Самостійна робота 3

Алгебра дуальних та подвійних чисел

Відповісти на питання.

Застосування подвійних чисел до побудови числової моделі псевдоевклідової геометрії

Питання: 1) Визначення подвйного числа. Приклади.

2) Додавання та множення подвійних чисел

3) Операція спряження для подвійних чисел

4) Модуль подвійного числа.

5) Аргумент подвійного числа.

6) Ототожнення множини точок псевдоевклідової площини з множиною подвійних чисел

7) Формули відстані між точками і кута між прямими на мові подвійних чисел

8) Рівняння деяких геометричних образів на мові падвійних чисел

Виконати завдання.

1) Покажіть, що **множення** дуальних й подвійних чисел відбувається за правилами:

$$(x+\varepsilon y)(x_1+\varepsilon y_1)=xx_1+\varepsilon(xy_1+yx_1),$$

$$(x+ey)(x_1+ey_1)=(xx_1+yy_1)+e(xy_1+yx_1).$$

Порівняйте з множенням комплексних чисел.

2) Домовимось писати $x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z,$ де z – дуальне або подвійне число. Запишіть чому дорівнює $\operatorname{Re}(z \pm z_1)$, $\operatorname{Im}(z \pm z_1)$, $\operatorname{Im}(z \cdot z_1)$, $\operatorname{Re}(z \cdot z_1)$. Порівняйте з випадком комплексних чисел.
3) Знайти для кожного типу чисел:

- вираз для дійсної частини суми та різниці числа й спряженого до нього числа,
- вираз для уявної частини суми та різниці числа й спряженого до нього числа,
- вираз для дійсної частини добутку числа на спряжене до нього,
- вираз для уявної частини добутку числа на спряжене до нього,
- умову «дійсності» та «уявності» числа з використанням поняття спряженого числа.

4) Чи можна ділення $\frac{z_1}{z}$ дуальних та подвійних чисел визначити так само як і комплексних? Чому?
5) Залишивши рівність $|z|^2 = z\bar{z}$, яка використовується для визначення модуля комплексного числа, без змін, знайти $|z|^2$ для дуальних та подвійних чисел.
6) Навести приклади подвійних чисел 1-го та 2-го видів.
7) Показати, що для подвійних чисел 1-го виду $|\bar{z}| = |z|,\ \operatorname{Arg}\bar{z} = -\operatorname{Arg} z.$
8) Знайти аналогічний зв’язок для подвійних чисел 2-го виду.
9) Показати, що частка двох однойменних подвійних чисел є подвійне число 1-го виду, а частка різнойменних подвійних чисел – є числом 2-го виду.