Частина 1. Механіка.

Вступ:

Механіка – фундаментальна фізична теорія, що встановлює закономірності взаємних переміщень тіл в просторі і взаємодій, що відбуваються при цьому.

Механіка, як наука сформувалась з виходом книги І. Ньютона „Математичні начала натуральної філософії (1687). Ньютон зібрав і опрацював весь накопичений матеріал, систематизував його, багато доповнив. Створена Ньютоном механіка називається класичною.

Класична механіка вивчає рух макроскопічних тіл, які є матеріальними точками і рухається зі швидкостями значно меншими швидкості світла($v << c$)

$$c = 3 \cdot 10^8 \; м/с$$

В 1905 р. з'явилась перша робота А Ейнштейна, яка поклала початок релятивістської механіки (СТВ). Але формули СТВ використовуються тільки тоді, коли доводиться вивчати рух тіл, швидкість яких не небагато менша швидкості світла.

Взагалі швидкість світла є граничною швидкістю передачі сигналу(взаємодій) і є фундаментальною константою.

Механіка розв'язує два основних завдання:

1. Вивчення різноманітних рухів і узагальнення одержаних результатів у вигляді законів, руху – законів, за допомогою яких можна передбачити характер руху в кожному конкретному випадку.
2. Пошук загальних властивостей притаманних будь-якій системі, незалежно від конкретного виду взаємодії між тілами системи.

Розв'язок першої задачі привів до встановлення І. Ньютоном динамічних законів, в той час як розв'язок ІІ задачі – до виявлення законів збереження таких величин, як енергія, імпульс і момент імпульсу.

Під механічним рухом розуміють зміну положення тіл або частин тіл відносно інших тіл в просторі з часом.

Розділ 1. Основи кінематики.

§1. Основні поняття кінематики.

Кінематика – вивчає рух тіла відносно інших тіл незалежно від причин(сил), що впливають на цей рух.

Пряма основна задача кінематики – полягає в знаходженні любого параметра руху за відомим законом руху. Вона розв'язується шляхом послідовного застосування основних законів кінематики(руху, швидкості і прискорення).

Обернена задача кінематики – полягає у визначенні закону руху за яким-небудь відомим параметром руху(вектор швидкості чи вектор прискорення). В загальному випадку обернена задача значно складніша, ніж пряма.

Механічний рух зручно вивчати на прикладі ідеального об’єкту – *матеріальної точки.*

Матеріальна точка – макроскопічне тіло, розміром і внутрішньою структурою якого можна знехтувати за даних умов руху і вважати, що вся речовина тіла начебто зосереджена в одній геометричній точці.

На відміну від геометричної точки, матеріальна точка володіє здатністю взаємодіяти з іншими тілами і їй приписується деяка маса.

Питання про те, чи можна конкретне тіло розглядати, як матеріальну точку визначається не <u>розмірами самого тіла</u>, а <u>умовами руху</u>, що розглядається. Тому одне і те ж тіло в одних випадках, можна вважати матеріальною точкою, а в інших – ні. Наприклад, при русі Землі по орбіті навколо Сонця її можна вважати матеріальною точкою(діаметр Землі – 12740 км, відстані від Землі до Сонця – 150 млн. км), а при вивченні обертального руху Землі навколо осі – ні.

В означення матеріальної точки введено умову, що тіло повинно бути макроскопічним. Це пов’язано з тим, що при русі макроскопічних тіл, таких як атоми, молекули і елементарні частинки суттєво проявляються *хвильові властивості*. Рух таких об’єктів описується вже законами квантової механіки.

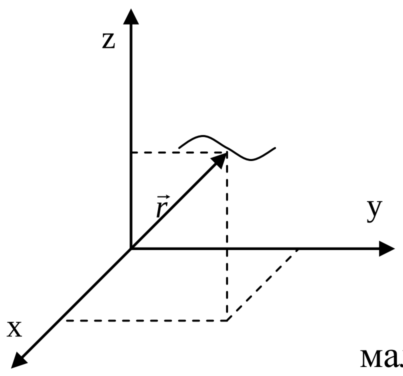
Слід зазначити, що наближення матеріальної точки працює і тоді, коли рух тіл кінцевих розмірів є поступальним(тобто довільний відрізок, що сполучає любі дві точки тіла, залишається в просторі паралельним собі).

<u>Знати рух матеріальної точки</u> означає вміти в будь-який момент часу визначити її положення в просторі, якщо відомі початкові умови руху.

Траєкторія – лінія вздовж якої рухається матеріальна точка.

Тіло відносно якого розглядається механічний рух називається *тіло відліку.*

Дослід показує, що для повного завдання положення матеріальної точки в просторі відносно тіла відліку, необхідно задати три координати точки. Частіше з обраним тілом відліку зв’язують декартову систему координат, тоді положення матеріальної точки в просторі задають за допомогою *радіус-вектора* $\vec{r}$, який має свої координати.



мал.1

Система відліку – це тіло відліку, пов’язана з ним система координат і прилад для вимірювання проміжків часу.

Використовується для визначення положення в просторі досліджених фізичних об’єктів (тіл, частинок) в різні моменти часу. При цьому тіло відліку і годинник вважаються нерухомими.

Системи відліку можна зв’язувати з різними тілами, але особливо важливим є клас так званих вільних тіл.

Вільним тілом називається тіло настільки віддалене від інших тіл, що їх дією на це тіло можна знехтувати. Система відліку пов’язана з вільним тілом називається *інерціальною системою відліку(ІСВ)*.

Система відліку, яка не рухома, чи рухається рівномірно прямолінійно відносно даної ІСВ сама є інерціальною. Всі закони фізики мають однаковий вид в будь якій ІСВ. Тому всі ІСВ фізично рівноправні. Рівноправність ІСВ відображає властивості симетрії простору-часу – його ізотропність і однорідність.

Фізичні величини поділяються на скалярні і векторні величини.

Скалярною називається фізична величина, що характеризується числовим значенням, яке не змінюється при перенесені системи координат чи зміні початку відліку часу(маса, шлях, температура, густина і т.п.)

Векторною називають величину, що характеризується числовим значенням, напрямом простору і що додається з іншою собі подібною величиною геометрично(за правилом паралелограма).

При русі матеріальної точки її положення в просторі змінюється. Відповідно цьому радіус-вектор матеріальної точки можна розглядати як функцію часу

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1),$$

Векторна функція (1) рівносильна заданню трьох скалярних функцій:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad 1.(2)$$

Шлях – це довжина траєкторії, яке проходить тіло за даний проміжок часу.

Переміщення – вектор, що сполучає початкове та кінцеве положення тіла.

Швидкістю називається векторно-фізична величина, що дорівнює першій похідній переміщення по часу.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad 1.(3)$$

Прискоренням називається векторно-фізична величина, що дорівнює похідній вектора швидкості по часу.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \qquad 1.(4)$$

§2. Найпростіші види прямолінійного руху матеріальної точки.

1. Прямолінійний рівномірний рух.

Рівномірний прямолінійний рух – це рух, при якому тіло за будь які рівні проміжки часу здійснюють однакові переміщення.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = const$$

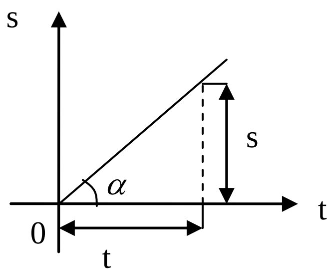
Тому залежність координати x точки від часу t буде мати такий вигляд:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} vdt$$

$$x - x_0 = vt \qquad x = x_0 + v_x t \quad (2.1)$$

Довжина шляху s пройденого точкою за проміжок часу від 0 до t дорівнює:

$$s = x - x_0 = vt \qquad (2.2)$$



мал.2

На мал.2 показано графік часу рівномірного руху.

З малюнка видно, що $v = \frac{s}{t} = tg\alpha$ (2.3)

2. Рівнозмінний прямолінійний рух.

Рівнозмінним рухом називають такий рух, при якому за будь які рівні проміжки часу швидкість точки змінюється на одну і ту ж величину.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = const$$

$a > 0$ - рух рівноприскорений

$a < 0$ - рух рівносповільнений

Для швидкості:

$$dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} adt \Rightarrow v - v_0 = at \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad (2.4)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad v = v_0 + at$$

Для координати:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt = (v_0 + at)dt$$

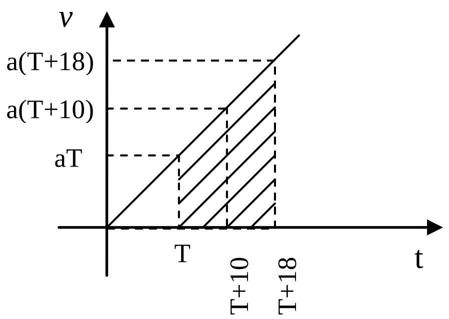
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (v_0 + at)dt \Rightarrow x - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad (2.5)$$

Для шляху:

$$s = x - x_0 = v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad (2.6)$$

Пасажир відмітив, що передостанній вагон пройшов 10 сек., а останній 8 сек. На скільки запізнився пасажир.



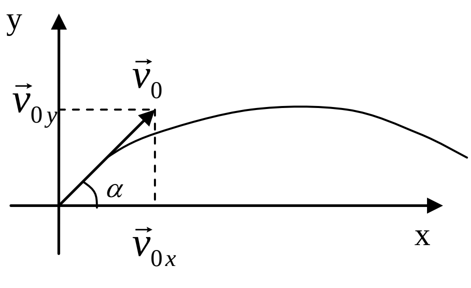
$$s_1 = \frac{aT + a(T+10)}{2} \cdot 10 \qquad s_2 = \frac{a(T+10) + a(T+18)}{2} \cdot 8 \qquad s_1 = s_2$$

$$\frac{2T+10}{2} \cdot 10 = \frac{2T+28}{2} \cdot 8 \qquad T = 31c$$

Границі застосовності одержаних формул кінематики.

1. Застосовні тільки в інерціальних системах відліку(ІСВ).
2. Описують рух макроскопічних тіл, які можна вважати матеріальними точками.
3. Описують нерелятивістські рухи, рух набагато менший до руху світла, менше.
4. Формула рівномірного прямолінійного руху мають місце тільки для випадку коли відсутня дія сил, або дія сил скомпенсована.
5. Формули рівноприскореного руху мають місце тільки тоді, коли на матеріальну точку діє постійна сила. $\vec{F} = const$

§3. Рух тіла кинутого під кутом до горизонту.



$g = 9{,}8\, м/c^2$

$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$

$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$

Рівняння руху

$$x = v_{0x} \cdot t \qquad \begin{cases} y = v_{0y} \cdot t - \dfrac{9t^2}{2} = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \dfrac{9t^2}{2} \\ x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \end{cases}$$

Визначити максимальну висоту підняття, дальність польоту, час, опором повітря нехтуємо.

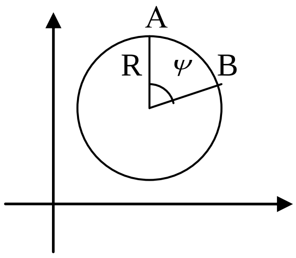
Час підняття до максимальної точки і опускання між собою рівні

$$v_0 \cdot \sin\alpha - gt = 0 \qquad t_1 = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \qquad t = 2t_1 = \frac{2v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

$$y_{\max} = h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - g\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

§4. Кінематика криволінійного руху.

4.1 Рух по колу.



Кутом повороту називається кут утворений радіус-вектором, що сполучає початкове і кінцеве положення матеріальної точки і центр кола. Вимірюється $[\varphi] = рад$.

Кут в 1 рад – це центральний кут, що вирізує на колі довжину дуги рівну радіусу.

Кутовою швидкістю називають похідна кута повороту по часу

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \omega = \frac{рад}{c} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

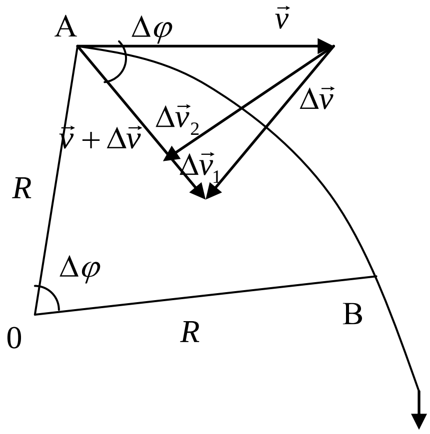
При рівномірному русі по колу час протягом якого відбувається один повний оборот матеріальної точки називається *періодом обертання T.*

Величина, що дорівнює кількості обертів за 1 с називається *частотою* $\nu = \frac{1}{T}$.

$v = const$ $\qquad v = \frac{2\pi R}{T}$ => $v = \omega R$ - формула Ейлера.

Розглянемо частину кола, яку пройшла матеріальна точка за деякий проміжок часу. Вважаємо, що швидкість змінюється за напрямком і величиною. При русі по колу швидкість направлена по дотичній кола.

Якщо тіло рухається по прямолінійній траєкторії, то такий рух називається *криволінійним.*



$\overset{\smile}{AB} = \Delta S \qquad \Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_2$

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}$$

$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, де $\vec{a}_1$ - середнє дотичне(тангенціальне) прискорення, $\vec{a}_2$ - середнє нормальне(доцентрове) прискорення

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \qquad \vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

$$a^2 = a_\tau{}^2 + a_n{}^2 \qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{\Delta S}{R} \\ \Delta\varphi = \dfrac{\Delta v_2}{v} \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta v_2}{v} = \frac{\Delta S}{R} \Rightarrow \quad \Delta v_2 = \frac{v\cdot\Delta S}{R}$$

$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{v}{R}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t}\right) = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

§5. Обертальний рух твердого тіла.

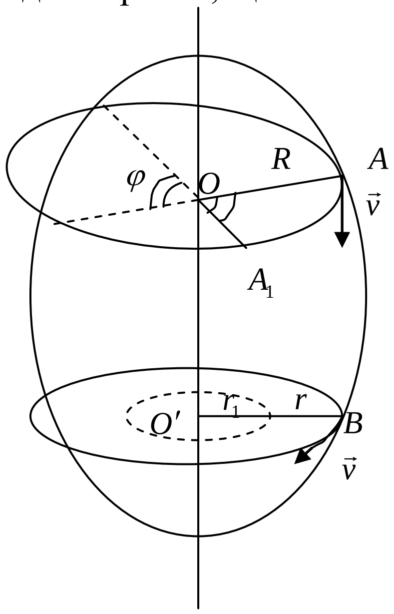
Під *абсолютно твердим тілом* розуміють таке уявне тіло, яке практично не деформується під дією прикладених до нього сил, тобто деформації на стільки малі, що ними можна знехтувати.

В АТТ неможливі переміщення окремих його частин одна відносно іншої.

Рух АТТ зводиться до його поступального руху і до обертання.

Поступальний рух твердого тіла описується тими ж законами механіки, що і рух матеріальної точки в зв’язку з цим ми більш детально зупинимося на кінематиці обертального руху.

Обертальним рухом називається такий рух, при якому, всі точки твердого тіла описують кола, площини яких паралельні, а центри лежать на одній прямій, що називається *віссю обертання.*



Кутовою швидкістю ω називається

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (1)$$

$$\omega_c = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \qquad (2)$$

Розглянемо випадок, коли тверде тіло рівномірно обертається навколо осі.

OO' з кутовою швидкістю ω.

$$\omega = const$$

$$d\varphi = 2\pi$$

$$\Delta t = T$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (3)$$

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (4)$$

Знайдемо зв’язок між лінійною швидкістю v і кутовою швидкістю ω

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} \qquad S = 2\pi R$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$ (5) - формула Ейлера

Так як кожна матеріальна точка твердого тіла описує коло, то вона має нормальне(доцентрове) прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$ (6) - застосовується тільки при постійній лінійній швидкості.

$$a_n = \omega^2 R$$ (7) - застосовується тільки при постійній кутовій швидкості.

Швидкість зміни кутової швидкості характеризується кутовим прискоренням, яке позначається β

$$\beta_c = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \qquad (8)$$

$$\beta \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (9)$$

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Зв’язок між лінійною і кутовою швидкістю можна отримати на основі рівності, що пов’язує довжину дуги S, пройденої матеріальною точкою, центрального кута φ і радіуса R кола.

По означенню

$$\varphi = \frac{S}{R} \Rightarrow S = \varphi \cdot R \qquad \frac{dS}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d^2S}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} \qquad a_\tau = R \cdot \beta \qquad (10)$$

Розділ 2. Основи динаміки.

Вступ в динаміку.

Динаміка – розділ механіки в якому вивчають закономірності і умови механічного руху макроскопічних тіл під дією прикладених до них сил.

В основі динаміки, лежать закони Ньютона, з яких отримують всі рівняння, необхідні для розв’язку практичних задач динаміки.

В динаміці розглядають 2 типи задач, розв’язок яких для матеріальної точки(чи тіла, що рухається поступально) знаходяться за допомогою законів Ньютона:

Задачі I типу полягають в тому, що знаючи рух тіла, визначити діючі на нього сили.

Задачі II типу – за діючими на тіло силами визначити закон його руху. Для розв’язку цих задач необхідно знати так звані початкові умови руху, тобто положення і швидкість руху тіла на початку його руху під дією заданих сил.

§1. Закони руху Ньютона.

1.1 Закон Ньютона.

Якщо на тіло не діють інші тіла, або якщо їх дія взаємно скомпенсовані, то тіло зберігає стан спокою чи рівномірного прямолінійного руху. Ця властивість тіл називається *інерцією.*

Головна думка I закону Ньютона полягає в тому, що лише зовнішні сили можуть змінити спокій чи швидкість руху тіла, саме ж тіло, якщо воно „вільне”, володіє інерцією: воно зберігає свій спокій чи прямолінійний рух з постійною швидкістю.

Наведемо формулювання I закону за Ньютоном:
будь-яке тіло зберігає стан спокою чи рівномірного прямолінійного руху доти і постільки доти дія з боку інших тіл не примушує його змінити цей стан.

За допомогою безпосереднього досліду ми не можемо ні підтвердити, ні заперечити I закону механіки, бо в земних умовах важко здійснити дослід, при якому на тіло не діяли б зовнішні сили.

Власне кажучи, цей закон справедливий лише для матеріальних точок, бо тіла можуть і не зберігати свого спокою, знаходячись, наприклад, в обертальному русі. Матеріальна ж точка обертатись не може. Для реальних тіл I закону Ньютона виконується тільки у випадку їх поступального руху.

В цьому формулюванні I закону не має вказівок на вибір системи відліку, але розуміння, що твердження відноситься до руху чи спокою в певній системі відліку. Без вказівки на систему відліку закон втрачає сенс.

Можна, проте, припустити, що існує така система відліку, в якій прискорення матеріальної точки цілком зумовлене тільки її взаємодією з іншими тілами.

Вільна матеріальна точка, на яку не діють інші тіла, рухається відносно такої системи відліку прямолінійно або, як кажуть, за інерцією.

Таку систему називають *інерціальною.*

Тому сформулюємо I закон Ньютона таким чином:

Існують системи відліку, відносно яких тіло зберігає стан спокою чи рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не діють інші тіла чи їх дія скомпенсована. Такі системи відліку називають *інерціальними.*

Іноді стверджують, що при рівномірному і прямолінійному русі тіло рухається за інерцією. Це не слід розуміти так, що тіло рухається внаслідок інерції.

Для того, щоб тіло зберегло стан прямолінійного і рівномірного руху, не потрібно ніяких причин. Рівномірний і прямолінійних рух тіла(рух за інерцією) і спокій – це природний стан будь-якого тіла, вільного від зовнішніх дій або якщо дія на нього інших тіл скомпенсована.

Отже, *інерція* – це властивість всіх тіл, що виявляється в інерціальних системах відліку. Полягає вона в тому, що тіла при відсутності зовнішніх дій, зберігають швидкість свого руху незміною(включаючи і частинний випадок спокою). Інерція властива будь-якому тілу, але для неї не вводиться ніякої кількісної міри, тобто інерція є властивістю, що не вимірюється.

Межі застосування I закону Ньютона: Застосовний завжди. Але в першому законі Ньютона закладено в неявному вигляді уявлення про однорідність і ізотропність простору і однорідність часу. Ізотропність означає еквівалентність його властивостей у всіх напрямах. Однорідність простору означає однаковість протікання його явищ в різних точках простору за однакових початкових умов.

1.2 Маса і сила.

Маса.

Розглянемо властивість, притаманну всім тілам, яка на відміну від інерції, має кількісну характеристику.

Інертність – теж властивість, і вона також виявляється в ІСВ. Полягає вона в зміні швидкості тіл(в появі прискорення) під дією зовнішніх тіл. При цьому різні тіла по різному змінюють свою швидкість під дією одного і того ж тіла.

Інертність – властивість, що вимірюються. Маса і є мірою, кількісною характеристикою цієї властивості.

Зазначимо, що взагалі в фізиці маса, може характеризувати і інші властивості тіл:

Наприклад, розглянемо такі співвідношення:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (1)$$

$$F = g\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (2)$$

$$Q = cm(t_2^0 - t_1^0), \qquad Q = \lambda m \qquad (3)$$

$$E = mc^2 \qquad (4)$$

В (1) – маса – міра інертності.

В (2) – міра інтенсивності гравітаційної взаємодії(гравітаційна маса).

В (3) – міра внутрішньої енергії тіл при теплопередачах.

В (4) – міра енерговмісту речовини.

В механіці *маса* – це фізична величина, що є мірою інертності і мірою тяжіння матеріальних об’єктів.

В принципі, не звідки не слідує, що маса, яка створює поле тяжіння, визначає і інерцію того ж тіла. Але велика сукупність дослідів показала, що інертна і гравітаційна маси пропорційна одна одній і чисельно рівні у вибраній системі одиниць(Сі). Цей фундаментальний закон природи називається *принцип еквівалентності*.

Експериментально принцип еквівалентності встановлений з точністю до 10^{-12}

Як слідує з досліду, в рамках класичної механіки масі притаманні дві важливі властивості:

1. Маса – величина адитивна, тобто маса тіла дорівнює сумі мас його окремих частин.
2. Маса тіла – величина постійна і не змінюється при його русі(при $v << c$)

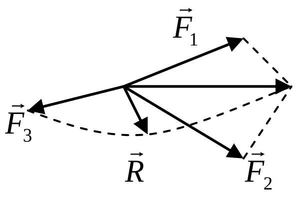
Маса даного тіла в класичній механіці не залежить від вибору ІСВ.

Сила.

Сила – векторна величина, що є мірою механічної взаємодії чи дії на матеріальну точку або тіло з боку інших тіл чи полів. Ця взаємодія може здійснюватись як при безпосередньому контакті тіл(тиск, тертя), так і між віддаленими тілами через поле тяжіння(гравітаційне).

Сила характеризується числовим значенням(модулем), напрямом в просторі і точкою прикладання. Отже, *сила* – векторна величина.

Якщо на тіло діє кілька сил, то їх дію можна замінити дією однієї сили, яка називається *рівнодійною*.



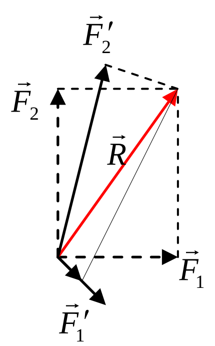
Сили, дію яких замінює рівнодійна називають *складовими.*

Задача знаходження рівнодійної сили за даними складовими, називається *додаванням сил.*

Ця задача завжди розв’язується однозначно.

Задача знаходження складових сил за заданою рівнодійною, називається *розкладанням сил.*

Якщо задана тільки рівнодійна сила, то задача знаходження складових сил є невизначеною, тобто має множину розв’язків.



$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ або $\vec{R} = \vec{F}_1{}' + \vec{F}_2{}'$ і т.п.

Для того, задача розкладання рівнодійної сили на складові стала визначеною, необхідно крім рівнодійної, знати напрям однієї з складових

1.3 Другий закон Ньютона.

II закон Ньютона: Прискорення, з яким рухається матеріальна точка, прямо пропорційне діючій на матеріальну точку силі і обернено пропорційне масі матеріальній точки.

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ (5)

Межі застосування закону.

1. рух тіла розглядається по відношенню до інерціальних систем відліку.
2. Рухоме тіло повинно бути:
   a) макроскопічним.
   b) матеріальною точкою
3. Маса тіла – величина постійна.
4. Швидкість набагато менша за швидкість світла. v<<c.
5. Для випадку таких взаємодій, коли величина і напрям сил не залежать від швидкостей тіл стосовно даної ІСВ.

При порушенні хоча б однієї з цих умов II закону Ньютона застосовувати не можна.

Самим Ньютоном II закон був сформульований не через прискорення, а через іншу фізичну величину – імпульс руху тіла.

Імпульсом тіла називається векторно-фізична величина, що дорівнює добутку маси тіла на його швидкість.

$\vec{P} = m\vec{v}$ - імпульс тіла

$\Delta\vec{P} = \Delta(m\vec{v})$ - зміна імпульсу тіла

$\vec{F}\Delta t$ - імпульс діючої сили

$\vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\Delta\vec{v} = \Delta(m\vec{v}) = \Delta\vec{P}$

$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{P}$ (6)

II закон у формулюванні Ньютона:

зміна імпульсу руху пропорційна прикладеній силі, що викликає рух і відбувається вздовж тієї ж прямої, по якій ця сила діє.

Використовується також формула:

$\vec{F} = m\vec{a}$ (7)

В диференціальній формі:

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ - найбільш загальне формулювання II закону Ньютона.

Висловимо переваги і недоліки формулювань II закону Ньютона, поданих формулами (5) і (7).

Формула (5) характерна тим, що зліва наведена кінетична характеристика руху(прискорення), а справа – динамічна характеристика тіла, що рухається. Тобто, цей закон зв'язує між собою два розділи: кінематику і динаміку.

Ця формула виражає функціональну залежність, яка полягає в тому, що прискорення прямо пропорційне результуючій силі і обернено пропорційне масі тіла, що рухається.

Основний недолік: прискорення в механіці вважається заданої величиною. Тому для практичних цілей вона не годиться.

Формула (7)

Переваги:

1) вона годиться для розв’язування більшості практичних задач.

2) справа в (7) знаходяться величини, що характеризують саме рухоме тіло, а зліва – величина, що характеризує тіла, які є причиною руху даного тіла.

Недолік: ця форма запису може викликати невірне уявлення, що є причиною, а що наслідком для прискорення і сили.

1.4 Третій закон Ньютона.

У формулюванні Ньютона цей закон звучить так:

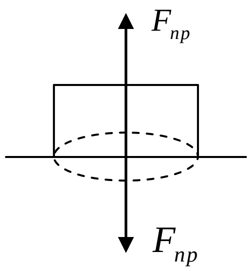
1. Дії завжди є рівна і протилежна протидія.
2. Дії двох тіл одне на одне між собою рівні і направлені в протилежні напрями.

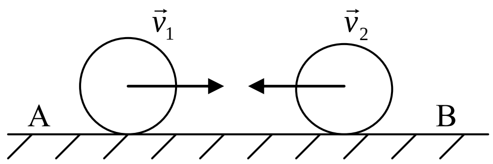
Сучасне формулювання II закону Ньютона:

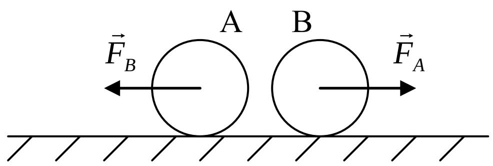
Тіла діють одне на одне з силами, направленими вздовж однієї прямої, рівними за модулем і протилежними за напрямом.

Математично записується: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Третій закон Ньютона не містить ніяких означень і є твердженням, яке вимагає досвідної перевірки.





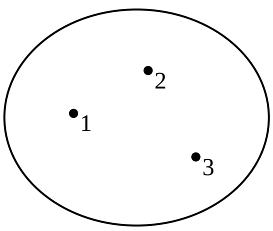


$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

Сили мають одну природу, прикладені до різних тіл, а отже вони не можуть бути скомпенсовані.

В загальному випадку рівнодійної сил, про які мова йде в III законі Ньютона, не існує. Однак є один єдиний випадок, коли про рівнодійну можна вести мову в теоретичному плані:

якщо система замкнута(ізольована), тобто в ній діють тільки внутрішні сили, то і до таких сил III закон застосовний.



$$\begin{cases} \vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \\ \vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} \\ \vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} \end{cases}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0$$

Фізично це означає, що внутрішні сили не в змозі вивести систему, як таку зі стану спокою.

Для того, щоб це відбулося, необхідна наявність зовнішніх сил.

III закон Ньютона забороняє однобічну дію тіл, встановлює обов'язковість двохсторонніх рівних взаємодій тіл(принцип заборони).

Відмітимо, що III закон Ньютона нічого не говорить про те, яким способом здійснюється взаємодія тіл і про величину сил взаємодії, крім того, що вони рівні і протилежні за напрямом в кожний момент часу.

Границі застосування третього закону.

1. Виконується тільки в випадку контактної взаємодії тіл(тобто взаємодії при безпосередньому дотиканні тіл).
2. При взаємодії тіл, що знаходяться в стадії спокою на деякій відстані одне від одного.
3. В інерціальній системі відліку для швидкості на багато меншій від швидкості світла($v << c$).

Але треба мати на увазі, що і при невеликих швидкостях цей закон не завжди виконується. Це пов'язано з тим, що швидкість передачі взаємодії обмежена. Наприклад, космічний корабель переходить з однієї орбіти на сусідню по відношення до Сонця.

1. $\vec{F}_c = -\vec{F}$
2. $\vec{F}_c = -\vec{F}_k$

Закони механіки Ньютона не застосовні в неінерціальних системах відліку, це пояснюється тим, що сила в тлумаченні Ньютона є міра взаємодії конкретних тіл. За Ньютоном тіло може змінити свою швидкість тільки в результаті взаємодії з іншими тілами.

В неінерціальних системах відліку зміна швидкості тіла може бути викликана не тільки дією іншого тіла, а й прискореним рухом самої системи відліку.

Закони Ньютона не виконуються в таких випадках:

1. Якщо швидкість розглядуваних тіл порівняна зі швидкістю світла, то треба застосовувати СТВ.
2. У випадку сильних гравітаційних полів треба відмовитись не тільки від закону всесвітнього тяжіння, але також і від законів Ньютона. Згідно загальної теорії відносності Ейнштейна гравітація являється як викривленням простору часу. Поведінка частинок в цьому викривленому просторі часу відрізняється від передбаченої законами Ньютона.
3. Якщо розміри розглядуваної системи порівняльні з розмірами атома, то закон Ньютона не виконується.

§2. Закон збереження імпульсу.

Механічна система називається *замкнутою* (ізольованою), якщо можна знехтувати дією зовнішніх сил, в порівнянні з внутрішніми силами, що діють в цій системі.

Підкреслимо, що поняття замкнутої системи має зміст тільки стосовно ІСВ, бо в неірціальних системах відліку завжди діє сила інерції, що відіграють роль зовнішніх сил.

Для Виведення закону збереження імпульсу скористаємося ІІ і ІІІ законами Ньютона, застосувавши їх до замкнутої системи із n тіл. Застосуємо до взаємодії цих тіл вираз ІІ закону Ньютона.

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \ldots + \vec{F}_{n1} \\ m_2 \dfrac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \ldots + \vec{F}_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n \dfrac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_{1n} + \vec{F}_{2n} + \ldots + \vec{F}_{n-1,n} \end{cases}$$

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ - враховуючи додаємо всі:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \ldots + m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = 0 \quad => \quad \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} + \ldots + \frac{d(m_n\vec{v}_n)}{dt} = 0$$

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n)}{dt} = 0 \quad => \quad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = const$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = const \qquad m_i\vec{v}_i = \vec{p}_i$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const$ - закон збереження імпульсу

Повний вектор імпульсу замкнутої системи залишається постійною величиною під час всіх процесів і рухів, що відбуваються в системі.

Практично частіше використовують закон збереження імпульсу в такому формулюванні:

В замкнутій системі векторна сума імпульсів тіл до взаємодії дорівнює векторній сумі імпульсів тіл після взаємодії.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}'$$

Приклади:

1) снаряд масою m_1 вилітає з гармати зі швидкістю v_1 при цьому гармата масою m_2 набуває швидкості - v_2 направленою в протилежну сторону. Тоді $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$ => $m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2$

   $$\frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

2) Людина знаходиться в нерухомому човні. Якщо вона почне переміщуватись вздовж човна, то човен прийде в рух в протилежну сторону. Швидкість руху човна можна знайти так як в попередньому випадку.

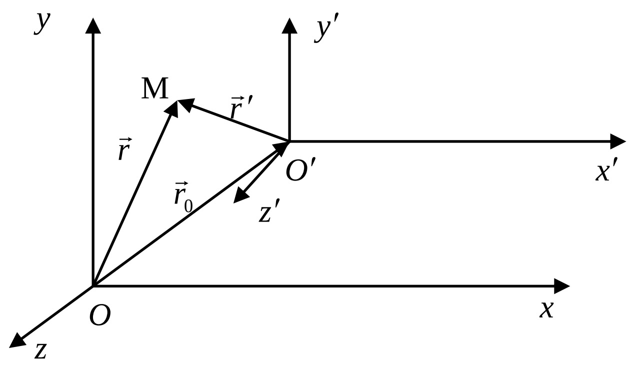
§3. Механічний принцип відносності(принцип відносності Галілея).

Розглянемо дві системи відліку:

1. Інерціальну систему $Oxyz$, яку умовно вважатимемо нерухомою.

2. Систему $O'x'y'z'$ - швидкість якої в поступальному русі $\vec{u} = const$, тобто рухається рівномірно і прямолінійно відносно систем (1).

Вважаємо, що в початковий момент часу, початки систем O і O' співпадають. Тоді взаємне розміщення цих систем в довільний момент часу t має вигляд, зображений на мал. 1.



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$$

Швидкість $\vec{u}$ направлена вздовж прямої OO', а $\vec{r}_0 = \vec{u}t$, тоді положення довільної точки М в нерухомій і рухомій системах відліку визначається радіус-векторами $\vec{r}$ і $\vec{r}\,'$, причому $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 = \vec{r}\,' + \vec{u}t$ (1)

В проекціях на осі координат вектору рівність (1) подамо у вигляді співвідношень, що називається *перетвореннями координат Галілея,*

тобто $\begin{cases} x = x' + u_x t \\ y = y' + u_y t \\ z = z' + u_z t \end{cases}$ (2)

В класичній механіці приймають, що хід часу не залежать від відносного руху систем відліку, тому систему рівнянь (2) необхідно доповнити ще одним співвідношенням, а саме $t = t'$ (2а).

Продиференціюємо рівняння (1) по часу і враховуючи, що $\vec{u} = const$, знайдемо співвідношення між швидкостями і прискоренням точки М відносно обох систем відліку.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} + 0$$

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u} \\ \vec{a} = \vec{a}\,' \end{cases} \qquad (3)$$

Якщо на точку М діють інші тіла, то $\vec{a} = 0$. Але і $\vec{a}\,' = 0$, тоді дана рухома система $O'x'y'z'$ дійсно є інерціальною – адже ізольована матеріальна точка або рухається відносно неї прямолінійно рівномірно, або перебуває в стані спокою.

В загальному випадку сили взаємодії між тілами залежать від взаємного розміщення цих тіл і від швидкостей їх рух одне відносно одного.

Тому сили, що діють на одну матеріальну точку з боку інших тіл однакові у всіх інерціальних системах відліку, тобто $F = F'$ (4).

Із співвідношень (3) і (4) для ІСВ слідує, що

$$\frac{\vec{F}'}{\vec{a}'} = \frac{\vec{F}}{\vec{a}} = m$$

Отже, рівняння Ньютона для матеріальної точки, а також для довільних систем матеріальної точки мають однаковий вигляд у всіх інерціальних системах відліку. Іншими словами, інваріанти по відношенню до перетворень Галілея.

Цей результат називається *механічним принципом відносності*(принципом відносності Галілея) і часто формулюється так:

рівномірний прямолінійний рух(відносно будь-якої інерціальної системи відносності в замкнутій системі) не впливає на закономірності перебігу в ній механічних процесів і явищ, за однакових початкових умов.

Або:

ніякими механічними дослідами, проведеними в ІСВ не можна виявити, рухається вона рівномірно прямолінійно чи перебуває в стані спокою.

Розділ 3. Робота, енергія, закон збереження енергії.

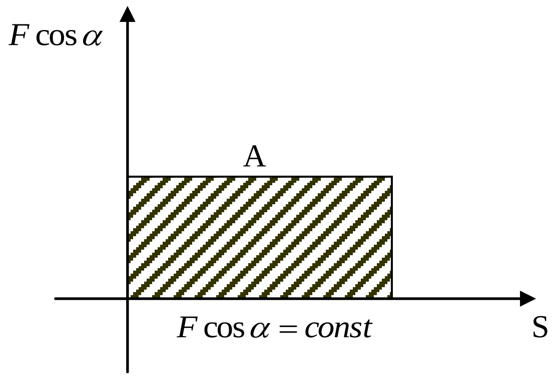
§1. Механічна робота.

Механічна робота – скалярна фізична величина, що характеризує процес перетворення однієї форми руху в іншу і чисельно дорівнює скалярному добутку сили на переміщення $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ (1)

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos(\vec{F} \,\hat{}\, \vec{S}) = F \cdot S \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$

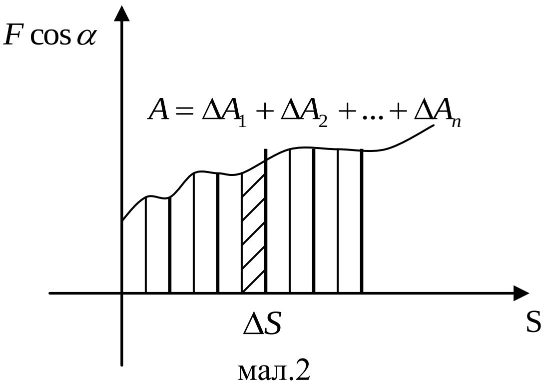
Формули (1) і (2) справедливі, якщо сила постійна по величині.

Побудуємо графік, відкладаючи по осі Х пройдений тілом шлях, а по осі У – проекцію рухомої сили на напрям руху, тобто $F\cos\alpha$.



мал.1

Якщо під час руху величини $F\cos\alpha$ змінюється, то для графічного обчислення роботи треба весь пройдений шлях розбити на ряд окремих ділянок. Взявши ці ділянки досить малими, можна вважати, що на кожній з них рух відбувається під дією деякої середньої постійної сили. В цьому випадку робота на кожній ділянці може бути знайдена як площа відповідного прямокутника. Робота на всьому шляху визначається сумою площ всіх прямокутників, заштрихованих на мал.2.



мал.2

В границі при нескінченно малих довжинах ділянок шляху робота змінної сили буде чисельно дорівнювати площі фігури на графіку.

В цьому випадку робота миттєвого значення сили на нескінченно малому шляху dS

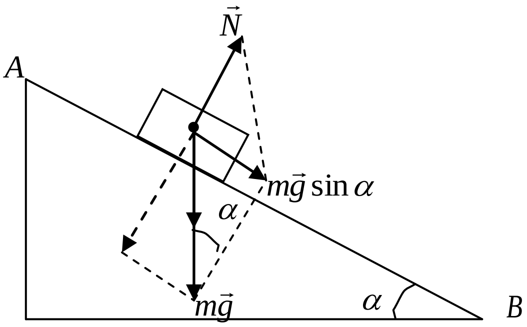
$$dA = F_s \cdot dS \qquad (3)$$

А вся робота

$$A = \int_0^s F_s \cdot dS \qquad (4)$$

Скористаємося (4) для обчислення роботи, яку здійснює сила тяжіння при русі тіла.

Розглянемо наприклад, рух тіла масою m по похилій площині з кутом нахилу α .(мал.3)



мал.3

На тіло діє сила тяжіння, під дією якої тіло рухається по похилій площині (тертям нехтуємо).

Проекція цієї сили на напрям переміщення АВ дорівнює $F_s = mg\sin\alpha \quad AB = S$. На переміщення АВ сила F_s здійснить роботу

$$A = \int F_s dS = \int mg\sin\alpha dS$$

Величина проекції сили F_s на всьому переміщенні АВ залишається постійною, тому її можна винести за знак інтеграла:

$A = g\sin\alpha\int dS = mg\sin\alpha S = mgh$ де $h = S\sin\alpha$ - висота, на яку спустилося тіло.

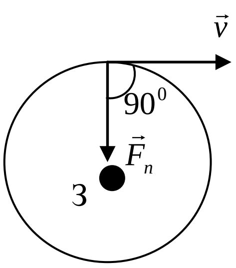
Звідси слідує, що робота сили тяжіння не залежить від довжини шляху по похилій площині, а залежить тільки від висоти, на яку спустилося тіло, тобто, тільки від початкового та кінцевого положення тіла.

Аналогічною властивістю володіє сила пружності.

Проаналізуємо більш детально формулу (2):

1) $\alpha = 0$, $A = F \cdot S \cdot \cos 0 = FS > 0$
2) $0 < \alpha < \pi/2$, $\cos\alpha > 0$ $A = F \cdot S \cdot \cos\alpha > 0$
3) $\alpha = \pi/2$, $\cos\pi/2 = 0$ $A = F \cdot S \cdot \cos\pi/2 = 0$

Приклади:



1. Штучний супутник Землі рухається по кривій орбіті.

$\alpha = 90$

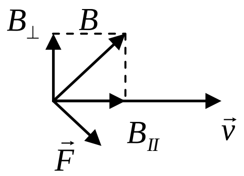
A=0

2. Електричний заряд рухається вздовж еквіпотенціальної поверхні(тобто поверхні з однаковими потенціальними $\varphi_1 = \varphi_2 = ... = \varphi_n$), в кожній точці якої вектор сили і вектор переміщення складають кут $\frac{\pi}{2}$, тобто робота не виконується.

Це також слідує із формули електродинаміки

$A = q_0(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \qquad q_0 \neq 0$

3. Заряджена частинка рухається в однорідному магнітному полі, на неї діє сила Лоренца, яка за своїм походженням є доцентровою силою.



Тобто в кожній точці траєкторії вона складає кут 90^0 з напрямом переміщення.

Отже, сила Лоренца роботи не виконує

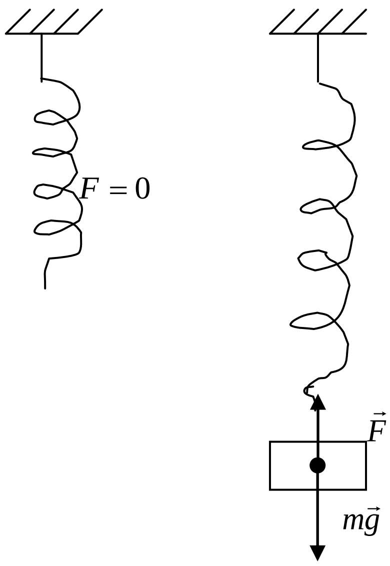
4) $90^0 < \alpha \leq 180^0 \qquad \cos\alpha < 0 \qquad A < 0$

Приклади:

1.

$A_{m\vec{g}} < 0 \qquad\qquad A_{m\vec{g}} > 0$

2. Пружина не навантажена. Сила пружності дорівнює нулю.



$\vec{F} = -k\vec{x}$

$A_{\vec{F}} < 0$

$A_{m\vec{g}} > 0$

2. Енергія, кінематична і потенціальна енергія.

Дослід показує, що перетворення одних форм руху в інші відбувається в строго визначених кількісних співвідношеннях. Фізична величина, що є мірою різних форм руху і взаємодій матеріальних об’єктів називається *енергією.*

Енергія – це загальна, спільна міра різних видів руху матерії, вона не віддільна від матерії і її руху.

Енергія – фундаментальне фізичне поняття, яке відноситься до всіх видів руху матерії, що вивчаються в фізиці. Воно настільки загальне і всеохоплююче, що не піддається короткому означенню. Це одна з фізичних величин, що характеризує стан тіла(тіл) в даний момент часу. Енергія є функцією стану.

Робота є функцією процесу(теплота є функцією процесу).

Функція стану – це така фізична величина, зміна якої при переході тіла з одного стану в інший не залежить від шляху переходу, а цілком визначається параметрами початкового і кінцевого стану.

Параметри стану – фізичні величини, що відрізняють один стан системи від іншого.

Механічна енергія – скалярна величина, що характеризує в фізиці здатність механічного руху до перетворення в інші види руху і залежить від параметрів механічного стану тіла.

Частина енергії механічної системи, що залежить від швидкості руху тіла називається *кінетичною енергією тіла.*

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \qquad [E_k] = Дж$$

Кінетична енергія залежить від вибору системи відліку, тобто є величина відносна.

Частина енергії механічної системи, що залежить від її конфігурації, тобто від можливого розміщення окремих частин системи та їх положення у зовнішньому силовому полі називається *потенціальною*.

Поняття потенціальної енергії можна ввести тільки для систем взаємодіючих тіл або частинок.

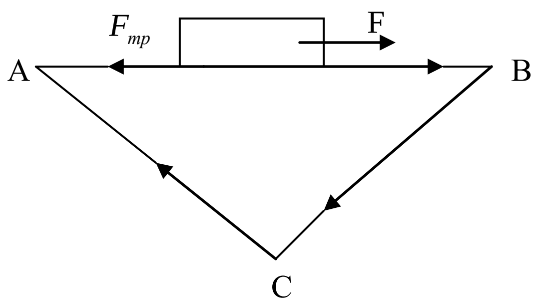
Поняття потенціальної енергії можна вивести не для всіх сил взаємодії, а лише для сил робота яких вздовж замкнутого шляху дорівнює нулю, такі сили називаються *консервативними*:

1. Сила тяжіння(гравітаційні сили).
2. Пружні сили.
3. Сили взаємодії молекул речовин.
4. Сили кулонівської взаємодії.

Неконсервативні сили:

1. Сили тертя(опору).
2. Сили тиску газу.
3. Сили вихрового електричного поля.

Покажемо, що сили тертя неконсервативні.



AB: $A_{AB} = -F_{тр} \cdot |AB|$

$A_{BC+CA} = -F_{тр}(|BC| + |CA|)$

$A_{BC+CA} = -F_{тр}(|BC| + |CA|)$

$A_{AB} > A_{BC+CA}$

Отже, наявність потенціальної енергії визначають не будь-які, а тільки консервативні(потенціальні сили). Так як природа консервативних сил може бути різною, і ці сили по різному залежать від координат, то не існує єдиної універсальної формули для потенціальної енергії. Конкретних виразів для неї стільки, скільки існує конкретних консервативних сил.

Як кінетична, так і потенціальна енергія характеризують не окреме тіло, а систему, що складаються принаймні з двох тіл, бо немає сенсу вести мову про рух і взаємодію даного тіла, якщо не вказано інше тіло, відносно якого дане тіло рухається чи з яким воно взаємодіє.

Наприклад, коли енергія піднятого над землею тіла $E = mgh$, то мається на увазі потенціальна енергія системи „тіло-земля”.

І кінетична, і потенціальна енергія – величини відносні. Їх значення залежать від виробу системи відліку.

Таким чином робота і енергія – різні фізичні величини, хоча вони мають однакові одиниці вимірювання.

Зробимо одне термінологічне зауваження:

Кажуть „механічна енергія”, „внутрішня енергія”, „електромагнітна енергія”, „атомна енергія” і т.п.

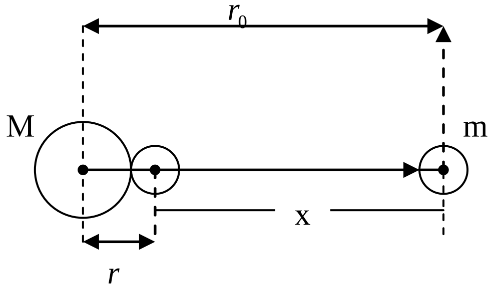
Це треба розуміти, як величину енергії, що відповідає механічній формі руху даного тіла, величину енергії, що відповідає тепловій формі руху і т.п.

Але немає різних видів енергії. Є різні форми руху матерії. Енергія є єдиною мірою руху матерії.

§3. Потенціальна енергія тіла в гравітаційному полі.

Визначимо потенціальну енергію тіла масою m, що знаходиться в гравітаційному полі тіло масою M на відстані r_0 від нього.

Тіла взаємодіють з силами.



За законом всесвітнього тяжіння $F = G\dfrac{Mm}{r_0^2}$

Для цього розрахуємо роботу А переміщення першого(малого) тіла на шляху x, що відповідає максимальному наближенню тіл.

По означення, елементарна робота

$dA = Fdr$

Тоді робота на всьому шляху дорівнює інтегралу:

$$A = -\int_{r_0}^{r} Fdr = -\int_{r_0}^{r} G\frac{Mmdr}{r^2} = -GMm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = -GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_0}^{r} = GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Або

$$A = G\frac{Mm}{r} - G\frac{Mm}{r_0} \qquad (1)$$

Знак „мінус” перед інтегралом поставимо у зв’язку з тим, що для мас, які наближаються, величина dr від’ємна, тоді як робота $dA = Fdr$ повинна бути додатною, бо переміщення маси відбувається в напрямі дії сили.

Зміна енергії вимірюється роботою, яку може виконати система при переходу з даного стану в іншій. Іншими словами робота, виконувана системою, дорівнює різниці енергії систем в цих станах.

$$A = E_0 - E_n \qquad (2),$$

де E_0 - енергія тіла в початковому стані,

E_n - енергія тіла в кінцевому стані.

У відповідності з цим визначенням отримаємо конкретні вирази для потенціальної енергії тіл в гравітаційному полі.

Співставивши (1) і (2), отримаємо:

$$E_n = -G\frac{Mm}{r} \qquad (3)$$

Формула (3) визначає потенціальну енергію тяжіння, знак „–” зумовлений тим, що з наближенням тіл, що притягуються, їх потенціальна енергія повинна зменшуватися, переходячи в кінетичну.

Отже, формули (1) і (3) показують, що робота по переміщенню тіла між двома точками гравітаційного поля дорівнює різниці потенціальних енергій тіл в цих точках.

Покажемо, що формула потенціальної енергії

$E_p = mgH$ для однорідного поля тяжіння безпосередньо слідує з формули (3)

Умовою однорідності поля тяжіння

$H << R_з$

У нашому випадку формула (3) запишеться так:

$$E = -G\frac{mM_з}{R_з + H} = -G\frac{mM_з \,{}^1\!/_{R_з}}{R_з + {}^H\!/_{R_з}} \cdot \frac{1 - {}^H\!/_{R_з}}{1 - {}^H\!/_{R_з}} = -G\frac{1}{R_з}\frac{mM_з(1 - {}^H\!/_{R_з})}{1 - {}^{H^2}\!/_{R_з^2}} \approx -G\frac{mM_з}{R_з} + G\frac{mM_з H}{R_з^2}$$

$$E = -G\frac{mM_з}{R_з} + G\frac{mM_з}{R_з^2}H$$

$-G\frac{mM_з}{R_з}$ - потенціальна енергія тіла на поверхні Землі.ЇЇ домовились вважати рівною нулю.

$$G\frac{M_з}{R_з^{\,2}} = g \qquad \begin{cases} F = G\dfrac{mM_з}{R_з^{\,2}} \\ F = mg \end{cases} \qquad => \qquad g = G\frac{M_з}{R_з^{\,2}}$$

А тому $E_p = m\left(G\dfrac{M_з}{R_з^{\,2}}\right)H = mgH$

§4. Закон збереження і перетворення енергії в механіці.

Зміну кінетичної енергії системи тіл зумовлено роботою всіх сил, що діють на систему: і консервативних сил і неконсервативних.

$E_{2k} - E_{1k} = A_к + A_н$ (1)

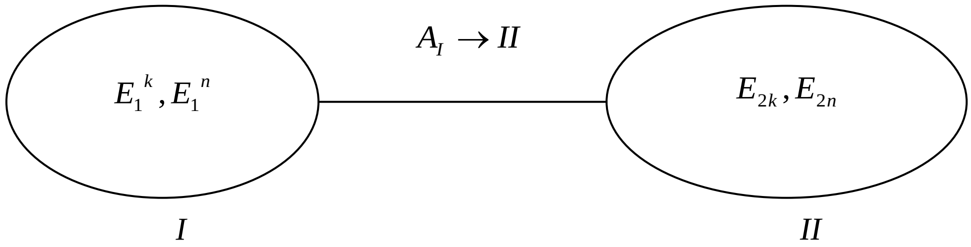
$A_к$ - алгебраїчна сума робіт всіх консервативних сил, що діють в системі.

$A_н$ - аналогічно, сума неконсервативних сил.

Робота виконана консервативними силами визначається співвідношенням

$A_к = E_{1n} - E_{2n}$ (2)

Система



Підставивши (2) в (1), отримаємо

$$E_{2k} - E_{1k} = E_{1n} - E_{2n} + A_н = (E_{2k} + E_{2n}) - (E_{1k} + E_{1n}) = A_н$$

$E_{2k} + E_{2n}$ - повна механічна енергія системи в стані II.

$E_{1k} + E_{1n}$ - повна механічна енергія системи в стані I.

Або

$E_{II} - E_I = A_н$ (3)

E_{II} - повна механічна енергія системи в початковому стані.

E_I - повна механічна енергія системи в кінцевому стані.

Отже, перетворення повної механічної енергії системи при її переході з одного механічного стану в інший дорівнює роботі всіх неконсервативних сил, що діють на тіла в системі в процесі цього переходу.

Це твердження – формулювання закону перетворення механічної енергії.

Робота, виконувана неконсервативними силами, завжди характеризує, чи перетворення механічної енергії в інші види, чи навпаки, перетворення не механічних видів енергії в механічну.

Наприклад:

Робота сил тертя характеризує перетворення механічної енергії в внутрішню.

Робота, яку виконує газ при розширенні характеризує перетворення внутрішньої енергії в механічну.

Таким чином, робота є міра перетворення одного виду енергії в іншій – це фізичний зміст роботи.

Закон збереження механічної енергії є окремим випадком загального закону збереження енергії і виконується якщо система:

a) Замкнута.
b) Консервативна.

Умова (a) означає, що на систему не діють зовнішні неконсервативні сили і тому система не обмінюється рухом(енергією) із зовнішнім середовищем.

Умова (b) означає, що в системі не діють внутрішні неконсервативні сили і тому внутрішня енергія системи не перетворюється в інші види.

Будь-яка механічна система буде консервативною, якщо зовнішні сили не змінюються з часом і потенціальні, а всі внутрішні сили також потенціальні.

Отже, якщо $A^{нек}_{внутр} = 0$, і $A^{нек}_{зовн} = 0$, тоді

$E_I - E_{II} = 0$ $\qquad E_I = E_{II}$ $\qquad$ (4) - закон збереження повної механічної енергії.

Повна механічна енергія замкнутої консервативної системи є величина постійна.

Закон збереження енергії не залежить від виду траєкторії та характеру діючих сил.

Закон збереження і перетворення енергії – загальний закон природи, у відповідності з яким енергія будь-якої замкнутої системи при всіх процесах, що проходять в системі, залишається незмінною(зберігається). При цьому енергія може тільки перетворюватися із однієї форми в іншу і перерозподілятися між частинами системи. Для незамкнутої системи збільшення(зменшення) її енергії дорівнює зменшенню(збільшенню) енергії взаємодіючих з нею тіл і фізичних полів.

Збереження енергії в замкнутій системі пов’язано в однорідністю часу. Однорідність часу полягає в тому, що всі явища в замкнутій системі за однакових початкових умов будуть протікати однаково незалежно від того, в який момент часу ці початкові умови створені.

§5. Космічні швидкості.

Перша космічна швидкість – це швидкість, яку необхідно надати тілу в горизонтальному напрямку, щоб воно стало штучним супутником Землі.

Для того, щоб тіло рухалось поблизу Землі, по кругловій орбіті, тобто стало штучним супутником Землі(ШСЗ) необхідно, щоб доцентрова сила дорівнювала силі тяжіння.

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} \qquad => \qquad v^2 = G\frac{M_з}{R} = G\frac{M_з}{R_з + h}$$

$$v = \sqrt{G\frac{M_з}{R_з}\frac{1}{1+{}^{1}\!/_{R_з}}} = \sqrt{G\frac{M_з}{R_з^2}R_з} = \sqrt{gR_з} \approx 7{,}96\,км/с$$

Друга космічна швидкість – це швидкість, яку необхідно надати тілу, для того, щоб воно штучним супутником Сонця.

Для цього тілу потрібно надати таку кінетичну енергію, яка дорівнювала б роботі по переміщенню тіла з земної поверхні на нескінченність(практично за межі помітного виміру земного тяжіння). Межі земного тяжіння дорівнюють радіусу Землі.

$$A = G\frac{M_з m}{r_n} - G\frac{M_з m}{r_0} \qquad r_n \to \infty \qquad r_0 = R_з$$

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = E_n = G\frac{M_з m}{R_з}$$

$$v_{II}{}^2 = 2G\frac{M}{R_з} = 2v_I{}^2$$

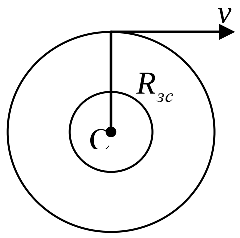
$$v_{II} = v_I\sqrt{2} \approx 11{,}2\,км/с$$

Третя космічна швидкість – це швидкість необхідна для подолання тіла притягання Сонця.

Для цього тілу необхідно надати кінетичну енергію, що дорівнює роботі по переміщенню тіла із земної орбіти на нескінченність. Очевидно, що ця робота дорівнює потенціальній енергії тіла, що знаходиться в полі тяжіння Сонця на відстані земної орбіти від Сонця.

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{M_c m}{R_{зс}} \qquad => \qquad v = \sqrt{2G\frac{M_c}{R_{зс}}} \approx 42{,}2\,км/с$$

де v - швидкість тіла відносно Сонця.



Швидкість v – це швидкість тіла відносно сонця, але її можна надати у напрямі дотичної до земної орбіти у напрямі руху Землі. Адже в цьому напрямі тіло має відносно Сонця орбітальну швидкість Землі(29,8 км/с), тому відносно Землі достатньо надати тілу швидкість

$$v^* = v - u = 42{,}2\,км/с - 29{,}8\,км/с = 12{,}4\,км/с$$

Але при цьому треба врахувати, що швидкість v^*, тіло повинно мати після виходу з поля тяжіння Землі. Тому початкова швидкість відльоту тіла з земної поверхні $v_з$ повинна бути дещо більша v^*. Для визначення v_{III} будемо виходити з таких міркувань.

Для подолання земного тяжіння, зберігаючи при цьому швидкість v^*, тіло повинно мати кінетичну енергію $\frac{mv^2}{2}$, що дорівнює сумі потенціальної енергії на земній поверхні $G\frac{Mm}{R_з}$ і кінетичної енергії тіла $\frac{mv^{*2}}{2}$. Тоді на основі заходу збереження енергії можемо записати:

$$\frac{mv_3^2}{2} = G\frac{M_з m}{R_з} + \frac{mv^{*2}}{2}$$

$$v_{III}^2 = 2G\frac{M_з}{R_з} + v^{*2} \quad => \quad v_{III} == \sqrt{v_{II}^2 + v^{*2}} \approx \sqrt{11{,}2^2 + 12{,}4^2} \approx 16{,}7\, км/с$$

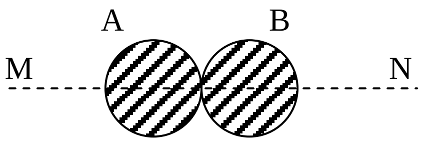
Четверта космічна швидкість. Маючи v_{II} земне тіло могло б подолати тяжіння Галактики і піти у Всесвіт. Точний розрахунок четвертої космічної швидкості складний. Тому ми обмежимось приблизною оцінкою її величини, виходячи з таких міркувань.

Астрономічні спостереження показують, що серед зірок, які рухаються навколо центра Галактики на ті й же відстані, що і Сонце, не існує ні однієї зорі, швидкість якої перевищувала б 285 км/с(Саме Сонце має швидкість 220 км/с). Це зумовлено, ймовірно, тим, що швидкість 285 км/с і є та найбільша швидкість при якій зірки можуть залишатись в межах Галактики. При більшій швидкості вони вже не утримуються нашою зірковою системою. Отже четверта космічна швидкість повинна бути дещо більшою 285 км/с , і як показують розрахунки астрофізиків, приблизно дорівнює 290 км/с.

§6. Застосування законів збереження до ударів куль.

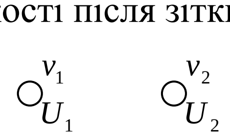
Ударом називається несподівана зміна руху тіла в наслідок зіткнення його з іншим тілом.

Пряма, що проходить через точки дотику тіл А і В при ударі і перпендикулярно до дотичної точки удару називається *MN лінією удару.*



Якщо лінія удару проходить через центри мас тіл, то удар називається *центральним*.

Відношення відносної швидкості куль після зіткнення до відносної швидкості після зіткнення називається *коефіцієнтом відновлення* ε.



$$\varepsilon = \frac{|U_2 - U_1|}{|v_2 - v_1|}, \qquad (1)$$

якщо $\varepsilon = 0$, то удар називається *абсолютно не пружний.*

$\varepsilon = 1$ - удар називається *абсолютно пружний.*

6.1. **Абсолютно не пружний удар.**

Нехай маси двох куль, що ударяються, m_1 і m_2, а їх швидкості до зіткнення – відповідно $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Після зіткнення – $\vec{U}_1$ і $\vec{U}_2$.

Якщо $\varepsilon = 0$, тоді $\vec{U}_1 = \vec{U}_2 = \vec{u}$

Застосуємо закон збереження імпульсу:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

звідки $\vec{u} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}$ (2)

Застосуємо закон перетворення механічної енергії:

$$\boldsymbol{E_{II} - E_I = A_н} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &E_{II} - E_I = A_н \\ &E_I = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \\ &E_{II} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = A_н$$

$$E_{II} = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \left(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{{m_1}^2{v_1}^2 + 2m_1 m_2 \vec{v}_1\vec{v}_2 + {m_2}^2{v_2}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

$$A = \frac{{m_1}^2{v_1}^2 + 2m_1 m_2\vec{v}_1\vec{v}_2 + {m_2}^2{v_2}^2 - {m_1}^2{v_1}^2 - m_1 m_2 v_1^2 - {m_2}^2{v_2}^2 - m_1 m_2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{m_1 m_2(2\vec{v}_1\vec{v}_2 - {v_1}^2 - {v_2}^2)}{2(m_1 + m_2)} = -\frac{m_1 m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = -\frac{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)} \qquad (4)$$

Якщо одне з тіл нерухоме, то $\vec{v}_2 = 0$ і $A = \dfrac{m_1{\vec{v}_1}^2}{2\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)}$ (5)

Нехай треба, щоб в результаті удару відбулося якомога більше переміщення нерухомого тіла. Тоді втрати енергії на виконання роботи деформації повинні бути якомога менше, а це можливо, якщо $m_1 >> m_2$.

Якщо метою удару є деформація тіла(наприклад, при подрібненні яких-небудь тіл), необхідно, щоб більша частина кінетичної енергії тіла, що вдаряє, витрачалась на роботу деформації, тобто ΔE по можливості було близьке до одиниці. Це буде у випадку, коли $\dfrac{m_1}{m_2} \to 0$, тобто $m_1 << m_2$.

6.2. **Абсолютно пружний удар.**

В цьому випадку $\varepsilon = 1$.

Тому не повинно бути ніяких витрат кінетичної енергії, бо не відбувається деформацій.

Застосовні і закон збереження імпульсу і закон збереження механічної енергії.

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2 \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 U_1^2}{2} + \dfrac{m_2 U_2^2}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

Знаходимо $\vec{U}_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

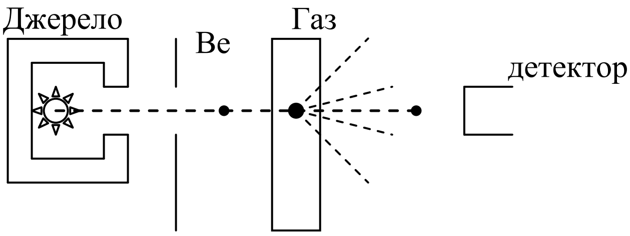
$$\vec{U}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$$

Якщо $m_1 = m_2$, тоді $\vec{U}_1 = \vec{v}_2$; $\vec{U}_2 = \vec{v}_1$, тобто кулі обміняються швидкостями.

6.2.1 **Відкриття нейтрона.**

В 1932 р. Чедвік досліджував властивості незаряджених частинок, що випромінювались шматком берилія, який бомбардувався альфа-частинками.

Коли частинки пропускаються крізь газ, природно чекати, що між цими невідомими частинками і ядра атомів газу повинні відбуватися лобові зіткнення(центральний удар). Для виділення саме таких зіткнень детектор розміщувався на лінії виходу частинок, що випромінювалось берилієм(мал.1)



Так як Чедвік не знав ні маси, ні швидкості частинок, що вивчались, для одержання необхідної інформації, він пропускав ці частинки крізь два різних гази з відомими масами атомів. Він використав водень(ядра мають масу m_p, тобто масу протона) і азот(маса ядра дорівнює $14m_p$).

Для водню: $mv = mv' + m_p v'_н$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}m_p v_н'^2$$

$$v'_н = \frac{2m}{m + m_p}v$$

Для азоту: $mv = mv' + 14m_p v'_N$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{mv'^2}{2} + \frac{14m_p v_N'^2}{2}$$

$$v'_N = \frac{2m}{m + 14m_p}v$$

Тоді $\dfrac{v'_н}{v'_N} = \dfrac{m + 14m_p}{m + m_p}$

Вимірявши відношення швидкостей ядер, що вилітають з газу, Чедвік отримав значення порядку 7,5

$$\frac{m + 14m_p}{m + m_p} \approx 7{,}5$$

$m + 14m_p \approx 7{,}5m + m_p$

$m \approx m_p$

Отже, це незаряджена частина, маса якої приблизно дорівнює масі протона.

Розділ 4. Обертальний рух твердого тіла.

Виділимо точку, пов’язану з тілом чи системою частинок. Ця точка має цікаві властивості. Вона(її називають *центром мас*), не обов’язково знаходиться в місці знаходження якоїсь частинки чи всередині тіла, а є, як правило, просто точкою в просторі. Але можна вважати, що вся система веде себе як матеріальна точка, що знаходиться в центрі мас і має масу, рівну масу всієї системи.

Для системи з N частинок, маси яких $m_1, m_2, .., m_N$, центр мас визначається таким чином:

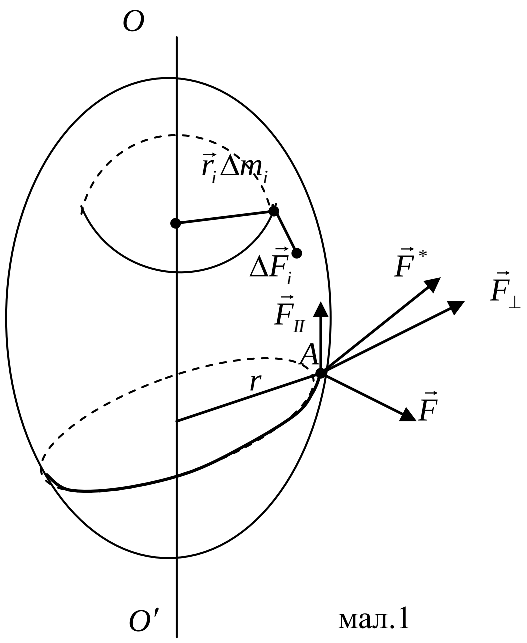
$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + ... + m_N}$$

§1. Основний закон обертального руху абсолютно твердого тіла.

Абсолютно тверде тіло визначається як система частинок, зв’язаних між собою такими ньютонівськими силами, які залишають відстані між будь якими двома точками незмінними.

Закони поступального руху абсолютно твердих тіл співпадають з першими двома законами руху Ньютона, якщо в них замінити слово „частинка” на „центр мас”.

Маса тіла і положення його центру мас повністю визначають його поступальний рух. Що стосується обертального руху, то найбільш важливою характеристикою служить тут розподіл речовини відносно центру мас – чи є тіло сильно видовженим, чи навпаки, сплюснутим.



мал.1

Нехай тверде тіло довільної форми обертається під дією сили F^* навколо деякої осі OO'. Тоді всі його точки описують кола з центрами на цій осі, причому всі точки тіла мають однакову кутову швидкість і однакове кутове прискорення в даний момент часу(мал.1).

Розкладемо силу $\vec{F}^*$ на 3 взаємно перпендикулярні складові $\vec{F}_{II}$ II осі, $\vec{F}$ - дотична.

Обертальний рух тіла виникає тільки складова F.

Дія сили F залежить від моменту сили М.

Моментом М обертаючої сили(обертальним моментом) називається добуток сили F на радіус кола r, що описує точка прикладання сили

$M = F \cdot r$ (1)

Подумки розіб'ємо все тіло на дуже малі частинки – елементарні маси. Хоча сила F прикладання до однієї точки А тіла, її обертальна дія передається всім частинкам і з елементарними масами Δm_i. Тоді кожній елементарній масі Δm_i буде прикладена елементарна сила ΔF_i.

По ІІ закону Ньютона

$\Delta F_i = \Delta m_i \cdot a_i$,

де a_i - лінійне прискорення, яке отримує елементарна маса.

Помноживши обидві частини останньої рівності на радіус r_i кола, яке описує елементарна маса і ввівши замість лінійного, кутове прискорення, отримаємо:

$\Delta F_i r_i = \Delta m_i v_i^2 \beta$

Так як $\Delta F_i r_i = \Delta M_i$

Добуток елементарної маси на квадрат відстані до осі обертання називається *моментом інерції матеріальної точки* відносно даної осі.

$\Delta m_i r_i^2 = \Delta I_i$ (2)

Тоді $\Delta M_i = \beta \Delta I_i$

Просумувавши обертальні моменти ΔM_i, прикладені до всіх елементарних мас, що складають тіло, отримаємо:

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i = \beta \sum_{i=1}^{n} \Delta I_i \qquad (3)$$

де $M = \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i$ - обертальний момент, прикладений до тіла.

$\sum_{i=1}^{n} \Delta I_i = I$ - момент інерції тіла.

Моментом інерції тіла називається сума моментів інерції всіх матеріальних точок, що складають тіло

$M = \beta I$ (4)

$\vec{M} = \vec{\beta} I$ (4а)

Формули (4) і (4а) виражають основний закон динаміки обертального руху(ІІ закон Ньютона для обертального руху).

Момент обертаючої сили, прикладена до тіла, дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутове прискорення.

Із формули (4) видно, що кутове прискорення, яке надає тілу обертаючий момент, залежить від моменту інерції тіла: чим більший момент інерції, тим менше кутове прискорення.

Отже, момент інерції характеризує інерційні властивості тіл при обертальному русі, подібно тому, як маса характеризує інерційні властивості при поступальному русі.

Але, на відміну від маси, момент інерції даного тіла може мати, багато значень у відповідності з множиною можливих осей обертання. Тому, говорячи про момент інерції твердого тіла, необхідно обов'язково вказувати, відносно якої осі він розраховується.

Якщо обертальний момент $M = const$ і момент інерції $I = const$, то формулу (4) можна подати в такому вигляді:

$$M = \frac{\omega_t - \omega_0}{\Delta t} I \text{ або } M\Delta t = I(\omega_t - \omega_0) = I\Delta\omega \qquad (5)$$

$$\vec{M}\Delta t = I\Delta\vec{\omega} \qquad (5а)$$

В наведених формулах Δt - проміжок часу, протягом якого кутова швидкість обертання тіла змінюється від ω_0 до ω_t.

$M\Delta t$ - імпульс моменту сили

$I\omega$ - момент імпульсу

Тому II закон динаміки обертального руху в загальному випадку має такий вигляд:

$$\vec{M} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (6)$$

Швидкість зміни момента імпульса тіла, що обертається, визначається сумарним моментом сил, що діють на тіло.

§2. Моменти інерції деяких тіл.

Для неоднорідних тіл і тіл неправильної геометричної форми момент інерції визначають експериментально, а для однорідних тіл геометрично правильної форми – шляхом інтегрування.

Завдання.

1. Момент інерції тонкого стержня довжиною ℓ.
2. Момент інерції бруска довжиною a і шириною b.
3. Момент інерції кільця, зовнішній радіус якого R, а внутрішній – r.
4. Момент інерції тонкостінного кільця(обруча) радіуса R.
5. Момент інерції диску(циліндру) радіусом R.
6. Момент інерції кулі радіусом R.

Якщо вісь обертання тіла паралельна осі симетрії OO', але зміщена відносно неї на відстань d, то момент інерції I' відносно паралельно зміщеної осі виражається співвідношенням, що називається *теоремою Штейнера:*

$$I' = I + md^2,$$

де I - момент інерції тіла, відносно осі симетрії.

I' - момент інерції відносно осі, що проходить на відстані d паралельно осі симетрії.

$$I' = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} = \frac{4}{12}m\ell^2 = \frac{1}{3}m\ell^2$$

§3. Закон збереження момента імпульса.

У випадку, якщо сумарний момент зовнішніх сил, що діють на тіло чи систему тіл, дорівнює нулю($\vec{M}=0$), тоді

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \qquad \text{або} \qquad \vec{L}=\vec{\omega}I=const \qquad (1)$$

Отже, якщо сума моментів зовнішніх сил дорівнює нулю, то момент імпульсу системи не змінюється з часом. В цьому полягає закон збереження моменту імпульсу.

Знайдемо вираз для кінетичної енергії тіла, що обертається.

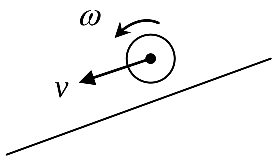
Кінетична енергія тіла, що обертається, дорівнює сумі кінетичних енергій його частинок

$$E^k=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta m_i v_i^2}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta m_i v_i^2}{2}\omega^2=\frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta m v_i^2=\frac{I\omega^2}{2} \qquad (2)$$

Виразимо кінетичну енергію тіла, що обертається, через момент імпульсу.

$$E^k=\frac{I\omega^2}{2}=\frac{I\omega^2}{2}\cdot\frac{I}{I}=\frac{I^2\omega^2}{2I}=\frac{L^2}{2I} \qquad (3)$$

На практиці часто зустрічаються випадки, коли тіло одночасно має і кінетичну енергію поступального руху і кінетичну енергію обертального руху, наприклад, куля скочується з похилої площини.



$$E^k=\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}$$

Розділ 5. Рівняння руху.

§1. Узагальнені координати.

Для визначення положення системи в N матеріальних точок, в просторі треба задати N радіус-векторів, тобто з N координат.

Взагалі число незалежних величин, завдання яких необхідне для однозначного визначення положення системи, називається числом її *ступенів вільності*, в даному випадку це число дорівнює $3N$. Ці величини не обов'язково повинні бути декартовими координат точок, і в залежності від умов задачі може виявитись більш зручним вибір яких-небудь інших координат. Будь які S величин $q_1, q_2, ..., q_S$, що повністю характеризують положення системи(з S ступенями свободи), називають її *узагальненими координатами*, а похідні $\frac{dq_i}{dt}=\dot{q}_i$ - її *узагальненими швидкостями*.

Завдання значень узагальнених координат, це не визначає „механічного стану” системи в даний момент часу, бо не дозволяє передбачити положення системи в наступні моменти часу. При заданих значеннях координат система може мати довільні швидкості, а в залежності від значення останніх буде різним і положення системи в наступний момент часу(тобто через нескінченно малий часовий інтервал dt).

Одночасне завдання всіх координат і швидкостей повністю визначається, як показує дослід, стан системи і дозволяє в принципі передбачати подальший її рух. З математичної точки зору це означає, що заданням всіх координат q і швидкостей $\dot{q}$ в деякий момент часу одночасно визначається також і значення прискорень $\ddot{q}$ в цей момент(Надалі ми будемо умовно розуміти під q сукупність всіх координат $q_1, q_2, ..., q_S$, а під $\dot{q}$ аналогічно сукупність всіх швидкостей).

Співвідношення, що пов'язують прискорення з координатами і швидкостями, називається *рівнянням руху*. По відношення до функцій $q(t)$ це – диференціальне рівняння другого порядку, інтегрування яких дозволяє в принципі визначати ці функції, тобто траєкторії руху механічної системи.

§2. Принцип найменшої дії.

Найбільш загальне формування закону руху механічних систем дається так званим *принципом найменшої дії*(або *принципом Гамільтона*). Згідно з цим принципом кожна механічна система характеризується певною функцією

$L(q_1, q_2, ..., q_S, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, ..., \frac{dq_S}{dt}, t)$, або в скороченому записі $L(q, \frac{dq}{dt}, t)$, причому рух системи задовольняє такій умові:

Нехай в моменти часу $t = t_1$ і $t = t_2$ система певні положення, що характеризуються двома наборами значень координат $q^{(1)}$ і $q^{(2)}$. Тоді між цими положеннями система рухається таким чином, щоб інтеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \frac{dq}{dt}, t)dt \quad (1)$$

мав найменше можливе значення.

Функція L називається функцією Лагранжа даної системи, а інтеграл (1) – дією.

Для спрощення запису формул спочатку припустимо, що система має всього одну ступінь вільності, так що повинна бути визначена всього одна функція $q(t)$.

Нехай $q = q(t)$ і є функція, для якої S має мінімум. Це означає, що S зростає при заміні $q(t)$ на функцію виду

$$q(t) + \delta q(t), \qquad (2)$$

де $\delta q(t)$ - функція, мала на всьому інтервалі часу від t_1 до t_2(її називають варіацією функції $q(t)$).

Так як при $t = t_1$ і $t = t_2$ всі порівнювані функції (2) повинні набувати одні й ті ж значення $q^{(1)}$ і $q^{(2)}$, то повинно бути:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \qquad (3)$$

Зміна S при заміні q на $q + \delta q$ дається різницею:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \frac{dq}{dt}+\delta\frac{dq}{dt}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \frac{dq}{dt}, t)dt$$

Розклад цієї різниці по степеням δq і $\delta\frac{dq}{dt}$ (в підінтегральному виразі) починається з членів першого порядку. Необхідною умовою мінімальності S є перетворення в нуль сукупності цих членів; її називають першою варіацією інтегралу. Отже, принцип найменшої дії можна записати у вигляді:

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q, \frac{dq}{dt}, t)dt = 0 \qquad (4)$$

або виконавши варіювання

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt = 0$$

Відмітивши, що $\partial\dot{q} = \frac{d}{dt}\partial q$, про інтегруємо другий член по частинам і отримаємо:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\,|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt = 0 \qquad (5)$$

Але враховуючи умови (3) перший член в цьому виразі зникає. Залишається інтеграл, який повинен дорівнювати нулю при довільних значеннях δq. Це можливо тільки в тому випадку, якщо підінтегральний вираз тотожно перетворюється в нуль. Отже, ми отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

При наявності кількох ступенів вільності в принципі найменшої дії повинні залежно варіюватися S різних функцій $q_i(t)$. Очевидно, що ми отримуємо тоді S рівнянь виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (\text{i}=1,2,..., S) \qquad (6)$$

Це шукані диференціальні рівняння; вони називаються в механіці *рівняннями Лагранжа*.

Якщо функція Лагранжа, даної механічної системи відома, то рівняння (6) встановлюють зв'язок між прискореннями, швидкостями і координатами, тобто вони є рівняннями руху системи.

Зазначимо, що функція Лагранжа визначена лише з точністю до додавання до неї повної похідної від довільної функції координат і часу.

§3. Функція Лагранжа вільної матеріальної точки.

Завжди можна знайти таку систему відліку, по відношенню до якої простір є однорідним і ізотропним, а час – однорідним. Така система називається інерціальною. Ми можемо тепер зробити деякі висновки про вид функції Лагранжа матеріальної точки, що вільно рухається в ІСВ. Однорідність простору і часу означає, що ця функція не може містити явним чином ні радіус-вектора $\vec{r}$ точки, ні часу t, тобто L є функцією лише від швидкості $\vec{v}$. В силу ж ізотропії простору функція Лагранжа не може залежати також і від напряму вектора $\vec{v}$, так що є функцією лиши від його абсолютної величини, тобто від квадрату $\vec{v}^2 = v^2$

$L = L(v^2)$ (1)

Для знаходження виду залежності функції Лагранжа від квадрата вектора швидкості, скористаємося принципом відносності Галілея. Якщо ІСВ K рухається відносно ІСВ K' з нескінченно малою швидкістю $\vec{\varepsilon}$, то

$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$

Так як рівняння руху у всіх системах відліку повинні мати один і той же вигляд, то функція Лагранжа $L(v^2)$ повинна при такому перетворенні перейти в функцію L', яка, якщо і відрізняється від $L(v^2)$, то лише на повну похідну від функції координат і часу

$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\vec{v}\vec{\varepsilon} + \varepsilon^2)$

Розклавши цей вираз в ряд по степеням $\vec{\varepsilon}$ і нехтуючи нескінченно малими вищих порядків, отримаємо

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\vec{v}\vec{\varepsilon}$$

Даний член правої частини цієї рівності буду повною похідною по часу тільки в тому випадку, якщо він залежить від швидкості $\vec{v}$ лінійно. Тому $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ від швидкості не залежить, тобто функція Лагранжа в даному випадку прямо пропорційна квадрату швидкості:

$L = av^2$

З того, що функція Лагранжа такого виду задовольняє принципу відносності Галілея у випадку скінченної швидкості $\vec{U}$ системи відліку K відносно K'. Дійсно,

$$L' = L + \frac{d}{dt}(2a\vec{r}\vec{U} + aU^2 t)$$

Другий член є повною похідною і може бути відкинутий. Постійна а прийнято позначати як $\frac{m}{2}$, так що врешті напишемо функцію Лагранжа точки, що вільно рухається, у вигляді:

$L = \frac{mv^2}{2}$, де m - маса матеріальної точки.

Для системи не взаємодіючих точок

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i {v_i}^2}{2}$$

Корисно відмітити, що $v^2 = \left(\frac{d\ell}{dt}\right)^2 = \frac{d\ell^2}{dt^2}$

Тому для складання функції Лагранжа досить знайти квадрат довжини елемента дуги $d\ell$ у відповідній системі координат.

В декартових координатах, наприклад, $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, тому

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

§4. Функція Лагранжа системи матеріальних точок.

Розглянемо замкнуту систему матеріальних точок, що взаємодіють між собою. Взаємодію між, матеріальними точками можна описати доповненням до функції Лагранжа не взаємодіючих точок певної(залежно від характеру взаємодії) функції координат.

Позначивши цю функцію через - U , напишемо:

$$L=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^{\,2}}{2}-U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n) \qquad (1)$$

де $\vec{r}_n$ - радіус n-ї точки.

Суму $T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^{\,2}}{2}$ = називається кінетичною енергією, а функцію U - потенціальною енергією системи.

Той факт, що потенціальна енергія залежить тільки від розміщення всіх матеріальних точок в один і той же момент часу, означає, що зміна положення однієї з них миттєво позначається на всіх останніх; можна сказати, що взаємодії „поширюються” миттєво. Це пов’язано з основними передумовами класичної механіки – абсолютністю часу і принципом відносності Галілея. Якби взаємодія розповсюджувалась не миттєво, тобто з кінцевою швидкістю, то ця швидкість була б різною в різних(що рухаються одна відносно іншої) системах відліку, бо абсолютність часу автоматично означає застосовність правила додавання швидкостей до всіх явищ. Але тоді закони руху взаємодіючих тіл були б різними в різних (інерціальних) системах відліку, що суперечило б принципу відносності.

Знаючи функцію Лагранжа, ми можемо скласти рівняння руху

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \qquad (2)$$

Підставивши сюди (1), отримаємо:

$$m_i\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \qquad (3)$$

Рівняння руху в цій формі називаються рівняннями Ньютона і являють собою основу механіки частинок, що взаємодіють.

Вектор

$$\vec{F}_i=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \qquad (4)$$

що стоїть в правій стороні рівнянь (3), називається силою, що діє на і-ту точку. Разом з U вона залежить лише від координат всіх матеріальних точок, а не від їх швидкостей. Рівняння (3) тому показують, що і вектори прискорення матеріальних точок є функціями тільки від координат.

До цього часу мова йшла тільки про замкнуті системи. Розглянемо тепер незамкнуту систему А, що взаємодіє з іншою системою В, яка здійсню заданий рух. В такому випадку говорять, що система А рухається в заданому зовнішньому полі(створюваному системою В). Так як рівняння руху отримуються з принципу найменшої дії шляхом незалежного варіювання кожної з координат(тобто неначе вважаючи інші відомими), ми можемо для знаходження функції Лагранжа L_A системи A, скориставшись лагранжевою функцією L всієї системи A+B, замінивши в ній координати q_B заданими функціями часу.

Вважаючи систему A+B замкнутою, будемо мати:

$$L = T_A\left(q_A, \frac{dq}{dt}A\right) + T_B\left(q_B, \frac{dq}{dt}B\right) - U(q_A, q_B), \qquad (5)$$

де перші два члени є кінетичними енергіями систем A і B, а третій член – їх спільну потенціальну енергію.

Підставивши замість q_B задані функції часу і відкинувши члени $T\left(q_B(t), \frac{dq(t)}{dt}B\right)$, що залежить тільки від часу(і тому є повною похідною від деякої іншої функції часу) отримаємо

$$L_A = T_A\left(q_A, \frac{dq}{dt}A\right) - U(q_A, q_B(t)) \qquad (6)$$

Таким чином, рух системи у зовнішньому полі описується функцією Лагранжа звичайного типу з тією відміною, що тепер потенційна енергія може залежати від часу явно.

Так для руху однієї частинки у зовнішньому полі загальний вигляд функції Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(\vec{r}, t) \qquad (7)$$

і рівняння руху

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \qquad (8)$$

Однорідним називають поле, у всіх тачках якого на частинку діє одна і та ж сила $\vec{F}$. Потенціальна енергія в такому полі дорівнює, очевидно:

$$U = -\vec{F}\vec{r} \qquad (9)$$

На закінчення зробимо зауваження з приводу застосування рівнянь Лагранжа до різних конкретних задач. Часто доводиться мати справу з такими механічними системами, в яких взаємодія між тілами(матеріальними точками) має, як кажуть, характер зв’язків, тобто обмежень, що накладаються на взаємне розміщення тіл. Фактично такі зв’язки здійснюються шляхом скріплення тіл різними стержнями, нитками, шарнірами і т.п. Ця обставина вносить в рух новий фактор – рух тіл супроводжується тертям в місцях їх дотику, в результаті чого задача виходить за рамки механіки. Але в багатьох випадках тертя в системі виявляється настільки слабким, що його впливом на рух можна повністю знехтувати. Якщо до того ж можна знехтувати масами елементів системи, що скріплюють, то роль останніх зведеться просто до зменшення числа ступенів вільності системи S (в порівнянні з числом $3N$). Для визначення її руху можна при цьому знову користуватись функцією Лагранжа виду (1) з числом незалежних узагальнених координат, що відповідають фактичному числу ступенів вільності.

Частина 2. Молекулярна фізика та основи термодинаміки.

Розділ 1. Основи молекулярно-кінетичної теорії газів.

§1. Основні положення МКТ.

На початку минулого століття англійський учений Д.Дальтон показав, що більшість закономірностей явищ природи можна пояснити, використовуючи уявлення про атоми і молекули, і науково обґрунтував молекулярну будову речовини. На початок нашого століття була врешті побудована і підтверджена багатьма дослідами МКТ будови речовини.

МКТ – вчення, що пояснює будову і властивості тіл рухом і взаємодією атомів, молекул і іонів, з яких складаються тіла.

В основі МКТ лежать 3 найважливіших положення, які повністю підтверджені експериментально і теоретично.

<u>І положення:</u>

Всі тіла складаються з частинок – атомів, молекул і іонів, в склад яких входять ще менші частинки, які умовно називають елементарними.

Молекулою(від латинського „молес” – маса, „кула” – зменшувальний суфікс) називають найменшу частинку речовини, здатну до самостійного існування, яка зберігає хімічні властивості цієї речовини.

Молекули складаються з атомів(від грецького „атомос” – неподільний). Якщо при деякому явищі природи молекули залишаються незмінними, то речовина зберігає свої хімічні властивості.

Якщо ж молекули змінюють свою будову чи розпадаються на окремі атоми, що утворюються нові види речовини з іншими хімічними і фізичними властивостями.

Речовини, які не можна розкласти на більш прості складові частини, називаються *хімічними елементами*. Кожному хімічному елементу відповідають атоми, які мають певне місце (номер) в таблиці Мендєлєєва.

Кількість сортів(видів) атомів порівняно невелика і дорівнює числу хімічних елементів та їх ізотопів(на сьогодні відомо 108 елементів і $\approx 1{,}5$ тисячі ізотопів).

Різні комбінації цих атомів і створюють всю множину видів молекул. Молекули, що утворюють дану речовину, однакові, але відрізняються швидкостями.

Різні речовини складаються з різних молекул. Молекули характеризуються певними константами. До них відносяться розміри молекули; число Авогадро і маса молекул. Розміри молекул мають порядок 1 ангстрема.

$$1\overset{0}{A} = 10^{-8} см = 10^{-10} м$$

Розмір молекул становить деяку умовну величину. Дійсно, молекула має певну форму, але оточена складним електромагнітним полем, яке простягається нескінченно, проте швидко зменшується з відстанню і на деякій відстані ним можна знехтувати. Ця відстань і називається радіусом молекули, а молекулі приписують форму кулі. Розміри атомів і молекул мають в середньому порядок $10^{-7} - 10^{-8} см$. Розроблено значну кількість методів, за допомогою яких можна досить точно визначити розміри і масу молекули. Але ці способи, як правило, досить складні і громіздкі.

Маси молекул дуже малі(у звичних для нас масштабах). Наприклад, маса молекули кисню

$m_{O_2} = 53{,}5 \cdot 10^{-24}$г

$m_{H_2} = 3{,}34 \cdot 10^{-24}$г

$m_H = 1{,}672 \cdot 10^{-24}$г

Тому була введена нова додаткова одиниця вимірювання – *атомна одиниця маси*.

Атомною одиницею маси називається $1/2$ маси ізотопу вуглецю C_6^{12}.

Маса молекули(атома), виражена в атомних одиницях маси, називається відносно молекулярною(атомною) масою А. Вона показує у скільки разів маса молекули речовини більша $1/2$ маси ізотопу вуглецю C_6^{12}.

Атомна одиниця маси

$$A = \frac{m}{1/2\, m_{C_6^{12}}} \qquad m = 1{,}660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

Отже, масу молекули можна знайти за відомою відносною молекулярною масою.

$m = m_{відн} \cdot 1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг

Атоми різних хімічних елементів мають різну атомну масу, тому, наприклад, в 1 кг свинцю Pb і в 1 кг алюмінію Al міститься різна кількість атомів.

Тому для кількісної характеристики однорідних тіл по кількості атомів і молекул, що містяться в них, вводиться поняття *кількості речовини*.

Кількістю речовини називається фізична величина, що визначається кількістю специфічних структурних елементів, атомів, молекул або іонів, - з яких складається речовина. Так як маси окремих структурних елементів, наприклад, молекул, відрізняються, то однакові кількості різних речовин мають різну масу. Підкреслимо, що маса не є мірою кількості речовини.

В СІ за одиницю вимірювання кількості речовини прийнято 1 моль – кількості речовини, що містить стільки ж молекул(атомів), скільки атомів міститься в 0,012 кг вуглецю C_6^{12}.

Кількість атомів чи молекул, що містяться в 1 молі речовини, називається числом Авогадро(N_A).

$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

Визначення числа Авогадро відноситься до числа особливо важливих подій в зв’язку з тим, що це число безпосередньо пов’язано з існуванням атомної будови речовини. Число Авогадро пов’язує мікроскопічний масштаб з макроскопічним, бо моль будь якої речовини як правило містить тіло звичних для нас розмірів, тобто макротіло. Наприклад, при нормальному атмосферному тиску і $t = 0^0 C$, моль будь якого газу займає об’єм $V = 22{,}4$ л.

Масу однієї молекули чи атома можна отримати із співвідношення

$$m_A = \frac{A}{N_A} \qquad (1)$$

$$m_M = \frac{M}{N_A} \qquad (2)$$

<u>ІІ положення:</u>

Між частинками любого тіла(атомами, молекулами і іонами) одночасно діють сили взаємного притягання і сили взаємного відштовхування.

Закони сил, що діють між атомами, молекулами і іонами, зовсім не схожі на кулонівські, хоча ці сили врешті мають електромагнітне походження. Точний вигляд закону взаємодії частинок такого роду дуже складний. Зокрема, сила їх взаємодії виявляється залежно не тільки від відстані між частинками, що взаємодіють, але і від їх взаємної орієнтації. Однак, в більшості випадків достатньо знати силу взаємодії, середню по всім їх можливим орієнтаціям.

Закон дії усереднених сил виявляється порівняно простим і має вигляд:

1) для сил притягання

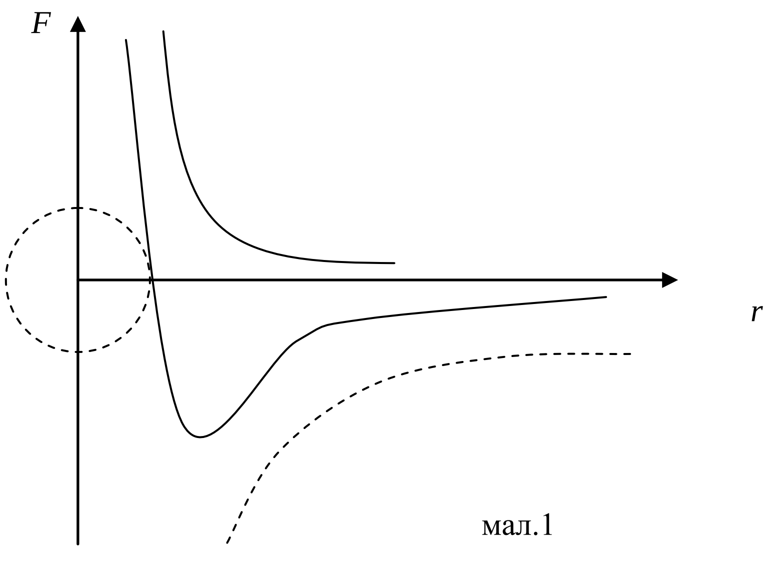
$$F_{пр} = -\frac{a}{r^7} \qquad (2)$$

2) для сил відштовхування

$$F_{від} = \frac{b}{r^{13}} \qquad (3)$$

де a і b – коефіцієнти пропорційності, що залежать від будови молекул, які взаємодіють.

Одночасне існування сил притягання і відштовхування означає, що на молекулу діє рівнодійна сила міжмолекулярної взаємодії.



мал.1

Одну молекулу вважаємо нерухомою і розміщеною в початку системи координат F, r, а друга молекула змінює свою відстань відносно першої вздовж осі r.

Величина сил міжмолекулярної взаємодії не залежить від загального числа молекул. Наприклад, густина або пружні властивості рідини і твердих тіл не залежать від розмірів дослідного зразка: крапля води і вода в Дніпрі за однакової температури і однакового зовнішнього тиску мають рівну густину і стискуваність. Ця властивість міжмолекулярних сил називається *насичуваністю*. Цим міжмолекулярні сили принципово відрізняються від гравітаційних чи кулонівських сил, для яких рівнодійна визначається дією всіх тіл, що входять в систему.

Сили міжмолекулярної взаємодії мають електромагнітну природу, зумовлену тим, що молекули складаються із електрично заряджених частинок, яки властива взаємодія.

Правда, в цілому молекула електрично нейтральна, однак заряди в молекулі розміщуються в процесі її наближення до іншої молекули несиметрично.

Завдяки цьому молекули виявляються *полярними*, подібними електричним диполям: між різнойменно зарядженими полюсами виникають сили притягання, що переважають сили відштовхування однойменних „полюсів”.

Якщо ж молекули дуже близько підійдуть одна до одної, то вирішальну роль в їх взаємодії починають відігравати сили відштовхування між електронними оболонками атомів, що складають цю молекулу.

<u>ІІІ положення:</u>

Атоми, молекули і іони перебувають в неперервному хаотичному русі.

Хаотичний рух частинок, що утворюють макроскопічне тіло, називається тепловим. Тепловий рух визначає внутрішній стан кожного макроскопічного тіла. За винятком особливих випадків, які мають місце в квантовій фізиці, тепловий рух є нерелятивістським, тобто швидкість молекул набагато менше швидкості світла.

Відмітимо, що про тепловий рух можна говорити тільки в тих випадках, коли розглядувана фізична система є макроскопічною.

Не має сенсу вести мову про тепловий рух, коли система, наприклад, складається з однієї чи кількох молекул(атомів чи іонів).

Знаходячись у стані неперервного хаотичного руху молекули „зтикаються” одна з одною і змінюють свою швидкість як за напрямком, так і за величиною.

Правда, зіткнення при цьому у звичайному розумінні цього слова не відбувається, бо безпосередньому зтиканню молекул заважають сили відштовхування, що різко зростають при їх наближенні. Але дія цих сил приводить до того ж результату, що при звичайному зіткненні, тобто відскакуванню молекул, що наблизились, одна від одної.

§2. Ідеальний газ. Основне рівняння МКТ газів(рівняння Клаузіуса).

Перед тим як розпочати розгляд рівняння Клаузіуса, зробимо кілька попередніх припущень відносно самого газу:

а) молекули – пружні кульки, розмірами яких можна знехтувати(матеріальні точки), що рухаються хаотично, при цьому між ними відбуваються пружні зіткнення;

б) сили притягання між молекулами газу нехтовно малі бо молекули знаходяться на значних відстанях одна від одної.

Сили відштовхування між молекулами виявляються тільки в моменти взаємозіткнень останніх;

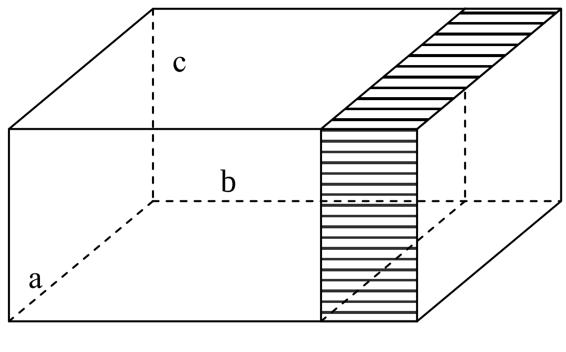
в) кількість взаємозіткнень між молекулами набагато менше в порівнянні з кількістю ударів об стінки посудини, в якій газ знаходиться.

г) об'єм молекул газу в порівнянні з об'ємом посудини, в якій газ знаходиться, можна знехтувати.

Газ, що задовольняє цим умовам, називається *ідеальним*.

Реальні гази не задовольняють описаній моделі. Але реальний газ, що розміщений в досить великому об'ємі і перебуває не під дуже високим тиском(до 100 фізичних атмосфер – 1атм = 760 мм.рт.ст.) веде себе як ідеальний.

Щоб проаналізувати тиск, що створюють молекули газу, кількісно, припустимо, що газ знаходиться в посудині, одна стінка якої є поршнем, здатний переміщуватися.



мал.1

Знайдемо силу, з якою діють на поршень молекули, що знаходяться всередині посудини. В поршень вдаряються молекули, що рухаються всередині об'єму з різними швидкостями.

Припустимо, що зовні посудини вакуум. Що відбудеться? Щоб утримати поршень, доведеться прикласти силу F. Тоді на поршень буде діяти тиск.

$$p = \frac{F}{S}$$

З якою силою треба діяти на поршень, щоб зрівноважити удари молекул? При кожному ударі поршню надається деякий імпульс. Отже, сила, яку ми визначили як добуток тиску на площу, дорівнює імпульсу, переданому поршню за 1 с всіма молекулами всередині посудини.

Підрахунок імпульсу, що передається поршню за 1 с, виконаємо в дві статті:

а) спочатку визначимо кількість співударянь молекул з одиницею поверхні поршня за 1 с.

б) потім визначимо імпульс, переданий однією молекулою при зіткненні з поршнем.

Сила, що діє на одиницю площі(тобто тиск) і буде добутком цих двох величин.

Вважаємо всі напрямки руху молекул рівноцінними, тому в трьох напрямах, паралельно ребрам a, b, c, рухається 1/3 від загальної кількості молекул в посудині.

Розглянемо молекули, що рухаються вздовж ребра b в напрямі поршня.

За 1 с одна молекула зазнає $\frac{v \cdot 1c}{b}$ зіткнень з поршнем.

З $\frac{1}{3}N$ молекул в напрямі поршня рухається половина молекул, тобто $\frac{1}{6}N$.

Тоді за 1 с вони зазнають $\frac{1}{6}N \cdot \frac{v}{b}$ зіткнень.

Отже, за 1 с з одиницею площі поверхні поширення зіткнеться $\frac{1}{6}N \cdot \frac{v}{bac} = \frac{1}{6}nv$ молекул.

Врахуємо, що молекули мають різні швидкості. Тоді в поршень за 1 с будуть ударяти різні групи молекул з швидкостями v_i.

Врахуємо, що $\bar{v}_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{n}$ $\qquad n\bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} v_i$

Тоді кількість зіткнень молекул з поршнем за 1 с буде дорівнювати $\frac{1}{6}n\bar{v}_i$.

б) визначимо імпульс, переданий однією молекулою поршню. Внаслідок абсолютно пружного зіткнення з поршнем молекула змінює свою швидкість за напрямком. Тоді зміна імпульсу молекули дорівнює $-2mv_i$

А поршень змінює свій імпульс на величину $2mv_i$

Проводячи усереднення, отримаємо

$$p = \frac{1}{3}nm\bar{v}^2 \qquad (1)$$

$$p = \frac{2}{3}n\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{2}{3}n\bar{E} \qquad (2)$$

Формули (1) і (2) і є основним рівнянням МКТ ідеального газу(рівняння Клаузіуса). Це рівняння пов’язує між собою макроскопічні характеристики газу з мікроскопічними характеристиками молекул.

§3. Наслідки з основного рівняння кінетичної теорії ідеального газу.

а) Закон Бойля – Маріотта

Скористаємося рівнянням Клаузіуса у вигляді:

$$p = \frac{2}{3} n\overline{E}_k$$

Врахувавши, що $n = \frac{N}{V}$, тому отримаємо $p = \frac{N}{V}\overline{E}_k$ => $pV = \frac{2}{3} N\overline{E}_k$

Закон Бойля – Маріотта описує ізотермічний процес, тобто процес, що протікає при постійний температурі $t = const$, тоді $\overline{E}_k = const$.

По друге, закон Бойля – Маріотта має місце для газу, кількість молекул якого незмінна, тобто $\frac{2}{3} N = const$

Тоді $\begin{cases} PV = const \\ m = const \\ t = const \end{cases}$ - закон Бойля – Маріотта.

Добуток тиску газу на об'єм при даній масі газу і при постійній температурі є величина постійна.

Виникає питання:

в чому полягає фізичний зміст закону Бойля – Маріотта?

Для відповіді на поставлене питання перевіримо розмірність цього закону в СІ.

$$[PV] = \left[Па \cdot м^3\right] = \left[\frac{Н}{м^2} \cdot м^3\right] = [Н \cdot м] = [Дж]$$

Отже, з точки зору фізики закон Бойля – Маріотта показує, що при ізотермічному процесі внутрішня енергія газу не змінюється.

б) Середня кінетична енергія поступального руху молекули ідеального газу.

Скористаємося основним рівнянням Клаузіуса в формі:

$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V_м}\overline{E}_k$, де $V_м$ - молярний об'єм

$$pV_м = \frac{2}{3} N\overline{E}_k$$

Для молярного об'єму кількість молекул дорівнює числу Авогадро

$N = N_A$

$$pV_м = \frac{2}{3} N_A\overline{E}_k \qquad (1)$$

Запишемо рівняння Клапейрона – Менделєєва для 1 моля газу:

$$PV_м = RT \qquad (2)$$

Співставивши (1) і (2), отримаємо:

$\frac{2}{3} N_A\overline{E}_k = RT$ => $\overline{E}_k = \frac{3}{2}\left(\frac{R}{N_A}\right)T$

$\frac{R}{N_A} = k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К}$ - постійна Больцмана

Отже, $\overline{E}_k = \frac{3}{2} kT$ (3)

З (3) слідує фізичний зміст постійної Больцмана:
вона показує, яку роботу здійснює 1 молекула газу, що рухається з деякою середньою швидкістю, при підвищені температури газу на 1 ^{0}К.

в) Число Лошмідта

Підрахуємо кількість молекул газу в одиницю об'єму. Для цього скористаємося основним рівнянням МКТ, що має вигляд:

$$p = \frac{2}{3} n \overline{E}_k$$

Підставляючи сюди значення $\overline{E}_k$ з формули (3), отримаємо:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{3}{2} kT$$

$$p = nkT \qquad (4)$$

Тоді $n_0 = \frac{p}{kT}$ (5)

При однакових температурі і тиску всі газу містять в одиниці об'єму однакову кількість молекул. Кількість молекул, що міститься в 1 м^3 газу за нормальних умов називається *числом Лошмідта*. За формулою (5) воно дорівнює

$$n_0 = \frac{1{,}03 \cdot 10^5 \, Па}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К} \cdot 237^0 \, К} = 2{,}69 \cdot 10^{25} м^{-3}$$

г) Середня квадратична швидкість руху молекул ідеального газу:

Виводячи основне рівняння МКТ ми позначимо середню квадратичну швидкість через $\bar{v}^2$. Тоді середня кінетична енергія

$\overline{E}_k = \frac{m\bar{v}^2}{2}$. З іншого боку $\overline{E}_k = \frac{3}{2} kT$

Тоді $\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT$ => $\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m}$

$$v_{с.кв.} = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$k = \frac{R}{N_A} \qquad v_{с.кв.} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_A}}$$

$$m = \frac{M}{N_A} \Rightarrow M = mN_A$$

$$v_{с.кв.} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad (6)$$

тобто для даного газу середня квадратична швидкість молекул пропорційна кореню квадратному з абсолютної температури і залежить тільки від неї.

§4. Розподіл числа молекул за швидкостями(розподіл Максвела).

Серед квадратична швидкість – менше статистична характеристика руху молекул, отримана шляхом усереднення різних значень швидкостей значної кількості молекул.

В дійсності ж молекули рухаються з різними швидкостями v навіть при деякий заданій температурі t.

Розіб'ємо весь діапазон цих швидкостей на малі інтервали dv. Тоді на кожний інтервал швидкості буде припадати деяке число молекул dN, що мають швидкість, обмежену цим інтервалом. Відношення $\frac{dN}{dv}$ показує, скільки молекул припадає на кожний одиничний інтервал швидкості. Іншими словами, який розподіл числа молекул за швидкостями.

$\frac{dN}{dv}$ залежить від швидкості і називається функцією розподілу числа молекул за швидкостями.

Цю функцію розподілу вперше визначив англ. фізик Джеймс Клерк Максвелл теоретичним шляхом, застосувавши теорію ймовірностей.

Максвелівська функція розподілу представлена формулою, яка називається законом Максвела і має такий вид:

$$\frac{dN}{dv} = N\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} v^2 \qquad (1)$$

де N - загальна кількість молекул газу

M - молярна маса

R - універсальна газова постійна

При $v \to 0$ і при $v \to \infty$ функція розподілу прагне до нуля.

Знайдемо найбільш ймовірну швидкість, при якій функція розподілу має максимум.

Для цього першу похідну функції розподілу по v^2 прирівняємо до нуля.

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(N\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} v^2\right) = 0$$

$$\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\cdot v^2 + e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}\right) = 0$$

$$\left(\frac{-Mv^2 + 2RT}{2RT}\right)\cdot e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} = 0$$

$e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} = 0$ при $v \to \infty$ не має фізичного змісту

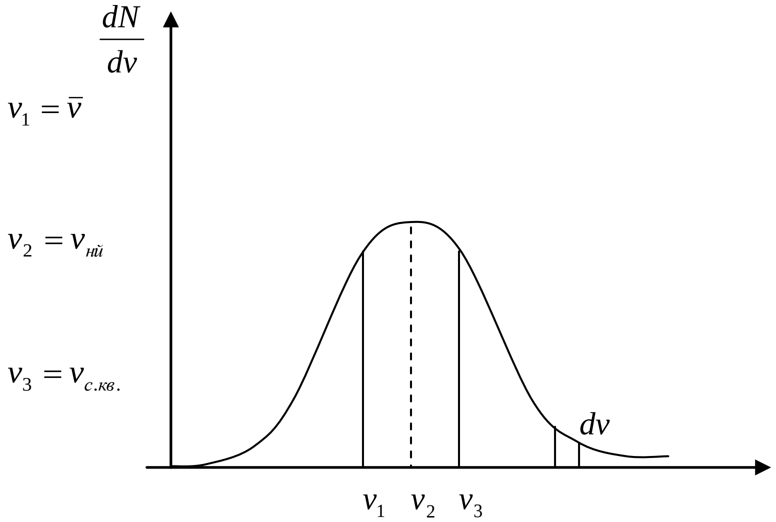
$$-Mv^2 + 2RT = 0$$

$$v_{нй} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \qquad (2)$$

Найбільш ймовірною називається швидкість, поблизу якої на одиничний інтервал припадає найбільша кількість молекул.

Вона розраховується за формулою (2).

Графічно закон Максвела представлено кривою, що починається в початку координат, досягає максимуму при $v_{нй}$ і потім асимптотично наближається до осі абсцис(мал.1).



мал.1

Графік точно показує, що молекул з малими і великими швидкостями мало і що більшість молекул має швидкості, близькі до найбільш ймовірної швидкості.

Із закону Максвелла можна отримати вираз для середньої арифметичної швидкості $\bar{v}$.

Вона дорівнює

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

$$v_{с.кв.} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad v_{нй} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Ці вирази показують, що дані швидкості розрізняються між собою тільки коефіцієнтами:

$$v_{с.кв.} > \bar{v} > v_{нй}$$

Виділимо на осі абсцис елементарний інтервал швидкостей dv і проведемо ординати його меж. Тоді площа дуже вузького прямокутника дорівнюватиме

$$\frac{dN}{dv}dv = dN,$$

тобто числу молекул, що мають швидкість в інтервалі dv. Отже, площа, обмежена кривою розподілу і віссю абсцис дорівнює загальній кількості молекул газу N.

При зміні температури газу змінюються швидкості руху всіх молекул, а отже і найбільш ймовірна швидкість. Тому максимум кривої буде зміщуватись вправо, при підвищені температури, або вліво при зниженні температури, однак площа, обмежена кривою, залишається незмінною, бо загальна кількість молекул газу не залежить від температури.

Розподіл Максвелла за швидкостями був підтверджений експериментально німецьким фізиком Штерном у 1920 р.

§5. Барометрична формула. Розподіл Больцмана.

При виведені основного рівняння кінетичної теорії газів ми припускали, що на молекули не діють ніякі зовнішні сили. Тому можна було вважати, що молекули рівномірно розподілені по об'єму посудини, в якому знаходиться газ. Фактично молекули будь-якого газу знаходяться в полі тяжіння Землі.

Якби не було теплового руху молекул атмосферного повітря, то всі вони впали б на Землю.

Якби не було тяжіння, то атмосферне повітря розсіялося б по всьому Всесвіту. Тяжіння і тепловий рух приводять газ в стан, при якому його концентрація і тиск зменшуються з висотою.

Знайдемо закон зміни тиску газу з висотою. Гідростатичний тиск визначається за формулою

$$p = \rho gh \quad (1)$$

де p – тиск рідини чи газу на глибині (висоті) від її поверхні

ρ – густина рідини чи невеликої товщини газу можна вважати постійною (ρ=const)

g – прискорення сили тяжіння

Гази легко стискуються, а тиск газу залежить від густини, отже, формулою Паска ля можна користуватися тільки для розрахунку тиску дуже тонких горизонтальних шарів газу, густину яких можна вважати постійною .

Якщо на висоті h від умовного горизонтального рівня газу тиск газу дорівнює p, то зі збільшенням висоти на dh тиск газу знизиться на dP, причому

$$dp = -\rho gdh \quad (2)$$

Знак „мінус ” означає, що тиск з висотою знижується .

Перетворимо формулу (2), скориставшись р-м Мендєлєєва-Клапейрона

$$PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{M} = \frac{R\mu}{RT}$$

Тоді

$$dp = -\frac{\mu gp}{RT}dh$$

Так як шар газу тонкий, то T=const, тобто процес ізотермічний (іншими словами, в подальшому вважаємо, що атмосфера ізотермічна).

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{RT}dh$$

$$\ln p = -\frac{gm}{RT}h + \ln C$$

$$p = Ce^{-\frac{g\mu}{RT}h}$$

h=0 C=p_0-атмосферний тиск біля поверхні Землі

$$p = p_0 e^{-\frac{g\mu}{RT}h} \quad (3) \text{ барометрична формула}$$

Вона дозволяє визначити висоту h за допомогою барометра.

Барометр спеціально про градуйований для безпосереднього відліку висоти над рівнем моря називають альтиметром чи висотоміром.

Користуючись формулою (3) можна отримати співвідношення між концентраціями газу на різній висоті .

Тиск газу пов’язано з концентрацією його молекул формулою :

$$p = nkT$$

Якщо процес ізотермічний (T=const), то

$p_0 = n_0 kT$ (де n_0 - концентрація молекул на висоті h=0)

Тому рівняння (3) можна записати в формі

$$n = n_0 e^{-\frac{g\mu}{RT}} \quad (4)$$

Скористаємося співвідношенням $\frac{R}{\mu} = \frac{k}{m}$, де m – маса молекул газу.

$$n = n_0 e^{-\frac{g\mu}{RT}h} \quad (5)$$

Формулу (5) можна перетворити, якщо врахувати, що $mgh = E_p$- потенціальна енергія молекули в полі тяжіння Землі , тоді

$$n = n_0 e^{-\frac{E_n}{RT}} \quad (6)$$

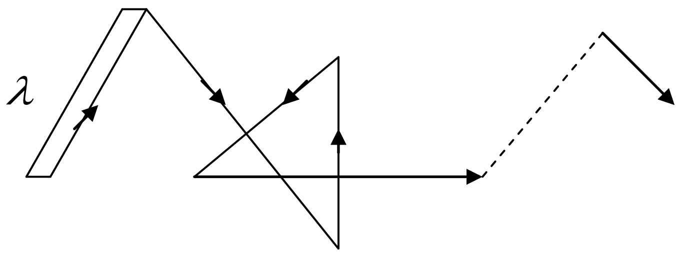
$$\bar{n} = \frac{n}{n_0} = e^{-\frac{E_n}{RT}} \quad (7)$$

де $\bar{n}$ - відносна концентрація молекул

Формула (7) виражає розподіл Больцмана.

§6. Середня довжина вільного пробігу молекул.

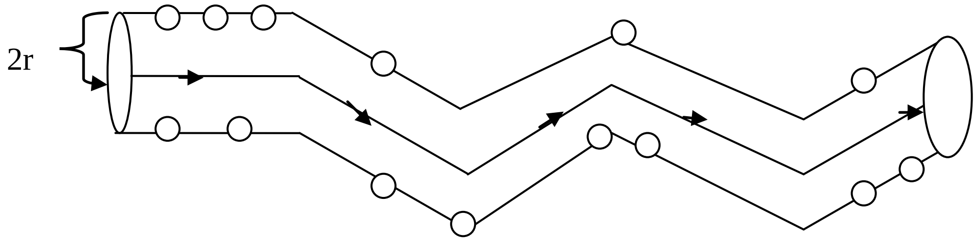
Внаслідок хаотичності теплового руху траєкторія молекул є ламаною лінією, схожою на траєкторію броунівської частинки. Злами траєкторії відповідають зіткненням молекул одна з одною. Для прикладу зобразимо фрагмент шляху, пройдений деякою молекулою за 1с.



Назвемо довжиною вільного пробігу молекули λ шлях, що вона проходить між 2-ма послідовними зіткненнями . Довжина вільного пробігу весь час змінюється, тому слід вести мову про середню довжину вільного пробігу $\bar{\lambda}$ як про середній шлях, який проходить молекула між 2-ма послідовними зіткненнями. Очевидно, що для визначення $\bar{\lambda}$ достатньо розділити весь шлях, пройдений молекулою за 1с. і чисельно дорівнює її середній швидкості υ, на середнє число зіткнень $\bar{z}$, який зазнає молекула за 1с.

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\upsilon}}{\bar{z}} \quad (1)$$

Для визначення $\bar{z}$ врахуємо розміри молекул, розглядаючи їх як кульки радіусом r. Візьмемо подумки під спостереження одну з молекул (крайньо зліва на мал.2) і зобразимо шлях, пройдений нею за 1с.



мал.2

Останні молекули поки що вважаємо нерухомим. Очевидно, що рухома молекула зіткнеться тільки з тими молекулами, центри яких лежать всередині ломаного циліндра радіусом 2r (віссю циліндра є траєкторія молекули) .

Отже, середнє число зіткнень $\bar{z}$ за 1с. дорівнює числу молекул N в об'ємі V ломаного циліндра, тобто $\bar{z}$ =N , або $\bar{z}$ =Nv , де n – кількість молекул в одиниці об'єму, або концентрація молекул.

Об'єм ломаного циліндра можна з нехтовно малою похибкою прирівняти до об'єму випрямленого циліндра з висотою $\bar{\upsilon}$ і площею основи $\pi(2r)^2$, тому

$$\bar{z} = 4\pi r^2 n\bar{\upsilon} \quad (2)$$

В цьому висновку ми вважали, що всі молекули, крім взятої під спостереження, нерухомі. В дійсності ж вони рухаються , тому, як показує більш строгий розрахунок, число зіткнень виявляється в $\sqrt{2}$ раз більше одержаного нами :

$$\bar{z} = 4\sqrt{2}\pi r^2 n\bar{\upsilon} \quad (3)$$

Підставивши значення $\bar{z}$ з (3) в (1) отримаємо :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n} \quad (4)$$

З формули (4) видно, що $\bar{\lambda}$ не залежить від температури. Дослід же показує, $\bar{\lambda}$ дещо зростає підвищенням температури. Пояснюється це тим , що з підвищенням температури збільшується швидкість молекул, завдяки чому молекули ,що зіштовхуються, ближче підходять одна до одної, переборюючи сили міжмолекулярного відштовхування. Таким чином, з підвищенням температури зменшується радіус кулькоподібної моделі молекули, а разом з ним зменшується об'єм ламаного циліндра і число зіткнень $\bar{z}$. При цьому згідно формули (1) $\bar{\lambda}$ зростає.

Залежність середньої довжини вільного пробігу $\bar{\lambda}$ від температури Т виражається формулою Сезерленда :

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0 \frac{T}{T+C}$$

де $\bar{\lambda}_0$ - значення середньої довжини вільного пробігу, що обчислюється за формулою (4)

С – постійна величина, що визначається дослідним шляхом.

Так як n пропорційне тиску p:n$\approx$ p , а тиск в свою чергу пропорційний густині газу p (внаслідок закону Мендєлєєва-Клапейрона) , то згідно формули (4) середня довжина вільного пробігу обернено пропорційна тиску газу і його густині. Тому :

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (5)$$

§7. Явища переносу в газах. Рівняння переносу.

Хаотичний рух молекул газу веде до безперервного перемішування газу. З цим пов'язаний ряд важливих явищ, що відбуваються в газах.

Якщо в різних частинах об'єму газу густина була спочатку неоднаковою, то з часом вона вирівнюється. Також, якщо два різних гази дотикаються, то вони рівномірно перемішуються між собою. Це явище називається ***дифузією***.

Дифузія – розповсюдження речовини в деякому середовищі в напрямі зменшення її концентрації, зумовлене тепловим рухом атомів, молекул, іонів і інших більш великих частинок.

В об'ємі газу, частини якого мають різну температуру, відбувається поступове вирівнювання температури внаслідок переносу молекулами своєї енергії. Це явище називається ***теплопровідністю***.

Теплопровідність – один з видів теплообміну, при якому перенесення енергії в формі теплоти в нерівномірно нагрітому середовищі має атомно-молекулярний характер (не пов'язаний з макроскопічним рухом речовини).

В'язкість (внутрішнє тертя) рідин і газів - властивість рідин і газів чинити опір переміщенню однієї їх частини відносно іншої.

Всі вище названі явища зумовлені однією причиною – переносом молекулами газу в процесі хаотичного руху своїх характеристик:

маси – дифузія

енергія - теплопровідність

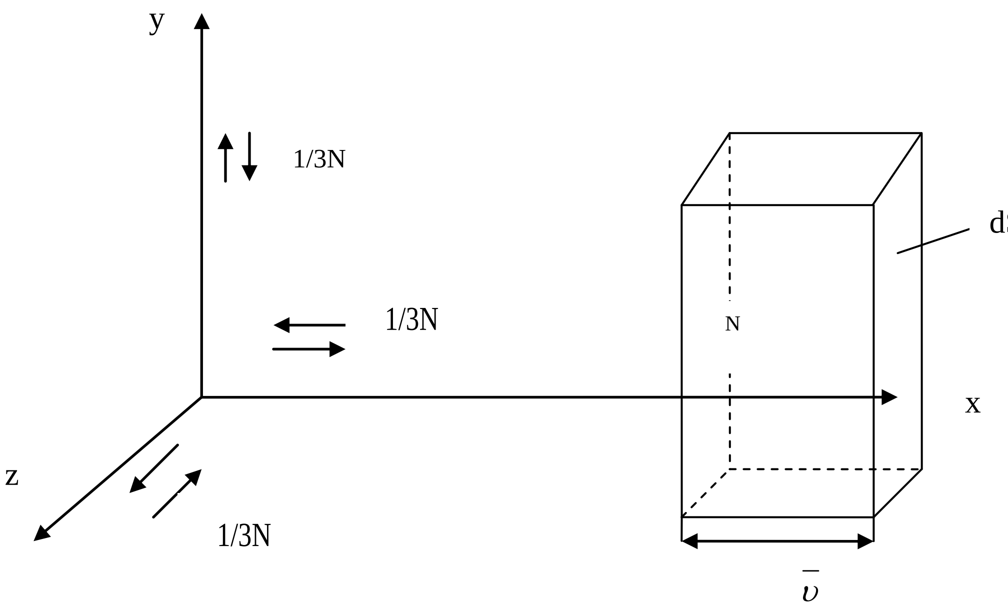
імпульсу руху – внутрішнє тертя (в’язкість)

Тому механізм всіх цих явищ однаковий і всі вони об’єднані спільною назвою ***явищ переносу*.**

Виходячи з уявлень МКТ виведемо загальне для явищ переносу ***рівняння переносу***.

З цією метою визначимо перш за все кількість молекул , що проходять за проміжок часу dt крізь деяку уявну площадку dS, розміщену в газі (мал.1).

Зорієнтуємо вісь Ox перпендикулярно площадці dS.



Мал.1

Внаслідок хаотичного руху молекул припустимо, що вздовж кожної з осей рухається 1/3 частина всіх молекул :тому 1/6 частина – зліва направо і 1/6 частина – справа наліво. Тоді за одиницю часу крізь площадку dS пройде зліва направо 1/6 частина всіх молекул, що знаходяться в об’ємі прямокутного паралелепіпеду з основою dS і висотою, що дорівнює середній швидкості $\bar{\upsilon}$ руху молекул, тобто

$$\frac{1}{6}ndS\bar{\upsilon}$$

де n - кількість молекул в одиниці об’єму газу (концентрація молекул).

Отже, кількість молекул N , що проходять крізь площадку dS за час dt в одному напрямі, визначається формулою

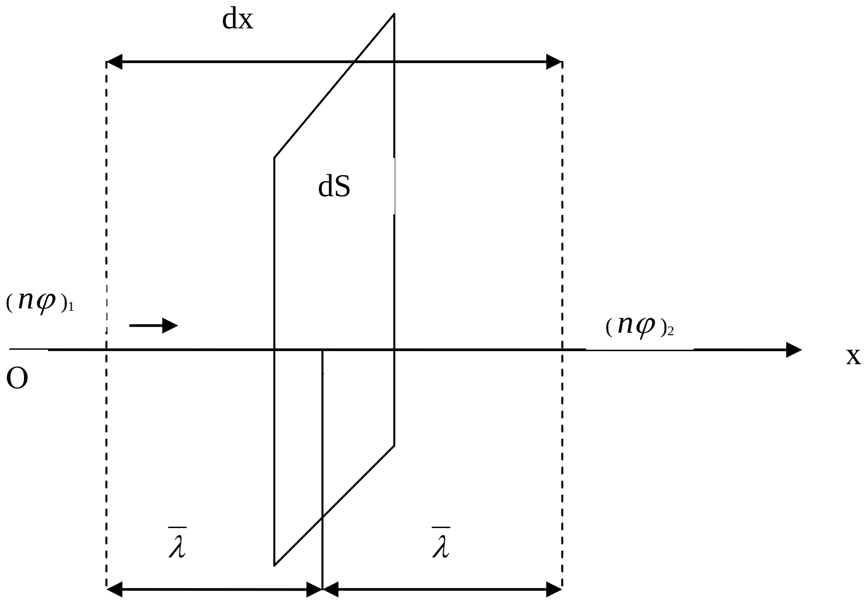
$$N = \frac{1}{6}ndSdt\bar{\upsilon}$$

Ці молекули переносять крізь площадку dS і значення своїх фізичних характеристик (масу, енергію, імпульс).

Розглядаючи загальний механізм переносу, поки що не будемо конкретизувати, яку саме фізичну характеристику переносять молекули і позначимо її φ.Тоді кількість фізичної характеристики, перенесеної молекулами в одному напрямі крізь площадку dS за час dt, визначиться формулою

$$N\varphi = \frac{1}{6}(n\varphi)\bar{\upsilon}dSdt \quad (1)$$

Очевидно, що така ж кількість буде перенесена в зворотному напрямі.
Припустимо тепер, що газ неоднорідний за своїми властивостями, тобто концентрація n його різна в різних місцях об'єму газу і самі молекули мають неоднакові значення фізичної величини φ. Тоді кількість величини $n\varphi$, що міститься в одиниці об'єму газу також буде різною в різних місцях об'єму газу. Нехай кількість $n\varphi$ зменшується в додатному напрямі осі Ох, дорівнюючи $(n\varphi)_1$ зліва від площадки dS . В цьому випадку має місце переважне перенесення фізичної величини $N\varphi$ крізь площадку dS зліва направо (мал..2)



мал.2

Згідно формулі (1) воно дорівнює :

$$d(N\varphi) = (N\varphi)_1 - (N\varphi)_2 = \frac{1}{6}\left[(N\varphi)_1 - (N\varphi)_2\right]\bar{\upsilon}dSdt \quad (2)$$

Залишається вияснити, виходячи з фізичних уявлень, на якій відстані від площадки dS слід взяти значення $n\varphi$. Обмін значеннями φ і зміна концентрації n відбувається тільки при взаємних зіткненнях молекул, тобто на відстані $\bar{\lambda}$, що дорівнює середній довжині вільного пробігу молекули. Тому, можна припустити, що значення величини $n\varphi$ зберігається незмінним на відстані $\bar{\lambda}$ вліво і вправо від dS . На цих відстанях і будемо брати значення $n\varphi$. Помноживши і поділивши на $2\bar{\lambda}$ праву частину формули (2), отримаємо:

$$d(N\varphi) = \frac{1}{6}\frac{(n\varphi)_1 - (n\varphi)_2}{2\bar{\lambda}}2\bar{\lambda}\bar{\upsilon}dSdt \quad (3)$$

Як видно з мал. відношення $\frac{(n\varphi)_1-(n\varphi)_2}{2\bar{\lambda}}$ є градієнтом величини $(n\varphi)$, який ми позначимо символом $\frac{d(n\varphi)}{dx}$. Градієнтом фізичної величини називається її зміна, що припадає на одиницю відстані в напрямі найбільшого збільшення. Отже, градієнт є вектор, направлений в бік найбільшого зростання фізичної величини . Тоді формула (3) прийме вид :

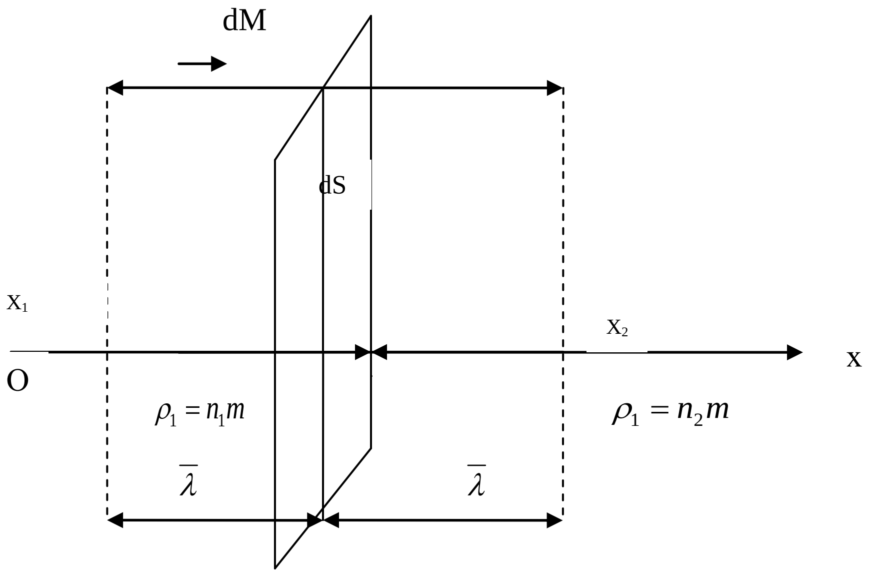
$$d(N\varphi)=-\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{\upsilon}\frac{d(n\varphi)}{\mathrm{dx}}dSdt \quad (4)$$

Знак „мінус” зумовлений тим, що перенесення фізичної величини відбувається в напрямі протилежному градієнту (градієнт φ направлений справа наліво, а перенесення φ - зліва направо).

Формула (4) називається рівнянням переносу . На основі цього рівняння розглянемо конкретні явища переносу: дифузію, теплопровідність, внутрішнє тертя.

§8. Дифузія.

Нехай в деякому об’ємі газу має місце неоднорідність густини. Густина ρ зменшується в напрямі осі Ox (мал.3)



$\rho=\frac{m}{V}=nm_0$, де $n=\frac{N}{V}$

Це може бути, наприклад, у випадку, коли в лівій частині об’єму знаходиться джерело газу О (рідина, що випаровується) .

Позначимо через ρ_1 і ρ_2 значення густини на відстані $\bar{\lambda}$ зліва і справа від dS .

Тоді $\rho_1 > \rho_2$, бо $\rho = nm$ (за значенням) , де m – маса молекули, однакова для всіх молекул газу, але $n_1 > n_2$, тобто концентрація молекул зменшується в напрямі осі Ох разом з густиною. Застосуємо рівняння переносу (4).

Відмітимо, що в даному випадку фізичною характеристикою, що переноситься, є маса молекул, тобто

$\varphi = m$ тому $n\varphi = nm = \rho$ (5),

де $d(N\varphi) = d(Nm) = dM$ (5)

де Dm – маса газу, що переноситься шляхом дифузії за час dt крізь площадку dS, перпендикулярну напряму зменшення густини. Підставивши вираз (5) в рівняння переносу (4) , одержимо:

$$dM = -\frac{1}{3}\overline{\lambda}\overline{\upsilon}\frac{d\rho}{dx}dsdt \quad (6)$$

Позначивши D= $\frac{1}{3}\overline{\lambda}\overline{\upsilon}$ (7)

Отримаємо $dM = -D\frac{d\rho}{dx}dsdt$ (8)

Звідки слідує, що маса газу dM, що переноситься завдяки дифузії крізь площадку dS, перпендикулярну до напряму осі Ох в якому зменшується густина, пропорційна розміру цієї площадки , проміжку часу dT переносу і градієнту густини $\frac{d\rho}{dx}$.

Формула (8) називається рівнянням дифузії чи законом Фіка, бо німецький фізик Фік отримав таке ж рівняння з дослідів з рідинами.

Коефіцієнт пропорційності D називається коефіцієнтом дифузії.

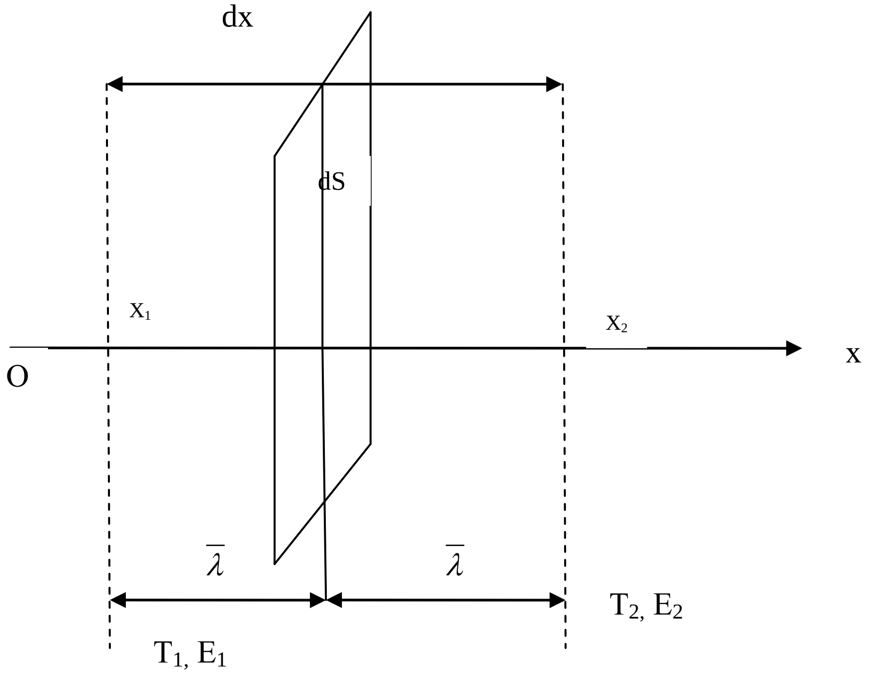
Встановимо фізичний зміст коефіцієнта дифузії D, вважаючи в формулі (8) dS=1м^2

Dt=1с, $\frac{d\rho}{dx}$=-1кг/м^4 , то D= dM , тобто коефіцієнт дифузії чисельно дорівнює масі газу, що переноситься крізь площадку в 1м^2 за1с. при градієнті густини в -1кг/м^4

З формули (7) і (8) слідує, що коефіцієнт дифузії вимірюється в $\left[\frac{m^2}{c}\right]$.

§9. Теплопровідність.

Нехай в деякому об’ємі газу Т температура зменшується у напрямі осі Ох (мал.4)



Це може мати місце, наприклад, у випадку, коли в лівій частині в т.О об'єму знаходиться нагрівач. Позначимо через T_1 і T_2 - значення температури на відстані $\bar{\lambda}$ від площадки dS , тоді $T_1 > T_2$. Кінетична енергія молекули газу визначається за формулою

$$\bar{E} = \frac{i}{2}kT$$

де і – число ступенів вільності молекули . З цієї формули слідує, що $E_1 > E_2$, тобто енергія молекул, що знаходиться зліва від dS більша, за енергію молекул, що знаходиться справа від dS. Тому в напрямі зменшення температури буде відбуватися переважне перенесення енергії , а отже, і кількість теплоти dQ, бо внутрішня енергія газу складається з кінетичної енергії його молекул.

Застосовуючи рівняння переносу (4), відмітимо, що в даному випадку фізичною характеристикою, що переноситься, є енергія молекули, тобто $\varphi = \bar{E}$.

Тоді, так як концентрацію n молекул можна вважати однаковою у всьому об'ємі газу, можемо записати :

$$d(n\varphi) = d(nE) = d(n\frac{i}{2}kT) = n\frac{i}{2}kdT \quad (9)$$

де $dT = T_1 - T_2$

$$d(n\varphi) = n\frac{i}{2}kdT \quad (9)$$

$$d(N\varphi) = d(NE) = dQ \quad (10)$$

де dQ – кількість теплоти (внутрішня енергія), що переноситься за час dT крізь площадку dS, перпендикулярну напряму зменшення температури.

Підставляючи вираз (9) і (10) в рівняння переносу (4) отримаємо

$$dQ = -\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{\upsilon}n\frac{i}{2}k\frac{dT}{dx}dSdt$$

Помноживши і поділивши праву частину цієї рівності на масу молекули m і врахувавши, що $k = \frac{R}{N_A}$ можемо записати

$$dQ = -\frac{1}{3}\overline{\lambda}\overline{\upsilon}\frac{nm}{N_A m}\frac{i}{2}R\frac{dT}{dx}dSdt$$

$nm = \rho$, $N_A m = \mu$, $\frac{i}{2}R = C_V$,

де ρ - густина газу

μ - молярна маса

C_V - молярна теплоємність газу при V=const

Тоді останню рівність можна записати в такому вигляді :

$$dQ = -\frac{1}{3}\overline{\lambda}\overline{\upsilon}\frac{\rho}{\mu}C_V\frac{dT}{dx}dSdt$$

$\frac{C_V}{\mu} = c$ - питома теплоємність газу при V=const

Тоді отримаємо :

$$dQ = -\frac{1}{3}\overline{\lambda}\overline{\upsilon}\rho C_V\frac{dT}{dx}dSdt \quad (11)$$

Позначимо

$$\chi = -\frac{1}{3}\overline{\lambda}\overline{\upsilon}\rho C_V \quad (12)$$

де χ - коефіцієнт теплопровідності

$dQ = -\chi\frac{dT}{dx}dSdt$ (13)

З формули (13) слідує, що кількість теплоти dQ, що переноситься крізь площадку dS, перпендикулярну до напряму осі Ох, в якому зменшується температура, пропорційна розмірам цієї площадки, проміжку часу dt переносу і градієнту температури $\frac{dT}{dx}$.

Формула (13) називається рівнянням теплопровідності чи законом Фур'є (бо вперше це рівняння вивів французький математик Фур'є).

Вияснимо фізичний зміст коефіцієнта теплопровідності χ, скориставшись формулою (13), в якій

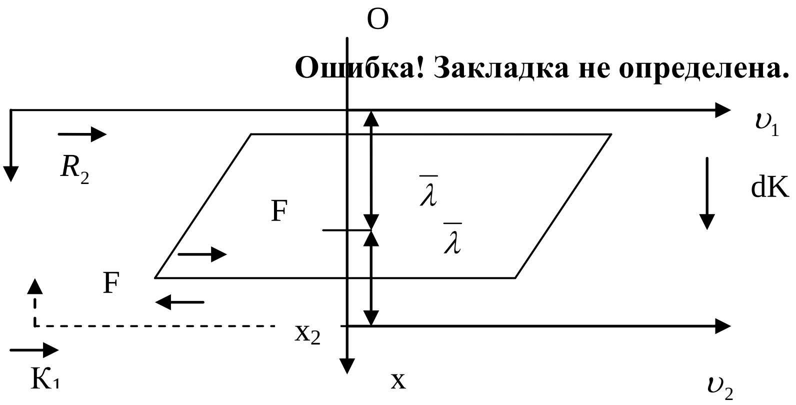
$ds = 1m^2$, $dt = 1c$, $\frac{dT}{dx} = -1\frac{K}{m}$

Тоді отримаємо : $\chi = dQ$, тобто коефіцієнт теплопровідності чисельно дорівнює кількості теплоти, що переноситься крізь площадку в 1м^2 за 1с. при градієнті температури в $-1\frac{K}{m}$.

З формул (12) і (13) слідує, що коефіцієнт теплопровідності вимірюється в $\left[\frac{Дж}{Кмс}\right]$

§10. Внутрішнє тертя(в'язкість).

Нехай в ламінарному (такому, що встановився) потоці газу швидкість течії зменшується в напрямку осі Ох.



$\vec{K} = m\vec{\upsilon}$, де k- імпульс руху

Уявімо площадку dS, вздовж якої дотикаються 2 сусідні шари газу і позначимо через υ_1 і υ_2 значення швидкостей на відстанях $\bar{\lambda}$ від цієї площадки ($\upsilon_1 > \upsilon_2$). Очевидно, що на хаотичний рух молекул накладеться швидкість потоку υ, внаслідок чого швидкість молекул верхнього шару приведе то того, що вони будуть мати більший імпульс руху, ніж молекули нижнього шару, тобто $m\upsilon_1 > m\upsilon_2$, де m – маса молекули. В процесі хаотичного руху молекули верхнього шару будуть переносити свій імпульс руху в нижній шар, збільшуючи його швидкість.

В результаті цього між шарами виникає внутрішнє тертя, сила якого буде діяти вздовж площадки dS паралельно швидкості потоку.

Застосувавши рівняння переносу (4), відмітивши, що в цьому випадку фізичною характеристикою, що переноситься, є імпульс руху молекул:

$$\varphi = k = m\upsilon$$

Тоді, так як концентрацію молекул n можна вважати однаковою у всьому об'ємі газу, можемо записати, що $d(n\varphi) = d(nk) = d(nm\upsilon) = mnd\upsilon$ (14)

де $d\upsilon = \upsilon_1 - \upsilon_2$

$$d(N\varphi) = d(Nk) = dK \quad (15)$$

де dK - зміна імпульсу руху одного шару відносно іншого, що відбувається за час dt на площадці dS, бо зміна імпульсу руху за II законом Ньютона дорівнює імпульсу діючої сили, тобто $dK = FdT$, де F – сила взаємодії між шарами газу, що діє в площині їх дотику, тобто сила внутрішнього тертя. Тому формулу (15) можна записати у вигляді :

$$d(N\varphi) = Fdt \quad (16)$$

Підставивши вирази (14) і (16) в рівняння (4), отримаємо:

$$Fdt = -\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{\upsilon}nm\frac{d\upsilon}{dx}dSdt$$

(17)

$$F = -\frac{1}{3}\bar{\lambda}\bar{\upsilon}\rho\frac{d\upsilon}{dx}dS$$

$\eta = \frac{1}{3}\overline{\lambda}\overline{\upsilon}\rho$ (18)

Тоді $F = -\eta \frac{d\upsilon}{dx} dS$ (19)

З формули (19) слідує, що : сила внутрішнього тертя, що виникає в площині дотику двох шарів газу, які ковзають один відносно одного, пропорційна площі їх дотику dS і градієнту швидкості $\frac{d\upsilon}{dx}$.

Формула (19) називається рівнянням внутрішнього тертя, чи законом Ньютона, бо Ньютон отримав таке ж рівняння з дослідів з рідинами.

Коефіцієнт пропорційності η називається коефіцієнтом внутрішнього тертя або в’язкості.

Вияснимо його фізичний зміст, скориставшись формулою (9), в якій будемо вважати

dS $=1m^2$, а $\frac{d\upsilon}{dx}=-1c^{-1}$, тоді отримаємо

η =F , тобто коефіцієнт в’язкості чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, що діє на $1m^2$ площадки дотикання шарів газу, що рухаються паралельно при градієнті швидкості $1c^{-1}$.

З формули (18) і (19) слідує, що коефіцієнт внутрішнього тертя вимірюється в $\frac{кг}{мс}$. На завершення підкреслимо, що зіставляючи формули

Д$=\frac{1}{3}\overline{\lambda}\overline{\upsilon}$, $\chi = \frac{1}{3}\overline{\lambda}\overline{\upsilon}\rho C_V$ і $\eta = \frac{1}{3}\overline{\lambda}\overline{\upsilon}\rho$ отримаємо співвідношення між коефіцієнтом переносу

$\frac{\eta}{Д} = \rho; \frac{\chi}{\eta} = C_V$, які також знаходяться у відповідності з дослідними даними. Це є додатковим підтвердженням вірності розглянутої нами МКТ будови речовини.