + x_2 = 1.$

8. $\overline{A} = 2x_1x_2\bar{i}_1 + \left(x_1^2 - 2x_2x_3\right)\bar{i}_2 - x_2^2\bar{i}_3.$

9. $\overline{A} = \left(x_1^2 + x_2^2 - x_3\right)\bar{i}_1 + (x_2x_3 - 2x_2x_1)\bar{i}_2 + \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_3^2\right)\bar{i}_3.$

10. $div(\rho\bar{e}_\varphi)$ в сферичній системі координат.

11. $\overline{A} = r^3\overline{e}_r + \cos\varphi\overline{e}_z$ через поверхню $S:\ z = 0,\ z = 1,\ r = 1$.

12. $\overline{A} = \rho^2\overline{e}_\rho + \rho\cos 2\varphi\overline{e}_\theta$ уздовж кола $\rho = 1,\ \varphi = \dfrac{\pi}{4},\ \varphi = \dfrac{5\pi}{4}$.

Варіант 4

1. $\overline{a} = \overline{i}_1 - \overline{i}_2 - \overline{i}_3,\ \overline{b} = 2\overline{i}_2 + \overline{i}_3,\ \overline{c} = 7\overline{i}_1 - \overline{i}_3,\ \overline{d} = \overline{i}_1$.
2. $\overline{e}_1 = 2\overline{i}_2 + 6\overline{i}_3,\ \overline{e}_2 = \overline{i}_1 - \overline{i}_2,\ \overline{e}_3 = \overline{i}_1 + 2\overline{i}_3,\ \overline{a} = -7\overline{i}_1 + 6\overline{i}_2 + \overline{i}_3$.
3. $\hat{A} = \left\| a^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 2 & 11 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{Vmatrix},\ \overline{e}_1 = 2\overline{i}_2 + 6\overline{i}_3,\ \overline{e}_2 = \overline{i}_1 - \overline{i}_2,\ \overline{e}_3 = \overline{i}_1 + 2\overline{i}_3$.
4. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} -8 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix},\ \left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{Vmatrix}$.
5. $u = \left(x_1 + x_2^2 - 2x_3^2\right)^7,\ M_0(2;1;1),\ M(0;-1;1)$.
6. $\overline{A} = 4x_1^2\overline{i}_1 - x_2x_3\overline{i}_2 + x_1\overline{i}_3,\ S: x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{1}{6}x_3 = 1,\ x_1 = 0, x_2 = 0,\ x_3 = 0$.
7. $\overline{A} = x_2\overline{i}_1 + 4x_1x_3\overline{i}_3,\ L: x_1^2 + x_3^2 = 16,\ x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{4}x_3 = 1$.
8. $\overline{A} = \left(3x_2x_1^2 - x_2^3\right)\overline{i}_1 + \left(x_1^3 - 3x_1x_2^2\right)\overline{i}_2$.
9. $\overline{A} = \left(x_2^3 + x_3\right)\overline{i}_1 + \left(3x_1x_3 - x_2\right)\overline{i}_2 + \left(x_2^3 + x_3\right)\overline{i}_3$.
10. $rot\left(\overline{e}_\varphi\right)$, де $\overline{e}_\varphi$ - одиничний орт циліндричної системи координат.

11. $\overline{A} = \rho^3\overline{e}_\rho + \cos^2\varphi\overline{e}_\theta$, через поверхню $S:\ \rho = 1$.

12. $\overline{A} = r\overline{e}_r + a^2\sin\varphi\overline{e}_\varphi + z\overline{e}_z$, уздовж контуру $L:\ r = 2,\ z = 5$.

Варіант 5

1. $\overline{a} = 2\overline{i}_1 + 3\overline{i}_2 - \overline{i}_3,\ \overline{b} = 4\overline{i}_2 + 5\overline{i}_3,\ \overline{c} = 8\overline{i}_1,\ \overline{d} = 3\overline{i}_1 + 7\overline{i}_2$.
2. $\overline{e}_1 = 2\overline{i}_2 + 4\overline{i}_3,\ \overline{e}_2 = 6\overline{i}_1 + \overline{i}_2,\ \overline{e}_3 = 3\overline{i}_1 + \overline{i}_2 + 5\overline{i}_3,\ \overline{a} = 7\overline{i}_1 - 6\overline{i}_2 + 9\overline{i}_3$.
3. $\hat{A} = \left\| a^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 8 \\ 5 & 6 & 11 \end{Vmatrix},\ \overline{e}_1 = 2\overline{i}_2 + 4\overline{i}_3,\ \overline{e}_2 = 6\overline{i}_1 + \overline{i}_2,\ \overline{e}_3 = 3\overline{i}_1 + \overline{i}_2 + 5\overline{i}_3$.

4. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 7 & -10 \\ 3 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$, $\left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{Vmatrix}$.

5. $u = \left(x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2\right)^4$, $M_0(1;0;0)$, $M(0;1;0)$.

6. $\overline{A} = (2x_1 - 3x_2)\bar{i}_1 + (7x_1 - x_3)\bar{i}_2$, $S: \frac{1}{4}x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$, $x_1 = 0, x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

7. $\overline{A} = (6x_2 - x_3)\bar{i}_1 + (5x_1 + x_3)\bar{i}_2 + (x_1 - x_2)\bar{i}_3$, $L: x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 = 1$, $x_2 + 2x_3 = 1$.

8. $\overline{A} = \left(3x_2 x_1^2 x_3\right)\bar{i}_1 + \left(x_1^3 x_3\right)\bar{i}_2 + \left(x_2 x_1^3\right)\bar{i}_3$.

9. $\overline{A} = \left(7x_2 - x_1^2 x_3\right)\bar{i}_1 + \left(2x_1 x_2 x_3 - x_2^3\right)\bar{i}_2 + 3x_2^3 x_3 \bar{i}_3$.

10. $div\left(r^2 \bar{e}_\varphi\right)$, де $\bar{e}_\varphi$ - одиничний орт циліндричної системи координат.

11. $\overline{A} = r^2 \cos^2 \varphi \bar{e}_r + z\bar{e}_z$, через поверхню $S:\ z = 0,\ z = 2,\ r = 2$.

12. $\overline{A} = \rho \bar{e}_\rho + \frac{\cos^2 \theta + 5\sin^3 \varphi}{\rho} \bar{e}_\varphi$ уздовж контуру $L:\ \rho = 2,\ \theta = \frac{\pi}{4}$.

Варіант 6

1. $\bar{a} = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - 3\bar{i}_3$, $\bar{b} = 3\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3$, $\bar{c} = 2\bar{i}_3$, $\bar{d} = -\bar{i}_1 + 4\bar{i}_2$.

2. $\bar{e}_1 = i_1 - \bar{i}_2 + 3\bar{i}_3$, $\bar{e}_2 = -\bar{i}_1$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_2 + 4\bar{i}_3$, $\bar{a} = 3\bar{i}_2 + 8\bar{i}_3$.

3. $\hat{A} = \left\| a^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 0 \\ -7 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1 = i_1 - \bar{i}_2 + 3\bar{i}_3$, $\bar{e}_2 = -\bar{i}_1$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_2 + 4\bar{i}_3$.

4. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}$, $\left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{Vmatrix}$.

5. $u = \left(x_1^2 - x_2^2 - 2x_3\right)^3$, $M_0(1;0;0)$, $M(2;1;1)$.

6. $\overline{A} = (3x_1 + x_2)\bar{i}_1 - 2x_3 x_1 \bar{i}_2 + (6x_1 - x_2)\bar{i}_3$, $S: x_1 - x_2 - 5x_3 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

7. $\overline{A} = (2x_3 - x_1)\bar{i}_1 + (7x_2 + x_1)\bar{i}_2 - 3x_3\bar{i}_3$, $L: x_1^2 + 9x_2^2 = 1$, $x_1 + x_3 = 2$.

8. $\overline{A} = 2x_1(x_2 + x_3)\bar{i}_1 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)\bar{i}_2 + \left(x_1^2 + x_3^2\right)\bar{i}_3$.

9. $\bar{A}=\left(x_1^4+x_2^4\right)\bar{i}_1+\left(x_2x_3+x_3^2\right)\bar{i}_2-\left(4x_1^3x_3+\dfrac{x_3^2}{2}\right)\bar{i}_3$.

10. $rot\left(z\bar{e}_r\right)$, де $\bar{e}_r$ - одиничний орт циліндричної системи координат.

11. $\bar{A}=\sqrt{r^3}\bar{e}_r+\bar{e}_\varphi+z^3\bar{e}_z$, через поверхню $S:\ z=-1,\ z=1,\ r=1$.

12. $\bar{A}=\rho^5\bar{e}_\rho+\dfrac{\sin\varphi}{\rho^2}\bar{e}_\theta$ уздовж контуру $L:\ \rho=2,\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$.

Варіант 7

1. $\bar{a}=\bar{i}_1+2\bar{i}_2+3\bar{i}_3$, $\bar{b}=-\bar{i}_2+4\bar{i}_3$, $\bar{c}=7\bar{i}_3$, $\bar{d}=\bar{i}_1+\bar{i}_2$.
2. $\bar{e}_1=-\bar{i}_1+2\bar{i}_2$, $\bar{e}_2=3\bar{i}_1$, $\bar{e}_3=4\bar{i}_3$, $\bar{a}=-5\bar{i}_1+6\bar{i}_2-9\bar{i}_3$.
3. $\hat{A}=\left\|a^{ij}\right\|=\begin{Vmatrix}2&0&1\\3&4&5\\1&8&9\end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1=-\bar{i}_1+2\bar{i}_2$, $\bar{e}_2=3\bar{i}_1$, $\bar{e}_3=4\bar{i}_3$.
4. $\left\|T^{ij}\right\|=\begin{Vmatrix}2&3&1\\3&4&0\\0&2&0\end{Vmatrix}$, $\left\|A_k\right\|=\begin{Vmatrix}2\\1\\8\end{Vmatrix}$.
5. $u=\left(2x_1^2+x_2^2-x_3\right)^6$, $M_0(1;1;3)$, $M(0;2;3)$.
6. $\bar{A}=\left(4x_1+x_3\right)\bar{i}_1-\left(3x_2+x_1\right)\bar{i}_2+\left(x_2+3x_3\right)\bar{i}_3$, $S:x_1+4x_2-2x_3=-2$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$.
7. $\bar{A}=x_2^2\bar{i}_1+\left(x_1-x_3\right)\bar{i}_2+x_1^2\bar{i}_3$, $L:x_1^2+x_2^2=4$, $x_1+3x_3=-1$.
8. $\bar{A}=\left(x_1^3-8\right)\bar{i}_1+2x_2x_3\bar{i}_2+x_2^2\bar{i}_3$.
9. $\bar{A}=x_2^2x_3^3\bar{i}_1+\left(x_1^2x_2-x_2^2x_3\right)\bar{i}_2+\left(x_3^2x_2-x_1^2x_3\right)\bar{i}_3$.
10. $div\left(\rho\bar{e}_\varphi\right)$, де $\bar{e}_\varphi$ - одиничний орт сферичної системи координат.
11. $\bar{A}=\bar{e}_r+r^3\cos^3\varphi\bar{e}_\varphi+\left(r+z^2\cos\varphi\right)\bar{e}_z$, $S:\ z=0,\ z=1,\ r=1$.
12. $\bar{A}=\dfrac{\bar{e}_\theta}{\rho}+\dfrac{\cos\theta}{\rho^3}\bar{e}_\varphi$ уздовж контуру $L:\ \rho=1,\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$.

Варіант 8

1. $\bar{a}=2\bar{i}_1+3\bar{i}_2$, $\bar{b}=\bar{i}_1-\bar{i}_2$, $\bar{c}=\bar{i}_3$, $\bar{d}=\bar{i}_1+4\bar{i}_2-\bar{i}_3$.
2. $\bar{e}_1=4\bar{i}_1$, $\bar{e}_2=2\bar{i}_2$, $\bar{e}_3=\bar{i}_1-\bar{i}_3$, $\bar{a}=10\bar{i}_1+\bar{i}_2-17\bar{i}_3$.

3. $\hat{A} = \left\| a^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1 = 4\bar{i}_1$, $\bar{e}_2 = 2\bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_1 - \bar{i}_3$.

4. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 2 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$, $\left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{Vmatrix}$.

5. $u = \left(x_1 + x_2^2 + 2x_3^2\right)^2$ $M_0(0;0;0)$, $M(-2;1;1)$.

6. $\overline{A} = (3x_2 - x_1)\bar{i}_1 + (x_2 - x_3)\bar{i}_2 + x_2^2\bar{i}_3$, $S: 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

7. $\overline{A} = (2x_1 + x_2)\bar{i}_1 + x_3\bar{i}_2 + (x_1 - x_2)\bar{i}_3$, $L: x_3^2 + x_2^2 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

8. $\overline{A} = x_1^4\bar{i}_1 + \dfrac{x_3^2}{2}\bar{i}_2 + x_3x_2\bar{i}_3$.

9. $\overline{A} = \left(3x_1^2x_2 + x_3\right)\bar{i}_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right)\bar{i}_2 - 6x_1x_2x_3\bar{i}_3$.

10. $rot\left(\theta\bar{e}_\rho\right)$, де $\bar{e}_\rho$ - одиничний орт сферичної системи координат.

11. $\overline{A} = 5a^2\bar{e}_r + \dfrac{\cos\varphi}{z^2}\bar{e}_\varphi$, через поверхню $S:\ z = 1,\ z = 2,\ r = 1$.

12. $\overline{A} = \rho^2\bar{e}_\rho + \rho\cos\theta\bar{e}_\varphi$ уздовж контуру $L:\ \rho = 1,\ \theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Варіант 9

1. $\bar{a} = 2\bar{i}_2 + 3\bar{i}_3$, $\bar{b} = 3\bar{i}_2 + 4\bar{i}_3$, $\bar{c} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2$, $\bar{d} = 2\bar{i}_1 - 2\bar{i}_3$.

2. $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_2$, $\bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_2 - \bar{i}_3$, $\bar{a} = 12\bar{i}_2 - 9\bar{i}_3$.

3. $\hat{A} = \left\| a^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_2$, $\bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_2 - \bar{i}_3$.

4. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$, $\left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

5. $u = \left(3x_1 + x_2^2 + x_3^2\right)^3$ $M_0(0;1;0)$, $M(-2;-2;1)$.

6. $\overline{A} = (6x_2x_1)\bar{i}_1 + (3x_1 - 7x_2)\bar{i}_2 + \bar{i}_3$, $S: x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

7. $\overline{A} = (x_1 - 3x_3)\bar{i}_1 + (2x_2 + x_1)\bar{i}_2 + 6x_1\bar{i}_3$, $L: x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, $x_3 = 2$.

8. $\overline{A} = \dfrac{1}{3}x_1x_2^3\bar{i}_1 + \dfrac{x_1^2x_2^2}{2}\bar{i}_2 + x_3^4\bar{i}_3$.

9. $\overline{A} = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\bar{i}_1 + \left(x_3^2 + x_1^2\right)\bar{i}_2 - 2x_1x_3\bar{i}_3$.

10. $rot(\varphi\bar{e}_\theta)$, де $\bar{e}_\theta$ - одиничний орт сферичної системи координат.

11. $\overline{A} = a^2 \sin\varphi\bar{e}_r + z\bar{e}_z$, через поверхню $S:\ z = 0,\ z = 3,\ r = 4$.

12. $\overline{A} = \left(5\cos\varphi + \rho^2 \sin\theta\right)\bar{e}_\theta + \rho^2 \sin 2\theta\bar{e}_\varphi$ уздовж контуру $L:\ \rho = 2,\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Варіант 10

1. $\bar{a} = 3\bar{i}_2 + \bar{i}_3,\ \bar{b} = \bar{i}_2 - 3\bar{i}_3,\ \bar{c} = \bar{i}_1 - \bar{i}_2 - \bar{i}_3,\ \bar{d} = -\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3$.

2. $\bar{e}_1 = \bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = 3\bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{a} = 15\bar{i}_1 + 8\bar{i}_2 - 7\bar{i}_3$.

3. $\hat{A} = \left\|a^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix},\ \bar{e}_1 = \bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = 3\bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2$.

4. $\left\|T^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{Vmatrix},\ \left\|A_k\right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{Vmatrix}$.

5. $u = \left(4x_1 - x_2^2 - x_3^2\right)^4\ \ M_0(1;-2;0),\ M(2;0;3)$.

6. $\overline{A} = (2x_1 + 3x_3)\bar{i}_1 + (x_1 - x_2)\bar{i}_2 + (x_3 - 3x_2)\bar{i}_3,\ S: x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$.

7. $\overline{A} = (x_1 + x_3)\bar{i}_1 - 3x_1\bar{i}_2 - 2x_3\bar{i}_3,\ L: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9,\ x_2 = 2$.

8. $\overline{A} = \left(x_1^2 + x_2\right)\bar{i}_1 + (x_1 - 1)\bar{i}_2 + \left(x_3^3 - 1\right)\bar{i}_3$.

9. $\overline{A} = x_1^2 x_2 x_3 \bar{i}_1 + \left(x_3^2 - x_1^2\right)\bar{i}_2 + \left(x_2^2 - x_1 x_2 x_3^2\right)\bar{i}_3$.

10. $div(r\cos\varphi\bar{e}_z)$, де $\bar{e}_z$ - одиничний орт циліндричної системи координат.

11. $\overline{A} = \dfrac{r^2}{b^2}\bar{e}_r + \dfrac{\sin 2\varphi}{z}\bar{e}_\varphi$, через поверхню $S:\ z = 1,\ z = 3,\ r = 4$.

12. $\overline{A} = \rho\bar{e}_\varphi + \cos^5 2\varphi\bar{e}_\rho$, уздовж контуру $L:\ \rho = 1,\ \theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

Варіант 11

1. $\bar{a} = 2\bar{i}_1 + \bar{i}_2,\ \bar{b} = -\bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3,\ \bar{c} = \bar{i}_3,\ \bar{d} = 3\bar{i}_1 - 5\bar{i}_2 + \bar{i}_3$.

2. $\bar{e}_1 = -3\bar{i}_1 + \bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_2 + 2\bar{i}_3,\ \bar{e}_3 = 4\bar{i}_1,\ \bar{a} = 6\bar{i}_1 - 2\bar{i}_2 + \bar{i}_3$.

3. $\hat{A}=\left\|a^{ij}\right\|=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1=-3\bar{i}_1+\bar{i}_3$, $\bar{e}_2=\bar{i}_2+2\bar{i}_3$, $\bar{e}_3=4\bar{i}_1$.

4. $\left\|T^{ij}\right\|=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\left\|A_k\right\|=\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

5. $u=\left(2x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)^3$ $M_0(1;1;0)$, $M(0;1;1)$.

6. $\bar{A}=x_1\bar{i}_1+2x_2^2\bar{i}_2+x_3^2\bar{i}_3$, $S: x_1-x_2+2x_3=1$, $x_1=0, x_2=0$, $x_3=0$

7. $\bar{A}=\left(2x_1+3x_3^2\right)\bar{i}_2-\left(3x_1+x_2\right)\bar{i}_3$, $L: x_1^2+x_2^2=1$, $x_3=\frac{1}{2}$.

8. $\bar{A}=\left(x_1^2+x_2+x_3\right)\bar{i}_1+\left(x_1+x_2^2+x_3\right)\bar{i}_2\left(x_1+x_2-x_3^2\right)\bar{i}_3$.

9. $\bar{A}=\left(x_1^2+x_3\right)\bar{i}_1+\left(x_1+x_2^2x_3\right)\bar{i}_2-\left(2x_1x_3+x_3^2x_2\right)\bar{i}_3$.

10. $grad(U)$, де $U=2\rho^3\sin\varphi\left(1+\sin^2\theta\right)$.

11. $\bar{A}=\sin\theta\bar{e}_\rho+2\cos^3\varphi\bar{e}_\theta$ через поверхню сфери $\rho=1$.

12. $\bar{A}=\cos^2 3\varphi\bar{e}_\rho+\rho^3\bar{e}_\theta+\bar{e}_\varphi$ уздовж кола $\rho=1$, $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Варіант 12

1. $\bar{a}=2\bar{i}_1+\bar{i}_2$, $\bar{b}=\bar{i}_1-\bar{i}_2-\bar{i}_3$, $\bar{c}=\bar{i}_1+2\bar{i}_2$, $\bar{d}=\bar{i}_1+8\bar{i}_2+2\bar{i}_3$.

2. $\bar{e}_1=\bar{i}_2$, $\bar{e}_2=\bar{i}_1+\bar{i}_3$, $\bar{e}_3=\bar{i}_1-\bar{i}_2$, $\bar{a}=2\bar{i}_1-11\bar{i}_2-\bar{i}_3$.

3. $\hat{A}=\left\|a^{ij}\right\|=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$, $\bar{e}_1=\bar{i}_2$, $\bar{e}_2=\bar{i}_1+\bar{i}_3$, $\bar{e}_3=\bar{i}_1-\bar{i}_2$.

4. $\left\|T^{ij}\right\|=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\left\|A_k\right\|=\begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{Vmatrix}$.

5. $u=\left(x_1^2-x_2^2+3x_3^2\right)^3$ $M_0(0;2;1)$, $M(1;3;1)$.

6. $\bar{A}=\left(2x_1x_2\right)\bar{i}_1-\left(x_1+x_3\right)\bar{i}_2+x_3^2\bar{i}_3$, $S: x_1+x_2-x_3=1$, $x_1=0, x_2=0$, $x_3=0$.

7. $\bar{A}=\left(x_2^2-x_3^2\right)\bar{i}_1+\left(x_2^2-x_1^2\right)\bar{i}_2$, $L: x_1^2+x_2^2=1$, $2x_1+x_2+x_3=1$.

8. $\bar{A}=\left(x_1+x_3x_2\right)\bar{i}_1+x_1x_3\bar{i}_2+\left(x_1x_2+x_3\right)\bar{i}_3$.

9. $\bar{A}=x_1x_3\bar{i}_1+\left(x_3+x_2x_3\right)\bar{i}_2-x_3^2\bar{i}_3$.

10. $rot\left(\bar{e}_r+r\bar{e}_\varphi\right)$, в циліндричній системі координат.

11. $\overline{A}=\dfrac{\sin^2\theta}{\rho}\overline{e}_\rho+\dfrac{\cos\varphi}{\pi}\overline{e}_\theta-\rho^2\overline{e}_\varphi$ через поверхню сфери $\rho=3$.

12. $\overline{A}=\cos\varphi\overline{e}_r+(r-z)\overline{e}_\varphi+z\overline{e}_z$, уздовж кола $r=1$, $z=1$.

Варіант 13

1. $\overline{a}=-\overline{i}_3$, $\overline{b}=\overline{i}_1+\overline{i}_3$, $\overline{c}=2\overline{i}_2$, $\overline{d}=\overline{i}_1+3\overline{i}_2+4\overline{i}_3$.
2. $\overline{e}_1=\overline{i}_2$, $\overline{e}_2=\overline{i}_1+2\overline{i}_3$, $\overline{e}_3=-\overline{i}_1+\overline{i}_2$, $\overline{a}=4\overline{i}_1-3\overline{i}_2+\overline{i}_3$.
3. $\hat{A}=\left\|a^{ij}\right\|=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{Vmatrix}$, $\overline{e}_1=\overline{i}_2$, $\overline{e}_2=\overline{i}_1+2\overline{i}_3$, $\overline{e}_3=-\overline{i}_1+\overline{i}_2$.
4. $\left\|T^{ij}\right\|=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 0\\ 7 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{Vmatrix}$, $\left\|A_k\right\|=\begin{Vmatrix}1\\ 1\\ -1\end{Vmatrix}$.
5. $u=\left(x_1^2-x_2+x_3^2\right)^5$, $M_0(2;4;1)$, $M(3;5;2)$.
6. $\overline{A}=x_3\overline{i}_1+\left(x_1^2+x_3\right)\overline{i}_2+(x_1x_2)\overline{i}_3$, $S: x_1-2x_2+x_3=1$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$.
7. $\overline{A}=2x_1x_3\overline{i}_1-x_2\overline{i}_2+x_3\overline{i}_3$, $L: x_1^2+x_2^2=4$, $x_1+x_2+x_3=1$.
8. $\overline{A}=\left(2x_1x_2+x_1^2\right)\overline{i}_1+\left(x_1^2-2x_2x_3+x_2\right)\overline{i}_2-\left(x_2^2+x_3^2\right)\overline{i}_3$.
9. $\overline{A}=\left(3x_1-x_2^2\right)\overline{i}_1+(x_2x_3-2x_2)\overline{i}_2+\left(x_1^3-x_3+1\right)\overline{i}_3$.
10. $div\left(r\cos\varphi\overline{e}_\varphi+z^2\sin\varphi\overline{e}_z\right)$ в циліндричній системі координат.
11. $\overline{A}=r\sin\varphi\overline{e}_r+z\overline{e}_\varphi$ через поверхню $S:\ z=0$, $z=1$, $r=1$.
12. $\overline{A}=\rho\overline{e}_\rho+\rho^2\sin\varphi\overline{e}_\theta+\overline{e}_\varphi$ уздовж кола $L:\ \rho=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$.

Варіант 14

1. $\overline{a}=\overline{i}_1+\overline{i}_2-\overline{i}_3$, $\overline{b}=2\overline{i}_2-\overline{i}_3$, $\overline{c}=4\overline{i}_1$, $\overline{d}=\overline{i}_1+\overline{i}_3$.
2. $\overline{e}_1=\overline{i}_2+7\overline{i}_3$, $\overline{e}_2=\overline{i}_1$, $\overline{e}_3=\overline{i}_1+\overline{i}_3$, $\overline{a}=\overline{i}_1+2\overline{i}_2+3\overline{i}_3$.
3. $\hat{A}=\left\|a^{ij}\right\|=\begin{Vmatrix}0 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{Vmatrix}$, $\overline{e}_1=\overline{i}_2+7\overline{i}_3$, $\overline{e}_2=\overline{i}_1$, $\overline{e}_3=\overline{i}_1+\overline{i}_3$.

4. $\left\|T^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}, \ \left\|A_k\right\| = \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}.$

5. $u = \left(x + x_2^2 + x_3^2\right)^3, \ M_0(-1;1;1), \ M(0;-2;3).$

6. $\overline{A} = x_2^2\bar{i}_1 - x_1x_2x_3\bar{i}_2 + x_3^2\bar{i}_3, \ S: x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \ x_1 = 0, x_2 = 0, \ x_3 = 0.$

7. $\overline{A} = x_1\bar{i}_1 + x_3\bar{i}_3, \ L: x_2^2 + x_3^2 = 9, \ x_1 + x_2 + x_3 = 0.$

8. $\overline{A} = \left(3x_2x_1^2 + x_2^3 - x_1^2\right)\bar{i}_1 + \left(x_1^3 + 3x_1x_2^2\right)\bar{i}_2 + \left(x_3^3 + 1\right)\bar{i}_3.$

9. $\overline{A} = \left(x_1x_2^2 + x_2\right)\bar{i}_1 + \left(x_1x_3 - x_2\right)\bar{i}_2 + \left(x_3 - x_3x_2^2\right)\bar{i}_3.$

10. $rot\left(\bar{e}_\rho + \rho\bar{e}_\varphi\right).$

11. $\overline{A} = r\bar{e}_\varphi + \sin^2 2\varphi\bar{e}_z$, через поверхню $S: \ z = -1, \ z = 1, \ r = 2.$

12. $\overline{A} = \rho\bar{e}_\rho + \bar{e}_\theta + a^2\cos\varphi\bar{e}_\varphi$, уздовж контуру $L: \ \rho = a, \ \theta = \frac{\pi}{6}.$

Варіант 15

1. $\bar{a} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 - \bar{i}_3, \ \bar{b} = \bar{i}_2 + 5\bar{i}_3, \ \bar{c} = -\bar{i}_1, \ \bar{d} = 3\bar{i}_1 + 5\bar{i}_3.$

2. $\bar{e}_1 = \bar{i}_2 - \bar{i}_3, \ \bar{e}_2 = 2\bar{i}_1 + \bar{i}_2, \ \bar{e}_3 = 3\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - \bar{i}_3, \ \bar{a} = \bar{i}_1 - 6\bar{i}_2 + 2\bar{i}_3.$

3. $\hat{A} = \left\|a^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{Vmatrix}, \ \bar{e}_1 = \bar{i}_2 - \bar{i}_3, \ \bar{e}_2 = 2\bar{i}_1 + \bar{i}_2, \ \bar{e}_3 = 3\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - \bar{i}_3.$

4. $\left\|T^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \end{Vmatrix}, \ \left\|A_k\right\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{Vmatrix}.$

5. $u = \left(x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2\right)^4, \ M_0(1;0;0), \ M(0;1;1).$

6. $\overline{A} = \left(x_1^2 - 3x_2\right)\bar{i}_1 + \left(-x_1 + 6x_3\right)\bar{i}_3, \ S: x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \ x_1 = 0, x_2 = 0,$
$x_3 = 0$

7. $\overline{A} = \left(2x_1 - 3x_2\right)\bar{i}_1 + \left(4x_1 + x_3\right)\bar{i}_2 + \left(3x_1 - 5x_2\right)\bar{i}_3, \ L: x_1^2 + x_2^2 = 1,$
$x_2 + x_3 = 1.$

8. $\overline{A} = \left(x_2 + x_1^2x_3\right)\bar{i}_1 + \left(x_1 + 3x_2^3\right)\bar{i}_2 + \left(2x_3 + \frac{x_1^3}{3}\right)\bar{i}_3.$

9. $\overline{A} = \left(x_2 + x_1^2x_3\right)\bar{i}_1 + \left(x_1x_2x_3 - x_1^4\right)\bar{i}_2 - \frac{3}{2}x_1x_3^2\bar{i}_3.$

10. $div\left(\rho^2\bar{e}_\theta\right)$

11. $\bar{A} = r^3 \sin 2\varphi \bar{e}_r + \cos\varphi \bar{e}_z$, через поверхню $S:\ z = 0,\ z = 1,\ r = 4$.

12. $\bar{A} = \bar{e}_\rho + \dfrac{\sin^2 3\varphi}{\rho} \bar{e}_\theta$ уздовж контуру $L:\ \rho = 1,\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Варіант 16

1. $\bar{a} = -2\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 - \bar{i}_3,\ \bar{b} = 3\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3,\ \bar{c} = 2\bar{i}_1,\ \bar{d} = -\bar{i}_2 + 4\bar{i}_3$.
2. $\bar{e}_1 = i_1 - \bar{i}_2 + \bar{i}_3,\ \bar{e}_2 = \bar{i}_2,\ \bar{e}_3 = \bar{i}_2 + 4\bar{i}_3,\ \bar{a} = 2\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2$.
3. $\hat{A} = \left\| a^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{Vmatrix},\ \alpha = \left\| \alpha_i^{k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.
4. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{Vmatrix},\ \left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{Vmatrix}$.
5. $u = \left(x_1^2 + 2x_2^2 - x_3\right)^4,\ M_0(1;0;0),\ M(1;1;1)$.
6. $\bar{A} = (x_1 + x_2)\bar{i}_1 - x_3 x_1 \bar{i}_2 + (x_1 + x_2)\bar{i}_3,\ S: x_1 + x_2 - x_3 = 1,\ x_1 = 0, x_2 = 0,$ $x_3 = 0$.
7. $\bar{A} = (x_3 - 2x_1)\bar{i}_1 + (x_2 + 7x_1)\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3,\ L: x_1^2 + x_2^2 = 4,\ x_1 + x_1 + x_3 = 1$.
8. $\bar{A} = 2x_1(x_2 + x_3)\bar{i}_1 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)\bar{i}_2 + \left(x_1^2 + 2x_3\right)\bar{i}_3$.
9. $\bar{A} = \left(2x_1 x_2 + x_3^2\right)\bar{i}_1 + \left(x_2 x_3 - x_2^2\right)\bar{i}_2 - \left(x_2^3 + \dfrac{x_3^2}{2}\right)\bar{i}_3$.
10. $rot\left(r\bar{e}_\varphi + \varphi\bar{e}_z\right)$.
11. $\bar{A} = \bar{e}_r + \bar{e}_\varphi + r^2\bar{e}_z$, через поверхню $S:\ z = 0,\ z = 1,\ r = 3$.
12. $\bar{A} = \rho^2\bar{e}_\rho + \cos\theta\bar{e}_\varphi$ уздовж контуру $L:\ \rho = 1,\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Варіант 17

1. $\bar{a} = \bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 + 4\bar{i}_3,\ \bar{b} = -\bar{i}_2 + 2\bar{i}_3,\ \bar{c} = -\bar{i}_3,\ \bar{d} = 2\bar{i}_1 + \bar{i}_3$.
2. $\bar{e}_1 = -\bar{i}_1 - \bar{i}_2,\ \bar{e}_2 = 2\bar{i}_1,\ \bar{e}_3 = 4\bar{i}_3,\ \bar{a} = \bar{i}_1 + 6\bar{i}_2 - 2\bar{i}_3$.
3. $\hat{A} = \left\| a^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix},\ \alpha = \left\| \alpha_i^{k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{Vmatrix}$.

4. $\left\|T^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$, $\left\|A_k\right\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{Vmatrix}$.

5. $u = \left(3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3\right)^3$, $M_0(1;1;4)$, $M(0;0;0)$.

6. $\overline{A} = (x_1 + 2x_3)\bar{i}_1 - (2x_2 + x_1)\bar{i}_2 + (3x_2 - x_3)\bar{i}_3$, $S: x_1 - x_2 - 2x_3 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

7. $\overline{A} = 2x_1\bar{i}_1 + (x_1 + x_2)\bar{i}_2 + x_3^2\bar{i}_3$, $L: x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_2 + x_3 = 1$.

8. $\overline{A} = \left(x_1^2 - x_2\right)\bar{i}_1 + (6x_2x_3 - x_1)\bar{i}_2 + \left(3x_2^2 + x_3^2\right)\bar{i}_3$.

9. $\overline{A} = 3x_2^3x_3\bar{i}_1 + \left(2x_1x_2 - 5x_3\right)\bar{i}_2 + \left(x_3^2x_2 - 2x_1x_3\right)\bar{i}_3$.

10. $div\left(\rho\bar{e}_\theta + \cos\varphi\bar{e}_\varphi\right)$.

11. $\overline{A} = \bar{e}_r + 3r^2\bar{e}_\varphi + \left(r + z^2\right)\bar{e}_z$, через поверхню $S: z = 0$, $z = -1$, $r = 1$.

12. $\overline{A} = \rho\bar{e}_\rho + \dfrac{\bar{e}_\theta}{\rho^2} + \dfrac{\sin\theta}{\rho}\bar{e}_\varphi$ уздовж контуру $L: \rho = 1$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Варіант 18

1. $\bar{a} = -\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2$, $\bar{b} = \bar{i}_1 + 2\bar{i}_2$, $\bar{c} = -\bar{i}_3$, $\bar{d} = \bar{i}_1 + 4\bar{i}_2 - \bar{i}_3$.

2. $\bar{e}_1 = 2\bar{i}_1$, $\bar{e}_2 = -\bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = \bar{i}_2 + 2\bar{i}_3$, $\bar{a} = 2\bar{i}_1 + \bar{i}_2 - 7\bar{i}_3$.

3. $\hat{A} = \left\|a^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\alpha = \left\|\alpha_i^{k'}\right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

4. $\left\|T^{ij}\right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{Vmatrix}$, $\left\|A_k\right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

5. $u = \left(x_2^2 + x_2^2 - 2x_3^2\right)^2$ $M_0(1;0;0)$, $M(1;1;1)$.

6. $\overline{A} = (2x_1 - 4x_3)\bar{i}_1 + (x_1 + x_2)\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3$, $S: 2x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

7. $\overline{A} = (-x_1 + x_2)\bar{i}_1 + x_2\bar{i}_2 + (x_3 - 2x_2)\bar{i}_3$, $L: x_1^2 + x_3^2 = 1$, $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$.

8. $\overline{A} = \left(x_1^3 + 2x_2\right)\bar{i}_1 + \dfrac{1}{2}\left(4x_1 + x_3^2\right)\bar{i}_2 + x_3x_2\bar{i}_3$.

9. $\overline{A} = \left(2x_1^2x_2 + 3x_2\right)\bar{i}_1 + \left(3x_3^2 - 2x_1^2\right)\bar{i}_2 - 4x_1x_2x_3\bar{i}_3$.

10. $rot\left(\sin\theta\bar{e}_\rho + \rho\bar{e}_\varphi\right)$.

11. $\overline{A} = 2\bar{e}_r + \dfrac{z}{r^2}\bar{e}_\varphi$, $S: z = -1$, $z = 2$, $r = 3$.

12. $\bar{A} = \rho^3 \bar{e}_\theta + \rho \sin 2\theta \bar{e}_\varphi$, $L:\ \rho = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Варіант 19

1. $\bar{a} = 2\bar{i}_2 + 3\bar{i}_3$, $\bar{b} = -\bar{i}_2 - \bar{i}_3$, $\bar{c} = 5\bar{i}_2$, $\bar{d} = -2\bar{i}_1 + \bar{i}_3$.
2. $\bar{e}_1 = -\bar{i}_2$, $\bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2$, $\bar{e}_3 = -\bar{i}_2 + \bar{i}_3$, $\bar{a} = 3\bar{i}_1 - 4\bar{i}_3$.
3. $\hat{A} = \left\| a^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$, $\alpha = \left\| \alpha_i^{k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$.
4. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $\left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}$.
5. $u = \left(x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} + x_3^2 \right)^3$ $M_0(0;2;0)$, $M(0;0;2)$.
6. $\bar{A} = (6x_2 + x_1)\bar{i}_1 + (3x_1x_2 + 1)\bar{i}_2 + x_3\bar{i}_3$, $S: x_1 + x_2 - \dfrac{x_3}{3} = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$
7. $\bar{A} = (3x_1 + x_2^2)\bar{i}_1 + (2x_2x_1 + x_2^3)\bar{i}_2 + (x_1 + 2x_3)\bar{i}_3$, $L: x_2^2 + x_3^2 = x_1^2$, $x_1 = -1$.
8. $\bar{A} = \dfrac{1}{3}(x_1x_2^3 + x_1^2)\bar{i}_1 + \dfrac{1}{2}(x_2 + x_1^2x_2^2)\bar{i}_2 - x_3^3\bar{i}_3$.
9. $\bar{A} = (x_1^3 + x_2^3)\bar{i}_1 + (x_3^2x_1^2 + x_2)\bar{i}_2 - (x_3 + 3x_1^2x_3)\bar{i}_3$.
10. $rot(\sin\varphi \bar{e}_\rho + \rho \bar{e}_\theta)$.
11. $\bar{A} = 3\sin\varphi \bar{e}_r + r\bar{e}_\varphi$, через поверхню $S:\ z = 0$, $z = -3$, $r = 2$.
12. $\bar{A} = (2\sin\varphi + \sin\theta)\bar{e}_\rho + \rho^2 \bar{e}_\varphi$ уздовж контуру $L:\ \rho = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 20

1. $\bar{a} = 5\bar{i}_2 + \bar{i}_3$, $\bar{b} = -\bar{i}_2 + 3\bar{i}_3$, $\bar{c} = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3$, $\bar{d} = -\bar{i}_1 + 3\bar{i}_2 + 5\bar{i}_3$.
2. $\bar{e}_1 = \bar{i}_2$, $\bar{e}_2 = 3\bar{i}_3$, $\bar{e}_3 = -\bar{i}_1 - 2\bar{i}_2$, $\bar{a} = 3\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 - 7\bar{i}_3$.
3. $\hat{A} = \left\| a^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$, $\alpha = \left\| \alpha_i^{k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

4. $\left\| T^{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$, $\left\| A_k \right\| = \begin{Vmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$.

5. $u = \left(x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2\right)^2$ $M_0(1;2;1)$, $M(0;0;0)$.

6. $\overline{A} = (-x_1 + 3x_2)\bar{i}_1 + (3x_1 + x_2)\bar{i}_2 + 2x_3\bar{i}_3$, $S: x_1 + x_2 + \dfrac{x_3}{3} = 1$,

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

7. $\overline{A} = (x_1 - 3x_2)\bar{i}_1 - (3x_1 - x_2)\bar{i}_2 - 2x_3\bar{i}_3$, $L: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_3 = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

8. $\overline{A} = \left(x_1^2 + 2x_2x_3\right)\bar{i}_1 + (5x_2 + 2x_1x_3)\bar{i}_2 + \left(3x_3^2 + 2x_2x_1\right)\bar{i}_3$.

9. $\overline{A} = \left(x_1^2 + x_2x_3\right)\bar{i}_1 + \left(2x_3^2 - x_1x_2\right)\bar{i}_2 + \left(3x_2^2 - x_1x_3\right)\bar{i}_3$.

10. $div\left(z^2 \sin\varphi \bar{e}_\varphi\right)$.

11. $\overline{A} = \dfrac{r^2}{4}\bar{e}_r + \dfrac{\sin 3\varphi}{r^2}\bar{e}_z$, через поверхню $S:$ $z = -1$, $z = 2$, $r = 2$.

12. $\overline{A} = \rho^3 \sin\theta \bar{e}_\varphi + \cos 6\varphi \bar{e}_\theta$ уздовж контуру $L:$ $\rho = 2$, $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

Предметний покажчик

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и основы тензорного исчисления. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. Ун-те, 1986.– 216 с.
2. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 496 с.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т . Современная геометрия. – М.: Наука. Глав. ред. физ-мат. лит., 1979. – 760 с.
4. Кудря В.І., Стреляєв Ю.М. Основи векторного і тензорного аналізу / Методичні вказівки. – Запоріжжя: ЗДУ, 1999. – 30 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973.
6. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики. – М.: Высш шк., 1973. – 192 с.
7. Смирнов В.И. Курс в ысшей математики. Т. 2. – М.: Гостехиздат, 1951. – 628 с.
8. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. – М.: Изд-во гос.ун., 1974. – 206 с.
9. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: Гостехиздат, 1956.
10. Сокольников И. Тензорный анализ. – М.: Наука, 1971. –376 с.

Додаткова:

11. Блох В.И. Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьк. гос.ун., 1964.-483с
12. Кеплер Х., Киричевский В.В., Ковнеристов Г.Б. Основы тензорного исчисления и его применение в механике твердого тела. – К.: КИСИ, 1992. – 183 с.
13. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с применением в механике. –К.: Наук. Думка, 1972. – 148 с.
14. Киричевский В.В., Копылова Н.А. Курс высшей математики.– К.: Наук. думка, – 1998. – 572 с.
15. Киричевский В.В. Основи тензорного исчисления и его приложения к задачам механики / Методические указания. – Ворошиловград, 1989. – 94 с.
16. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. –939 с.
17. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1969.
18. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ
(українською мовою)

Стреляєв Юрій Михайлович
Клименко Михайло Іванович

ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО І ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Фізика»

Рецензент *Левчук С.А.*, к. ф-м. н., доц. каф. прикладної математики

Відповідальний
за випуск *Гребенюк С.М.*, к.т.н., доцент, зав. кафедрою

Коректор *Стреляєв Ю.М.*, ст. викладач