




Національний університет
водного господарства та
природокористування

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та
природокористування

П.М.Мартинюк, Н.А.Федорчук



**Теорія систем та
математичне моделювання**

Навчальний посібник

Рівне – 2009



Від авторів.....

Передмова.....

Розділ 1. Моделі систем.....

Тема 1. Системи та їх класифікація.....

§1.1 Системи та їх означення.....

§1.2 Класифікація систем.....

§1.3 Властивості та характерні особливості складних систем.....

Тема 2. Моделі систем та їх класифікація.....

§2.1 Моделі систем та процес моделювання.....

§2.2 Класифікація видів моделювання систем.....

§2.3 Класифікація моделей систем.....

Тема 3. Цикл побудови математичних моделей.....

§3.1 Класифікація математичних моделей.....

§3.2 Циклічна природа математичного моделювання.....

§3.3 Вимоги до математичних моделей.....

§3.4 Основні властивості математичних моделей.....

Тема 4. Класична та прикладна математика.....

§4.1 Два основних джерела математики: прикладний та теоретичний напрямки.....

§4.2 Про відмінності деяких підходів в класичній та прикладній математиці.....

§4.3 Розширений цикл математичного моделювання.....

Лабораторна робота №1. Математичні моделі, які описуються задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь.....

Завдання для самостійної роботи.....

Лабораторна робота №2. Математичні моделі, які описуються задачами лінійного програмування.....

Завдання для самостійної роботи.....

Розділ 2. Математичні моделі руху рідин в пористих середовищах.....

Тема 5. Пористі середовища та їх характеристики.....



- Национальний університет
природокористування
- §5.1 Пористість та коефіцієнт пористості.....
 - §5.2 Напруження в суцільних середовищах.....
 - §5.3 Напруження в пористих середовищах.....
 - §5.4 Компресійні залежності для ґрунтів.....
 - §5.5 Класифікація ґрунтів.....

Тема 6. Математична модель фільтрації рідини в пористих середовищах.....

- §6.1 Швидкість фільтрації. Закон Дарсі. Коефіцієнт фільтрації.....
- §6.2 Рівняння фільтрації в пористому середовищі.....
- §6.3 Граничні умови та їх фізична інтерпретація.....

Тема 7. Математичні моделі вологоперенесення в пористих середовищах.....

- §7.1 Параметри процесу вологоперенесення.....
- §7.2 Явище гістерезису.....
- §7.3 Закон вологоперенесення.....
- §7.4 Рівняння вологоперенесення.....

Лабораторна робота №3. Задачі вологоперенесення та планової фільтрації.....
Завдання для самостійної роботи.....

Тема 8. Деякі спеціальні математичні моделі фільтрації.

- §8.1 Профільна та планова схеми фільтрації.....
- §8.2 Рівняння планової фільтрації.....
- §8.3 Математична модель фільтрації в деформівному пористому середовищі.....
- §8.4 Узагальнення закону Дарсі.....

Розділ 3. Математичні моделі тепло-масопереносу.....

Тема 9. Математичні моделі масопереносу в пористих середовищах.....

- §9.1 Рівняння масопереносу.....
- §9.2 Початкові та граничні умови, їх фізична інтерпретація.....
- §9.3 Апроксимація диференціального рівняння масопереносу та граничних умов методом скінченних різниць.....



Лабораторна робота №4. Математичне моделювання процесів масопереносу в насичених пористих середовищах.....
Завдання для самостійної роботи.....

- Тема 10. Математичні моделі процесів теплопереносу....**
- §10.1 Теплоперенесення в твердих тілах.....
 - §10.2 Перенесення тепла в насичених пористих середовищах.....
 - §10.3 Гіперболічне рівняння теплопереносу.....
 - §10.4 Задача Стефана.....
 - §10.5 Початкові та граничні умови.....

Лабораторна робота №5. Математичне моделювання процесів теплопереносу в насичених пористих середовищах.....

Розділ 4. Математичні моделі газової динаміки та гідродинаміки.....

- Тема 11. Рівняння газової динаміки.....**
- §11.1 Рівняння нерозривності для стиснутого газу.....
 - §11.2 Рівняння руху газу.....
 - §11.3 Рівняння енергії.....
- Тема 12. Математичні моделі гідродинаміки.....**
- §12.1 Рівняння нерозривності та руху нестиснутої рідини.....
 - §12.2 В'язкість рідини та її урахування.....
 - §12.3 Рівняння руху нестиснутої в'язкої рідини, записані через вихор в двовимірному випадку.....
 - §12.4 Рівняння Пуассона для напору (тиску).....
 - §12.5 Граничні та початкові умови.....

Розділ 5. Спеціальні математичні моделі деяких систем.....

- Тема 13. Деякі математичні моделі суперництва.....**
- §13.1 Модель популяцій.....
 - §13.2 Система “хижак-жертва”.....
 - §13.3 Гонка озброєнь між двома країнами.....
 - §13.4 Бойові дії двох армій.....

Лабораторна робота №6. Математичні моделі суперництва.....



Завдання для самостійної роботи.....

Тема 14. Дискретні математичні моделі.....

§14.1 Потоківі моделі.....

§14.2 Задача відшукування найкоротшого маршруту
(шляху).....

§14.3 Задача відшукування максимального потоку.....

**Лабораторна робота №7. Потоківі дискретні математичні
моделі.....**

Завдання для самостійної роботи.....

**Тема 15. Математичні моделі СМО (систем масового
обслуговування).....**

§15.1 Основні компоненти моделей масового
обслуговування.....

§15.2 Розподіл моментів часу надходження вимог на
обслуговування.....

§15.3 Вихідні потоки.....

§15.4 Позначення Кендела та основні операційні
характеристики СМО.....

§15.5 СМО (M/M/1) : (GD/∞/∞).....

§15.6 СМО (M/M/1) : (GD/N /∞).....

**Лабораторна робота №8. Математичні моделі систем
масового обслуговування.....**

Завдання для самостійної роботи.....

Література.....



ПЕРЕДМОВА

У повсякденному житті ми чи не кожен день зустрічаємось зі словом “система”. Система водопостачання, система автоматичного прийняття рішень (САПР), система автомобільних доріг, обчислювальна система, політична система та ін. На поняття “система” і на самі системи ми будемо дивитись з математичної точки зору. Нас буде цікавити дослідження систем в цілому, або їх окремих характеристик математичними методами. Цілі таких досліджень можуть бути різними. Наприклад, для прогнозування поведінки системи в майбутньому. Або для відтворення стану системи, який був в минулому. З цих прикладів висновок наступний: застосування математики до системи ніколи не є самоціллю, а завжди виступає інструментом для дослідження системи.

Але щоб застосувати математичний метод до дослідження системи потрібно мати математичне описання даної системи. Наприклад, щоб досліджувати математичними методами екологічну систему, потрібно мати математичне описання об’єктів та процесів даної системи, а також системи в цілому. Так ми підходимо до поняття математичної моделі. Без строгого уточнення відмітимо, що математична модель системи – це описання певних властивостей системи на мові математики (за допомогою диференціального рівняння, графів, алгебричних рівнянь, нерівностей, функцій та ін.). Побудова математичних моделей системи є центральним етапом дослідження та проектування будь-якої системи.

З математичними моделями систем ми починаємо зустрічатись ще в дитинстві, можливо самі навіть не здогадуючись про це. Наприклад, мама вас відправляє в магазин за молоком і, звичайно, на здачу ви можете купити собі цукерок. Цукерки, як і молоко, мають свою ціну, виражену в гривнях за один кілограм чи, наприклад, один літр. Що являє собою ціна? Ціна – це вартість товару, виражена в грошах. Отже, ціна – це математична модель вартості товару, оскільки гроші – числовий еквівалент. Виникає додаткове питання: а хіба ж вартість – це система? Звичайно. Згадайте з яких компонентів складається вартість товару.

Рухаємось далі. Згадуємо шостий клас середньої школи.

Задача. На початку року у фермерському господарстві було 800 корів і свиней разом. На кінець року число корів збільшилось в півтора раза, а число свиней зросло вдвоє. В результаті загальне



поголів'я худоби досягло 1350 голів. Знайти, скільки корів і свиней окремо було у фермерському господарстві на початку року.

Якщо через x позначити кількість корів, а через y – кількість свиней на початку року, то маємо наступну математичну модель для визначення поголів'я худоби:

$$\begin{cases} x + y = 800 \\ 1,5x + 2y = 1350 \end{cases}$$

Вищенаведені приклади є елементарними. Але вже вони вказують на нерозривність систем та їх математичних моделей із повсякденним життям. З більш складнішими математичними моделями ми зустрічаємось при вивченні рівнянь математичної фізики. Наприклад, розглянемо рівняння, яке є складовою частиною математичної моделі, що описує процеси коливань струни.

Рівняння коливань струни

Описання процесу коливання струни можна провести за допомогою задання положення точок струни в різні моменти часу. Для визначення положення струни в момент часу t достатньо задати положення вектора зміщення $\vec{u}(x, t) = (u_1(x, t); u_2(x, t); u_3(x, t))$ для будь-якої точки струни x .

Зробимо наступні припущення:

1. Коливання здійснюються в одній площині xOy і вектор зміщення є перпендикулярним до осі Ox в довільний момент часу $t \geq 0$. Тоді процес коливання можна описати однією функцією $u(x, t)$, яка характеризує вертикальне зміщення точок струни.
2. Струна є абсолютно гнучкою, тобто сила натягу \vec{T} значно перевищує силу опору струни \vec{R} . Тому надалі вважаємо, що $|\vec{R}| \approx 0$.
3. Струна абсолютно пружна, тобто виконується закон Гука – сила натягу прямо пропорційна видовженню.
4. Сили опору навколишнього середовища відсутні і коливання струни малі, тобто $\alpha^2(x, t) \approx 0$, де $\alpha(x, t)$ – гострий кут між дотичною до струни в точці x в момент часу t та віссю Ox (рис. П.1).



Враховуючи припущення 4, з розкладу $\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$

випливає, що $\sin \alpha \approx \alpha$. Тоді $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$, тобто

$\cos \alpha \approx 1$. Також $tg \alpha - \sin \alpha = tg \alpha \cdot \left(1 - \frac{\sin \alpha}{tg \alpha}\right) = tg \alpha \cdot (1 - \cos \alpha) \approx 0$.

Звідси $\sin \alpha \approx tg \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ і $tg^2 \alpha \approx \sin^2 \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \alpha^2 \approx 0$.

Розглянемо частину струни між точками $M_1(x_1)$ та $M_2(x_2)$

(рис.П.1). Тоді $L_{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$. Отже,

довжина струни в процесі коливань не змінюється. Тоді в силу припущень 2-4 сила натягу \vec{T} не залежить від часу.

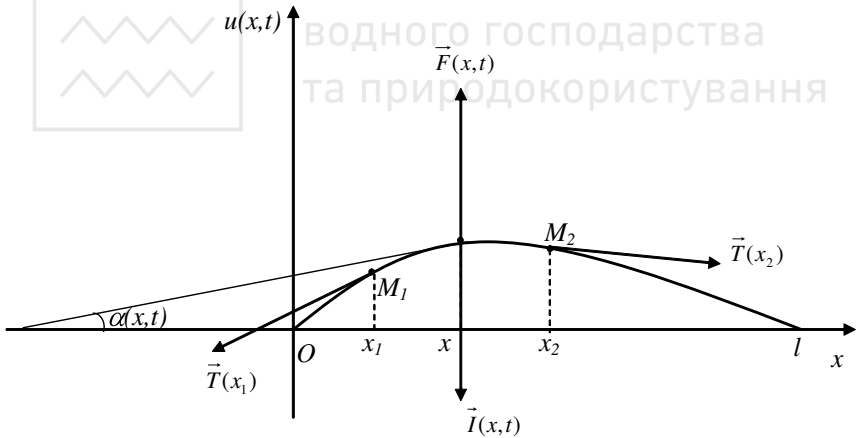


Рис. П.1. Коливання струни

Нехай $\vec{F}(x,t)$ – зовнішня сила, паралельна осі Ou , рівномірно розподілена вздовж струни і розрахована на одиницю довжини; $\vec{I}(x,t)$ – сила інерції. Згідно принципу Д'Аламбера сума проєкцій всіх сил, що діють на проміжок струни (x_1, x_2) , на відповідну координатну вісь, рівна нулю. Маємо



$$\Pi_x \vec{F} = 0, \quad \Pi_x \vec{I} = 0, \quad \Pi_x \vec{T}(x_1) = -T(x_1) \cos \alpha(x_1, t) \approx -T(x_1),$$

$$\Pi_x \vec{T}(x_2) = T(x_2) \cos \alpha(x_2, t) \approx T(x_2).$$

Отже,

$$T(x_2) - T(x_1) = 0,$$

$$T(x_2) = T(x_1).$$

В силу довільності точок x_1 та x_2 випливає, що $T(x) = T = const$.

Визначимо суму проекцій всіх сил, які діють на проміжок струни $(x_1; x_2)$, на вісь Ou і за принципом Д'Аламбера прирівняємо до нуля. Проекція сили натягу в точці x_2 визначиться наступним чином:

$$T \sin \alpha(x) \Big|_{x=x_2} = T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2}. \quad \text{Аналогічно, в точці } x_1:$$

$$-T \sin \alpha(x) \Big|_{x=x_1} = -T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1}. \quad \text{Взявши до уваги зовнішні сили}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx, \quad \text{що діють на проміжок } (x_1, x_2) \text{ та сили інерції}$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx, \quad \text{де } \rho \text{ - лінійна густина струни, маємо}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(F(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx + T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_2} - T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = 0,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(F(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0,$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(F(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0.$$

В силу довільності точок x_1 та x_2 з останньої рівності дістанемо

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (\text{П.1})$$

де $a^2 = \frac{T}{\rho}$; $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$ - інтенсивність зовнішніх сил.

Рівняння (П.1) потрібно доповнити початковими



$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0; l] \quad (\text{П.2})$$

та граничними умовами

$$l_1 u(x, t)|_{x=0} = f_1(t), \quad l_2 u(x, t)|_{x=l} = f_2(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{П.3})$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ – задані функції; l_1 , l_2 – оператори, які визначають тип граничних умов для невідомої функції $u(x, t)$.

Отже, математична модель коливання струни описується крайовою задачею (П.1)-(П.3).

Рівняння теплопереносу в стержні

Розглянемо металевий стержень, бічна поверхня якого теплоізована (рис. П.2). Теплоізованість бічної поверхні стержня означає, що через його поверхню не відбувається теплообміну з навколишнім середовищем. Якщо цей стержень у початковому стані нерівномірно нагрітий, то завдяки теплопровідності в ньому буде відбуватися передача тепла від більш нагрітих частин до менш нагрітих.

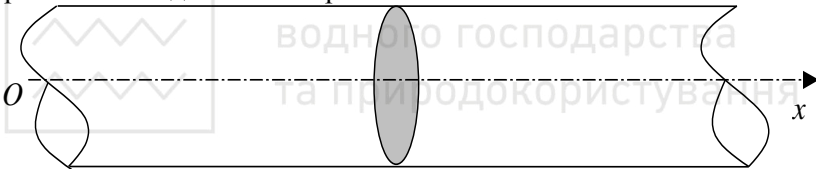


Рис. П.2. Металевий стержень

У задачі лінійної теплопровідності стержень передбачається настільки тонким, що в будь-який момент часу температура всіх точок деякого поперечного перерізу стержня (рис. П.2) буде однаковою. Якщо прийняти вісь стержня за вісь абсцис, то температура u буде функцією координати x та часу t . При постійному t функція $u(x, t)$ являє собою залежність температури точок стержня в даний момент часу від їхньої відстані до початку координат; частинна похідна $(-\frac{\partial u}{\partial x})$ виражає при цьому швидкість зміни температури в напрямку осі Ox . Якщо зафіксувати абсцису x , то $u(x, t)$ виражає закон зміни температури в даному перетині стержня з часом.

Вивід диференціального рівняння теплопровідності ґрунтується на наступних фізичних передумовах:



1. Кількість тепла, яке необхідно передати однорідному тілу, щоб підвищити його температуру на Δu , дорівнює

$$c\rho V\Delta u, \quad (\text{П.4})$$

де V – об'єм тіла, ρ – його густина, c – питома теплоємність.

2. Кількість тепла, що протікає через поперечний переріз стержня за час Δt (**тепловий потік**), пропорційна площі поперечного перерізу, швидкості зміни температури в напрямку, перпендикулярному до перерізу, і величині проміжку часу Δt , тобто дорівнює

$$-kS \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t, \quad (\text{П.5})$$

де S - площа поперечного перерізу, k - коефіцієнт теплопровідності. Знак мінус у формулі (П.5) пояснюється тим, що величину теплового потоку ми будемо вважати додатною, якщо тепло йде у бік зростання

x . Якщо $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, то це означає, що зі зростанням x температура

підвищується, а оскільки тепло переходить від більш нагрітих ділянок до менш нагрітих, то тепловий потік буде спрямований у бік зменшення x , тобто його величина буде від'ємною. Будемо вважати коефіцієнт теплопровідності постійним. Це припущення справджується, якщо стержень однорідний і температура змінюється в невеликих межах.

Виділимо ділянку стержня, обмежену поперечними перерізами з абсцисами x та $(x + \Delta x)$, і складемо для неї (ділянки) рівняння **теплового балансу**. За формулою (П.5) кількість тепла, що входить через поперечний переріз з абсцисою x за проміжок часу Δt

дорівнює $-kS \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t$. Якщо відкинути нескінченно малі величини

вищих порядків у розкладі в ряд Тейлора функції $u(x + \Delta x, t)$, то значення частинної похідної по x в точці $(x + \Delta x)$ буде дорівнювати

$$\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x. \quad \text{Тому величина}$$

теплового потоку, що виходить через переріз з абсцисою $(x + \Delta x)$



дорівнює $-kS\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x\right)\Delta t$. Взявши різницю величин вхідного і

вихідного теплових потоків, ми одержимо кількість тепла ΔQ , яку отримала ділянка стержня за час Δt

$$\Delta Q = -kS \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t + kS \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \right) \Delta t = kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta t.$$

З іншої сторони, за цей же проміжок часу температура змінилася на величину $\frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$ (з точністю до нескінченно малих вищого порядку).

Тому, за формулою (П.4), отримана кількість тепла дорівнює

$$\Delta Q = c\rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t$$

(об'єм V дорівнює $S\Delta x$).

Прирівнюючи отримані вирази для ΔQ і скорочуючи на загальний множник $S\Delta x\Delta t$, маємо

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (\text{П.6})$$

Позначивши $\frac{k}{c\rho} = a^2$, з (П.6) дістанемо основне рівняння розповсюдження тепла в однорідному стержні без теплових джерел

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{П.7})$$

Постійну $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ називають **коефіцієнтом**

температуропровідності. Рівняння параболічного типу (П.7) є однорідним і лінійним.

Додатково припустимо, що в деяких ділянках стержня може виникати або поглинатися тепло. Тобто, всередині стержня наявні теплові джерела. Виділення (або поглинання) тепла зручно характеризувати за допомогою інтенсивності теплових джерел. Під інтенсивністю теплових джерел розуміють таку функцію $F(x, t)$, що



на малій ділянці стержня $(x, x + \Delta x)$ за малий проміжок часу $(t, t + \Delta t)$ виділяється кількість тепла, рівна (з точністю до нескінченно малих вищого порядку)

$$F(x, t) S \Delta x \Delta t. \quad (\text{П.8})$$

(Якщо $F(x, t) < 0$, то тепло не виділяється, а поглинається.) Наприклад, при проходженні через стержень постійного електричного струму в ньому (стержні) буде виділятися тепло, причому в даному випадку $F(x, t) = \text{const} = I^2 R$, де I – величина сили (струм), а R – опір одиниці довжини стержня.

При складанні рівняння теплового балансу (П.6) треба врахувати тепло, що виникає в розглянутій ділянці стержня за рахунок джерел тепла. Для цього додамо до правої частини рівняння (П.6) величину, обумовлену формулою (П.8) і розділену на $S \Delta x \Delta t$. Отримаємо

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t).$$

Розділивши обидві частини отриманої рівності на $c\rho$ і ввівши позначення $\frac{1}{c\rho} F(x, t) = f(x, t)$, прийдемо до рівняння параболічного типу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (\text{П.9})$$

Рівняння (П.9), на відміну від рівняння (П.7), є неоднорідним.

Зрозуміло, що отримані рівняння теплопровідності виведені за умови деякої ідеалізації процесу.

Рівняння (П.9) доповнимо початковими

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in [0; l] \quad (\text{П.10})$$

та граничними умовами

$$l_1 u(x, t)|_{x=0} = f_1(t), \quad l_2 u(x, t)|_{x=l} = f_2(t), \quad t \geq 0. \quad (\text{П.11})$$

Отже, математична модель теплопереносу в тонкому стержні описується крайовою задачею (П.9)-(П.11)



РОЗДІЛ 1 МОДЕЛІ СИСТЕМ

ТЕМА 1. СИСТЕМИ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Базові поняття: система, велика система, складна система, динамічна система, кібернетична система, властивість системи, характерна особливість системи

§1.1. Системи та їх означення

Термін “systema” у перекладі з грецької мови означає “ціле, яке складається з частин” або “об’єднання”. Згідно [42] на сьогоднішній день існує понад 500 визначень терміну “система”.

Одне з перших визначень системи належить американському біологу Л.Берталанфі (1950) [42, 38]: комплекс елементів, які знаходяться у взаємодії.

В навчальному посібнику [14] виділено дві групи визначень системи. Першу групу утворюють визначення, які не виділяють поняття **цілісності** системи. Як приклад, наводиться наступне визначення, яке відноситься до цієї групи: **система** – це множина об’єктів разом з відношеннями між цими об’єктами та між їх атрибутами (властивостями). Автор вказує, що визначення з даної групи походять від природничих наук. Тут дослідник йшов шляхом від простого до складного – поділяв систему на елементи, розглядав властивості окремих частин і способи їх взаємодії, отримуючи таким чином уявлення про систему, як про сукупність взаємопов’язаних елементів. В рамках цієї групи означень систему інтерпретують з точки зору теорії множин.

Другу групу утворюють визначення, які включають **цілісність**, як важливу властивість системи. Це означає, що при об’єднанні елементів в систему серед її властивостей може з’явитись така, яка не зустрічається в жодного елемента даної системи. В цьому сенсі **система** – це комплекс взаємопов’язаних елементів, що утворюють цілісність.

Наприклад, трикутник можна розглядати як систему трьох точок (вершин) та трьох відрізків (сторін). Але ні точкам, ні відрізкам не належить властивість “кут”, а системі “трикутник” належить.

У будь-якій системі встановлюються ті або інші зв’язки (відношення) між елементами. Проте із системних позицій значення



мають не будь-які, а лише істотні зв'язки (відношення), що закономірно визначають властивості системи.

В [38] відмічається, що термін “система” найкраще всього конкретизувати в процесі розгляду її основних властивостей. Таких властивостей в системі автор виділяє чотири.

1. Система в першу чергу є сукупністю елементів (які, в свою чергу, теж можуть бути системами).

2. Наявність суттєвих зв'язків між елементами та їх властивостями, які за потужністю (силою) перевищують зв'язки цих елементів з елементами, які не входять в дану систему. Під суттєвими зв'язками розуміються ті, які виділяють систему з навколишнього середовища у вигляді цілісного об'єкта.

3. Наявність певної організації системи.

4. Існування інтегративних властивостей, тобто тих, якими характеризується система в цілому, але жоден із елементів окремо цими властивостями не володіє. Їх наявність показує, що властивості системи хоча і залежать від властивостей елементів, але не визначаються ними повністю. Тобто, система не зводиться до простої сукупності елементів і, розділяючи систему на окремі частини, не можна пізнати всі властивості системи в цілому.

Отже, як робить висновки автор [38], поняття “система” характеризується:

- 1) наявністю множини елементів;
- 2) наявністю зв'язків між ними;
- 3) цілісним характером даного утворення чи процесу.

В роботі [42] вказується, що одне з важливих визначень системи пов'язане з абстрактною теорією систем, у рамках якої використовуються наступні рівні абстрактного опису (в порядку спадання):

- символічний або лінгвістичний;
- теоретико-множинний;
- абстрактно-алгебричний;
- топологічний;
- логіко-математичний;
- теоретико-інформаційний;
- динамічний;
- евристичний.

В самій роботі [42] використовується теоретико-множинне визначення системи. В даному випадку **система** – це множина



об'єктів, між якими існують певні відношення, та їх атрибути. Під об'єктами розуміють компоненти системи (які можуть бути підсистемами). Атрибути – це властивості об'єктів. Відношення задають певний закон, за яким визначається деяке відображення в одній і тій самій множині об'єктів. За цим визначенням поняття множина та елемент є аксіоматичними.

§1.2. Класифікація систем

Аналізуючи існуючі класифікації систем автор підручника [38] сформулював наступні вимоги до побудови класифікацій:

- в одній і тій класифікації повинна використовуватись одна і та ж основа;
- об'єм елементів сукупності, яка класифікується, повинен дорівнювати об'єму елементів всіх утворених класів;
- члени класифікації (утворені класи) повинні взаємно виключати один одного, тобто не повинні перетинатись;
- розподіл на класи (для багатоступінчатих класифікацій) повинний бути неперервний, тобто при переході з одного рівня ієрархії на інший потрібно наступним класом для дослідження брати найближчий по ієрархічній структурі.

У відповідності з цими вимогами класифікація систем передбачає їх поділ на два види – абстрактні та матеріальні (рис. 1.1).

Матеріальні системи є об'єктами реального часу. Природні системи являють собою сукупність об'єктів природи, а штучні системи – сукупність соціально-економічних або технічних об'єктів. Штучні системи класифікуються за ознакою ролі людини в цій системі. В основі функціонування технічної системи знаходяться процеси, які здійснюються машинами, а в основі функціонування організаційно-економічних систем – процеси, які здійснюються людино-машинними комплексами.

Абстрактні системи – це уможливлене подання образів або моделей матеріальних систем. Логічні системи є результатом дедуктивного або індуктивного подання матеріальних систем. Їх можна розглядати як системи понять та уявлень про структуру, про основні закономірності станів та про динаміку матеріальних систем.

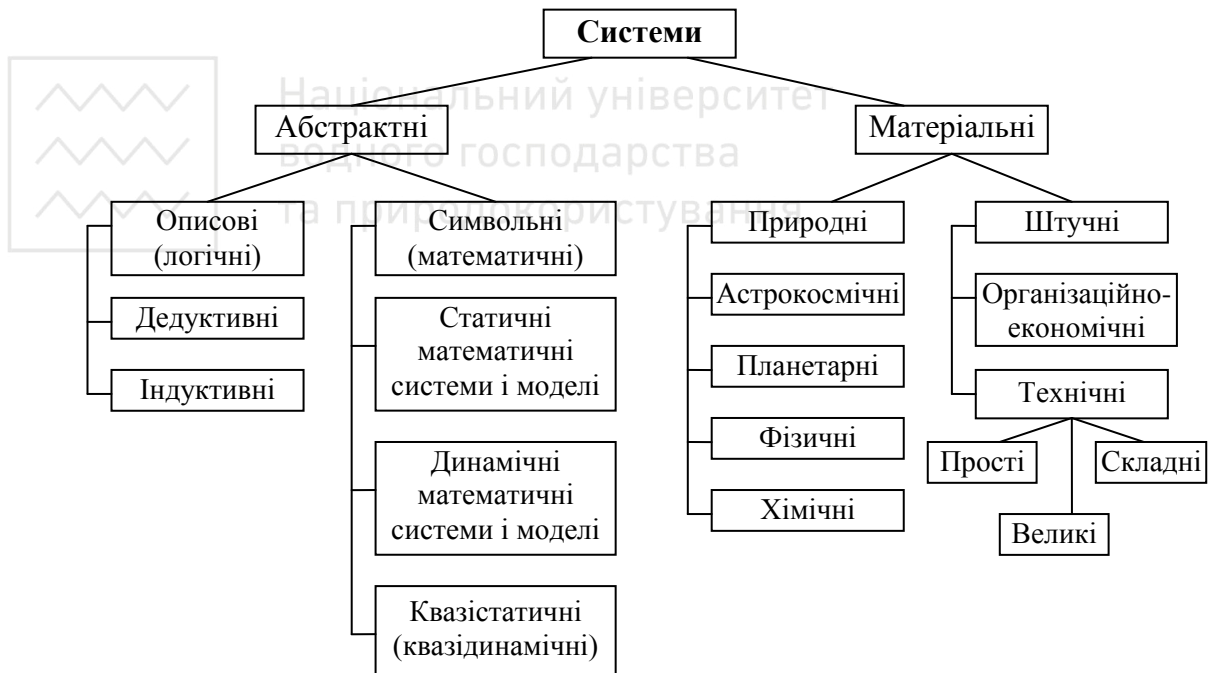


Рис. 1.1. Класифікація систем [38]



Символьні системи являють собою формалізацію логічних систем, вони поділяються на три класи:

- статичні математичні системи або моделі, які можна розглядати як опис засобами математичного апарату стану матеріальних систем (рівняння стану);
- динамічні математичні системи або моделі, які можна розглядати як математичну формалізацію процесів матеріальних (або абстрактних) систем;
- квазістатичні (квазідинамічні) системи, що знаходяться в нестійкому положенні між статикою та динамікою, які при одних впливах ведуть себе як статичні, а при інших впливах – як динамічні.

Однак, як зазначає автор [38], в літературі зустрічаються і інші класифікації. Зокрема, системи класифікують на

1. Великі системи – це системи, які неможливо одночасно спостерігати з позиції єдиного спостерігача або в часі, або в просторі. В таких випадках система розглядається послідовно по частинах (підсистемах), поступово переходячи на більш вищий шабель.

2. Складні системи – це системи, які неможливо скомпонувати із деяких підсистем. Це рівноцінне тому, що, по-перше, спостерігач послідовно змінює свою позицію по відношенню до об'єкта і спостерігає його з різних сторін; по-друге, різні спостерігачі досліджують об'єкт з різних сторін. Наприклад, вибір місця сховища відходів виробництва. Задачу можна розв'язати, лише розглянувши об'єкт з різних сторін – фізики; хімії; математики; економіки; соціального аспекту.

3. Динамічні системи – це системи, які постійно змінюються. Всяка зміна, яка відбувається в динамічній системі, називається процесом. Якщо в системі може бути лише одна поведінка, то її називають детермінованою системою. Ймовірна система – система, поведінка якої може бути передбачена з певною мірою ймовірності на основі вивчення її минулої поведінки.

4. Кібернетичні системи – системи, за допомогою яких досліджуються процеси керування в технічних, біологічних і соціальних системах. Центральним поняттям тут є інформація – засіб впливу на поведінку системи. Кібернетична система дозволяє якнаймаксимальніше спростити важко зрозумілі процеси керування з ціллю розв'язання задач дослідження та проектування.



5. Цілеспрямовані системи – системи, які володіють цілеспрямованістю, тобто керуванням системи і приведенням її до певної поведінки або стану, долаючи зовнішні впливи та подразнення. Досягнення цілі в більшості випадках має ймовірнісний характер.

Англійський кібернетик С. Бір наводить класифікацію систем, наведену в табл.1.1.

Таблиця 1.1. Класифікація систем за Біром

За способом описання	За рівнем складності		
	Прості	Складні	Дуже складні
Детерміновані	Віконна задвижка	ЕОМ	–
	Проект механічних майстерень	Автоматизація	–
Ймовірнісні	Підкидання монети	Зберігання запасів	Економіка
	Рух медузи	Умовний рефлекс	Мозок
	Систематичний контроль якості продукції	Прибуток промислового підприємства	Фірма

В роботі [14] системи класифіковано за наступними ознаками: призначення (мета); взаємодія із зовнішнім середовищем; походження; вид елементів; спосіб організації; тип та характер зв'язків між елементами; спосіб керування; функції.

Ось що сказано про це в роботі [14].

З точки зору **призначення** системи поділяються на пасивні (казуальні) та активні (цілеспрямовані).

Пасивні системи – це пристрої, що використовуються для виконання вимог, які усвідомлені їх творцями (автомобілі та літаки призначені для транспортування, будинки захищають від оточуючого середовища). В пасивних системах цілі задані творцем і не можуть змінюватися довільно.

Їхня відмінна риса полягає в тому, що ціль цим системам внутрішньо не властива. Якщо казуальні системи і мають цільову функцію, то ця функція задається ззовні задачами використання системи.

Активні (цілеспрямовані) системи – ті, що сприймають потреби для того, щоб формувати і реалізувати дії з множини альтернативних



для задоволення власних потреб. Динамізм цілеспрямованих систем полягає у тому, що їхні цілі та способи їх вибору змінюються з часом, вони не лише пристосовуються до змін зовнішнього середовища, але й самі змінюють його у відповідності до цілей.

У цілеспрямованих системах основою формування організації є чинники доцільності і визначення цілей. Цілеспрямовані системи – це системи, спроможні до вибору своєї поведінки в залежності від внутрішньо властивої їм цілі. Найнаочнішим прикладом цих систем є люди.

Головною відмінністю цілеспрямованих систем від казуальних є наявність інформаційних взаємодій.

З точки зору **взаємодії з зовнішнім середовищем** системи є відкритими або замкненими (автономними). Замкнені системи не взаємодіють з зовнішнім середовищем; система, що з часом досягає положення рівноваги, в якому не взаємодіє з зовнішнім середовищем, буде в такому стані замкненою. Відкриті системи теж за певних умов можуть досягати рівноважних станів, незмінних у часі, і в цих станах склад системи залишається незмінним, незважаючи на неперервну взаємодію з зовнішнім середовищем (стани динамічної рівноваги).

Якщо замкнена система S_k повинна бути включеною в систему S (відкрити), то S_k неможливо буде вивчити, досліджуючи призначення S , і крім того, S_k не буде ні на що впливати в S . Отже, замкнені системи не можуть бути підсистемами будь-якої системи, тобто всі підсистеми належать до відкритих систем.

Цілеспрямовані системи відкриті, тобто обмінюються матерією, енергією та інформацією з своїм оточуючим середовищем, і крім того мають властивість розвивати та вдосконалювати реакцію на зовнішнє середовище, а ті, які служать меті, запрограмовано реагують на зовнішнє середовище. Відкриті системи можуть зберігати високий рівень організованості та розвиватися в бік збільшення порядку та складності.

Поділ систем на відкриті і замкнуті чисто теоретичний, тому що абсолютно замкнута система, що не взаємодіє з оточенням практично не існує. Та або інша система може бути замкнена в тому сенсі, що вона не буде мати взаємодій із якоюсь частиною навколишнього середовища.

За походженням системи класифікуються наступним чином. Загалом серед систем виділяють такі, що **створені природою** і

створені людиною або є результат діяльності людей. У свою чергу серед систем, створених природою, виділяють живі та неживі. Системи, створені людиною, поділяються на неформальні та формальні. **Формальні** (символічні) системи – мови, математичні системи, а **неформальні** включають до свого складу як фізичні, так і формальні елементи, і поділяються на **технічні** та **системи за участю людини**. Серед систем за участю людини виділяються людино-машинні та соціально-економічні (рис. 1.2).

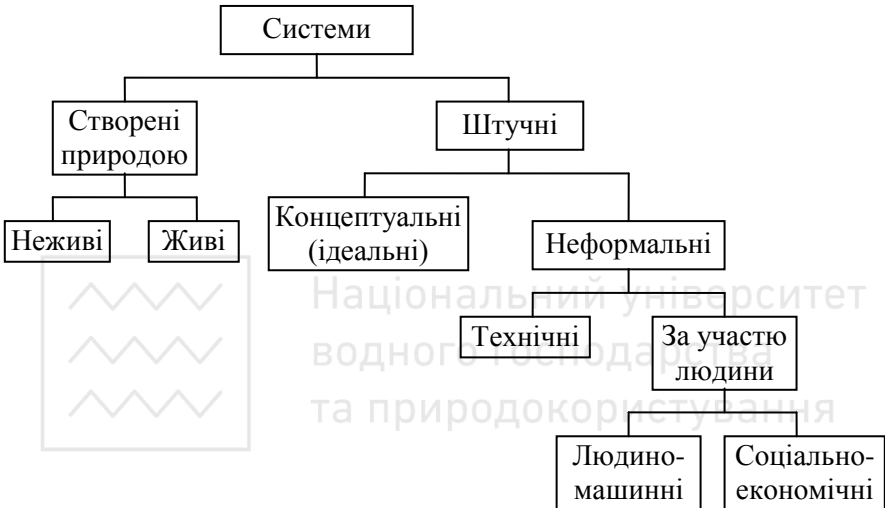


Рис. 1.2. Класифікація систем за походженням

Технічні – це системи, які створені людиною та мають визначену програмовану ціль. **Людино-машинні системи** – це системи, до складу яких входить людина, але мета визначена творцем такої системи (людина в таких системах підпорядкована меті технічної складової і виконує операції, яких вимагає від нього обслуговування машини – льотчик у літаку, космонавт у космічному кораблі, водій в автомобіні). У **соціально-економічних** системах, окрім цілей технічних складових, є цілі людей, що входять до складу таких систем. Крім того, в соціально-економічних системах людина ставить цілі не лише перед технічними системами, але й перед людьми, що входять до таких систем в якості елементів.

За видом елементів системи поділяються на **фізичні** та **абстрактні**. Елементами фізичних систем є реальні предмети, явища, процеси, а в абстрактних – символи (знаки, букви, цифри).



За способом організації системи поділяються на **ієрархічні** (структура задається деревом) та **неієрархічні** (структура – нечітко визначена мережа).

За типом та характером зв'язків між елементами системи поділяються на великі та складні.

Великі системи – це системи, що не можуть розглядатися іншим чином, ніж як сукупність апріорно виділених підсистем. Для отримання необхідної інформації про велику систему дослідник послідовно розглядає її по частинах, будуючи підсистеми. Кожна з підсистем одного ієрархічного рівня описується однією і тією ж мовою, а на наступному рівні використовується метамова. Створення такої метамови рівноцінне до відкриття законів побудови структури системи і є найбільш цінним результатом дослідження. Якщо дослідник просувається від елементів, підсистем різних рівнів загальності до системи, то це є шлях композиції. Протилежний шлях – декомпозиції, використовується тоді, коли необхідно отримати нову інформацію, виходячи зі знання системи загалом, і така інформація не може бути отримана іншим шляхом.

Складні системи – це цілеспрямовані системи, побудовані для розв'язування багатоцільових задач, системи, що відображають різноманітні, не порівняльні між собою характеристики об'єкта; системи, для описання яких необхідне використання декількох мов; системи, що включають взаємопов'язаний комплекс різних моделей.

За способом керування системи поділяються на **керовані ззовні, самокеровані**, та з **комбінованим керуванням** (рис. 1.3). Керування – це цілеспрямоване втручання в перебіг процесів у системі. Керування є універсальним терміном в сенсі багатозначності його конкретних реалізацій:

- в математичних моделях ми можемо обирати числа, функції, алгоритми, графові структури;
- в технічних системах – сили, геометричні розміри, різноманітні сигнали, команди комп'ютера, фізичні величини – температура, жорсткість матеріалу, концентрація та переміщення речовин;
- в економіці – розміри фінансування, матеріальні ресурси та строки їх постачання, розташування кадрів;
- в соціальній галузі – накази, поради, дії, вплив на суспільну думку, організація нових колективів.

У систем **керованих ззовні** управляючий блок є зовнішнім відносно неї, в систем з **комбінованим керуванням** – управління здійснюється

частково ззовні, а частково зсередини. Незалежно від того, де знаходиться управляючий блок, розрізняють чотири основних типи керування.

Найпростіший випадок виникає тоді, коли потрібна траєкторія руху відома, і, відповідно, відоме й правильне керування. У цьому випадку все відбувається згідно до наміченої програми. Однак в більшості випадків під впливом зовнішніх та внутрішніх чинників можливе порушення руху за визначеною траєкторією. Якщо в цьому випадку існує можливість спостереження біжучої траєкторії, визначення відмінності її від запланованої та випрацювання додаткового до програмного керування, яке в найближчому майбутньому прагне повернути систему на планову траєкторію, то такий спосіб керування буде **регулюванням**.



Рис. 1.3. Класифікація систем за способом керування

Якщо ж планову траєкторію на весь період часу визначити неможливо, або ж можливі великі відхилення від планової траєкторії, виникає завдання прогнозу майбутньої траєкторії, а керування полягатиме в підлаштуванні значень параметрів системи до того часу, поки не буде забезпечене досягнення мети. У цьому випадку відбувається **процес параметричної адаптації системи**.



Якщо ж шляхом керування значеннями змінних та зміни значень параметрів не забезпечується досягнення мети, це означає, що для існуючої системи мета не досягається. Однак, можливо, вона досягається іншою системою, яку отримаємо, змінюючи структуру існуючої. Отже, здійснюється процес **структурної адаптації**. Процеси **самоорганізації та організаційного керування** змінюють не лише структуру системи, але й можуть змінювати оточення системи.

За ступенем свободи при здійсненні системами своїх функцій вони є:

1) зі скінченою множиною функціональних перетворень та жорстко визначеним способом реалізації функцій (механічні та робототехнічні системи – розробник програмує функціональні перетворення в системі, призначенням функцій є утримання системи в стійкому робочому стані);

2) з визначеною множиною функціональних перетворень, які можуть модифікуватися змінами оточуючого середовища (біологічна система не може самостійно визначити своє призначення або ціль, але зміни в оточуючому середовищі можуть їх модифікувати – якщо антитіла, що виділяються організмом людини, для боротьби з вірусом неефективні, організм може модифікувати антитіла і надалі закріпити це генетично);

3) з можливістю реалізувати одну й ту ж функцію різними способами, число яких обмежене тими цілями, яким служать ці функції (людина як цілеспрямована система в більшості випадків має вибір між декількома стратегічними та тактичними функціями).

§1.3. Властивості та характерні особливості складних систем

Складні системи мають наступні основні властивості:

1. **Загальність та абстрактність.** В якості системи можуть розглядатися всі без винятку предмети, явища, процеси незалежно від їх природи.

2. **Множинність.** Одна й та ж сукупність елементів є множиною систем, кожна з яких визначається конкретними системотворчими відношеннями та властивостями.

3. **Відносність і конкретність.** Поділ об'єктів на системи і не системи має сенс відносно конкретних заданих властивостей та



відношень. Розгляд деякого об'єкта в якості системи безвідносно до конкретних властивостей та відношень не має сенсу.

4. Цілісність. Система поводить себе як одне ціле. В даному випадку зміни однієї зі змінних викликають зміни інших змінних (організм людини, промислові фірми – успіх кожної фази виробничого процесу обумовлений успіхом інших фаз).

5. Емерджентність. У складної системи наявні властивості, що не можуть бути виведені з відомих властивостей елементів, які входять до її складу. Ця властивість відображає той факт, що стан системи – це функція як станів її елементів, так і відношень (зв'язків) між ними, тобто $C(S) = f(C(m), R(m))$, де $C(S)$ – стан системи, $C(m)$ – стан елементів, $R(m)$ – відношення між елементами. Властивості системи, набуті за рахунок відношення $R(m)$, що не виводяться з $C(m)$, називаються емерджентними. Як наслідок, при незмінних способах дії елементів спосіб дії системи змінюється, якщо змінюється структура системи.

6. Еквіпотенційність. Систему можна розглядати як підсистему системи вищого рівня, і навпаки – підсистему можна розглядати як систему зі своїм складом елементів та зв'язків між ними.

7. Синергізм. Ефективність сумісного функціонування елементів системи вища, ніж сумарна ефективність ізольованого функціонування цих же елементів.

Відкриті системи можуть мати одну або декілька з наступних характерних особливостей:

1. Адитивність. У деяких системах кожна зі змінних може розглядатися незалежно від інших, і відхилення системи загалом є фізичною сумою відхилень її окремих елементів (наприклад, якщо поведінка системи описується сепарабельною функцією змінних, або ж система є лінійною). Якщо наявна така властивість, то аналіз системи значно полегшується. Для складних систем ця властивість є нехарактерною.

2. Диференціація. Відкриті системи розвиваються в напрямку диференціації та спеціалізації. В більшості систем різні складові

виконують різні функції та не є взаємно заміними. Тобто складові системи фактично є спеціалізованими за функціями, що їх реалізує система.

3. Поступове відокремлення. Взаємний зв'язок деяких елементів може зменшуватися з часом, що приводить до тенденції змін в елементах, які визначаються самими цими елементами та до втрати керованості системою.

4. Централізація. З часом одна зі складових системи може стати домінуючою, тобто зміни в цій складовій спричиняють зміни в багатьох інших, але обернене твердження не дійсне (урядова бюрократія прагне зазвичай більшої централізації, ніж приватні корпорації, у яких для досягнення прийняттого рівня координації між складовими необхідна децентралізація), що приводить до неефективного керування з запізненнями.

5. Перетворення потоків. Вхідний потік енергії перетворюється у вихідні потоки продукції та побічних результатів виробничої діяльності.

6. Інформаційні перетворення та фільтри. Вхідні інформаційні потоки в системі використовуються в найпростіших випадках для корегування відхилень шляхом оберненого зв'язку або керування за збуреннями. Складові інформаційного потоку фільтруються: сприймаються і опрацьовуються системою або відкидаються (у світі бізнесу в успішних системах розвинуті здатності відчувати зміни в кон'юнктурі і відфільтровувати релевантну інформацію, ґрунтуючись на знанні та досвіді аналітиків ринку та експертів).

7. Рівновага, стійкість, динамічний гомеостаз. Вхідний потік енергії використовується з метою затримання зростання ентропії в системі. Згідно до другого закону термодинаміки, замкнена система рухається до стану рівноваги, тобто до стану дезорганізації, хаосу, який відповідає максимальній ентропії. Відкриті ж системи можуть і змінюють цю тенденцію, отримуючи зовнішню, відносно системи, енергію. Динамічний гомеостаз не лише приводить до відновлення стану рівноваги, але й до формування більш складної та різнобічної рівноваги на ґрунті набутого досвіду.

8. **Циклічність подій.** Стійкість характеризується також циклічним повторенням подій в системі. Більшість з систем, незалежно від того, природні вони чи штучні, реалізують свої функції з певним періодом з можливим набуттям нових функцій. У складних системах утворюються ієрархії циклів подій.

9. **Дивний аттрактор.** Існує багато фізичних систем, що мають “вбудовані” механізми та джерела порушень, які не можуть бути спрогнозованими, і можуть привести до виникнення катастроф (погода, місце зупинки кульки на рулетці).

10. **Завершеність призначення.** Статична завершеність означає однакову реакцію системи незалежно від зовнішнього стимулу. Динамічна завершеність – це скерованість процесу (поведінка скерована до досягнення остаточного стану, структурна скерованість – структура системи визначає процес таким чином, щоб досягався певний результат, еквіфінальність – скерованість згідно до мети, тобто система досягає одного й того ж фінального стану незалежно від початкових умов різними шляхами, цілеспрямованість – фактична поведінка системи скеровується та знаходиться під впливом передбачення мети).

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення поняття “система”.
2. Які основні вимоги до класифікації систем?
3. За якими характерними ознаками класифікують системи?
4. Що розуміють під складною системою?
5. Назвіть основні властивості складних систем.
6. В чому полягає властивість емерджентності складних систем?



ТЕМА 2. МОДЕЛІ СИСТЕМ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Базові поняття: гіпотеза, аналогія, модель, модель системи, моделювання

§2.1. Модель системи та процес моделювання

При викладенні даного пункту потрібно згадати два поняття, які, на перший погляд, мало стосуються розглядуваної теми. Однак, як стане зрозуміло в подальшому, це не так. Ці поняття – гіпотеза та аналогія. Саме з їх розгляду відбувається вступ до висвітлення теми про математичне моделювання, до висвітлення поняття моделі в підручниках [37, 42, 14]. Не відійдемо від цієї традиції і ми.

Отже, що таке **гіпотези**? По-перше, гіпотеза – певне твердження, але ... підходячи з точки зору науки, не просте твердження, а таке, про яке можна і потрібно сказати: “воно хибне”, “воно частково правильне” або “еврика, це правильно!”. На основі чого висувуються гіпотези? Грунтуючись на певних здогадках, які мають своїм корінням накопичений досвід, накопичені несистематизовані дані теоретичних та експериментальних досліджень. Також гіпотеза може висуватись виходячи з **аналогії**, тобто з певної подібності явища, яке досліджується, з явищем, відносно якого є науково обґрунтовані результати. Тут під словом “явище” розуміються як ситуації, явища, процеси, так і цілі системи.

Висунута гіпотеза має бути перевірена. Яким чином? Експериментом. Науково обґрунтованим. Дешевим з економічної точки зору. “Дешевим” з точки зору часу, тобто який має завершитись за реальний проміжок часу. Під словом “експеримент” більшість розуміє натурний експеримент, експеримент з об’єктами, які можна відчувати на дотик, експеримент в лабораторії з реальними хімічними речовинами чи пробірками з бактеріями і т.д. А якщо гіпотеза висунута стосовно певної зірки чи планетної системи за кілька тисяч світлових років від нас, або прогнозів екологічного стану планети Земля в майбутньому? Як провести тоді натурний експеримент? Правильно! Замінити об’єкт, над яким провести експеримент неможливо, іншим об’єктом, подібним до першого. Виникає питання: як подібним? наскільки подібним? Тут ми і підходимо до поняття моделі.

В підручнику [14] наводиться наступне означення “моделі”: **модель** – це заміщувач об’єкта дослідження, що знаходиться з ним в



такої відповідності, яка дозволяє отримати нове знання про цей об'єкт.

Будь-який реальний об'єкт володіє певним набором характеристик S . Модель може замістити об'єкт лише за певним піднабором характеристик $S' \subset S$. Якщо набори характеристик об'єкта та моделі будуть співпадати, то втрачається смисл моделі. В цьому випадку модель буде тотожною об'єкту. Отже, **модель** – це заміщувач об'єкта дослідження за певним набором характеристик.

Процес **моделювання** – це не просто побудова моделі, а й дослідження реального об'єкта за допомогою побудованої моделі. Більше того – модель має вдосконалюватись в процесі дослідження реального об'єкта. Моделювання – це метод пізнання навколишнього світу, де в якості одного з інструментів виступає модель досліджуваних об'єктів.

В основі моделювання лежить теорія подібності, яка стверджує, що абсолютна подібність може мати місце лише при заміні одного об'єкта іншим точно таким же [4]. При моделюванні абсолютна подібність немає місця. А тому прагнуть до того, щоб модель достатньо добре відображала досліджувану сторону функціонування об'єкта.

§2.2. Класифікація видів моделювання систем

В якості однієї з перших ознак класифікації видів моделювання можна вибрати степінь повноти моделі і розділити моделі у відношенні до даної ознаки на **повні**, **неповні** та **наближені**. В основі повного моделювання лежить повна подібність, яка проявляється як в часі, так і в просторі. Для неповного моделювання характерна неповна подібність моделі об'єкту, що вивчається. В основі наближеного моделювання лежить наближена подібність, при якій деякі сторони функціонування реального об'єкта не моделюються взагалі.

В залежності від характеру досліджуваних процесів в системі S всі види моделювання можуть бути розділені на детерміновані та стохастичні, статичні та динамічні, дискретні, неперервні та дискретно-неперервні (рис.2.1). **Детерміноване моделювання** відображає детерміновані процеси, тобто процеси, в яких передбачається відсутність будь-яких випадкових дій; **стохастичне моделювання** відображає ймовірнісні процеси та події. В даному випадку аналізується ряд реалізацій випадкового процесу та оцінюються середні характеристики, тобто набір однорідних

реалізацій. **Статичне моделювання** слугує для описання поведінки об'єкта в який-небудь момент часу, а **динамічне моделювання** відображає поведінку об'єкта в часі. **Дискретне моделювання** слугує для описання процесів, які передбачаються дискретними, відповідно **неперервне моделювання** дозволяє відобразити неперервні процеси в системах, а **дискретно-неперервне моделювання** використовується для випадків, коли хочуть виділити наявність як дискретних, так і неперервних процесів.

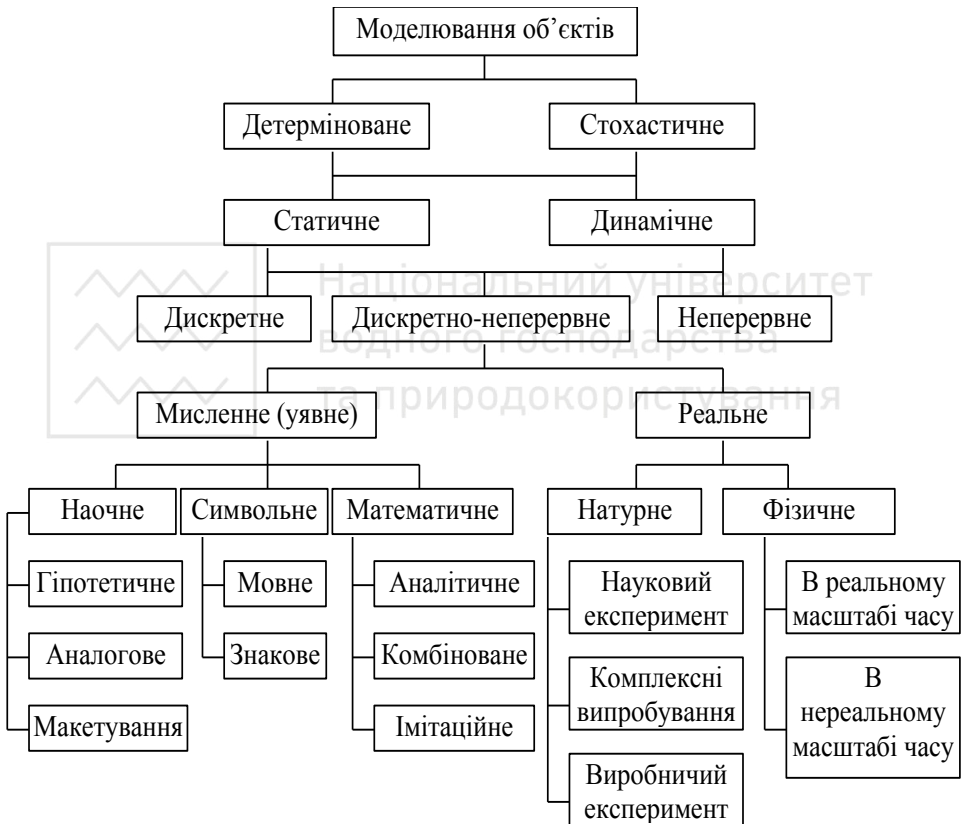


Рис. 2.1. Класифікація видів моделювання систем [37]

В залежності від форми представлення об'єкта (системи S) можна виділити **уявне** та **реальне моделювання**.

Уявне моделювання часто є єдиним способом моделювання об'єктів, які або практично нереалізовані в заданому інтервалі часу,



або існують поза умовами, можливими для їх фізичного створення. Уявне моделювання може бути реалізоване у вигляді наочного, символічного та математичного.

При **наочному моделюванні** на базі уявлень людини про реальні об'єкти складаються різні наочні моделі, які відображають явища та процеси, що протікають в об'єкті. В основу **гіпотетичного моделювання** дослідником закладається деяка гіпотеза про закономірності протікання процесу в реальному об'єкті, що відображає рівень знань дослідника про об'єкт та базується на причинно-наслідкових зв'язках між входом та виходом досліджуваного об'єкта. Гіпотетичне моделювання використовується, коли знань про об'єкт недостатньо для побудови формальних моделей.

Аналогове моделювання ґрунтується на застосуванні аналогій різних рівнів. Найвищим рівнем є повна аналогія, що має місце тільки для досить простих об'єктів. В процесі ускладнення об'єкта використовуються аналогії подальших рівнів, коли аналогова модель відображає декілька або тільки одну сторону функціонування об'єкта.

Суттєве місце при уявному наочному моделюванні займає **макетування**. Уявний макет може застосовуватись у випадках, коли в реальному об'єкті процеси, що протікають, не піддаються фізичному моделюванню, або може передувати поведінці інших видів моделювання. В основі побудови уявних макетів також лежать аналогії, однак зазвичай вони базуються на причинно-наслідкових зв'язках між явищами та процесами в об'єкті. Якщо ввести умовне позначення окремих понять, тобто знаки, а також визначені операції між цими знаками, то можна реалізувати **знакове моделювання** та з допомогою знаків відобразити набір понять – скласти окремі ланцюги із слів та речень. Використовуючи операції об'єднання, перетину та доповнення теорії множин, можна в окремих символах описати якийсь реальний об'єкт.

В основі **мовного моделювання** лежить деякий тезаурус. Він утворюється з набору вхідних понять, причому цей набір повинен бути фіксованим. Слід відмітити, що між тезаурусом та звичайним словником є принципові відмінності. Тезаурус – словник, який не містить неоднозначностей, тобто в ньому кожному слову може відповідати лише єдине поняття, а в звичайному словнику одному слову можуть відповідати декілька понять.

Символьне моделювання представляє собою штучний процес створення логічного об'єкта, який заміщає реальний і виражає основні властивості його відношень з допомогою визначеної системи знаків та символів.

Під **математичним моделюванням** будемо розуміти процес встановлення відповідності даному реальному об'єкту деякого математичного об'єкта, що називається математичною моделлю, та дослідження даної моделі, що дозволить отримувати характеристики розглядуваного реального об'єкта. Математичне моделювання для дослідження характеристик процесу функціонування систем можна розділити на аналітичне, імітаційне та комбіноване.

Для **аналітичного моделювання** характерно те, що процеси функціонування елементів системи записуються у вигляді деяких функціональних відношень (алгебричних, інтегро-диференціальних, скінченно-різницевих і т.д.) або логічних умов.

При **імітаційному моделюванні** реалізуючий модель алгоритм відтворює процес функціонування системи S в часі, причому імітуються елементарні явища, що складають процес, зі збереженням їх логічної структури та послідовності протікання в часі. Це дозволяє за вихідними даними отримати відомості про стан процесу в визначені моменти часу, що дають можливість оцінити характеристики системи S .

Основною перевагою імітаційного моделювання у порівнянні з аналітичним є можливість розв'язання більш складних задач. Імітаційні моделі дозволяють досить просто враховувати такі фактори, як наявність дискретних та неперервних елементів, нелінійні характеристики елементів системи, численні випадкові дії та ін., які часто створюють труднощі при аналітичних дослідженнях. В даний час імітаційне моделювання – найбільш ефективний метод дослідження великих систем, а часто і єдиний практично доступний метод отримання інформації про поведінку системи, особливо на етапі її проектування [30].

Комбіноване (аналітико-імітаційне) **моделювання** при аналізі та синтезі систем дозволяє об'єднати переваги аналітичного та імітаційного моделювання. При побудові комбінованих моделей проводиться попередня декомпозиція процесу функціонування об'єкта на складові підпроцеси і для тих з них, де це можливо, використовують аналітичні моделі, а для інших підпроцесів будуть імітаційні моделі. Такий комбінований підхід дозволяє охопити якісно



нові класи систем, які не можуть бути досліджені з використанням окремо тільки аналітичного чи імітаційного моделювання.

При **реальному моделюванні** використовується можливість дослідження різних характеристик або на реальному об'єкті в цілому, або на його частині. Такі дослідження можуть проводитись як на об'єктах, що працюють в нормальних режимах, так і при організації спеціальних режимів для оцінки характеристик, що цікавлять дослідника (при інших значеннях змінних та параметрів, в іншому масштабі часу і т.д.).

Натурним моделюванням називають проведення дослідження на реальному об'єкті з подальшою обробкою результатів експерименту. При функціонуванні системи відповідно до поставленої мети вдається виявити закономірності протікання реального процесу.

Відмінність **наукового експерименту** від реального протікання процесу полягає в тому, що в ньому можуть з'явитись окремі критичні ситуації і визначаться границі стійкості процесу. В ході експерименту вводяться нові фактори і впливи в процес функціонування об'єкта. Одна із різновидностей експерименту – **комплексні випробування**, які також можна віднести до натурального моделювання, коли внаслідок повторення випробувань виробів виявляються спільні закономірності про надійність цих виробів, про характеристики якості і т.д. В даному випадку моделювання здійснюється шляхом обробки та узагальнення знань, що відбуваються в групі однорідних явищ. Поряд зі спеціально організованими дослідженнями можлива реалізація натурального моделювання шляхом узагальнення досвіду, накопиченого в ході проведеного процесу, тобто можна говорити про **виробничий експеримент**. Тут обробляють статистичний матеріал по виробничому процесу і отримують його узагальнені характеристики.

Іншим видом реального моделювання є **фізичне**, яке відрізняється від натурального тим, що дослідження проводиться на установках, які зберігають природу явищ та мають фізичну подібність. В процесі фізичного моделювання задаються деякі характеристики зовнішнього середовища і досліджується поведінка або реального об'єкта, або його моделі при заданих або створених штучно діях зовнішнього середовища. Фізичне моделювання може протікати в реальному та нереальному (псевдореальному) масштабах часу, а також може розглядатися без врахування часу. В останньому випадку вивченню підлягають так звані “заморожені” процеси, які фіксуються в деякий

момент часу. Найбільшу складність та інтерес з точки зору вірності отримуваних результатів представляє фізичне моделювання в реальному масштабі часу.

§2.3. Класифікація моделей систем

В книзі [42] наведено класифікацію основних типів моделей. Основною ознакою класифікації прийнято спосіб подання моделі (рис. 2.2).

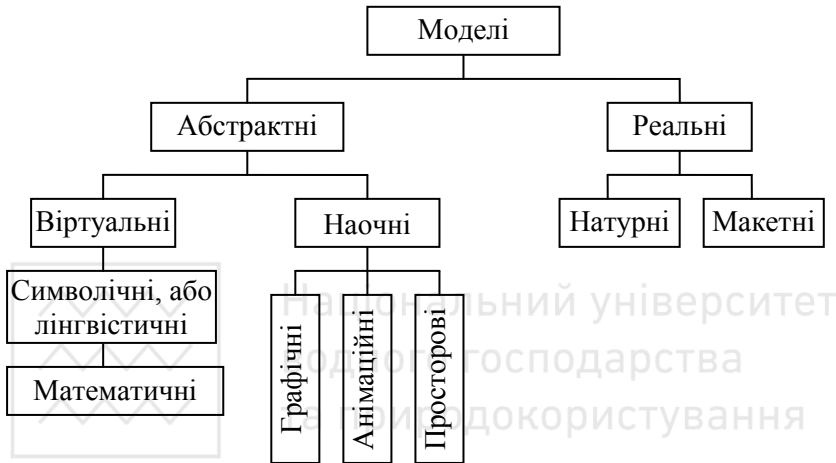


Рис. 2.2. Класифікація моделей систем за способом подання

Дана класифікація співпадає з класифікацією видів моделювання.

Найбільш повну класифікацію моделей систем наведено в підручнику [14]. **Класифікація моделей** проводиться за різними класифікаційними ознаками: ступінь визначеності, область зміни параметрів та змінних моделі, фактор часу, засоби опису та оцінки, природа моделей (рис. 2.3).

Ступінь визначеності. За цією ознакою моделі класифікуються як *детерміновані, стохастичні, та з невизначеністю.*

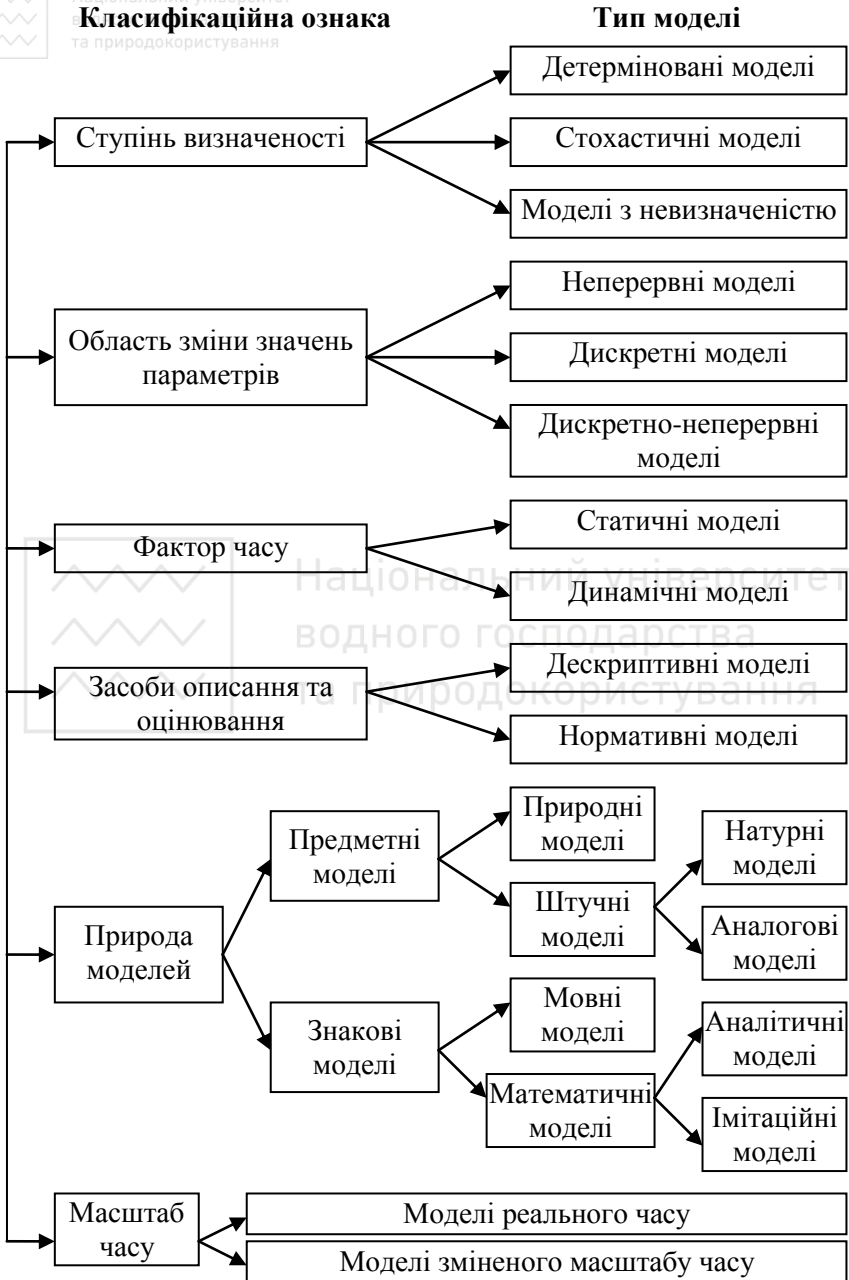


Рис. 2.3. Класифікація моделей систем



Характерним для **детермінованих** моделей є те, що при певних конкретних значеннях вхідних змінних на виході моделі можна отримати лише один результат. Детермінована модель може відображати як детерміновану, так і стохастичну систему, в останньому випадку зі спрощеннями та абстрагуванням від випадкових факторів.

В **стохастичних** моделях змінні, параметри, умови функціонування та характеристики стану системи представляються випадковими величинами та зв'язані стохастичними (випадковими) залежностями. Тому характеристики стану та реакції в моделі визначаються законами розподілу ймовірностей їх виникнення. У процесі побудови стохастичних моделей для отримання характеристик моделі та опрацювання результатів моделювання широко використовується методи регресійного, кореляційного та факторного аналізу.

В моделях з **невизначеністю** розподіл ймовірностей певних параметрів може або взагалі не існувати, або ж бути невідомим.

Область зміни параметрів. Відповідно до цієї ознаки моделі можуть бути **дискретні, неперервні та дискретно-неперервні**.

Характерним для **дискретної** моделі є те, що множини припустимих значень змінних та параметрів у ній дискретні.

В **неперервних** моделях всі змінні та параметри моделі є неперервними. Типовий представник моделей такого типу – системи диференціальних рівнянь.

Фактор часу. За фактором часу розрізняються **статичні та динамічні** моделі.

У **статичній** моделі всі залежності співвіднесені до одного моменту часу. Прикладом статичної моделі може бути модель структури системи, як незмінної в часі характеристики. В статичних моделях в явному вигляді відсутні залежності від часу.

В **динамічних** моделях значення змінних явно залежать від часу.

Засоби описання та оцінювання. За цією ознакою розрізняють **deskриптивні та нормативні** моделі.

Deskриптивні моделі не включають наочно сформульованого критерію (чи критеріїв) оцінки якості функціонування об'єкта, що моделюється, а тому з допомогою таких моделей можна лише описувати, аналізувати поведінку системи.

Нормативні моделі включають такі критерії, а тому й вказують норму функціонування системи, що моделюється. Нормативна модель, як правило, використовує й deskриптивну, як свою складову



частину. Так, система обмежень в оптимізаційній задачі (див. лабораторну роботу №2) є не чим іншим, як дескриптивною моделлю, а наявність критерію перетворює її в нормативну.

Якщо модель використовується для опису та кращого розуміння системи, то вона має дескриптивний характер. Якщо ж за допомогою моделі на основі прогнозування здійснюється прийняття рішень (випрацювання рекомендацій в конкретних умовах, знаходження оптимальних розв'язків), то модель належить до класу нормативних моделей.

Природа моделей. Природа моделей визначає їх склад. За цією ознакою можна виділити 2 основні класи моделей – **предметні та знакові**.

Предметні моделі – це фізичні тіла або системи. Моделюючи функції предметна модель реалізує власною структурою (форма, матеріал), та (або) процесами, які відбуваються в ній. Деякі моделі з цього класу створені природою (**природні**), інші – людиною (**штучні**). Для повноти класифікації також вводять проміжний клас між природними та штучними моделями – змішані (економічні, біотехнічні, організаційні, автоматизовані).

Природні моделі поділяються у свою чергу на живі, неживі, екологічні, соціальні – це тварини, рослини, віруси, мікроби, люди. Такі моделі широко використовуються медиками та біологами. Один з найбільш відомих прикладів моделі такого типу – муха-дрозофіла, за допомогою якої вивчалися та вивчаються механізми передачі спадковості. Численні явища спадковості, виявлені у дрозоді, дозволили пояснити аналогічні явища в значно більш складних організмах. Ще один приклад – використання ссавців (мишей, морських свинок, собак) як моделей організму людини при вивченні тих чи інших проблем фізіології.

Штучні предметні моделі – це **натурні та аналогові** моделі.

Моделі, які нагадують реальну систему – макети в натуральну величину (космічні системи, невеликі літаки) або зменшені в певному масштабі (глобус як модель земної кулі, макет жилого мікрорайону) – належать до **натурних**.

В **аналогових** моделях властивість реальної системи представляється деякою іншою властивістю аналогічної за поведінкою моделі. Так, вплив сили тертя в маятнику може бути змодельований опором в аналогічній електричній системі.



В **знакових** (символічних, абстрактних) моделях для представлення моделі використовуються символи, а не фізичні пристрої. Знакові моделі можна підрозділити на мовні, в яких система описується за допомогою формалізованої або напівформалізованої мови, та математичні, в яких поведінка об'єкта, що моделюється, та зв'язки між його елементами описуються засобами математики.

Математичні моделі розглядаються двох основних типів – **аналітичні** та **імітаційні**.

Аналітичні моделі описують функціонування системи у вигляді певних функціональних залежностей та (або) логічних співвідношень. Приклади таких моделей – система алгебричних рівнянь, що описує міжгалузевий баланс народного господарства; система інтегро-диференціальних рівнянь, яка описує процеси перерозподілу енергії в електро-енергетичних мережах. Отримати розв'язок на аналітичній моделі можна трьома шляхами – якісним, оцінюючи області стійкості системи; чисельним, розв'язуючи систему рівнянь для певних конкретних умов при визначених вхідних даних; аналітичним, якщо є можливість в явному вигляді отримати залежність “вихід–вхід” у вигляді аналітичної залежності.

Імітаційна модель відтворює процес функціонування системи в часі шляхом моделювання елементарних явищ в системі, обміну сигналами між елементами системи, формування вхідних сигналів та зміни станів елементів. Імітаційні моделі дозволяють врахувати такі різноманітні властивості елементів системи, як неперервність та дискретність, детермінізм та стохастичність, лінійність та не лінійність. При дослідженні складних систем імітаційне моделювання в багатьох випадках є єдиним практичним методом отримання інформації про поведінку системи.

Питання для самоконтролю

1. Що таке гіпотеза?
2. Дайте визначення поняття «модель».
3. В чому полягає процес моделювання?
4. Для чого використовують макетування?
5. Що розуміють під математичним моделюванням?
6. Яка відмінність наукового експерименту від реального протікання процесу?
7. За якими ознаками класифікують моделі?
8. До яких типів моделей відносяться математичні моделі?

Базові поняття: математична модель, види математичних моделей, цикл побудови математичної моделі, адекватність, відносна простота, вимоги до математичних моделей

§3.1. Класифікація математичних моделей

Під математичним моделюванням будемо розуміти процес заміщення деякого реального об'єкта деяким математичним об'єктом за певним набором характеристик (записаним на мові математики), який називається *математичною моделлю*, та дослідження побудованої моделі з метою отримання даних про властивості розглядуваного реального об'єкта. Тобто, математичне моделювання – це не лише побудова моделі, але і дослідження її.

Різні особливості та ознаки математичних моделей лежать в основі їх класифікації. Деякі з авторів виділяють наступні ознаки для класифікації:

1. **Відображення в математичній моделі тих чи інших особливостей об'єкта.** Якщо математична модель відображає будову об'єкта та зв'язок між його складовими елементами, то її називають *структурною*. Якщо математична модель відображає фізичні, механічні, хімічні або інформаційні процеси, що відбуваються в об'єкті, то її відносять до *функціональних*.

Якщо зв'язки між параметрами об'єкта можна виразити в аналітичній формі (алгебричні, диференціальні, інтегральні, різницеві рівняння і ін.), то такі функціональні моделі називаються *аналітичними*. Зрозуміло, що можуть існувати і комбіновані структурно-функціональні математичні моделі.

Структурні математичні моделі поділяються на *топологічні* та *геометричні*. Топологічні математичні моделі відображають склад об'єкта та зв'язки між його елементами і, як правило, така математична модель має форму графів, таблиць, матриць, списків. Геометрична математична модель окрім інформації, яка подана в топологічній математичній моделі, містить відомості про форму та розміри об'єкта та його елементів, про їх взаємне розміщення. В геометричну математичну модель входить сукупність рівнянь ліній та поверхонь та алгебро-логічні залежності, які визначають належність областей простору для тіла, об'єкта або його елементам.



Функціонування складного об'єкта часто вдається описати лише за допомогою сукупності його реакцій на деякі відомі (або задані) вхідні впливи (сигнали). Таку різновидність математичних моделей відносять до типу чорного ящика і називають *імітаційною*, маючи на увазі, що вона лише імітує зовнішні прояви функціонування об'єкта, не розкриваючи й не описуючи сутності процесів, що протікають в самому об'єкті.

2. **За способом отримання математичні моделі** поділяють на теоретичні та емпіричні. Перші отримують в результаті вивчення властивостей об'єкта та процесів, що в ньому протікають, а другі є підсумком обробки результатів спостереження зовнішніх проявлень даних властивостей та процесів.

В роботі [39] наведено наступну класифікацію математичних моделей.

Модель називається *абстрактною* (концептуальною) або *матеріальною* (фізичною) залежно від того, якою системою вона є, тобто вона залежить від вибору засобів моделювання. Абстрактною моделлю може бути, наприклад, система математичних виразів, що описують характеристики об'єкта моделювання і взаємозв'язки між ними. Моделі з конкретними числовими значеннями характеристик називають числовими моделями, моделі, записані з допомогою логічних виразів, – логічними моделями, моделі в графічних образах – графічними моделями (графіки, діаграми, рисунки). До логічних моделей належать блок-схеми алгоритмів і програм розрахунків на ЕОМ.

Моделі можуть бути *прескриптивними* (нормативні) і *дескриптивними*. Прескриптивна модель описує, як деяка особа, група, суспільство, державний орган повинні були б себе поводити в деякій ідеалізованій ситуації. Дескриптивна модель описує, як вони себе поведуть в дійсності. По-іншому, прескриптивні моделі відповідають на питання “Як повинно бути?”, дескриптивні – на питання “Як це буде розвиватись?”.

За функціональною ознакою, яка відображає специфіку предмету окремих економічних наук, економіко-математичні моделі розділяються на моделі планування, моделі бухгалтерського обліку, моделі статистики і економетрики, моделі економічного аналізу, моделі регулювання і управління, моделі інформаційних процесів. Більш частковою класифікацією щодо приведеної буде така



класифікація, в якій поглиблюється характеристика якогось типу моделей. Наприклад, моделі планування можна розділити на моделі прогнозування, моделі техніко-економічного планування, моделі оперативного планування. В свою чергу, моделі прогнозування можна розділити на моделі прогнозування науково-технічного прогресу, соціального розвитку трудового колективу, економічного розвитку та ін.

За ознакою розмірності економічні моделі можна розділити на **макромоделі, локальні моделі і мікромоделі**. Макроекономічні моделі розробляються для вивчення народного господарства в цілому на базі узагальнених економічних показників. В цьому випадку народне господарство розглядається як складна динамічна система, що розвивається. Макромоделі залежно від прийнятих рівнів деталізації розділяються на односекторні, двосекторні і багатосекторні.

До локальних економічних моделей належить велика кількість моделей, за допомогою яких аналізуються і прогнозуються різноманітні аспекти розвитку певної галузі господарства. Велике місце серед цих моделей займають моделі прогнозування науково-технічного прогресу, купівельного попиту, моделі потреб торгівлі в кадрах тощо.

Мікромоделі на промислових підприємствах розробляються для поглибленого аналізу структури виробництва. Висновки, зроблені на підставі розрахунків для таких моделей на ЕОМ, дають можливість організувати виробництво, виявити невикористані резерви, що в кінцевому підсумку призводить до значного збільшення випуску готової продукції.

Залежно від використаного математичного апарату, математичні моделі можна поділити на **моделі лінійного, випуклого, динамічного, стохастичного програмування; моделі прийняття рішень в умовах невизначеності (ігрові моделі) та в умовах нечіткої вхідної інформації; моделі сіткового планування і управління; моделі масового обслуговування**.

Деякі математичні моделі є **детермінованими**, тоді як інші **ймовірнісними**. Детерміновані моделі мають точний прогноз, імовірнісні (стохастичні) – прогноз про те, що деяка подія відбудеться протягом певного відрізка часу або з певною ймовірністю.

Класифікація математичних моделей може формуватись і на базі інших ознак. Наприклад, виділяються **лінійні** та **нелінійні** моделі.



Нерідко моделі, побудовані для вивчення об'єкту як динамічної системи, утворюють **кібернетичні** моделі, тобто моделі системи управління і різних функцій управління. Такі моделі розробляються для вивчення процедур і схем перетворення інформації в природних системах, а також для синтезування нових систем управління. Як обов'язкові компоненти вони містять умовні “входи” і “виходи”. На “вхід” моделі подаються сигнали, які діють на систему управління. З “виходу” моделі знімаються характеристики, що відповідають реакції на сигнали управління.

В клас задач **нечіткого** моделювання, входять задачі математичного програмування з нечітко описаною множиною допустимих виборів і функціями мети, деякими типами ігор у нечітко визначених обставинах, а також задачі прийняття рішень з одним або декількома відношеннями переваги на множині альтернатив.

На рис. 3.1 наведено **класифікацію математичних моделей кібернетичних систем** [16].

Кібернетика розробляє загальні принципи створення систем керування і визначається як наука про загальні закони отримання, зберігання, передачі та переробки інформації. Основний об'єкт дослідження кібернетики – це кібернетичні системи, які розглядаються абстрактно, незалежно від їх матеріальної природи (прикладі кібернетичних систем – ЕОМ, людський мозок, біологічні популяції, людське суспільство, автоматичні регулятори в техніці і ін.), а основним методом дослідження є математичне моделювання.

§3.2. Циклічна природа математичного моделювання

Процес математичного моделювання являє собою замкнений цикл [28] (рис. 3.2). На етапі 1 відбувається збір відомостей про явище, яке вивчається. На основі зібраного матеріалу формулюються певні припущення, які переводяться на мову математики – так здійснюється перехід до етапу 2. Оскільки математична модель будується на основі певних припущень, то блоки 3 та 4 призначені для перевірки адекватності побудованої моделі досліджуваному об'єкту, а у випадку необхідності і для її модифікації. Перехід від 2 до 3 здійснюється за допомогою математичних методів (аналітичних, чисельних, якісних). При переході від 4 до 1 прогнози порівнюються з реальними даними, в результаті чого модель модифікується і процес дослідження циклічно повторюється.

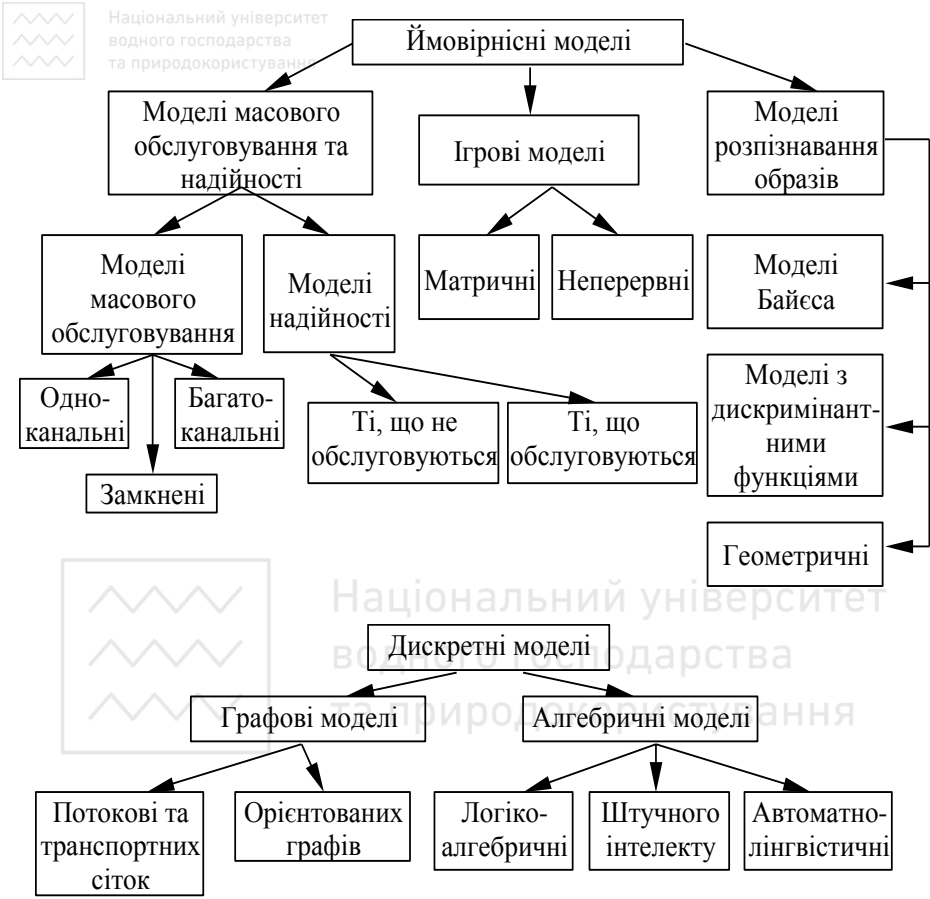


Рис. 3.1. Математичні моделі кібернетичних систем

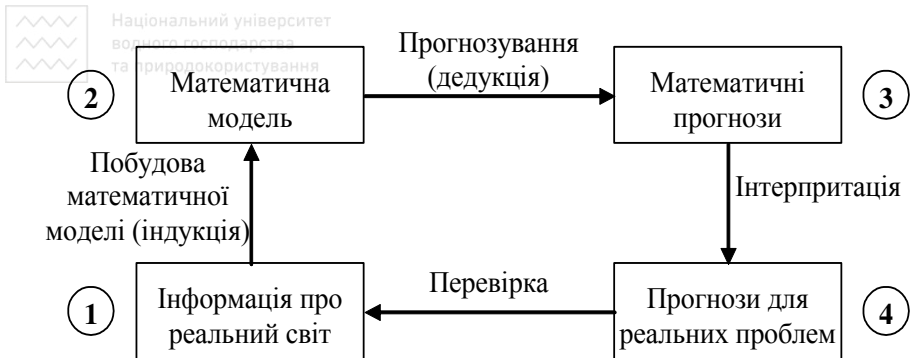


Рис. 3.2. Цикл математичного моделювання

В роботі [30] наведено схему з організації математичного експерименту при дослідженні певного об'єкта (рис. 3.3). Дана схема, хоча і ширше, ніж схема на рис. 3.2, також відображає циклічну природу процесу математичного моделювання. Адже при аналізі результатів відбувається повернення до математичної моделі.

§3.3. Вимоги до математичних моделей

Основні вимоги до математичних моделей наступні [3]:

1. Адекватність реальному об'єкту, який вивчається, відносно вибраної системи його характеристик. Під цим, як правило, розуміється:

а) правильне якісне описання об'єкта за вибраними характеристиками (наприклад, в результаті вивчення динамічної моделі ми робимо правильний висновок про затухання коливань реального об'єкта, про стійкість його руху і ін.);

б) правильне кількісне описання об'єкта за вибраними характеристиками з деякою мірою точності.

Фактично перехід в циклі на рис. 3.2 від етапу 4 до 1 – це перевірка на адекватність (верифікація) побудованої математичної моделі (тобто, порівняння чи співпадають прогнози, отримані з математичної моделі, з натурними даними). Як відмічено в [3], природно говорити не про адекватність моделі, а про **ступінь адекватності**. Під цим поняттям розуміється частина істинності моделі відносно вибраної характеристики об'єкта. Простіше – це коефіцієнт взаємозв'язку моделі та вихідного об'єкта за цією характеристикою. Він набуває значення від нуля (повна неадекватність) до 1 (повна адекватність).

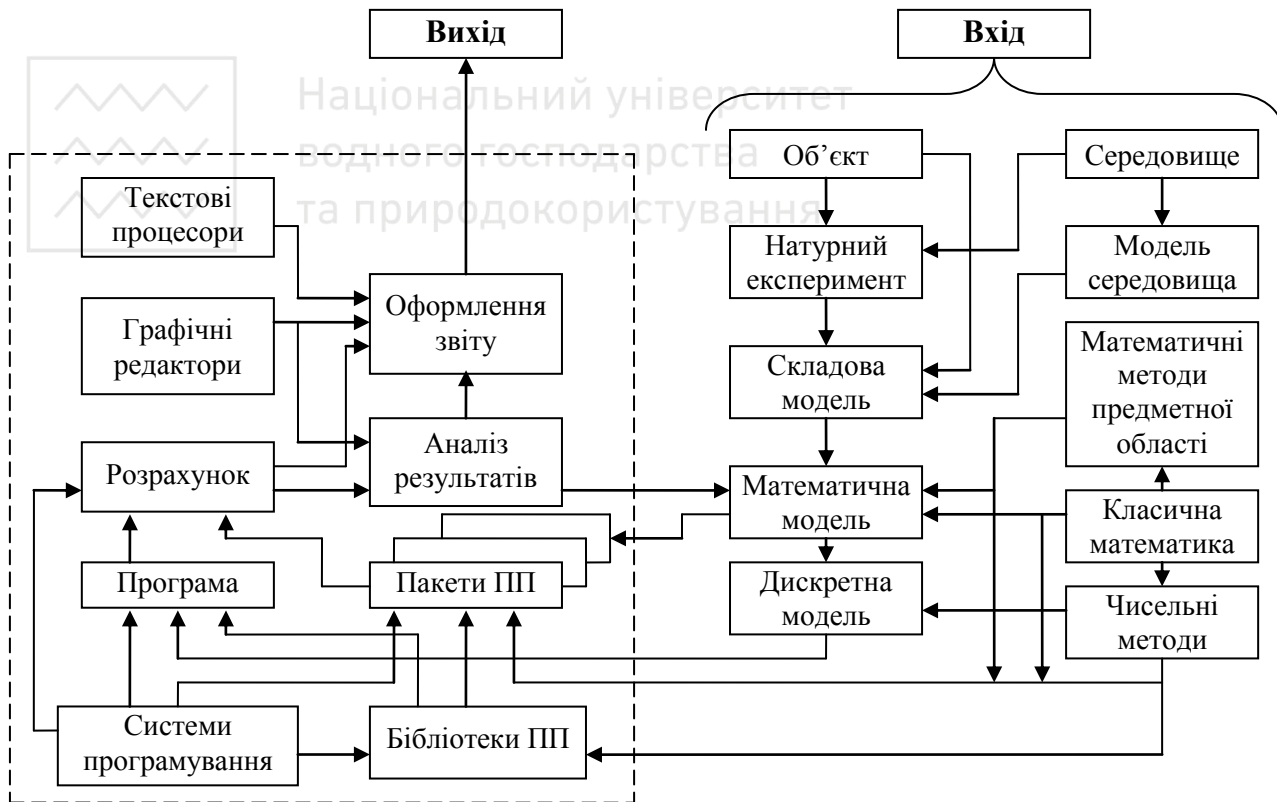


Рис. 3.3. Організація математичного експерименту



Однак, чітко обґрунтованого способу визначення даного коефіцієнта не існує. Очевидно, що не існує універсальної (абсолютної) адекватності, оскільки така адекватність означала б тотожність моделі та реального об'єкта.

2. Достатня простота моделі по відношенню до вибраної системи характеристик. Модель вважається достатньо простою, якщо сучасні засоби дослідження дають можливість провести економно по затратах праці кількісний та якісний аналіз вибраних характеристик та осмислити результат.

Вимоги 1 та 2 суперечливі, оскільки чим модель більш адекватна, тим вона менш проста. Однак, ускладнення моделі може і погіршити її адекватність. Наприклад, у випадках, коли використовуються параметри, що відомі з низькою точністю, то і результат буде далекий від реальних значень.

3. Оптимальність математичної моделі. Звичайно, поняття оптимальності, як і поняття ступеня адекватності математичної моделі є умовними. Їх умовність полягає в кількісній оцінці цих понять.

Нехай властивості адекватності та простоти математичних моделей деякого об'єкта визначаються парою чисел A та Π . Крива L на рис. 3.4 обмежує зверху (справа) область існування всіх мислимо можливих для даного об'єкта моделей. Заштрихована область на рис. 3.4 і є множиною “оптимальних” математичних моделей за вимогами адекватності та простоти.

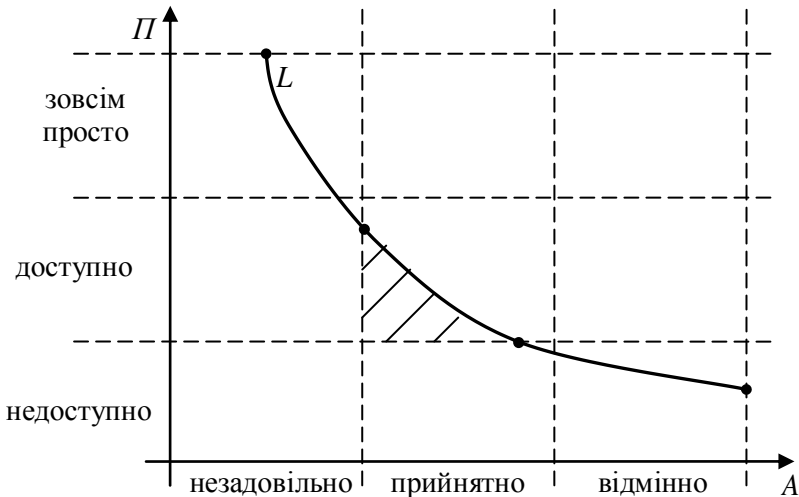


Рис. 3.4. Область “оптимальності” математичних моделей

§3.4. Основні властивості математичних моделей

1) **Множинність**. Оскільки реальні об'єкти, як правило, можна характеризувати нескінченною кількістю характеристик (або досить великою), то при виборі різних систем характеристик об'єкта ми отримаємо різні математичні моделі, які навіть можуть суперечити одна одній.

2) **Відносна умовність (суб'єктивність)**. Побудова моделі залежить від дослідника, його досвіду, таланту, завжди опирається на певний дослідний матеріал, а тому має певний рівень суб'єктивізму.

3) **Здатність до розширення**. Тобто, жодна модель не є завершеною і цей процес нескінченний.

4) **Цілеспрямованість**. Модель – це засіб досягнення певних цілей. Тому, відповідно до цілей, моделі одного об'єкта можуть відрізнятися (наприклад, один підприємець бачить процвітання у збільшенні виробництва, а інший – у зменшенні собівартості продукції).

5) **Пізнавальна властивість**. Модель – це структура для зберігання існуючих знань про об'єкт та отримання нових знань. Тому досліджуючи об'єкт на основі побудованої моделі можна виявити його властивості, які до цього були невідомі.

Питання для самоконтролю

1. Що таке математична модель об'єкта (системи)?
2. За якими ознаками класифікують математичні моделі?
3. Математичну модель відносять до функціональних, якщо...
4. В чому полягає циклічна природа математичного моделювання?
5. Які існують вимоги до математичних моделей?
6. В чому полягає вимога оптимальності математичної моделі?
7. Назвіть та охарактеризуйте основні властивості математичних моделей.



ТЕМА 4. КЛАСИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Базові поняття: класична математика, прикладна математика, теоретико-множинний підхід, два напрямки розвитку математики, розширений цикл математичного моделювання

§4.1. Два основних джерела математики: прикладний та теоретичний напрямки

Рушійні сили розвитку математики мають два основних об'єктивно існуючих джерела:

1. Зовнішнє, пов'язане з необхідністю розв'язання математичними засобами задач, які лежать за межами математики (фізичні, технічні, економічні, екологічні і ін.). Це джерело історично було перше.

2. Внутрішнє, бере початок з необхідності систематизувати знайдені математичні факти, виявити їх взаємозв'язок, об'єднати їх за допомогою узагальнюючих концепцій в теорію, розвивати та вдосконалювати дану теорію за її власними законами. Це джерело привело до виділення математики як науки.

Два напрямки в розвитку математики, які відповідають даним двом джерелам, називають прикладним та теоретичним (класичним).

На сучасному етапі розвитку математики дані джерела інколи буває важко розрізнити. Однак, хоча і не детально фіксовані, але границі існують. Особливо чітко відмінності між даними напрямками прослідковуються на ранніх етапах розвитку математики.

Математика Древнього Єгипту мала прикладний характер – вона стосувалась задач землемірства, обчислення об'ємів, прогнозу сонячних затемнень та ін.

Вважається, що перші елементи класичної математики з'явилися в Древній Греції. Адже в прикладному напрямку домінують індуктивні методи, а в класичній математиці – дедуктивні. Саме давньогрецька наука виробила дедуктивний спосіб побудови науки. Згідно даного способу всі твердження в тій чи іншій галузі виводяться за допомогою методів формальної логіки із деякої системи аксіом, що приймаються апіорі. Займатись прикладними дослідженнями в давньогрецьких математиків вважали занадто низьким, в порівнянні з теоретичними дослідженнями. Потрібно сказати, що така викривленість поглядів збереглась і донині в деяких вчених, які займаються теоретичними



дослідженнями (звичайно, виникає питання – а чи правомірне до таких людей слово “вчений”?).

Не ставлячи за мету викладати історію математики, відразу відмітимо, що зближення теоретичних та прикладних досліджень в математиці відбулося в епоху Відродження – XVI – XVIII століття. Протиставлення прикладної та класичної математики втратило сенс. Видатні вчені цієї епохи – Г.Галілей, І.Кеплер, І.Ньютон, Л.Ейлер, Ж.Лагранж – були не лише математиками, але і фізиками та механіками.

Починаючи з середини XIX ст. в математиці настав період домінування теоретико-множинного підходу (завдяки ряду робіт Г.Кантора та К.Вейерштраса). Перехід в математиці до теоретико-множинного підходу був необхідним, а тому прогресивним для свого часу. Був необхідним, оскільки на той час в математиці накопичилась значна кількість непов’язаних або слабо пов’язаних між собою фактів і виник ряд теорій, які слабо узгоджувались між собою та не мали надійного підґрунтя, яке б дало можливість їх надійно розвивати. Теоретико-множинний підхід дав можливість логічно побудувати сучасну геометрію, чітко сформулювати поняття групи в алгебрі і ін.

Однак, успіхи теоретико-множинного підходу, його мова та напрямки породили ілюзію про “абсолютний рівень” досягнутої строгості. Тому багато математиків, а особливо не математиків, і зараз звично вірять в цю абсолютну строгість і включають в математику лише твердження, доведені “абсолютно строго”. Це привело до примітивних уявлень, що всі судження діляться на “строгі” та “нестрогі”, причому силою доведення володіють лише перші, чисто дедуктивні [3]. В 60-70-х рр. XX ст. ряд математиків почали звертати увагу на помилковість таких уявлень (проти абсолютної строгості теоретико-множинного підходу свідчить, наприклад, парадокс Рассела, а також виникнення нових напрямків в математичній логіці щодо правомірності вибору тієї чи іншої системи аксіом в теоретико-множинному підході).

Сучасний період, який розпочався із середини 40-х рр. XX ст. (створення перших ЕОМ) називають періодом “двовладдя в математиці”. З одного боку продовжує активно розвиватись математика теоретико-множинного напрямку, однак найслабша сторона даного напрямку проявляється в застосуванні математики до розв’язання сучасних практичних задач. В багатьох випадках твердження про розв’язок має чисто якісний, екзистенціальний

характер, тобто доводиться теорема існування, але в цій теоремі нічого не говориться про те, як даний розв'язок точно або наближено знайти.

Саме в цьому і проявляється сильна сторона прикладної математики. Але, оскільки розвиток дедуктивних побудов класичної математики не встигає за ритмом сучасного життя, то в більшості прикладних досліджень математичні судження не знаходяться на чисто дедуктивному рівні, який вимагає класична математика. Прийоми суджень на “фізичному”, “прикладному” рівні строгості так само розповсюджені серед прикладників, як дедуктивний стиль серед класичних математиків.

Наприклад, якщо довести точність деякого чисельного методу теоретично неможливо, то прикладні математики знаходять чисельні розв'язки декількох задач, аналітичні розв'язки яких відомі, і на основі порівняння роблять певні висновки.

Детально про взаємозв'язки класичної та прикладної математики викладено в роботі [3]. Про способи доведення тверджень на прикладному рівні описано в роботі [26].

§4.2. Про відмінності деяких підходів в класичній та прикладній математиці

1. До поняття “існування” математичного об'єкта підходять з принципово різних позицій: в прикладній математиці він існує як математична модель реального об'єкта, який (математичний об'єкт) можна ідентифікувати та сконструювати, тоді, як в класичній математиці він існує як ідея, яка не суперечить прийнятій системі аксіом.

Наприклад, на мові класичної математики розв'язати задачу означає довести існування її розв'язку і запропонувати процес, який теоретично збігається до даного розв'язку. Але для прикладника потрібно ще отримати реально цей розв'язок. Тобто потрібно, щоб процес отримання наближеного розв'язку не вимагав великих затрат часу та пам'яті ЕОМ.

2. Поняття “нескінченності” та “нескінченно малого”. В класичній математиці прийнята концепція актуальної нескінченності. Тобто, якщо пишемо $n \rightarrow \infty$, то вважаємо, що n вже досягло нескінченності. В прикладній математиці нескінченність ніколи не може бути досягнута – розміри фізичних об'єктів обмежені, пам'ять та швидкодія ЕОМ обмежені, верхня межа чисел в ЕОМ обмежена і т.д.

Тому результати, які отримані в термінах актуальної нескінченності, вимагають ретельного аналізу при переході до застосувань. Адже, наприклад, накопичення похибок виду $\frac{1}{n}$, $n \rightarrow \infty$, може призвести до неправильного результату.

Але в класичній математиці відкидається концепція актуальної нескінченно малої. Якщо пишемо $\varepsilon \rightarrow 0$, то в класичній математиці, як правило:

- а) ε ніколи не досягне 0;
- б) яке б не було мале ε , його можна зробити ще меншим.

В прикладній математиці нескінченно мала – це актуальна нескінченно мала: на ЕОМ, при переході ε за певну межу, ε стає нулем.

3. Швидкість збіжності наближеного методу. Якщо точний розв’язок теоретично досягається за скінчене число кроків, то в класичній математиці поняття швидкості збіжності взагалі не ставиться. Однак в прикладному плані воно зберігає смисл, якщо число кроків практично не реалізоване. Наприклад, в класичній математиці ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{100n}}{n!}$ є збіжним, тобто його суму з необхідною точністю можна знайти за скінченне число кроків. А тепер завдання: складіть програму для обчислення S_n суми вказаного ряду з 20-ма правильними цифрами після коми за допомогою безпосереднього підсумовування його членів.

4. Підхід до процесу розв’язання задачі. “Чистого” математика більше цікавить метод розв’язку задачі, математичний апарат сам по собі, незалежно від реальної інтерпретації задачі. Прикладника більше цікавить сам розв’язок і реальні висновки з даного розв’язку.

§4.3. Розширений цикл математичного моделювання

Однак, не потрібно протиставляти класичну та прикладну математику. Інколи буває важко їх відрізнити, особливо на сучасному розвитку науки. І найкращі результати отримує той науковець, який поєднує переваги обох напрямків. Саме це і відображає розширений цикл математичного моделювання (рис. 4.1) – необхідність аналізу математичної моделі приводить до розвитку нових математичних методів.



Також в схемі проведення експерименту (рис. 3.3) чільне місце займає саме класична математика.

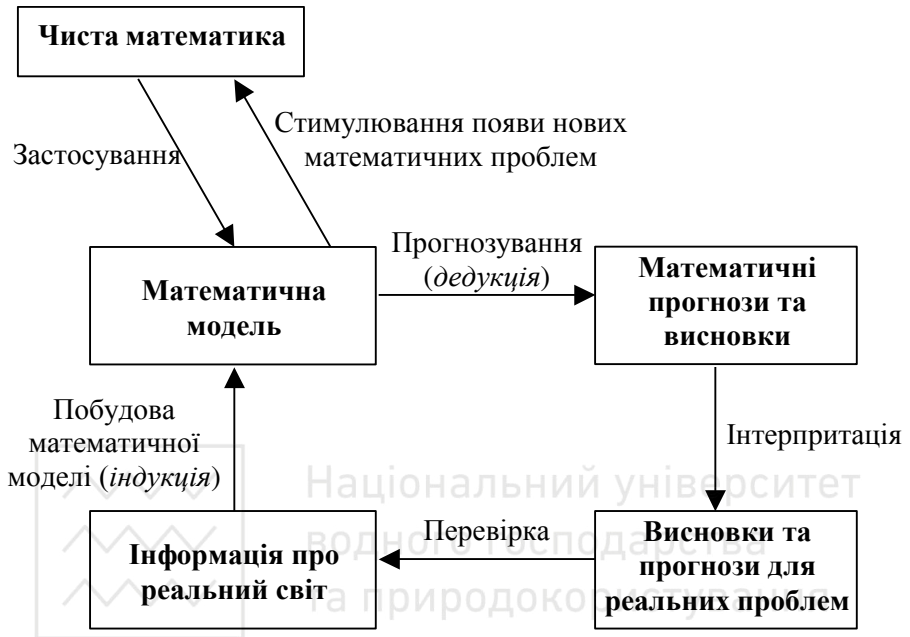


Рис. 4.1. Розширений цикл математичного моделювання

Питання для самоконтролю

1. Які рушійні сили розвитку математики? Пояснити кожне з джерел.
2. Під періодом “двовладдя в математиці” розуміють...
3. Чим відрізняється поняття “нескінченність” та “нескінченно мала” в класичній та прикладній математиці?
4. Чим відрізняється розширена схема циклу математичного моделювання від звичайної схеми?



Математичні моделі, які описуються задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь

Універсального методу складання диференціального рівняння не існує, тому можна дати лише деякі загальні вказівки. Нехай $y = y(x)$ – шукана залежність між характеристиками x і y даного процесу. Щоб скласти диференціальне рівняння, розв'язком якого є функція $y = y(x)$, треба виразити приріст цієї функції через приріст Δx незалежної змінної та інші величини, про які йдеться в задачі. Поділивши Δy на Δx та перейшовши до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, дістанемо диференціальне рівняння, тобто залежність швидкості зміни величини y в точці x (похідної $y'(x)$ від x) та $y(x)$. У багатьох випадках ця залежність ґрунтується на законі або експериментальному факті, який має місце в тій чи іншій галузі природознавства. Наприклад, витікання рідини через малий отвір у посудині, який лежить на відстані h нижче від рівня рідини в посудині, з урахуванням тертя визначається законом Торічеллі $v = \mu \sqrt{2gh}$, де $\mu = 0,62$ для води; g – прискорення вільного падіння. При цьому використовують геометричний зміст похідної (тангенс кута нахилу дотичної) та її фізичний зміст (швидкість перебігу процесу). Також потрібно пам'ятати, що похідна по часу від пройденого шляху – це швидкість руху, а похідна по часу від швидкості – це прискорення.

Найчастіше при складанні математичних моделей, які описуються крайовими задачами для звичайних диференціальних рівнянь, користуються такими законами

- другий закон Ньютона

$$F = ma,$$

де m – маса тіла; a – прискорення руху; F – сума діючих на тіло сил;

- закон всесвітнього тяжіння

$$F = k \frac{M_1 M_2}{r^2},$$

де M_1 , M_2 – маси взаємодіючих тіл; r – відстань між тілами; k – коефіцієнт пропорційності;



- закон Ньютона про охолодження тіла: швидкість охолодження тіла прямо пропорційна різниці температури тіла та температури оточуючого середовища;
- закон розчинення речовин: швидкість розчинення прямо пропорційна наявній кількості нерозчиненої речовини і різниці концентрації насиченого розчину та розчину у даний момент часу;
- закон Гука: сила пружності пружини прямо пропорційна її видовженню;
- закони Кірхгофа: алгебрична сума сил струмів, які протікають у даній точці електричного кола, дорівнює нулю; для замкненого контуру кола алгебрична сума падіння напруги в окремих ланках контуру дорівнює нулю.

Приклад Л1.1. З експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій при достатньому запасі їжі пропорційна до їх кількості (k – коефіцієнт пропорційності). За який час кількість бактерій збільшиться в m раз порівняно з початковою кількістю?

Розв’язання. Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t , $x(0) = x_0$. За час Δt кількість бактерій стане рівною $x(t + \Delta t)$. Тоді швидкість розмноження (згідно умови)

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = k \cdot x(t),$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Спрямовуючи $\Delta t \rightarrow 0$, отримаємо:

$$x'(t) = kx(t), x(0) = x_0,$$

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

$$\frac{dx}{x} = kdx \Rightarrow \ln|x| = kt + c \Rightarrow x = c_1 \cdot e^{kt} \quad (c_1 = e^c),$$

де $c = \text{const}$.

З початкової умови $x(0) = x_0$ маємо $c_1 = x_0$. Отже, $x(t) = x_0 e^{kt}$.

Час T , за який кількість бактерій збільшиться в m разів, знаходимо з рівняння

$$x(T) = mx_0 \Rightarrow x_0 e^{kT} = mx_0 \Rightarrow kT = \ln m \Rightarrow T = \frac{\ln m}{k}.$$



Відповідь: $T = \frac{\ln m}{k}$.

Приклад Л1.2. На матеріальну точку, маса якої m , діє стала сила, що надає точці прискорення a . Навколишнє середовище чинить рухомій точці опір, пропорційний до швидкості її руху (γ – коефіцієнт пропорційності). Як змінюється швидкість руху залежно від часу, якщо в початковий момент точка була в стані спокою?

Розв’язання. Вважаємо, що відрахунок часу ведеться від початку руху точки. Нехай $v(t)$ – швидкість руху точки в момент часу t . Тоді $v(0) = 0$. У будь-який момент часу t на точку діє сила $\overline{ma - \gamma v(t)}$. За другим законом Ньютона ця сила надає точці прискорення $\frac{ma - \gamma v(t)}{m}$. Прискорення в момент часу t є швидкістю зміни швидкості в цей момент, тобто похідною швидкості по часу. Тому



$$v' = \frac{ma - \gamma v(t)}{m},$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v + a,$$
$$\frac{dv}{-\frac{\gamma}{m}v + a} = dt,$$
$$-\frac{m}{\gamma} \ln \left| -\frac{\gamma}{m}v + a \right| = t + c, \text{ де } c = const,$$
$$-\frac{\gamma}{m}v + a = c_1 e^{-\frac{\gamma}{m}t}, \text{ де } c_1 = e^{-\frac{\gamma}{m}c},$$
$$v(t) = c_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{m}{\gamma}a, \text{ де } c_2 = -\frac{m}{\gamma}c_1.$$

Оскільки $v(0) = 0$, то: $0 = c_2 + \frac{m}{\gamma}a \Rightarrow c_2 = -\frac{m}{\gamma}a$

Отже, $v(t) = \frac{m}{\gamma}a(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})$.



Відповідь: $v(t) = \frac{m}{\gamma} a(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t})$.

Приклад Л1.3. У посудину, яка містить 20 л води, неперервно зі швидкістю 5 л за хвилину вливається розчин, кожен літр якого містить 0,2 кг солі. У посудині розчин миттєво перемішується, і суміш витікає з посудини з тією самою швидкістю. Скільки солі буде в посудині через 4 хвилини?

Розв'язання. Нехай $m(t)$ – маса розчиненої солі в посудині через t хв після початку процесу. Знайдемо, як зміниться маса солі в посудині за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$.

За час Δt в посудину буде влито $5\Delta t$ л розчину. У цій кількості розчину міститься $0,2 \cdot 5 \cdot \Delta t = \Delta t$ кг солі. За той самий час з посудини виливається $5\Delta t$ л розчину. У момент t в посудині було $m(t)$ кг солі, отже, в $5\Delta t$ л розчину, який витікає, містилося б $\frac{m(t)}{20} \cdot 5 \cdot \Delta t = 0,25m(t)\Delta t$ кг солі, якби за час Δt кількість солі в посудині не змінювалась. Оскільки за цей час дана кількість солі зміниться на деяку величину α ($\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$), то з посудини за час Δt виллється $0,25(m(t) + \beta)\Delta t$ кг солі, де $0 < \beta < \alpha$.

Отже, в розчині, який вливається в посудину за проміжок $[t; t + \Delta t]$, міститься Δt кг солі, а в розчині, який витікає за той самий час, міститься $0,25(m(t) + \beta)\Delta t$ кг солі. Приріст кількості солі за цей час дорівнює

$$m(t + \Delta t) - m(t) = \Delta t - 0,25(m(t) + \beta)\Delta t.$$

Обидві частини вищенаведеної рівності розділимо на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$. Враховуючи, що $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$, дістанемо

$$m'(t) = 1 - 0,25m(t),$$

$$\frac{dm}{dt} = 1 - 0,25m(t),$$

$$\frac{dm}{1 - 0,25m} = dt,$$



$$-4 \ln \left| 1 - \frac{1}{4} m \right| = t + c, \text{ де } c = \text{const},$$

$$1 - \frac{1}{4} m(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{4}t}, \text{ де } c_1 = e^{-\frac{1}{4}c},$$

$$m(t) = 4(1 - c_1 e^{-\frac{1}{4}t}).$$

Оскільки в момент часу $t = 0$ солі в посудині не було, то

$$m(0) = 0 \Rightarrow 0 = 4 \cdot (1 - c_1) \Rightarrow c_1 = 1.$$

Отже $m(t) = 4(1 - e^{-\frac{t}{4}})$.

В момент $t = 4$ хв. в посудині буде $m(4) = 4(1 - e^{-1}) \approx 2,4$ кг солі.

Відповідь: 2,4 кг солі.

Приклад Л1.4 [1]. Нехай в торговельній мережі реалізується деяка продукція, про яку з числа потенціальних покупців N знають лише x . Для прискорення збуту продукції були дані рекламні оголошення. Припустимо, що після рекламних оголошень швидкість зміни числа покупців, які знають про продукцію, пропорційна як числу тих, хто знає про товар, так і числу покупців, які про нього не знають. Знайти залежність $x(t)$.

Розв'язання. Згідно умови задачі

$$x(t + \Delta t) - x(t) = k(N - x(t))x(t)\Delta t,$$

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = k(N - x(t))x(t), \quad (\text{Л1.1})$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Перейшовши в (Л1.1) до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, отримуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x(t))x(t). \quad (\text{Л1.2})$$

Рівняння (Л1.2) потрібно доповнити початковою умовою

$$x(t)|_{t=0} = N_0. \quad (\text{Л1.3})$$

Отже, математична модель задачі про визначення ефективності рекламної кампанії описується задачею Коші (Л1.2), (Л1.3).

Також потрібно звернути увагу читача на два ключові слова, які зустрічаються у формулюванні задачі: “припустимо, що...”. Складання математичних моделей систем завжди розпочинається з



цих слів. І залежно від припущень математичні моделі однієї системи можуть значно відрізнятись одна від одної.

Приклад Л1.5 [33]. Встановити залежність атмосферного тиску p від висоти h над рівнем моря.

Розв'язання. За величину атмосферного тиску приймається вага вертикального стовпа повітря з площею перерізу $S = 1 \text{ см}^2$.

Проведемо два горизонтальних перерізи цього стовпа повітря на висотах h та $(h + \Delta h)$. Тоді різниця тисків на вказаних висотах дорівнює вазі стовпа повітря між двома перерізами. Тобто

$$p(h + \Delta h) - p(h) = -\underbrace{\rho(h)S\Delta hg}_{\Delta m}.$$

Враховуючи, що $S = 1 \text{ см}^2$, маємо

$$\frac{p(h + \Delta h) - p(h)}{\Delta h} = -\rho(h)g.$$

Переходячи до границі при $\Delta h \rightarrow 0$, отримуємо

$$\frac{dp}{dh} = -\rho(h)g. \quad (\text{Л1.4})$$

Але залежність $\rho = \rho(h)$ поки що невідома. На основі закону Бойля-Маріотта робимо висновок, що тиск повітря пропорційний до густини

$$p(h) = k\rho(h),$$

де $k = \frac{RT}{M}$, R – універсальна газова стала, M – молярна маса повітря, T – температура. Тоді з (Л1.4) отримуємо

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{g}{k} p(h). \quad (\text{Л1.5})$$

Рівняння (Л1.5) потрібно доповнити початковою умовою

$$p|_{h=0} = p_0. \quad (\text{Л1.6})$$

Задача Коші (Л1.5), (Л1.6) і є математичною моделлю для вирішення вказаної задачі.



Завдання для самостійної роботи

1. Згідно дослідів на протязі року із кожного граму радіо розпадається 0,44 мг. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радіо, якщо швидкість розпаду пропорційна до наявної кількості радіо?
2. Тіло охолоджується за 10 хв від 100°C до 60°C . Температура оточуючого повітря постійна і рівна 20°C . Коли тіло охолоне до 25°C ? (Використати закон Ньютона про охолодження: швидкість охолодження тіла прямо пропорційна різниці температури тіла та температури оточуючого середовища).
3. У залі після зборів (10800 м^3) повітря містить 0,12% CO_2 . Скільки м^3 повітря, що містить 0,04% CO_2 треба щохвилини подавати в залу, щоб за 10 хв там залишилось тільки 0,06% CO_2 ?
4. Кількість світла, яке поглинається шаром води малої товщини, пропорційне кількості падаючого світла і товщині шару. Шар води товщиною 35см поглинає половину падаючого на нього світла. Яку частину світла поглине шар товщиною 2м?
5. В повітрі кімнати об'ємом 200 м^3 міститься 0,15% CO_2 . Вентилятор подає за хвилину 20 м^3 повітря, що містить 0,05% CO_2 . Через який час кількість CO_2 в повітрі кімнати зменшиться вдвічі?
6. Швидкість виходу з ладу комп'ютерів прямо пропорційна до кількості працюючих персональних ЕОМ. Через який час в класі залишиться лише 5 працюючих ЕОМ, якщо через 10 хв. після початку роботи в класі перестало працювати 2 комп'ютери? Загалом в класі є 15 ЕОМ.
7. За який час витече вся вода із циліндричного баку з діаметром дна $R = 1,8\text{ м}$ і висотою $H = 2,45\text{ м}$ через отвір в дні діаметром $r = 0,6\text{ м}$? Вісь циліндра вертикальна.
8. Циліндричний бак поставлений вертикально і має отвір у дні. Половина води із повного бака витікає за 5 хв. За який час витече вся вода?
9. Одна речовина перетворюється в іншу зі швидкістю пропорційною кількості неперетвореної речовини. Кількість першої речовини 31,4г через 1 год після початку реакції і 9,7г



через 3 год. Обчислити, скільки було речовини на початку реакції і за скільки часу залишиться не перетвореним 1% початкової кількості.

10. Моторний човен рухається по озеру зі швидкістю 20 км/год. Через 40 с після вимкнення двигуна швидкість човна зменшилась до 8 км/год. Опір води пропорційний швидкості руху. Якою буде швидкість човна через 2хв після зупинки двигуна?
11. Резервуар має 100л розчину, що містить 10кг солі. Вода вливається до резервуару зі швидкістю 3л за хвилину, а суміш витікає зі швидкістю 2л за хвилину. Скільки солі залишиться в резервуарі за годину?
12. Швидкість розповсюдження комп'ютерного вірусу в комп'ютерній аудиторії прямо пропорційна кількості заражених комп'ютерів. Знайти залежність кількості заражених комп'ютерів від часу, якщо в початковий момент часу зараженим був один комп'ютер, а через 1 хвилину їх стало два. Через скільки часу всі комп'ютери в аудиторії будуть зараженими, якщо їх всього є 15?
13. Тягова сила паровоза визначається за формулою $F = k_1 - k_2 v$, де k_1, k_2 – деякі сталі, v – швидкість паровоза. Обчислити значення F для часу t , коли відомо, що для $t = 0$, $v = v_0$, $F = F_0$.
14. Швидкість збільшення площі поверхні коренеплоду моркви прямо пропорційна до кількості вбраної вологи. В свою чергу, кількість вбраної вологи прямо пропорційна до площі поверхні коренеплоду. Визначити через скільки часу площа поверхні коренеплоду збільшиться вдвічі (при достатньому запасі вологи), якщо $S|_{t=0} = S_0$ (см²).
15. Швидкість розчинення солі прямо пропорційна до кількості нерозчиненої солі і обернено пропорційна до концентрації розчину. Знайти через скільки часу залишиться половина нерозчиненої солі, якщо початково N_0 грам солі залили V літрами води.
16. Два циліндричні резервуари, обидва по 4м заввишки та діаметром по 4м, сполучено короткою трубкою діаметром $\frac{1}{6}$ м. Один із



резервуарів заповнений водою, другий порожній. За який час рівень води в обох резервуарах стане однаковий?

Вказівка. Швидкість, з якою тече вода трубою, обчислюють як швидкість води, що просто витікає з резервуара під таким самим тиском.

17. Людина робить в середньому 18 подихів на хвилину, видихаючи щоразу 2000 см^3 повітря, що містить 4% CO_2 . Який вміст CO_2 буде в повітрі аудиторії через півгодини, якщо її об'єм 400 м^3 , а сидить в ній 50 чоловік і вентилятори подають щохвилини 40 м^3 свіжого повітря, яке містить 0,06% CO_2 ?
18. Парашутист спускається на парашуті, який має форму півсфери радіуса $R = 4 \text{ м}$. Його маса разом з масою парашута дорівнює 82 кг. Знайти швидкість v парашутиста через 2с після початку спуску і шлях, який він пройшов за час t . Вважати, що сила опору повітря $F = 0,0008 l v^2$, де s – площа найбільшого перерізу, перпендикулярного до напрямку руху, v – швидкість руху.
19. Швидкість збільшення площі молодого листка вікторії-регії, який має форму круга, пропорційна до радіуса листка і кількості сонячного світла, яке падає на нього. Кількість сонячного світла пропорційна до площі листка і косинуса кута між напрямком променів і вертикаллю до листка. Знайти залежність між площею S листка і часом t , якщо о 6 год ця площа дорівнювала 1600 см^2 , а о 18 год того самого дня 2500 см^2 . Вважати, що кут між напрямком променя Сонця і вертикаллю о 6 год і о 18 год дорівнював 90° , а опівдні – 0° .
20. Ланцюг довжиною l сповзає з горизонтального столу. У початковий момент руху зі столу звисала частина ланцюга довжиною a , а початкова швидкість дорівнює нулю. Встановити залежність між часом та довжиною ланцюга, яка сповзла зі столу, якщо сила тертя прямо пропорційна довжині ланцюга, що сповзла зі столу.
21. Проходячи через ліс, перемагаючи опір дерев, вітер втрачає частину швидкості. Ця втрата пропорційна початковій швидкості та довжині шляху. Скласти рівняння швидкості вітру залежної від довжини пройденого шляху, якщо $v(0) = 10 \text{ м/с}$.

22.

Національний університет
та природокористування

У посудину з киплячою водою опущено металевий предмет з температурою $T = 20^{\circ}\text{C}$. Через хвилину температура предмета збільшилась на 2°C . Коли температури води та предмету будуть відрізнятись на 1°C ?

23. На дні циліндричної посудини наповненої рідиною, утворилась щілина. Протягом першої доби витекло 10% рідини. Вважаючи, що швидкість витікання рідини пропорційна до висоти її рівня в посудині, знайти час, за який з посудини витече половина води.

24. У закритому приміщенні об'ємом $V \text{ м}^3$ стоїть відкрита посудина з водою. Швидкість випаровування води пропорційна до різниці між кількістю q водяної пари, яка насичує 1 м^3 повітря при даній температурі, і кількістю q водяної пари, яка є в 1 м^3 повітря в даний момент (вважатимемо, що температура повітря й води, а також площа, з якої випаровується вода, сталі). У початковий момент у посудині було m_0 (г) води, а в 1 м^3 повітря q_0 (г) пари. Скільки води залишиться в посудині через час t ?

25. Посудину, площа поперечного перерізу якої є відомою константою S_0 , наповнено рідиною до рівня H . У дні посудини є отвір площею σ , через який рідина виливається. Знайти час t , за який рівень рідини знизиться від початкового положення h до довільного H , $0 \leq h \leq H$, і час T , за який рідина повністю виллється.

26. В результаті хімічної реакції з двох рідин А та В об'ємом 10 літрів та 20 літрів відповідно утворюється нова хімічна речовина С. Визначити закон утворення речовини С залежно від часу t за умови, що протягом хімічної реакції температура не змінюється, і за 20 хв. її утворюється 6 літрів (в реакції речовини А та В беруть участь повністю).

Вказівка. Використати закон діючих мас: швидкість хімічної реакції (швидкість утворення нової речовини) при сталій температурі пропорційна добутку маси речовин, які беруть в даний момент участь у реакції.

27. Деяка кількість нерозчиненої речовини, яка містить в своїх порах 2 кг солі, піддається впливу 30 л води. Через 5 хв. 1 кг солі



розчинився. Через який час розчиниться 99 % початкової кількості солі?

Вказівка. Використати закон, що швидкість розчинення пропорційна кількості нерозчиненої солі та різниці між концентрацією розчину в даний момент та концентрацією насиченого розчину (1 кг на 3л).

28. Куля, рухаючись зі швидкістю $v_0 = 450 \frac{m}{c}$, заглиблюється в досить тверду стіну. Сила опору стіни пропорційна квадратові швидкості кулі. Визначити швидкість v кулі через 0,002 с після входження її в стіну, якщо коефіцієнт пропорційності $k = 6$.

29. Дно резервуара, місткість якого становить 300 л, вкрито сумішшю солі та нерозчинної речовини. Припускаючи, що швидкість розчинення солі пропорційна різниці між концентрацією в даний момент і концентрацією насиченого розчину (1 кг солі на 3 л води) та що дана кількість чистої води розчиняє $\frac{1}{3}$ кг солі за 1 хв., обчислити, скільки солі міститиме розчин через 1 год.

30. До нерухомого центра O притягується матеріальна точка. Сила притягання пропорційна відстані між ними, причому коефіцієнт пропорційності становить k . У початковий момент відстань між точкою і центром O становить s , швидкість дорівнює нулю. Встановити закон руху точки.



Математичні моделі, які описуються задачами лінійного програмування

Складання математичних моделей задач даної лабораторної роботи розпочинається з вибору змінних, сукупністю значень яких однозначно визначається один із варіантів процесу. Потрібно мати на увазі – від вдалого вибору цих змінних залежить простота математичної моделі і, відповідно, зручність подальшого її аналізу. Після вибору змінних потрібно скласти за текстом задачі обмеження, які накладаються на ці змінні. Потрібно стежити, щоб в математичній моделі були враховані всі обмежувальні умови і в той же час не було жодної зайвої.

Далі складатиметься цільова функція, яка в математичній формі відображає критерій вибору найкращого варіанту. Після складання математичної моделі потрібно розглянути можливі шляхи її спрощення і вибрати метод для розв'язання задачі.

Розглянемо приклади математичних моделей, які описуються задачами лінійного програмування і наведені в [35].

Задача планування перевезення вантажів

Нехай задана деяка множина міст $N = \{1, \dots, n\}$, між якими відбувається обмін вантажів, та множина доріг (маршрутів) I , що з'єднують дані міста

$$I = \{(i, j) : i \in N, j \in N\} \subseteq N \times N.$$

Припускається, що довжина кожного маршруту відома і рівна s_{ij} , $(i, j) \in I$, крім того $s_{ij} = s_{ji}$. Вважаємо, що потік можливий в обох напрямках. Тобто із $(i, j) \in I$ випливає $(j, i) \in I$. Кожне місто володіє певними ресурсами завантажених та порожніх транспортних одиниць, причому завантажені транспортні одиниці вже розподілені по маршрутах, тобто для кожної з них вже відоме місто, в яке дана транспортна одиниця може бути відправлена. Нехай z_{ij} , $(i, j) \in I$, – кількість завантажених транспортних одиниць, які можуть бути відправлені з i -го міста в j -е місто.



По кожному з маршрутів можуть відправлятися як завантажені, так і порожні транспортні одиниці. При цьому потрібно, щоб виконувалась умова балансу: кількість відправлених з одного міста в інше транспортних одиниць дорівнювала кількості транспортних одиниць, відправлених в зворотному напрямку.

Кожне місто $i \in N$ має план відправлень – задано кількість b_i транспортних одиниць, які повинні бути відправлені з даного міста. Крім того, з реального змісту задачі випливає, що простий обмін порожніми транспортними одиницями між містами не допускається.

Потрібно визначити кількість відправлень транспортних одиниць з кожного міста множини N по кожному маршруту так, щоб:

- 1) сума всіх транспортних одиниць, відправлених з i -го міста, відрізнялась від плану на величину, не більшу t_i ;
- 2) кількість відправлених порожніх транспортних одиниць з i -го міста не перевищувала заданого числа P_i ;
- 3) пробіг порожніх транспортних одиниць був мінімальним.

Позначимо: x_{ij} , $(i, j) \in I$, – кількість завантажених транспортних одиниць; y_{ij} , $(i, j) \in I$, – порожніх транспортних одиниць, відправлених з міста i в місто j .

В термінах цілочислового лінійного програмування математична модель сформульованої задачі запишеться у вигляді

$$\sum_{(i,j) \in I} s_{ij} y_{ij} \rightarrow \min, \quad (J12.1)$$

при умовах

$$\sum_{(i,j) \in I} (x_{ij} + y_{ij}) = b_i + \delta_i, \quad i \in N, \quad (J12.2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq z_{ij}, \quad (i, j) \in I, \quad (J12.3)$$

$$x_{ij} + y_{ij} = x_{ji} + y_{ji}, \quad (i, j) \in I, \quad (J12.4)$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in I, \quad (J12.5)$$

$$\sum_{(i,j) \in I} y_{ij} \leq P_i, \quad i \in N, \quad (J12.6)$$

$$x_{ij}, y_{ij} - \text{цілі числа}, \quad (i, j) \in I, \quad (J12.7)$$

$$y_{ij} y_{ji} = 0, \quad (i, j) \in N. \quad (J12.8)$$



Тут $\delta_i, i \in N$, – параметр, що приймає цілі значення з проміжку $[-t_i, t_i]$.

Задача комівояжера

Нехай маємо $(n+1)$ місто a_1, a_2, \dots, a_n і між кожною парою міст (a_i, a_j) визначена відстань $d_{ij} \geq 0$. Комівояжеру потрібно побувати в кожному з цих міст, починаючи і закінчуючи свій маршрут в місті a_0 . Він не має права двічі відвідувати жодне з міст a_1, a_2, \dots, a_n . Необхідно знайти такий маршрут відвідування цих міст, який мав би в сумі найменшу довжину.

Математично задачу комівояжера можна записати в такому вигляді: знайти таке $p_* \in P_n$, що

$$p_* = \arg \min_{p \in P_n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_{p_i, p_{i+1}} + d_{p_n, 0} + d_{0, p_1} \right),$$

де $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Елемент p визначає маршрут відвідування міст наступним чином: $a_0, a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_n}, a_0$.

Ця математична модель охоплює і той випадок, коли між деякими містами a_s та a_t заборонений безпосередній перехід. В такому випадку потрібно покласти $d_{st} = \infty$.

Задача розміщення компонентів цифрової апаратури

Розглянемо типову для сучасних ЕОМ конструкцію: прямокутна плата, всередині якої знаходиться поле позицій для встановлення приладів, а вздовж однієї зі сторін – контакти зовнішніх виходів. Позиції являють собою рівні прямокутники, центри яких розміщені у вузлах ортогональної сітки, а контакти позиції розміщені вздовж двох протилежних її сторін, причому відстані між сусідніми контактами, що розміщені з одного боку, однакові. Вважаємо, що всі встановлені модулі мають однакові розміри. Тобто кожен модуль може розміщуватися в будь-яку позицію.

Проведемо нумерацію позицій, перебираючи їх зліва на право і знизу вверху; позначимо n – загальне число позицій на платі.



Множину модулів, що будуть розміщені на платі позначимо $M = \{m_1, m_2, \dots, m_{n_1}\}$, де n_1 – число модулів. Нехай $n_1 = n$.

Назвемо електричним ланцюгом множину контактів схеми, які в будь-який момент часу є точками з однаковим електричним потенціалом. Якщо серед цих контактів в деякому електричному ланцюгу є і зовнішній контакт плати, то такий електричний ланцюг назвемо зовнішнім, в іншому випадку – внутрішнім.

Задачу розміщення модулів на платі можна сформулювати так.

Нехай задана схема зв'язків між контактами модулів, що містяться в M (в опис зв'язків повинні входити як внутрішні так і зовнішні ланцюги). Необхідно знайти таке розміщення модулів на платі, яке б оптимізувало деякий критерій (цільову функцію задачі).

Для простоти розглянемо найбільш поширений тип конструкцій ЕОМ, в яких зовнішні виходи розміщені вздовж однієї зі сторін. Оскільки зовнішні виходи конструкцій являють собою множину інваріантних контактів, то їх остаточне закріплення за конкретними електричними ланцюгами здійснюється після етапу розміщення. Це і будемо мати на увазі. Для конкретності розглянемо задачу мінімізації сумарної довжини всіх з'єднань.

Множиною всіх варіантів розміщення буде P_n всіх перестановок елементів — множини $M = \{2, \dots, n\}$. Кожна перестановка $p = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle \in P_n$ визначає варіант розміщення модулів згідно наступного правила: позицію π_i займає модуль з номером p_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

На практиці в ряді випадків виникає необхідність розмістити модулі з деякої визначеної підмножини $\tilde{M} \subset M$ в задані позиції. Побудуємо математичну модель задачі, враховуючи ці обмеження. Нехай задане співвідношення визначається функцією $\varphi \in \tilde{M}$, значення якої для будь-якого $x \in \tilde{M}$ дорівнює номеру позиції, в яку потрібно розмістити модуль з номером x .

Виділимо з P_n підмножину P наступного вигляду: для $p = \langle p_1, p_2, \dots, p_n \rangle \in P$ справедливо: $p_{\varphi(x)} = i$, якщо $i \in M$ – призначений в місце $p_{\varphi(x)}$ модуль, підмножина $P \subset P_n$ і являє собою множину допустимих варіантів розв'язку поставленої задачі.



Припускаючи, що число зовнішніх ланцюгів дорівнює ω , цільову функцію задачі представимо у вигляді

$$f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^k n_{jt}^{is} d(\xi_s^i, \xi_t^j, p) + \sum_{i=1}^{\omega} \eta_i(\Phi)$$

$$n_{jt}^{is} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } s - \text{ий контакт } i - \text{го модуля з'єднаний провідником} \\ & \text{з } t - \text{им контактом } j - \text{го модуля;} \\ 0, & \text{в протилежному випадку;} \end{cases}$$

$d(\xi_s^i, \xi_t^j, p)$ – геометрична відстань між s -м контактом i -го модуля та t -м контактом j -го модуля при розміщенні $p \in P_n$; $\eta_i(\Phi)$ – мінімально можлива відстань між зовнішніми контактами плати та контактами модулів, що входять в i -ий зовнішній ланцюг.

Як показано в роботі [35], цільову функцію зручніше представити в наступному вигляді

$$f(\Phi) = \sum_{i=1}^{v+\omega} S(\Phi, p) + \sum_{i=1}^{\omega} \eta_i(\Phi) \quad (Л2.9)$$

де $S(\Phi, p)$ – довжина внутрішніх сполучень i -го ланцюга при розміщенні p ; v – число внутрішніх ланцюгів.

Отже, дану задачу можна сформулювати так: необхідно знайти елемент $p_* \in P \subset P_n$, для якого

$$p_* = \arg \min_{p \in P \subset P_n} f(\Phi) \quad (Л2.10)$$

де $f(\Phi)$ обчислюється за формулами (Л2.9).

З (Л2.9) слідує, що крім власне задачі розміщення (Л2.10) необхідно розв'язувати ще допоміжні оптимізаційні задачі (знаходження $S(\Phi, p)$, $Q(\Phi, p)$ і $\eta_i(\Phi)$).

Задача про найкраще використання ресурсів

Нехай деяка виробнича одиниця (цех, завод, фірма та ін.), виходячи з кон'юнктури ринку, технічних або технологічних можливостей та наявних ресурсів, може випускати n різних видів продукції (товарів) Π_j ($j = \overline{1, n}$). Підприємство при виробництві цих видів продукції повинне обмежуватись наявними видами ресурсів, технологій, інших виробничих факторів (сировини, напівфабрикатів, робочої сили,



обладнання, електроенергії та ін.). Всі ці види обмежуючих факторів назвемо *інградієнтами* R_i , $i = \overline{1, m}$. Вони обмежені величинами відповідно b_i , $i = \overline{1, m}$ умовних одиниць. Таким чином, $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^m$ – вектор ресурсів. Відома економічна вигода (міра корисності) виробництва продукції кожного виду, обчислена, наприклад, по відпускній ціні товару, його прибутку, витратам виробництва, мірі задоволення потреб та ін. Приймемо в якості такої міри, наприклад, ціну реалізації c_j ($j = \overline{1, n}$). Тобто $\mathbf{c} = \{c_j\}_{j=1}^n$ – вектор цін. Відомі також технологічні коефіцієнти a_{ij} , які вказують скільки одиниць i -го ресурсу потрібно для виробництва одиниці продукції j -го виду. Матрицю коефіцієнтів a_{ij} називають технологічною матрицею і позначають літерою \mathbf{A} . Позначимо через $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j=1}^n$ план виробництва, що показує в яких кількостях потрібно випускати види товарів P_j , $j = \overline{1, n}$, щоб забезпечити підприємству максимальний обсяг реалізації при наявних ресурсах.

Оскільки c_j – ціна реалізації одиниці j -ої продукції, то прибуток від реалізованих x_j одиниць буде $c_j x_j$, а загальний обсяг реалізації

$$Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n.$$

Цей вираз – цільова функція, яку потрібно максимізувати.

Оскільки $a_{ij} x_j$ – витрати i -го ресурсу на виробництво x_j одиниць продукції, то, просумувавши витрати i -го ресурсу на випуск всіх n видів продукції, отримаємо загальні витрати даного ресурсу, який не повинен перевищувати b_i ($i = \overline{1, m}$) одиниць:

$$a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n \leq b_i.$$

Для того, щоб шуканий план $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j=1}^n$ був реальним, поряд з обмеженнями на ресурси потрібно ще накласти умову невід'ємності на об'єми x_j випуску продукції

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$



Таким чином, математична модель задачі про найкраще використання ресурсів описується наступною задачею лінійного програмування (ЗЛП):

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (\text{Л2.11})$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (\text{Л2.12})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (\text{Л2.13})$$

Задача про вибір оптимальних технологій

В задачі про найкраще використання ресурсів визначається оптимальний план випуску продукції. Нехай при виробництві деякого продукту використовується n технологій. При цьому потрібно m видів ресурсів, які задані об'ємами b_i ($i = \overline{1, m}$). Ефективність технологій, тобто кількість кінцевої продукції (в грошових одиницях), що виробляється за одиницю часу по j -й ($j = \overline{1, n}$) технології, позначимо c_j . Нехай a_{ij} – витрати i -го ресурсу за одиницю часу по j -й технології. В якості невідомої величини x_j , $j = \overline{1, n}$ прийнемо інтенсивність використання j -ої технології, тобто час, на протязі якого продукція виробляється за j -ою технологією. Нехтуючи часом переналагоджень, що потрібний для переходу від однієї технології до іншої, отримуємо наступну математичну модель задачі: знайти план використання технологій $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j=1}^n$, який забезпечує максимум випуску продукції в ціновому вираженні

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (\text{Л2.14})$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (\text{Л2.15})$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (\text{Л2.16})$$



Задача про суміші

Проблема полягає в складанні таких робочих сумішей на основі вихідних матеріалів, які б забезпечували отримання кінцевого продукту, що володіє певними властивостями. До даної групи задач відносяться задачі про вибір дієти, складання кормового раціону в тваринництві, горючих та змашувальних сумішей в нафтопереробній промисловості, сумішей для отримання бетону в будівництві та ін. Крім того, потрібно отримати суміш із заданими властивостями при найменших затратах на вихідні сировинні матеріали.

Математичну модель задачі про найкращий склад суміші розглянемо на прикладі задачі про дієту. Наявні харчові продукти, відомі під номерами $1, 2, \dots, n$. Вони містять різні поживні речовини, позначені номерами $1, 2, \dots, m$ (вуглеводи, білки, жири, вітаміни, мікроелементи та ін.) Одиниця j -го продукту містить a_{ij} одиниць i -ої поживної речовини. Для нормальної життєдіяльності протягом визначеного проміжку часу потрібно вживати не менше b_i одиниць i -ої поживної речовини. Позначимо через c_j вартість одиниці харчового продукту j -го виду, $j = \overline{1, n}$. Потрібно вибрати раціон мінімальної вартості, що містить необхідну кількість поживних речовин. План задачі – це кількість x_j , $j = \overline{1, n}$ продуктів кожного виду, що забезпечують потрібну кількість поживних речовин при мінімальних витратах на вихідні продукти.

Діючи аналогічним чином, як в задачі про найкраще використання ресурсів, маємо наступну математичну модель:

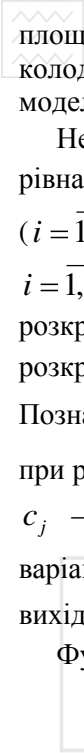
$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad (Л2.17)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (Л2.18)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (Л2.19)$$

Задача про розкрій матеріалів

Задача про оптимальний розкрій матеріалів полягає в розробці таких технологічно допустимих планів розкрою, при яких отримуються необхідний комплект заготовок, а відходи (по довжині,



площі, об'єму, масі та вартості) зводяться до мінімуму (прутів, труб, колод, профільного прокату). Розглянемо найпростішу математичну модель одновимірної задачі розкрою.

Нехай маємо N штук вихідного матеріалу, довжина кожної штуки рівна L . Потрібні заготовки m видів, довжини яких рівні l_i ($i = \overline{1, m}$). Відомі потреби в заготовках кожного виду i , які рівні b_i , $i = \overline{1, m}$. Вивчення питання розкрою (побудова технологічної карти розкрою) показує, що можна виділити n прийнятних варіантів розкрою вихідного матеріалу довжиною L на заготовки довжиною l_i . Позначимо через a_{ij} кількість заготовок i -го виду, що отримується при розкрої одиниці вихідного матеріалу за j -им ($j = \overline{1, n}$) варіантом, c_j – відходи при розкрої одиниці вихідного матеріалу за j -им варіантом. План задачі $\mathbf{x} = \{x_j\}_{j=1}^n$, де x_j – кількість одиниць вихідного матеріалу, що планується до розкрою за j -им варіантом.

Функція мети – мінімум відходів, отриманих при розкрої

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min \quad (Л2.20)$$

при обмеженнях на число одиниць вихідного матеріалу

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq N, \quad (Л2.21)$$

на задоволення асортиментного попиту споживачів

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (Л2.22)$$

та умови невід'ємності

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (Л2.23)$$

Задача про розміщення замовлення

Розглянемо задачу розподілу замовлення (завантаження взаємозамінних груп обладнання) між підприємствами (цехами, станками, виконавцями) з різними виробничими та технологічними характеристиками, але взаємозамінними в значенні виконання замовлення. Потрібно скласти план розміщення замовлення

(завантаження обладнання), при якому з наявними виробничими можливостями замовлення було б виконане, а показник ефективності досягав екстремального значення.

Нехай маємо m однорідних груп обладнання, на якому потрібно виконати замовлення на випуск n видів продукції в об'ємах x_j^* ($j = \overline{1, n}$) одиниць. Замовлення визначається набором x_j^* ($j = \overline{1, n}$), який встановлюється розв'язанням задачі про найкраще використання ресурсів, вивченням структури споживання. Потужність обладнання кожного виду обмежена, наприклад, фондом робочого часу T_i ($i = \overline{1, m}$). Продуктивність обладнання кожного виду задана коефіцієнтом a_{ij} , який показує, скільки одиниць продукції j -го виду можна виробити на i -му обладнанні за одиницю часу. Крім того, відомі коефіцієнти c_{ij} , які відображають витрати при виготовленні на i -му обладнанні за одиницю часу продукції j -го виду. Потрібно знайти план $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ розміщення замовлення (завантаження обладнання), тобто встановити, скільки часу i -та група обладнання буде зайнята виготовленням j -ої продукції.

Цільова функція (сумарні витрати на виконання замовлення)

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (Л2.24)$$

- за потужністю обладнання мінімізується при наступних обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq T_i, \quad (i = \overline{1, m}); \quad (Л2.25)$$

- якщо по деяких видах продукції допускається перевиконання плану, то

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \geq x_j^*, \quad (j = \overline{1, n_1}); \quad (Л2.26)$$

- для продукції, випуск якої повинен відповідати плану

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} = x_j^*, \quad (j = \overline{n_1 + 1, n_2}); \quad (Л2.27)$$



- для продукції, замовлення на яку приймається для більш повного завантаження обладнання

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \leq x_j^*, \quad (j = \overline{n_2 + 1, n}); \quad (Л2.28)$$

- умови невід’ємності впливають із практичного змісту змінних

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}). \quad (Л2.29)$$

Задачі (Л2.11)-(Л2.13), (Л2.14)-(Л2.16), (Л2.17)-(Л2.19), (Л2.20)-(Л2.23), (Л2.24)-(Л2.29) відносяться до задач лінійного програмування.

Приклад Л2.1. При годівлі тварин кожна тварина щоденно повинна отримувати не менше 60 одиниць поживної речовини А, не менше 50 одиниць речовини В та не менше 12 одиниць речовини С. Вказані поживні речовини містяться в трьох видах кормів. Вміст одиниць поживних речовин в 1 кг кожного із видів кормів наведено в наступній таблиці:

Національний університет
водного господарства та прибережжя
Таблиця Л2.1

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму виду		
	I	II	III
А	1	3	4
В	2	4	2
С	1	4	3

Скласти денний раціон, який забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин при мінімальних грошових витратах, якщо ціна 1 кг корму I-го виду складає 9 грн, корму II-го виду – 12 грн, і корму III-го виду – 10 грн.

Розв’язання. Складемо математичну модель даної задачі. Оскільки нам потрібно скласти денний раціон (тобто, скільки і яких видів кормів брати), то природно за змінні величини позначити:

x_1 – кількість кілограмів корму I-го виду, які входять в раціон;

x_2 – кількість кілограмів корму II-го виду, які входять в раціон;

x_3 – кількість кілограмів корму III-го виду, які входять в раціон.

Перше обмеження отримаємо з тієї умови, що тварина повинна отримувати не менше 60 одиниць поживної речовини А. Згідно



таблиці в x_1 кг корму I-го виду міститься $\left(\cdot x_1 \right)$ одиниць речовини А, в x_2 кг корму II-го виду – $3x_2$ одиниць речовини А, а в x_3 кг корму III-го виду – $4x_3$ одиниць речовини А. Тоді маємо

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60.$$

Наступні обмеження отримуємо з умов вмісту поживних речовин В та С:

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50,$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12.$$

Природно, що мають виконуватись також умови невід'ємності

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Умовою складання денного раціону є мінімальні грошові витрати. Тому цільова функція буде виражати затрати на їжу для тварин. Оскільки ми використовуємо x_1 кг корму I-го виду, а 1 кг корму даного виду коштує 9 грн, то загальні витрати на корм I-го виду будуть $9x_1$ грн. Повторюючи аналогічні міркування для кормів II та III видів, отримуємо функцію сумарних затрат $f = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3$. Отже, маємо наступну математичну модель даної задачі:

$$f = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12, \end{cases} \quad (Л2.30)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Знайдемо розв'язок задачі лінійного програмування (Л2.30).

1-й спосіб. Універсальним методом розв'язування ЗЛП є симплекс-метод та його модифікації. Для знаходження оптимального розв'язку ЗЛП (Л2.30) можна застосувати двоїстий симплекс-метод, попередньо звівши задачу (Л2.30) до канонічного вигляду

$$f = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 0 \cdot (x_4 + x_5 + x_6) \rightarrow 0,$$



$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 & = -60, \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_5 & = -50, \\ -x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_6 & = -12, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,6}.$$

2-й спосіб. ЗЛП досить легко розв'язуються за допомогою опції Поиск решения меню Сервис електронних таблиць Excel. Але при цьому потрібно знати початковий опорний план ЗЛП. Для ЗЛП (Л2.30) таким планом може бути $X_0 = (10;10;10)$.

Спочатку визначаємо комірки в Excel, які відповідають змінним x_1, x_2, x_3 і заносимо туди початкові дані. Нехай це будуть комірки B1, B2 та B3 (рис. Л2.1). В комірки D1, D2, D3 заносимо формули, які відповідають обмеженням ЗЛП (Л2.30). Наприклад, в комірку D1 записується формула $=B1+3*B2+4*B3$. В комірку B5 вносимо формулу, яка відповідає цільовій функції: $=9*B1+12*B2+10*B3$ (рис. Л2.1).

Для розв'язання поставленої задачі вибираємо в меню Сервис опцію Поиск решения і заповнюємо відповідне діалогове вікно. Для введення обмежень після встановлення курсору у відповідне поле потрібно натиснути кнопку Добавить. Заповнене вікно даної задачі показане на рис. Л2.2. Після заповнення всіх полів діалогового вікна натискаємо кнопку Выполнить. Якщо розв'язок знайдений, то в діалоговому вікні з'явиться відповідне повідомлення, а в комірках B1, B2 та B3 встановлюються значення, відповідні знайденому розв'язку. В нашому випадку $X_{\min} = (0;8;9)$. В комірку B5 занесеться мінімальне значення цільової функції. $f_{\min} = 186$.

Зауваження. Якщо в меню Сервис немає опції Поиск решения, то потрібно в меню Сервис зайти в підменю Надстройки і встановити прапорець біля опції Поиск решения.

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

Arial Cyr 10 Ж К Ч

E5

	A	B	C	D	E	F	G
1	x1=	10		80	>=	60	
2	x2=	10		80	>=	50	
3	x3=	10		80	>=	12	
4							
5	f=	310					
6							
7							
8							
9							

Рис. Л2.1.

Поиск решения

Установить целевую: \$B\$5

Равной: максимальному значению значению: 0 минимальному значению

Изменяя ячейки: \$B\$1:\$B\$3

Ограничения:

- \$B\$1 >= 0
- \$B\$2 >= 0
- \$B\$3 >= 0
- \$D\$1 >= \$F\$1
- \$D\$2 >= \$F\$2
- \$D\$3 >= \$F\$3

Кнопки: Выполнить, Закрывать, Параметры, Добавить, Изменить, Удалить, Восстановить, Справка

Рис. Л2.2.



Завдання для самостійної роботи

1. Для виготовлення сплаву із міді, олова та цинку в якості сировини використовують два сплави цих металів, які відрізняються складом та вартістю (табл. Л2.2)

Таблиця Л2.2

Компоненти сплаву	Вміст компонентів, %	
	Сплав №=1	Сплав №=2
Мідь	10	10
Олово	10	30
Цинк	80	60
Вартість 1 кг	4	6

Сплав, який отримується, повинен містити не більше 2 кг міді, не менше 3 кг олова, а вміст цинку може складати від 7,2 до 12,8 кг. Визначити необхідну кількість сплавів кожного виду, що забезпечує отримання нового сплаву з мінімальними затратами на сировину.

2. Механічний цех може виготовити за зміну 600 деталей №=1 або 1200 деталей №=2. Виробнича потужність термічного цеху, до якого ці деталі надходять на термообробку в той же день, дозволяє обробити за зміну 1200 деталей №=1 або 800 деталей №=2. Ціни на деталі однакові. Визначити щоденну робочу програму випуску деталей, яка максимізує товарну продукцію підприємства, якщо обидва цехи працюють одну зміну.
3. Нафтопереробний завод отримує 4 напівфабрикати: 400 тис. л алкилата, 250 тис. л крекінг-бензину, 350 тис. л бензину прямої перегонки та 100 тис. л ізопентану. В результаті змішування цих 4 компонентів в різних пропорціях утворюється три сорти авіаційного бензину: бензин А(2:3:5:2), бензин В(3:1:2:1), бензин С(2:2:1:3). Вартість 1 тис. л бензину кожного сорту дорівнює 1200 грн, 1000 грн та 1500 грн, відповідно. Визначити план виробництва бензинів, при якому буде досягнута максимальна вартість всієї продукції.

4. Для виготовлення двох видів виробів A_1 та A_2 завод використовує в якості сировини алюміній та мідь. На виготовленні виробів зайняті токарні та фрезерні станки (табл. Л2.3). Визначити план виробництва для досягнення максимального прибутку.

Таблиця Л2.3

Види ресурсів	Об'єм ресурсів	Норми витрат на один виріб	
		A_1	A_2
Алюміній (кг)	570	10	70
Мідь (кг)	420	20	50
Токарні станки (год)	5600	300	400
Фрезерні станки (год)	3400	200	100
Прибуток на 1 виріб (тис. грн)		3	8

5. З пункту А в пункт В щоденно відправляються пасажирські та швидкі поїзди. В табл. Л2.4 вказано кількість вагонів різних типів з яких щоденно можна комплектувати поїзди і число пасажирів, на які розраховані вагони. Визначити оптимальне число швидких та пасажирських поїздів, при якому кількість перевезених пасажирів буде максимальною.

Таблиця Л2.4

Вагон	Парк вагонів	Поїзд		Число пасажирів
		швидкий	пасажирський	
багажний	12	1	1	-
поштовий	18	1	-	-
загальний	89	5	8	58
купейний	79	6	4	40
м'який	35	4	2	32

6. Авіакомпанія для організації пасажирських перевезень між центром Ц та трьома містами M_1 , M_2 , M_3 має три групи літаків. Кількість пасажирів (тис.чоловік), яка перевозиться одним літаком певного типу по кожному маршруту за 1 місяць і пов'язані з цим експлуатаційні витрати на 1 літак (тис. грн) вказані в табл. Л2.5. Кількість пасажирів, яку потрібно перевезти по кожному маршруту в місяць, складає відповідно 40, 50, 30 тис. чоловік, а



вартість одного квитка рівна 20, 15, 18 гривень. Розподілити літаки по маршрутах виходячи з умов досягнення максимального прибутку.

Таблиця Л2.5

Тип літака	Кількість пасажирів/експлуат. витрати			Кількість літаків
	Ц-Г ₁	Ц-Г ₂	Ц-Г ₃	
I	1.6/1.2	3.0/0.8	1.9/1.5	10
II	2.0/1.4	2.5/1.5	1.7/2.0	25
III	2.5/1.0	1.8/1.1	2.0/1.8	40

7. Три механізми I, II, III можуть виконувати три види земляних робіт (табл. Л2.6). Визначити оптимальне завантаження механізмів при умові виконання максимального сумарного об'єму робіт.

Таблиця Л2.6

Механізми	Продуктивність, м ³ /год			Ресурс часу
	A	B	C	
I	30	20	40	400
II	20	30	50	300
III	60	40	20	280

8. Для виготовлення трьох видів виробів A, B та C використовується чотири види обладнання. Затрати часу на обробку одного виробу для кожного із видів обладнання вказані в табл. Л2.7. Скласти такий план випуску продукції, щоб прибуток був максимальним.

Таблиця Л2.7

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виробу виду (станок-год)			Загальний фонд робочого часу обладнання (год)
	A	B	C	
фрезерне	2	4	5	120
токарне	1	8	6	280
зварне	7	4	5	240
шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток (грн)	10	14	12	

9. В районі виділено три групи господарств, в яких для підвищення водозабезпеченості зрошувальних земель можуть проводитись різні водогосподарські заходи. При відомих обмеженнях на водні ресурси (табл. Л2.8) потрібно забезпечити максимальний прибуток в цілому по районі при проведенні водогосподарських заходів.

Таблиця Л2.8

Групи господарств	Витрати води на проведення водогосподарських заходів				Об'єм ресурсів води, м ³
	Меліоративне покращення земель	Капітальне планування земель	Впровадження нової поливної техніки	Реконструкція зрошувальної системи	
I	1000	1300	1200	1400	10 ⁷
II	400	800	900	1200	6·10 ⁶
III	500	400	700	800	12·10 ⁶
Прибуток з 1 га земель	1100	1200	1400	800	

10. На підприємство надійшла партія із 400 листів фанери. Із них виготовляють комплекти, які включають 4 деталі 1-го типу, 3 деталі 2-го типу та 2 деталі 3-го типу. Один лист фанери кожної партії може розрізатися трьома способами R_1 , R_2 та R_3 . Кількість деталей кожного типу, яка отримується при розрізанні одного листа по тому чи іншому способу подана в таблиці Л2.9. Потрібно розрізати матеріал так, щоб отримати максимальну кількість комплектів.

Таблиця Л2.9

Тип деталі	Кількість деталей, шт		
	R_1	R_2	R_3
1	0	6	9
2	5	3	4
3	12	14	0

11. Підприємство може працювати за п'ятьма технологічними процесами (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5), причому кількість одиниць продукції, яка виготовляється за різними технологічними процесами за 1 од. часу відповідно дорівнює 300, 260, 320, 400 та 450 шт. В процесі виробництва враховуються чотири виробничі фактори. Витрата відповідних факторів при роботі за різними технологічними процесами на протязі 1 од. часу вказані в табл. Л2.10. Скласти план оптимального випуску продукції.

Таблиця Л2.10

Виробничі фактори	Витрати за різними технологіями					Ліміт
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
Сировина	15	20	12	14	18	2000
Електроенергія	0,2	0,3	0,15	0,25	0,3	300
Накладні витрати	4	5	6	3	2	1000
Зарплата	6	3	4	6	3	1600

12. Продукцією міського молочного заводу є молоко, кефір та сметана. На виробництво 1т молока, кефіру та сметани потрібно відповідно 1010, 1010 та 9450 кг молока. Затрати робочого часу при розфасовці 1 т молока та кефіру складають 0,18 та 0,19 машино-годин. На розфасовці 1 т сметани зайняті спеціальні автомати на протязі 3,25 год. Всього для виробництва продукції завод може використати 136000 кг молока. Основне обладнання може бути зайняте на протязі 21,4 машино-годин, а автомати по розфасовці сметани – на протязі 16,25 год. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру та сметани відповідно дорівнює 30, 22 та 136 грн. Завод повинен щоденно виробляти не менше 100 т розфасованого молока. Скласти план випуску продукції, щоб прибуток був максимальний.
13. Меблева фабрика виготовляє столи, стільці, серванти та книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два типи дошок, причому фабрика має в наявності 1500 м дошок I типу та 1000 м дошок II типу. Трудові ресурси – 800 людино-годин. В табл. Л2.11 приведено нормативні затрати кожного з видів ресурсів на виготовлення одиниці виробу та прибуток за 1 виріб.



Таблиця Л2.11

Вироби Ресурси	Витрати на 1 од. виробу			
	стілці	столи	серванти	книжкові шафи
дошки I типу, м	5	1	9	12
дошки II типу, м	2	3	4	1
труд. ресурси, людино-година	3	2	5	10
прибуток, грн/шт	12	5	15	10

Визначити оптимальний асортимент, максимізуєючи прибуток. Причому столів має бути не менше 40, стільців – не менше 130, сервантів – не менше 30, книжкових шаф – не більше 10.

14. Обладнання фабрики дозволяє виготовляти фруктові компоти в трьох видах тари: скляній в кількості 10 ц, жерстяній в кількості 8 ц та поліетиленовій в кількості 5 ц. Знайти програму роботи підприємства, максимізуєючи прибуток, якщо собівартість 1 ц компоту складає: в скляній тарі – 16 грн, в жерстяній – 10 грн, а в поліетиленовій – 16 грн. Відпускна ціна незалежно від тари складає 40 грн за 1 ц.

15. При складанні добового раціону годування худоби можна використовувати свіже сіно (не більше 50 кг) та силос (не більше 85 кг). Раціон повинен володіти певною поживністю (число кормових одиниць не менше 30) та містити поживні речовини: білок (не менше 1 кг), кальцій (не менше 100 г) та фосфор (не менше 80 г). В таблиці Л2.12 наведені дані про вміст кожного з компонентів в 1 кг кожного продукту та собівартість (грн/кг) цих продуктів. Визначити оптимальний раціон за умов мінімуму собівартості.

Таблиця Л2.12

Компоненти Продукти	Кількість кормових одиниць	Білок г/кг	Кальцій г/кг	Фосфор г/кг	Собівартість грн/кг
Сіно	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

16. Для виготовлення брусків трьох розмірів 0,6 м; 1,5 м; 2,5 м на розпилювання надходять колоди довжиною 3 м та 2 м у кількості 400 шт. та 500 шт. Визначити план розпилювання, який забезпечує мінімальну кількість відходів при умові, що брусків 2-го типу має бути не менше 600 шт., а 3-го типу не менше 300 шт.

17. Ферма складає раціон кормління корів на зиму. Є два науково розроблених раціони А та В та довільний раціон С, наступних складів:

Таблиця Л2.13

А	не менше 40% кукурудзяного силосу, не більше 40% кормових трав
В	не менше 30% кукурудзяного силосу, не більше 50% кормових трав
С	корм без обмежень

Силосу є 200 ц, а кормових трав 300 ц. Яку кількість кожного із раціонів повинна скласти ферма, щоб отримати максимальний прибуток, якщо при раціоні А він складає 10 грн/ц, при раціоні В – 12 грн/ц, при довільному раціоні 5 грн/ц.

18. Підприємство використовує ресурси сировини, робочої сили та обладнання, які необхідні для виробництва будь-якого із чотирьох видів товару. Затрати ресурсів на виготовлення одиниці даного виду товару, прибутки, а також запаси ресурсів вказані в наступній таблиці:

Таблиця Л2.14

Вид товару	1	2	3	4	Об'єм ресурсів
Вид ресурсу					
Сировина, кг	3	5	2	4	60
Робоча сила, год	22	14	18	30	400
Обладнання, станко-год	10	14	8	16	128
Прибуток на одиницю товару, грн	30	25	56	48	



Який асортимент товару потрібно виготовляти, щоб прибуток був максимальним, при умові що 1-го товару випускати не більше 5-ти одиниць, 2-го – не менше 8-ми одиниць, а 3-го та 4-го у відношенні 1:2.

19. Для кормління піддослідної тварини потрібно давати щоденно не менше 15 од. вітаміну A_1 та 15 од. вітаміну A_2 . Не маючи можливості давати вітаміни A_1 та A_2 в чистому вигляді, можна купувати корм B_1 по 1 грн або B_2 по 3 грн за 1 кг, причому кожен кілограм B_1 містить 1 од. A_1 та 5 од. A_2 , а кілограм B_2 – 5 од. A_1 та 1 од. A_2 . Визначити оптимальний вміст кормів B_1 та B_2 в щоденному раціоні.
20. Здійснити розрізування 5-метрових колод на бруски розміром 1,5; 2,4; та 3,2 м у відношенні 2:3:5 так, щоб мінімізувати загальну величину відходів. Всього кількість колод є 100 шт.
21. Тканина трьох артикулів виготовляється на ткацьких станках двох типів з різною продуктивністю. Для виготовлення тканини використовується вовна та фарба. В наступній таблиці вказано потужність станків (в тис. станко-год), ресурси вовни та фарб (в тис. кг), потужність станків по кожному з видів вовни (в м/год), норми витрат вовни та фарби (в кг на 1000 м) та ціна (в грн) 1 м тканини:

Таблиця Л2.15

Види ресурсів	Об'єм ресурсів	Потужність та норми витрат		
		1	2	3
Станки I типу	30	20	10	25
Станки II типу	45	8	20	10
Вовна	30 тис. кг	120 кг	180 кг	210 кг
Фарба	1	10	5	8
Ціна		15	15	20

Визначити, який метраж тканин кожного артикулу може випустити фабрика при умові максимізації прибутку, якщо тканини 1-го артикулу має бути не менше 500 м.

22. Механічний завод при виготовленні трьох різних типів деталей використовує токарні, фрезерні та стругальні станки. При цьому обробку кожної деталі можна вести трьома різними технологічними способами. В наступній таблиці показано ресурси (в станко-годинах) кожної групи станків, норми витрат часу при обробці деталі на відповідному станку по даному технологічному способу та прибутки від випуску одиниці деталі кожного виду:

Таблиця Л2.16

Деталі		I			II			III			Ресурс часу
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	
Станки	Токарний	0,4	0,9	-	0,5	0,3	-	0,7	-	0,9	250
	Фрезерний	0,5	-	-	0,6	0,2	0,5	0,3	1,4	-	450
	Стругальний	0,3	0,5	-	0,4	1,5	0,3	-	1,0	0,5	600
Прибуток		12			18			30			

Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток.

23. У вугільному басейні видобувається вугілля трьох сортів у відносних долях 20%, 60%, 15%. Видобуте вугілля постачається чотирьом енергетичним установкам. Задані теплотвірні здатності кожного з сортів палива (в ккал/кг): 2800, 3000, 3500; потреби установок (в млн. ккал): 10, 25, 15, 30 та затрати по видобуванні 1 т кожного сорту вугілля (в грн): 8, 10, 15. Визначити необхідний об'єм видобутку та розподіл різних сортів вугілля між енергетичними установками із умови мінімізації сумарних затрат.
24. Для контролю за роботою космічної ракети використовуються 4 види датчиків, які розміщені на ракеті і результати вимірів яких реєструються трьома типами наземних реєстраторів-самописців. Кожен датчик визначає одну із характеристик (температуру, тиск і т. д.) і передає результати по окремому каналу зв'язку на будь-який самописець. В наступній таблиці вказано чисельність датчиків та самописців, а також час, який витрачається на ввімкнення відповідного каналу зв'язку:



Датчики	20	40	50	40
Самописці				
70	2	1	5	3
90	3	2	3	4
60	3	4	1	2

Визначити оптимальне закріплення датчиків до реєструючих пристроїв, при якому досягається мінімум сумарних затрат часу на ввімкнення каналів.

25. Кондитерська фабрика випускає два види шоколаду: «Молочний» та «Особливий». Для виготовлення 1 т шоколаду «Молочний» необхідно 0,5 т цукру, 0,35 т масла-какао та 0,15 т знежиреної маси какао-бобів. Для виробництва 1 т шоколаду «Особливий» відповідно – 0,55 т, 0,4 т та 0,05 т. Місячний запас цукру на фабриці – 220 т, масла-какао – 210 т, знежиреної маси какао-бобів – 45 т. Договірна ціна 1 т шоколаду «Молочний» – 25 000 грн., шоколаду «Особливий» – 35 000 грн. Побудувати такий план випуску фабрикою шоколаду «Молочний» і «Особливий» за місячний період діяльності, щоб отримати найбільший дохід.
26. Фірма випускає радіоприймачі трьох різних моделей А, В, С. Кожний виріб вказаних моделей дає прибуток у розмірі 40, 75 і 125 грн. відповідно. Кожна модель характеризується певним часом, необхідним для виготовлення відповідних деталей, складання виробу і його пакування. На 10 приймачів моделі А потрібно 3 години для виготовлення деталей, 4 години на складання і 1 годину на пакування. Відповідні показники для 10 приймачів моделі В – 3,5; 5 і 1,5 год., а для 10 приймачів моделі С – 5; 8 і 3 год. Протягом тижня фірма може затратити на виробництво радіодеталей 150 год., на складання – 200 год. і на пакування – 60 год. Побудувати план випуску приймачів за тиждень, який би забезпечував найбільший прибуток.
27. Хутрова фабрика закуповує рибу трьох видів для годівлі норок. Кожний вид риби має різну кількість поживних компонентів А, В, С, D. Виробничо-економічні показники і всі обмеження подані в таблиці Л2.18.



Поживні компоненти	Одиниця ваги, кг			Мінімальні сумарні потреби на плановий період, кг
	I вид риби	II вид риби	III вид риби	
A	3	4	8	1300
B	2	2	0	300
C	4	3	0	800
D	0,7	0,5	1	250
Витрати в розрахунку на одиницю ваги, грн.	90	80	120	

Скласти оптимальну виробничу програму діяльності фабрики, щоб витрати були мінімальними.

28. Із чотирьох видів основних матеріалів (мідь, цинк, свинець, нікель) виготовляють три види сплавів латуні: звичайні, спеціальні і для художніх виробів. Ціни 1 кг міді, цинку, свинцю та нікелю складають відповідно 8 грн, 6 грн, 4 грн, та 10 грн, а 1 кг сплаву, відповідно, 20грн, 30 грн, 40 грн. Сплав для художніх виробів повинен містити не менше 6% нікелю, не менше 50% міді і не більше 30% свинцю; спеціальний – не менше 4% нікелю, не менше 70% міді, не менше 10% цинку та не більше 20% свинцю. В звичайний сплав компоненти можуть входити без обмежень. Виробнича потужність підприємства дозволяє виготовляти не більше 400 кг звичайного сплаву, не більше 700 кг спеціального сплаву і не більше 100 кг декоративного сплаву. Знайти виробничий план, який забезпечує максимальний прибуток.
29. Фірма, що спеціалізується на виробництві заморожених харчових напівфабрикатів, випускає три різні продукти P_1 , P_2 , P_3 , кожний з яких отримують певною переробкою картоплі і який підлягає відповідному упакуванню. Фірма закуповує картоплю у двох різних постачальників. Відповідні показники виходу готової продукції з однієї тонни картоплі наведені в наступній таблиці:



Таблиця Л2.19

Продукт	Постачальник 1	Постачальник 2	Максимальний обсяг готової продукції, т
P_1 , т	0,2	0,3	1,8
P_2 , т	0,2	0,1	1,2
P_3 , т	0,3	0,3	2,4
Відносний прибуток, ум. од.	5	6	

З таблиці випливає, що з 1 т картоплі постачальника 1 можна виготовити по 0,2 т продуктів P_1 і P_2 і 0,3 т продукту P_3 , відходи становлять 0,3 т. Аналогічно з постачальником 2. Яку кількість картоплі треба купити в кожного з постачальників, щоб відносний прибуток був максимальним?

30. Транспортна компанія забезпечує перевезення нафтопродуктів від нафтоперегонного заводу А до трьох міст В, С, D, використовуючи для перевезення 20 п'ятитонних і 15 десятитонних вантажних автомобілів. Обсяг перевезень нафтопродуктів за один місяць до цих міст становить відповідно 400, 500 і 600 тонн. Кількість нафтопродуктів (у тоннах), які за один місяць може перевезти один автомобіль кожного типу на кожному маршруті і експлуатаційні витрати (в тис. грн.) на обслуговування автомобіля подано в наступній таблиці:

Таблиця Л2.20

Автомобіль	Кількість нафтопродуктів / Експлуатаційні витрати		
	А / В	А / С	А / D
5-тонний	50 / 1,0	25 / 2,0	40 / 1,5
10-тонний	80 / 1,5	50 / 3,0	60 / 2,5

За перевезення кожної тонни нафтопродуктів на трьох маршрутах замовники оплачують компанії відповідно по 120, 180 і 150 грн. Як потрібно спланувати перевезення, щоб транспортна компанія отримала найбільший прибуток за місяць, якщо кожен автомобіль повинен бути закріплений за вибраним маршрутом постійно?



РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РУХУ РІДИН В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

ТЕМА 5. ПОРИСТІ СЕРЕДОВИЩА ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Базові поняття: пористе середовище, пористість, коефіцієнт пористості, нормальні напруження, дотичні напруження, коефіцієнт ущільнення, ґрунт

§5.1. Пористість та коефіцієнт пористості

Будемо розглядати пористе середовище, яке складається з твердих частинок – скелет пористого середовища, а також з пор. Під порами будемо розуміти пустоти, які утворюються внаслідок нещільного прилягання твердих частинок. Пори можуть бути заповнені газом (в найпростішому випадку повітрям) або поровою рідиною (в найпростішому випадку водою) (рис. 5.1).

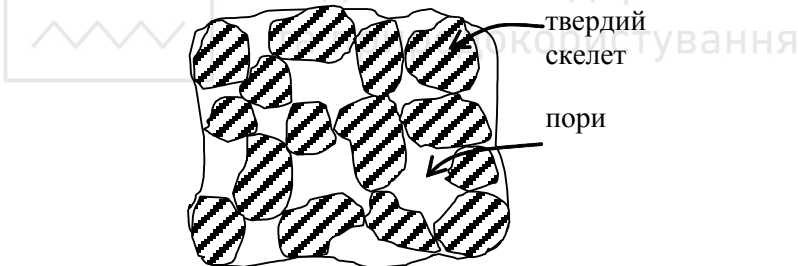


Рис. 5.1. Фрагмент пористого середовища

Виділимо в пористому середовищі деякий фрагмент об'ємом V . В розглядуваному об'ємі V можна виділити об'єм V_T , який зайнятий твердими частинками, та об'єм пор V_n . Отже,

$$V = V_T + V_n.$$

Означення 5.1. *Пористістю n* пористого середовища називається відношення об'єму пор V_n до всього об'єму V виділеного фрагменту

$$n = \frac{V_n}{V}.$$

Зрозуміло, що пористість дорівнює об'єму пор в одиниці об'єму пористого середовища. Пористість є безрозмірною величиною і лежить в межах від 0 до 1.

Будь-яка точка (x_1, x_2, x_3) пористого середовища фізично може знаходитись або всередині деякої твердої частинки, або в порі, або на поверхні твердої частинки. Однак, для математичного моделювання процесів в пористих середовищах доводиться осереднювати характеристики цього середовища. Тобто, кожна точка (x_1, x_2, x_3) пористого середовища, незалежно від того, куди вона фізично попадає, характеризується пористістю $n(x_1, x_2, x_3)$. Це означає, що всі характеристики, і пористість в тому числі, пористого середовища приймаються неперервними функціями. Тобто ці характеристики є ніби “розмитими” по всьому пористому середовищі. Приймаючи до уваги час t , пористість n є функцією просторових змінних (x_1, x_2, x_3) та змінної t .

Аналогічно вводиться безрозмірна величина m , яка дорівнює відношенню об'єму твердих частинок до всього об'єму V

$$m = \frac{V_T}{V}.$$

Вона дорівнює об'єму твердих частинок в одиниці об'єму пористого середовища. Терміну для позначення величини m в науковій літературі не зустрічається.

Маємо

$$n + m = \frac{V_n}{V} + \frac{V_T}{V} = \frac{V_n + V_T}{V} = \frac{V}{V} = 1,$$

отже,

$$n + m = 1.$$

В подальших викладках нам буде потрібна ще одна величина – коефіцієнт пористості.

Означення 5.2. **Коефіцієнтом пористості** e називається відношення об'єму пор V_n до об'єму скелету (твердих частинок) V_T пористого середовища

$$e = \frac{V_n}{V_T}.$$

Тоді маємо



$$n = \frac{V_n}{V} = \frac{V_n}{V_n + V_T} = \frac{V_n/V_T}{V_n/V_T + 1} = \frac{e}{e+1},$$
$$m = 1 - n = 1 - \frac{e}{e+1} = \frac{e+1-e}{e+1} = \frac{1}{e+1}.$$

Отже,

$$n = \frac{e}{e+1}, \quad m = \frac{1}{e+1}.$$

§5.2. Напруження в суцільних середовищах

Викладки даного пункту зробимо згідно підручника [23].

Якщо на тверде тіло діють поверхневі та об'ємні сили, то в перерізі даного тіла на довільно орієнтованій нескінченно малій площадці площею S з нормаллю \vec{n} діє вектор напружень \vec{P}_n

$$\vec{P}_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{S},$$

де \vec{F} – вектор внутрішньої сили в розглядуваному перерізі даного тіла на елементарній площадці S .

Крім напруження в довільній точці твердого тіла потрібно знати і орієнтацію цього напруження в просторі. В зв'язку з цим замість повного напруження зручніше розглядати його складові по координатних осях X_n , Y_n , Z_n . У перерізах, паралельних координатних площинам, індекс n можна замінити на індекс координатної осі, нормальної до перерізу. Наприклад, у перерізі площини, яка паралельна координатній площині yOz (рис. 5.2), зовнішня нормаль площадки S збігається за напрямом із координатною віссю x , і складові повного напруження відповідно будуть X_x , Y_x , Z_x . Складову, напрямлену ортогонально до розглядуваного перерізу, називають **нормальним напруженням**, а складові Y_x , Z_x , що лежать у площині перерізу, – **дотичними напруженнями**. Аналогічно Y_y – нормальне напруження, X_y , Z_y – дотичні напруження (рис. 5.3); Z_z – нормальне напруження, X_z , Y_z – дотичні напруження (рис. 5.4).



Національний університет
водного господарства
та природокористування

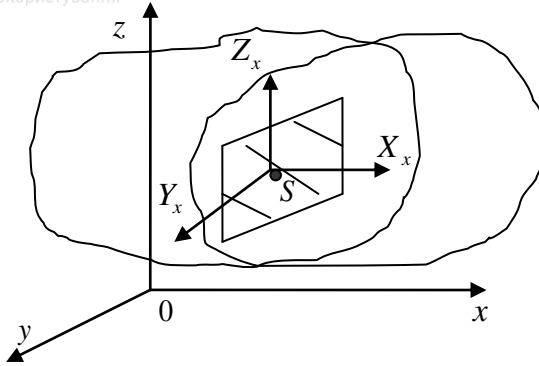


Рис. 5.2. Переріз, паралельний площині yOz



Національний університет
водного господарства
та природокористування

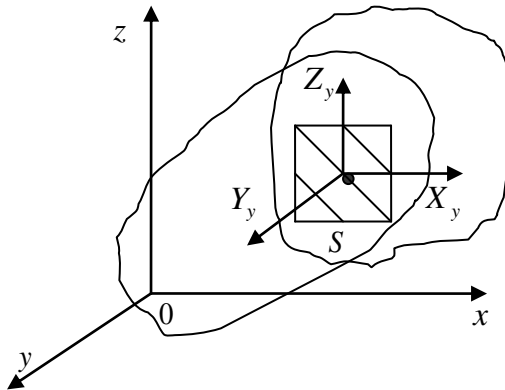


Рис. 5.3. Переріз, паралельний площині xOz

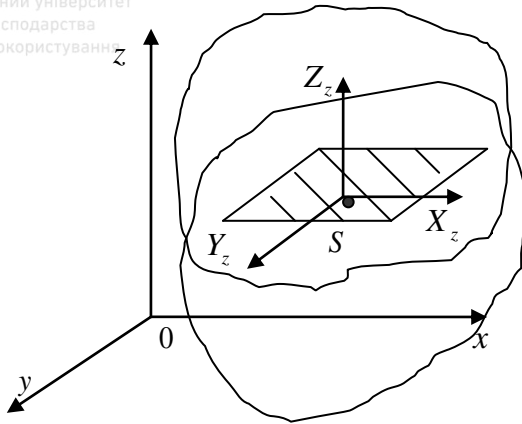


Рис. 5.4 Переріз, паралельний площині xOz

Отже, з дев'яти складових напружень в заданій точці три складові називаються нормальними напруженнями X_x, Y_y, Z_z , а шість складових – дотичними напруженнями $X_y, Y_x, Z_y, Y_z, Z_x, X_z$. Часто використовують й інші позначення компонентів напружень у точці, які наведено в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1. Позначення компонент напружень

Варіант позначення компонента напружень	Компонент напружень								
	X_x	Y_y	Z_z	X_y	Y_x	Z_y	X_z	Y_z	Z_x
І	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}	τ_{xy}	τ_{yx}	τ_{zy}	τ_{xz}	τ_{yz}	τ_{zx}
ІІ	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	σ_{12}	σ_{21}	σ_{32}	σ_{13}	σ_{23}	σ_{31}

Закон парності дотичних напружень стверджує, що на двох взаємно ортогональних площадках, які проходять через дану точку, виконуються рівності $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

Отже, з дев'яти компонентів напружень невідомими є лише шість. Тобто, напружений стан у точці твердого деформівного тіла в



$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

§5.3. Напруження в пористих середовищах

Для описання напружено-деформівного стану багатофазного пористого середовища (тверді частинки – тверда фаза; порова рідина – рідка фаза; газ – газоподібна фаза) використовується принцип ефективних напружень Терцагі-Флоріна. Принагідно потрібно відмітити, що, взагалі кажучи, цей принцип є гіпотезою, яка для ґрунтів в більшості випадків є справедливою, однак існують і винятки [41].

Згідно принципу ефективних напружень, загальне (тотальне) напруження в багатофазному пористому середовищі може бути подане у вигляді суми, яка складається із напружень, які діють в скелеті середовища (так звані ефективні напруження), та тиску в поровій рідині. Тобто,

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^e + p,$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^e + p,$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^e + p,$$

де σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} – тотальні напруження в пористому середовищі; σ_{xx}^e , σ_{yy}^e , σ_{zz}^e – напруження в скелеті пористого середовища (ефективні напруження); p – тиск в поровій рідині пористого середовища.

§5.4. Компресійні залежності для ґрунтів

Одним із природних пористих середовищ є ґрунти. Під впливом зовнішніх навантажень або власної ваги ґрунту відбувається його ущільнення (консолідація). Якщо припустити, що стиснення відбувається лише за рахунок зміни об'єму пор ґрунту, то можна встановити залежність (рис. 5.5)

$$e = e(\sigma^e),$$



де e – коефіцієнт пористості; $\sigma^e = \sigma_{xx}^e + \sigma_{yy}^e + \sigma_{zz}^e$ – сума головних напружень в скелеті пористого середовища.

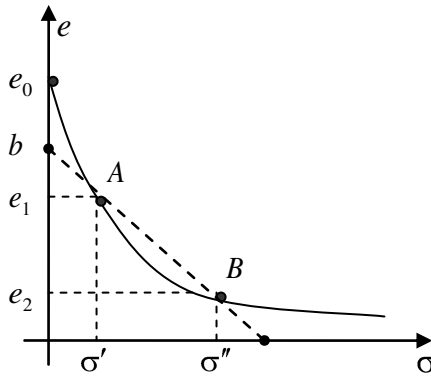


Рис. 5.5. Компресійна залежність для ґрунтів

Зрозуміло, що така залежність є нелінійною. Однак, у випадку невеликого діапазону зміни напружень σ , компресійну криву можна замінити лінійною залежністю (відрізок AB на рис. 5.5). Тоді залежність $e = e(\sigma)$ набуває вигляду

$$e = -a\sigma_{zz}^e + b, \quad (5.1)$$

де $a = const$, $b = const$ – параметри лінійної залежності. Коефіцієнт a називається **коефіцієнтом ущільнення (стиснення) ґрунту**.

Тепер пояснимо, чому в правій частині (5.1) стоїть напруження σ_{zz}^e , а не сума головних напружень σ^e . Залежність (5.1) встановлюється експериментальним шляхом в лабораторних умовах за результатами досліджень ґрунту в компресійних пристроях [13]. В даних пристроях є можливість визначити лише напруження σ_{zz}^e . Зрозуміло, що при розв'язуванні прикладних задач зручнішою є залежність e саме від суми головних напружень σ^e . Тому вводять в розгляд так званий коефіцієнт бічного тиску ξ , який показує відношення поперечних стискуючих напружень до повздовжніх

$$\xi = \frac{\sigma_{xx}^e}{\sigma_{zz}^e} = \frac{\sigma_{yy}^e}{\sigma_{zz}^e}$$

або



$$\sigma_{xx}^e = \xi \sigma_{zz}^e, \quad \sigma_{yy}^e = \xi \sigma_{zz}^e.$$

Коефіцієнт ξ в основному визначається дослідженнями ґрунту в стабілометрах – пристроях трьохосного стиснення [13]. Тоді

1) для одновимірного випадку маємо $\sigma^e = \sigma_{zz}^e$ і залежність (5.1) перетворюється в

$$e = -a\sigma^e + b; \quad (5.2)$$

2) для двовимірної задачі

$$\sigma^e = \sigma_{xx}^e + \sigma_{zz}^e,$$

$$\sigma^e = \xi \sigma_{zz}^e + \sigma_{zz}^e,$$

$$\sigma_{zz}^e = \frac{\sigma^e}{1 + \xi}$$

і залежність (5.1) набуває вигляду

$$e = -\frac{a}{1 + \xi} \sigma^e + b; \quad (5.3)$$

3) для тривимірної задачі

$$\sigma^e = \sigma_{xx}^e + \sigma_{yy}^e + \sigma_{zz}^e,$$

$$\sigma^e = \xi \sigma_{zz}^e + \xi \sigma_{zz}^e + \sigma_{zz}^e,$$

$$\sigma^e = (1 + 2\xi) \sigma_{zz}^e,$$

$$\sigma_{zz}^e = \frac{\sigma^e}{1 + 2\xi}$$

і залежність (5.1) набуває вигляду

$$e = -\frac{a}{1 + 2\xi} \sigma^e + b. \quad (5.4)$$

Залежності (5.2) – (5.4) можна об'єднати в одну

$$e = -\frac{a}{1 + (r-1)\xi} \sigma^e + b, \quad (5.5)$$

де r – розмірність задачі.

§5.5. Класифікація ґрунтів

Як вказувалось в попередньому параграфі, серед природних пористих середовищ одними із найпоширеніших є ґрунти. Ґрунти поділяють на скельні та нескельні, або рихлі. Нескельні ґрунти

утворюються шляхом руйнування скельних порід. Вони утворюють ґрунти двох основних видів: ґрунти типу пісків (незв'язні) і типу глин (зв'язні).

Пісок в сухому стані являє собою сипуче тіло, а зв'язність глини може бути настільки великою, що при її розробці використовують вибухові роботи. Причиною цього є форма частинок пісків та глин. Піски мають форму зерен, які близькі до кубічної або округлої форми, а глинисті частинки мають форму пластинок.

Площа поверхні частинок глин значно більша ніж в пісків (в 1 см^3 глини площа поверхні частинок $\approx 200\text{ м}^2$). Проміжне положення між глинами та пісками займають супіски та суглинки.

Згідно [13] за основу класифікації видів ґрунтів по їх гранулометричному складу приймається вміст глинистих частинок (у відсотках від загальної маси). Така класифікація наведена в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2. Класифікація ґрунтів за вмістом глинистих частинок

Вид ґрунту	Відсотковий вміст глинистих частинок
пісок	$< 3\%$
супісок	$3\% \dots 10\%$
суглинок	$10\% \dots 30\%$
глина	$> 30\%$

В таблиці 5.3 наведено класифікацію великоуламкових та піщаних ґрунтів. В глинистих частинок розміри менші за $0,005\text{ мм}$.

Більш детальна класифікація наведена в підручнику [9].



Таблиця 5.3. Класифікація ґрунтів за розміром частинок

Види великоуламкових та піщаних ґрунтів	Характерний розмір частинок, мм	Вміст частинок, які більші характерного розміру (% по масі)
Великоуламкові: валунний (бриловий)	200	> 50
галечний (щербенистий)	10	> 50
гравійний	2	> 50
Піщані: пісок гравелистий	2	> 25
пісок крупний	0,5	> 50
пісок середньої крупності	0,25	> 50
пісок дрібний	0,1	> 75
пісок пилуватий	0,1	< 75

В наступній таблиці наведені значення пористості деяких ґрунтів [17]:

Таблиця 5.4. Пористість ґрунтів

Ґрунт	<i>n</i>
Гравій (діаметр частинок від 2 до 200 мм)	0,3 – 0,4
Пісок (діаметр від 0,05 до 2 мм)	0,3 – 0,45
Супісок	0,35 – 0,45
Суглинок	0,35 – 0,50
Глина	0,40 – 0,55

Питання для самоконтролю

1. Що називається пористістю пористого середовища?
2. Чи може пористість пористого середовища бути більшою за 1? Якщо так, то в яких випадках? Відповідь пояснити.
3. Під коефіцієнтом пористості розуміють...
4. Сформулюйте закон парності дотичних напружень.
5. В чому полягає принцип ефективних напружень Терцагі-Флоріна?
6. Коефіцієнтом ущільнення називається...
7. Що покладено в основу класифікації ґрунтів?

ТЕМА 6. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Базові поняття: напір, п'єзометричний напір, швидкість фільтрації, коефіцієнт фільтрації, закон Дарсі, умова непроникності, дренажна межа

§6.1. Швидкість фільтрації. Закон Дарсі. Коефіцієнт фільтрації

Будемо розглядати пористе середовище, в якому пори повністю заповнені рідиною (в найпростішому випадку – водою). Такі середовища відносяться до повністю насичених. Процес руху рідини в повністю насичених пористих середовищах називається фільтрацією.

В поровій рідині є певний тиск p , який називається гідростатичним і не залежить від напрямку. В насичених пористих середовищах $p \geq p_a$, де p_a – атмосферний тиск. Як правило, в розрахунках покладають $p_a = 0$ і приймають його за точку відліку. Однак, тиск в рідині змінюється з висотою. Очевидно, що зі збільшенням глибини тиск в поровій рідині зростає, оскільки, в найпростішому випадку, зростає вага рідини, яка знаходиться вище. Тому інколи буває незручно працювати з функцією тиску, яка залежить від висоти. Щоб оперувати з величиною, яка не залежить від висоти, вводять напірну функцію h .

Означення 6.1. **Напіром** називається наступна функція:

$$h = \frac{1}{g} \int_0^p \frac{d\xi}{\rho(\xi)} \pm x_3, \quad (6.1)$$

g – прискорення вільного падіння;

ρ – густина порової рідини, яка залежить від тиску;

“+” – коли вісь x_3 направлена вгору;

“-” – коли вісь x_3 направлена вниз.

Якщо припустити, що $\rho = const$, то маємо

$$h = \frac{p}{\gamma} \pm x_3, \quad (6.2)$$



де $\gamma = \rho \cdot g$ — питома вага порової рідини. Розмірність напору $[h] = \text{м}$.

Напір h , визначений за формулами (6.1) та (6.2), називається **п'єзометричним напором** і не залежить від висоти.

Означення 6.2. Під **швидкістю фільтрації** v порової рідини розуміють об'єм рідини, який проходить через площу одиничного перерізу пористого середовища, розміщену перпендикулярно до напрямку руху, за одиницю часу.

За одиницю часу досить часто використовують добу. Тому згідно означення розмірність швидкості фільтрації $[v] = \frac{\text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}} = \frac{\text{м}}{\text{доба}}$.

В 1856 році французький інженер Дарсі сформулював закон, згідно якого втрати напору при фільтрації пропорційні швидкості фільтрації. Втрати напору в деякому напрямку — це похідна від напірної функції в цьому напрямку. Дійсно, нехай в деякому напрямку r при $r = l$ напір $h|_{r=l} = h_l$, а при $r = l + \delta r$ напір $h|_{r=l+\delta r} = h_{\delta r}$. Тоді втрата напору в даному напрямку визначається як відношення різниці напорів до довжини шляху

$$\frac{\delta h}{(l + \delta r) - l} = \frac{h_{\delta r} - h_l}{\delta r}.$$

При $\delta r \rightarrow 0$ маємо

$$\lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{h_{\delta r} - h_l}{\delta r} = \frac{\partial h}{\partial l}.$$

Тоді аналітично закон Дарсі має вигляд

$$\bar{v} = -k \text{grad} h \quad (6.3)$$

де $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор швидкості фільтрації;

$\text{grad} h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \frac{\partial h}{\partial x_2}, \frac{\partial h}{\partial x_3} \right)$ — градієнт напірної функції; k — коефіцієнт

пропорційності (поки що скалярна величина), який називається **коефіцієнтом фільтрації**.

Оскільки $[\text{grad} h] = \frac{\text{м}}{\text{м}} = 1$, то з (6.3) отримуємо, що розмірності коефіцієнтів фільтрації та швидкості фільтрації співпадають



$$[k] = [v] = \frac{M}{\text{доба}}$$

Закон Дарсі (6.3) є емпіричним законом, тобто встановленим експериментально. Тому для природних пористих середовищ коефіцієнт фільтрації теж визначається експериментально. В основному використовується фізичний зміст коефіцієнта фільтрації – це об'єм рідини, який проходить через одиничну площу пористого середовища, перпендикулярну до напрямку потоку, за одиницю часу при одиничному градієнті напору. В таблиці 6.1 наведено значення коефіцієнта фільтрації для деяких ґрунтів.

Таблиця 6.1. Значення коефіцієнта фільтрації для деяких ґрунтів

Ґрунт	$k, \frac{M}{\text{доба}}$
Пісок	
<i>чистий</i>	8,64 – 8,7
<i>глинистий</i>	8,7 – 4,3
Супісок	4,3 – 2,6
Суглинок	$9 \cdot 10^{-1} - 4 \cdot 10^{-2}$
Глина	$4 \cdot 10^{-1} - 1 \cdot 10^{-3}$

§6.2. Рівняння фільтрації в пористому середовищі

Скелет пористого середовища будемо вважати недеформівним, тобто незмінним в часі. Звідси випливає, що пористість n є функцією лише просторових змінних $n = n(x_1, x_2, x_3)$ і не залежить від часу. Також вважаємо густину порової рідини сталою $\rho = \text{const}$.

Для виведення рівняння фільтрації в пористому середовищі виділимо елементарний паралелепіпед із ребрами паралельними осям координат і довжинами dx_1, dx_2, dx_3 (рис. 6.1).

Тоді, маса порової рідини, яка входить в елемент пористого середовища через ліву грань $dx_2 dx_3$ за час dt буде

$$v_1(x_1, x_2, x_3) \rho dx_2 dx_3 dt.$$

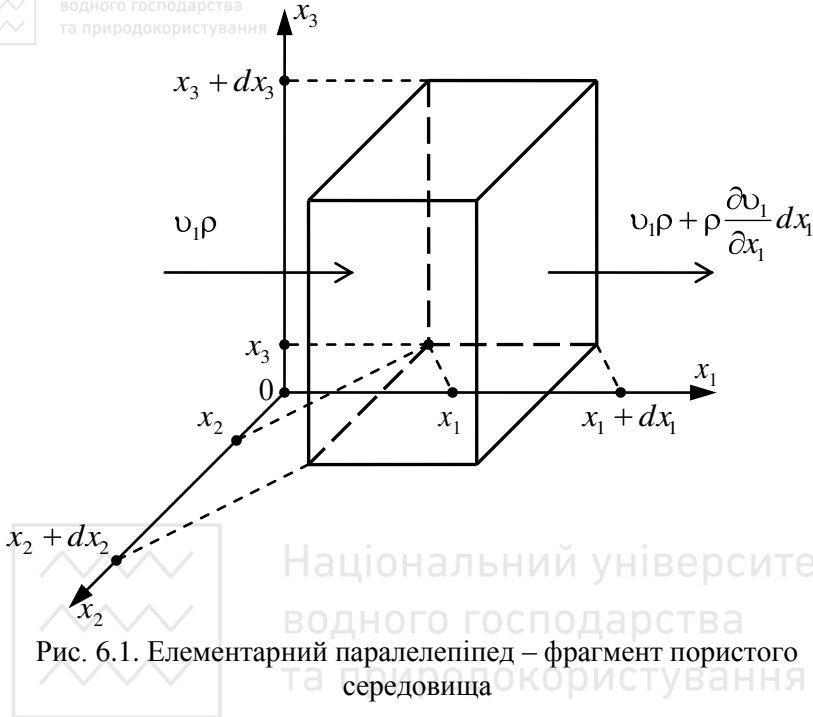


Рис. 6.1. Елементарний паралелепіпед – фрагмент пористого середовища

Маса порової рідини, яка виходить з виділеного фрагменту пористого середовища через праву грань $dx_2 dx_3$ за той самий проміжок часу буде

$$\rho v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 dt.$$

Розкладаючи функцію $v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3)$ в околі точки (x_1, x_2, x_3) в ряд Тейлора по змінній x_1 і нехтуючи нескінченно малими другого порядку, отримуємо

$$\begin{aligned} \rho v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 dt &= \rho \left(v_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial v_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 dt = \\ &= \rho v_1(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 dt + \rho \frac{\partial v_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} V dt, \end{aligned}$$

де $V = dx_1 dx_2 dx_3$ – об'єм розглядуваного паралелепіпеда.

Тобто, зміна маси рідини всередині виділеного елемента пористого середовища дорівнює



$$\rho v_1(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 dt - \rho v_1(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 dt - \\ - \rho \frac{\partial v_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} V dt = - \rho \frac{\partial v_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} V dt.$$

Проводячи аналогічні міркування для граней $dx_1 dx_2$ та $dx_1 dx_3$, отримуємо загальну зміну маси порової рідини в розглядуваному об'ємі за час dt

$$- \rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} V dt. \quad (6.4)$$

Згідно припущень про недеформівність скелету і незалежність пористості n від часу отримуємо, що загальна маса рідини у виділеному об'ємі V пористого середовища з часом не змінюється. Тобто, зміна маси рідини в об'ємі V за час dt дорівнює нулю. Тоді з (6.4) отримуємо



або

$$- \rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} V dt = 0, \\ - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} = 0,$$

$$- \operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (6.5)$$

Враховуючи закон Дарсі (6.3), з (6.5) отримуємо рівняння, якими описується рух рідини в недеформівному пористому середовищі

$$\operatorname{div} \left(k \operatorname{grad} h(x_1, x_2, x_3) \right) = 0,$$

або

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial x_3} \right) = 0, \quad (6.6)$$

де $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$. При сталому коефіцієнті фільтрації $k = \text{const}$ з (6.6) отримуємо рівняння Лапласа

$$\Delta h(\mathbf{X}) = 0, \quad (6.7)$$

де Δ – оператор Лапласа.

§6.3. Граничні умови та їх фізична інтерпретація

Для забезпечення єдиності розв'язку рівняння (6.7) (або (6.6)) його потрібно доповнити відповідними граничними умовами для шуканої



функції $h(x_1, x_2, x_3)$ на межі області, в якій досліджується процес фільтрації. Нехай процес фільтрації досліджується в області Ω з межею Γ . Межу будемо називати **дренованою** (проникною), якщо на ній забезпечений безперешкодний відтік порової рідини, **непроникною** – якщо відтік порової рідини через дану межу відсутній.

Граничні умови для напору залежать від нижченаведених чинників:

1. Межа (частина межі) Γ області Ω дренована.

Для напору задається гранична умова першого роду

$$h(\mathbf{X})|_{\Gamma} = H(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де $H(\mathbf{X})$ – задана функція; $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$.

2. Межа (частина межі) Γ області Ω непроникна.

Зрозуміло, що потік рідини через непроникну межу дорівнює нулю. Тобто,

$$(\bar{\mathbf{v}}, \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow \left(-k \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h(\mathbf{X})}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0,$$

де \mathbf{n} – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі Γ ;

$\frac{\partial}{\partial n}$ – похідна по зовнішній нормалі до межі Γ .

Питання для самоконтролю

1. Що розуміють під швидкістю фільтрації порової рідини?
2. В чому полягає закон Дарсі?
3. Що називається коефіцієнтом фільтрації?
4. Чому в законі Дарсі вектор швидкості фільтрації протилежно направлений до градієнта напору?
5. Чому зміна маси рідини в недеформівному масиві пористого середовища дорівнює нулю?
6. Межа називається дренованою, якщо...
7. Запишіть вигляд рівняння, яким описується процес фільтрації в недеформівному пористому середовищі.
8. У якому випадку для напірної функції на межі Γ задається гранична умова другого роду?

Базові поняття: вологість, вологоперенесення, всмоктуючий тиск, депресійна крива, потенціал ґрунтової вологи, гістерезис, коефіцієнт дифузії ґрунтової вологи

§7.1. Параметри процесу вологоперенесення

Означення 7.1. **Об'ємною вологістю** (надалі, просто вологістю) деякого масиву пористого середовища об'ємом V називається відношення об'єму рідини V_g в цьому масиві до всього об'єму V

$$\Theta = \frac{V_g}{V}. \quad (7.1)$$

В повністю насичених пористих середовищах $V_g = V_n$, де V_n – об'єм пор. Тобто, в насиченому пористому середовищі $\Theta = n$, де n – пористість.

В ґрунті, як прикладі пористих середовищ, не вся вода приймає участь в фільтраційному процесі. Частина її сильно утримується силами молекулярної природи поблизу частинок ґрунту. Така вода називається зв'язаною. Зв'язана вода може займати від 12% (піски) до 100% (тверді глини) пористого простору. Тому навіть, на перший погляд, повністю сухий ґрунт за рахунок наявності зв'язної води має вологість $\Theta_0 > 0$. Вода, яка приймає участь у фільтрації називається вільною.

Отже, величина, яка характеризує ступінь насичення ґрунту вологою – вологість Θ , змінюється в межах $0 < \Theta_0 \leq \Theta \leq n < 1$.

Процес перенесення вологи в ненасичених пористих середовищах (де $\Theta < n$) називають **вологоперенесенням**. Основною задачею при дослідженні процесів вологоперенесення є визначення вологості $\Theta = \Theta(x_1, x_2, x_3, t)$.

В насичених пористих середовищах тиск p більший або рівний атмосферному тиску p_a ($p \geq p_a$). В ненасичених пористих середовищах тиск обумовлюється капілярними ефектами пор і він менший атмосферного ($p < p_a$). Він називається **всмоктуючим (від'ємним) тиском**. Дійсно, якщо за точку відліку взяти величину



атмосферного тиску, то в насичених пористих середовищах $p \geq 0$, а в ненасичених $p < 0$.

Умовну лінію розділу насичених та ненасичених ґрунтів, на якій $p = p_a$, називають **депресійною кривою** (кривою депресії), або рівнем ґрунтових вод.

Як і для насичених пористих середовищ, для ненасичених справедливе означення напору

$$h = \frac{p}{\gamma} \pm x_3,$$

де $\gamma = \rho g$ – питома вага порової рідини; “+” – якщо вісь x_3 напрямлена вгору, і “-” – якщо x_3 напрямлена вниз.

Інколи для ненасичених ґрунтів вводять в розгляд величину ψ , яку називають **потенціалом ґрунтової вологи**

$$p = -\gamma \cdot \psi,$$

тобто

$$h = -\psi \pm x_3. \quad (7.2)$$

§7.2. Явище гістерезису

Тиск в ненасичених ґрунтах залежить від вологості $p = p(\Theta)$. Причому, дана залежність нелінійна і неоднозначна. Неоднозначність полягає в тому, що дана залежність ще визначається процесом – осушення чи зволоження ґрунту (рис. 7.1).

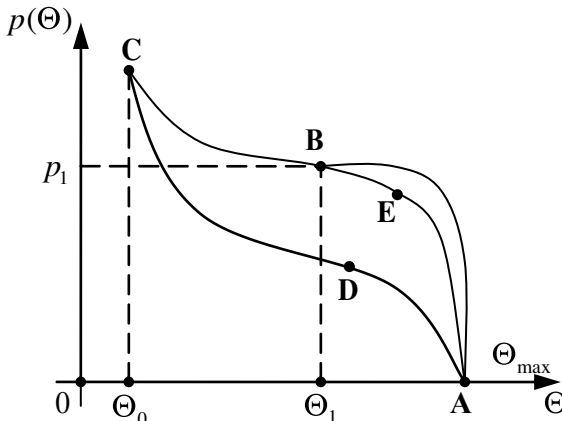


Рис. 7.1. Область гістерезису



Лінія ABC є граничною кривою осушування, а лінія CDA – гранична крива зволоження. Така неоднозначна залежність $p = p(\Theta)$ називається *гістерезисом*. Область між граничними кривими ABC та CDA називається *областю гістерезису*. Це означає, що якщо процес осушення, при якому залежність $p = p(\Theta)$ визначається кривою ABC , припинити в точці B (при вологості Θ_1 і тиску p_1) і змінити процесом зволоження, то нова крива BEA залежності $p = p(\Theta)$ пройде всередині області гістерезису.

§7.3. Закон вологоперенесення

Як і в насичених ґрунтах, рух вологи в ненасичених ґрунтах відбувається в напрямку протилежному до градієнта напору

$$\vec{u} = -k \text{grad} h. \quad (7.3)$$

Для ненасичених ґрунтів залежність (7.3) називається законом Дарсі-Клюта; коефіцієнт пропорційності k називається коефіцієнтом вологоперенесення. Він залежить від вологості $k = k(\Theta)$. А оскільки вологість залежить від тиску $\Theta = \Theta(p)$, то коефіцієнт вологоперенесення може характеризуватись гістерезисом і нелінійно залежати від тиску p .

Проста залежність без урахування гістерезису отримана С.Ф. Аверьяновим [17]

$$k(\Theta) = k_\phi \left(\frac{\Theta - \Theta_0}{n - \Theta_0} \right)^m, \quad m = 3; 5,$$

де k_ϕ – коефіцієнт фільтрації у випадку повністю насиченого ґрунту; показник степеня $m = \text{const}$ – залежить від типу ґрунту. При Θ близьких до Θ_0 дана залежність не виконується.

§7.4. Рівняння вологоперенесення

Виділимо в масиві ґрунту елементарний паралелепіпед з ребрами довжиною dx_1 , dx_2 , dx_3 , паралельними осям координат (рис.7.2). Тоді, діючи аналогічним чином як при виведенні рівняння фільтрації, отримуємо, що змінна маси порової рідини за рахунок трьох граней паралелепіпеда за час dt буде



$$-\sum_{i=1}^3 \rho \frac{\partial u_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_i} V dt, \quad (7.4)$$

де $\rho = const$ – густина порової рідини; $V = dx_1 dx_2 dx_3$ – об'єм виділеного паралелепіпеда.

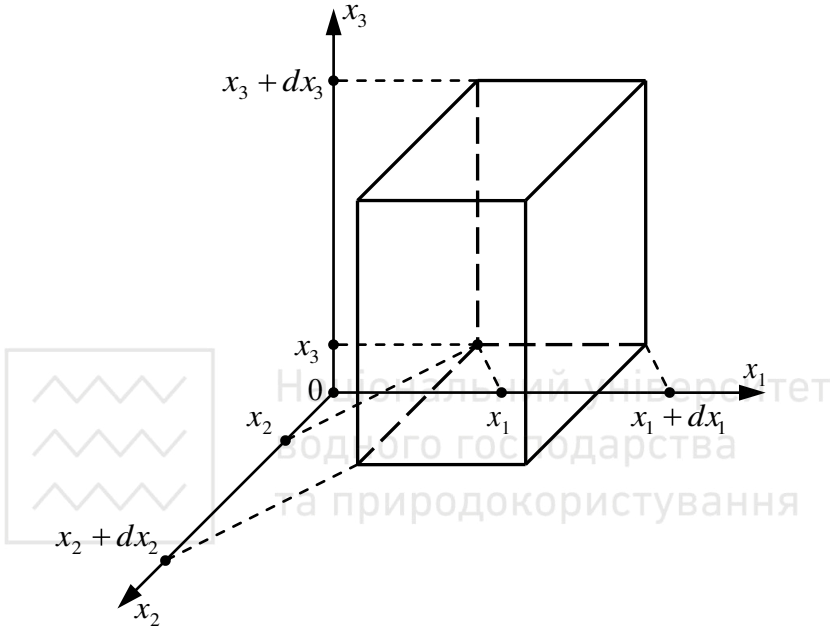


Рис. 7.2. Елементарний паралелепіпед – фрагмент пористого середовища

З іншого боку, в даному фрагменті пористого середовища в момент часу t була маса порової рідини

$$\Theta(x_1, x_2, x_3, t) \rho V,$$

а через проміжок часу dt стала

$$\Theta(x_1, x_2, x_3, t + dt) \rho V = \Theta(x_1, x_2, x_3, t) \rho dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial \Theta(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} \rho V dt + o(dt^2).$$

Тобто, маса порової рідини змінилась на величину

$$\frac{\partial \Theta(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} \rho V dt. \quad (7.5)$$



Враховуючи закон збереження і прирівнюючи (7.4) та (7.5), маємо

$$\frac{\partial \Theta(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3, t),$$

або з урахуванням закону Дарсі-Клюта (7.3) отримуємо

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad} h). \quad (7.6)$$

Рівняння (7.6) містить дві невідомі функції $\Theta(x_1, x_2, x_3, t)$ та $h(x_1, x_2, x_3, t)$. Припустимо, що є відомою залежність $h = h(\Theta)$. Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{Q}(\Theta) \cdot \operatorname{grad} h(\Theta) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(\Theta) \cdot \frac{\partial h(\Theta)}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(\Theta) \cdot \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta(\mathbf{X}, t)}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D(\Theta) \frac{\partial \Theta(\mathbf{X}, t)}{\partial x_i} \right) = \\ &= \operatorname{div} \mathbf{D}(\Theta) \cdot \operatorname{grad} \Theta(\mathbf{X}, t) \end{aligned}$$

і рівняння (7.6) набуває вигляду

$$\frac{\partial \Theta(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{D}(\Theta) \operatorname{grad} \Theta(\mathbf{X}, t), \quad (7.7)$$

де функцію $D(\Theta) = k(\Theta) \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta}$ називають *коефіцієнтом дифузії*

грунтової вологи, а $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$.

Зауважимо, що рівняння (7.7) було виведене без урахування джерел та стоків вологи, а також при нехтуванні рухом вологи у вигляді пари.

Рівняння (7.7) потрібно доповнити початковою умовою

$$\Theta(\mathbf{X}, t)|_{t=0} = \Theta^{(0)}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega,$$

а також граничними умовами на межі Γ області Ω , в якій досліджуються процеси вологоперенесення. Граничні умови залежать від ряду чинників. Наприклад,

1. Межа (частина межі) Γ є кривою депресії. Тоді

$$\Theta(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = n.$$

2. Межа (частина межі) Γ є непроникною. Тоді



$$\begin{aligned} (\vec{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0 &\Rightarrow \left(-k(\Theta) \frac{\partial h(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(-k(\Theta) \cdot \frac{\partial h(\Theta)}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow \left(-D(\Theta) \frac{\partial \Theta(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \end{aligned}$$

де $\frac{\partial}{\partial n}$ – похідна по зовнішній нормалі до межі Γ .

3. Межа Γ контактує з атмосферою, вологість якої Θ_{atm} . Тоді задається гранична умова випаровування

$$-D(\Theta) \frac{\partial \Theta(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \beta \left(\Theta(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma} - \Theta_{atm} \right),$$

де β – коефіцієнт вологообміну. При $\beta \rightarrow 0$ маємо умову непроникності $\left(-D(\Theta) \frac{\partial \Theta(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = 0$, а при $\beta \rightarrow \infty$ – умову миттєвого випаровування

$$\Theta \Big|_{\Gamma} = \Theta_{atm}.$$

Питання для самоконтролю

1. Об'ємною вологістю пористого середовища називається...
2. Чи може об'ємна вологість ґрунту дорівнювати нулю? Пояснити.
3. Що називається потенціалом ґрунтової вологи?
4. В чому полягає явище гістерезису?
5. Сформулюйте закон вологоперенесення.
6. Запишіть вигляд рівняння, яким описується процес вологоперенесення.
7. Що розуміють під коефіцієнтом дифузії ґрунтової вологи?
8. Від яких фізичних умов залежать граничні умови для функції об'ємної вологості $\Theta(\mathbf{X}, t)$?
9. Чому до рівняння (7.7) окрім граничних умов потрібно додавати початкові умови?



Завдання для самостійної роботи



Рис. ЛЗ.1. Шар ґрунту

Дано шар ґрунту (рис. ЛЗ.1). Знайти розподіл вологи в ґрунті протягом 1 години при заданій пористості n , початковому розподілу вологи $\Theta_0(x)$, атмосферній вологості Θ_{atm} та наступних вхідних даних:

$$D \text{ (коефіцієнт дифузії ґрунтової вологи)} = 10^{-6} (1 - e^{-m\Theta}) \left(\frac{M^2}{сек} \right),$$

$$\beta \text{ (коефіцієнт вологообміну)} = m \cdot 10^{-2} \left(\frac{M}{сек} \right),$$

де m – номер варіанту.

1. Нижня межа непроникна, а на верхній задається гранична умова миттєвого випаровування ($n = 0,7$; $\Theta_0(x) = n$; $\Theta_{atm} = 0,01$).
2. Нижня межа непроникна, а на верхній задається умова випаровування з коефіцієнтом β ($n = 0,8$; $\Theta_0(x) = n$; $\Theta_{atm} = 0,1$).



3. Нижня межа є рівнем ґрунтових вод, а на верхній межі задається умова миттєвого випаровування ($n = 0,75$; $\Theta_0(x) = \Theta_{atm}$; $\Theta_{atm} = 0,08$).
4. Нижня межа є рівнем ґрунтових вод, а верхня межа контактує з бетонним фундаментом споруди ($n = 0,67$; $\Theta_0(x) = 0,01$).
5. Нижня межа є рівнем ґрунтових вод, а на верхній межі задається умова випаровування з коефіцієнтом β ($n = 0,52$; $\Theta_0(x) = n$; $\Theta_{atm} = 0,2$).
6. На нижній та верхній межах підтримується задана вологість n ($n = 0,68$; $\Theta_0(x) = 0,02$).

Дано масив ґрунту, в якого висота набагато менша за довжину (одновимірна задача планової фільтрації) (рис. ЛЗ.2). Знайти розв'язок наступної крайової задачі для одновимірного рівняння планової фільтрації (рівняння Буссінеска) протягом 30 діб:

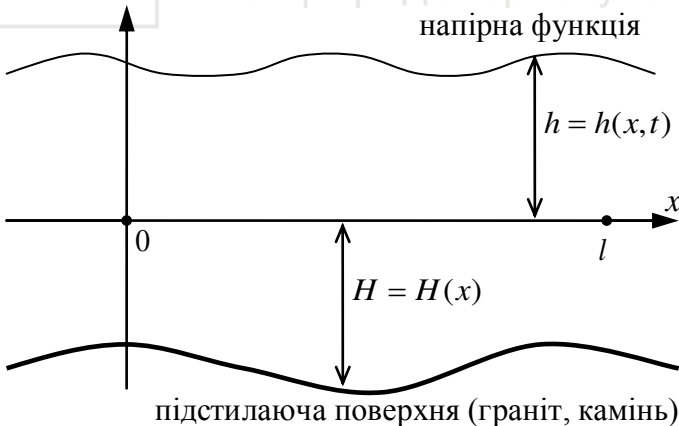


Рис. ЛЗ.2. Схема одновимірної задачі планової фільтрації



$$n \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(H(x) + h(x, t)) \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad x \in (0; l),$$

$$h(x, t)|_{t=0} = h_0(x), \quad x \in [0; l],$$

$$\Gamma_1 h|_{x=0} = 0; \quad \Gamma_2 h|_{x=l} = 0.$$

7. $H(x) = \frac{x(l-x)}{5l}$; $l = 5m$; $k = 0,3 \frac{m}{\text{доба}}$; $h_0(x) = (l-x)x$. Ліва та права межі масиву ґрунту дреновані.

8. $H(x) = 3 + 3 \sin x$; $l = 5m$; $k = 0,2 \frac{m}{\text{доба}}$; $h_0(x) = (\frac{l}{2} - x)^2$.

Ліва межа масиву ґрунту дренована, а права – непроникна.

9. $H(x) = 2 + 2 \cos x$; $l = 4m$; $k = 0,25 \frac{m}{\text{доба}}$; $h_0(x) = \frac{l^2}{4} - (\frac{l}{2} - x)^2$.

Права межа масиву ґрунту дренована, а ліва – непроникна.

10. $H(x) = 5m = \text{const}$; $l = 6m$; $k = 0,15 \frac{m}{\text{доба}}$; $h_0(x) = 4 + 4 \cos x$.

На лівій межі ґрунту підтримується напір $4m$, а права межа непроникна.

11. $H(x) = 2 + \cos x + \sin x$; $l = 7m$; $k = 0,27 \frac{m}{\text{доба}}$; $h_0(x) = 3 + 3 \sin x$.

На правій межі ґрунту підтримується напір $2m$, а ліва межа ґрунту непроникна.

Національний університет
природокористування

ТЕМА 8. ДЕЯКІ СПЕЦІАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІЛЬТРАЦІЇ

Базові поняття: профільна фільтрація, планова фільтрація, деформівне пористе середовище, число Рейнольдса, тензор коефіцієнтів фільтрації, анізотропне пористе середовище

§8.1. Профільна та планова схеми фільтрації

Профільна та планова схеми фільтрації дозволяють звести тривимірну задачу фільтрації до двовимірної. Очевидно, що розв'язувати задачу, де невідома функція залежить від двох змінних простіше, аніж у випадку трьох змінних. В багатьох випадках для спрощення фільтрація рідини може покладатись плоскою, тобто незалежною від однієї із горизонтальних координат (x_1 або x_2). Такий частковий вид фільтрації називається профільною фільтрацією. Наприклад, таким видом фільтрації може описуватись процес фільтрації в тілі ґрунтової греблі (рис. 8.1) або під гідротехнічною спорудою (рис. 8.2). Схеми фільтрації, зображені на рис. 8.1, рис. 8.2 відповідають припущенню, що розміри ґрунтової греблі та бетонного флютбету по осі x_2 є нескінченно великими.

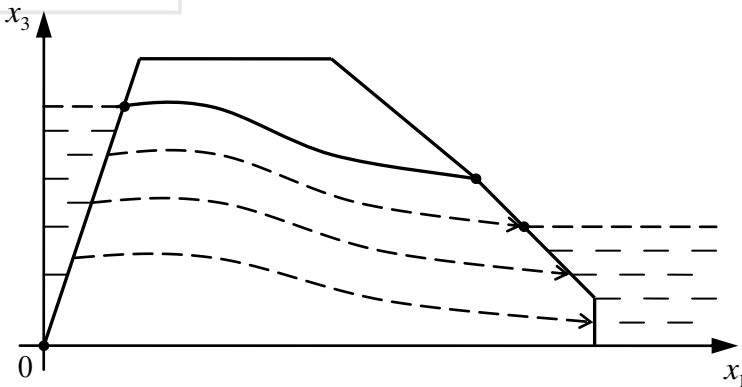


Рис. 8.1. Профільна схема фільтрації через ґрунтову греблю

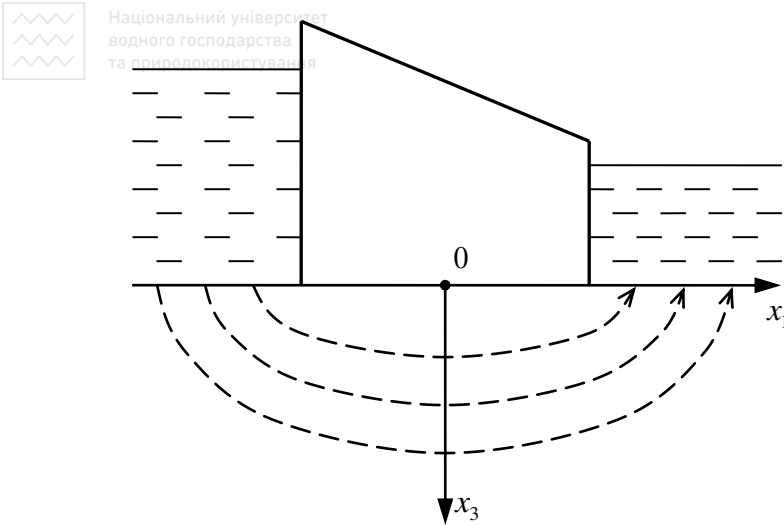


Рис. 8.2. Профільна схема фільтрації під плоским флютбетом

Якщо припустити, що вертикальні розміри області фільтрації набагато менші за горизонтальні і осереднити характеристики фільтраційного потоку по висоті водоносного пласта, то отримаємо схему фільтрації, яка називається **плановою фільтрацією**. Часто така схема фільтрації застосовується в сільському господарстві, де висота родючого шару ґрунту не перевищує 1 м, а площа полів обчислюється гектарами.

§8.2. Рівняння планової фільтрації

Виведемо рівняння планової фільтрації, виходячи із наступних припущень [31]:

1. Порова вода є нестискуваною рідиною зі сталою густиною $\rho = const$.
2. Товщина водоносного пласта ґрунту набагато менша його довжини та ширини.
3. Підстилаюча водоносний шар непроникна поверхня не має розривів і задається відомою гладкою функцією $H(x_1, x_2)$.
4. Вільна поверхня води $h = h(x_1, x_2, t)$ є гладкою функцією координат x_1, x_2 .
5. Ґрунтові води ніде не виходять на поверхню землі, причому на вільній поверхні води тиск постійний (рис. 8.3).

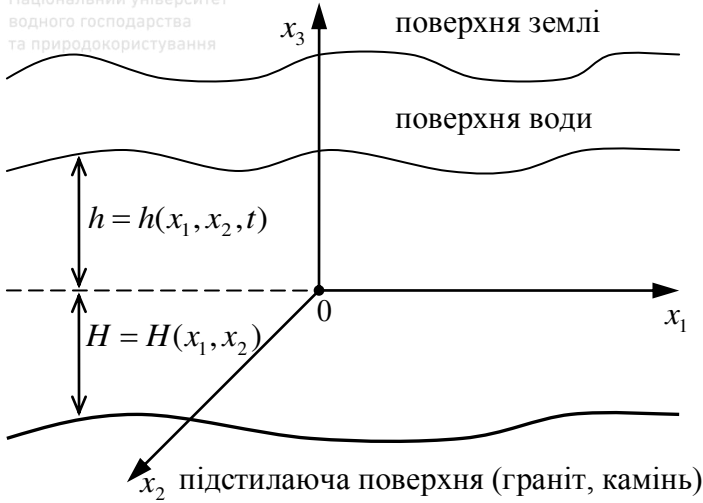


Рис. 8.3. Планова схема фільтрації

Виділимо в пласті елементарний об'єм ґрунту, який складається з призми, яка обмежена знизу підстилаючою поверхнею, а зверху – поверхнею води. Зважаючи, що функції $H(x_1, x_2)$, $h(x_1, x_2, t)$ вважаються гладкими, дану призму з певним наближенням можна вважати прямокутним паралелепіпедом (рис. 8.4).

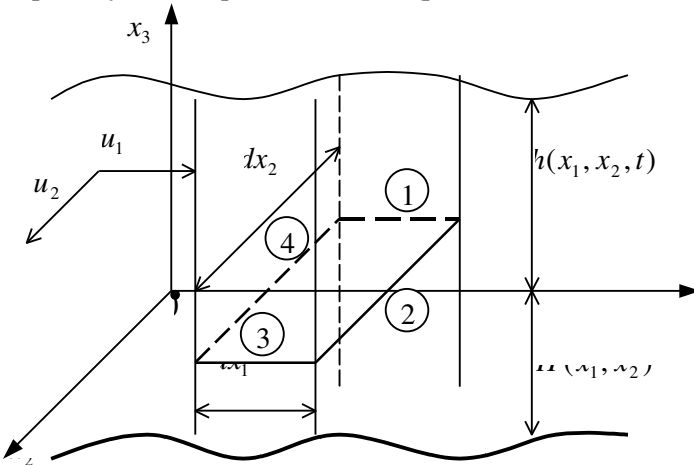


Рис. 8.4. Виділений фрагмент ґрунту



Через грань 1 за час dt в виділений елемент ґрунту вийде маса порової рідини, яка дорівнює добутку об'єму рідини, що зайшла, на густину ρ :

$$V_6 \rho dt = u_2(x_1, x_2, t) S_1 \rho dt = u_2(x_1, x_2, t) \rho (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t)) dx_1 dt,$$

де S_1 – площа грані 1. Через протилежну грань 3 за час dt вийде маса води

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_2 + dx_2, t) \rho (H(x_1, x_2 + dx_2) + h(x_1, x_2 + dx_2, t)) dx_1 dt = \\ = u_2(x_1, x_2, t) \rho (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t)) dx_1 dt + \\ + \rho \frac{\partial}{\partial x_2} u_2(x_1, x_2, t) (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t)) \underline{d}x_1 dx_2 dt + o(dx_2^2). \end{aligned}$$

Отже, за рахунок граней 1-3 маса води у виділений призми зміниться на величину

$$-\rho \frac{\partial}{\partial x_2} u_2(x_1, x_2, t) (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t)) \underline{d}x_1 dx_2 dt.$$

Аналогічно, за рахунок граней 2-4 за проміжок часу dt маса води зміниться на величину

$$-\rho \frac{\partial}{\partial x_1} u_1(x_1, x_2, t) (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t)) \underline{d}x_1 dx_2 dt.$$

Тобто, загальна величина зміни маси води

$$\begin{aligned} -\rho \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_1(x_1, x_2, t) (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t)) \underline{d}x_1 + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} u_2(x_1, x_2, t) (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t)) \underline{d}x_2 \right) dx_1 dx_2 dt. \end{aligned} \quad (8.1)$$

З іншої сторони маса порової рідини в розглядуваній призмі в момент часу t була

$$n \cdot \rho (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t)) \underline{d}x_1 dx_2.$$

Через dt маємо

$$\begin{aligned} n \cdot \rho (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t + dt)) \underline{d}x_1 dx_2 = n \cdot \rho (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t) + \\ + \frac{\partial h(x_1, x_2, t)}{\partial t} dt + o(dt^2)) \underline{d}x_1 dx_2. \end{aligned}$$

Отже, маса порової рідини у виділеному фрагменті ґрунту за час dt зміниться на величину



$$n\rho \frac{\partial h(x_1, x_2, t)}{\partial t} dx_1 dx_2 dt. \quad (8.2)$$

Прирівнюючи (8.1) та (8.2), маємо

$$n \frac{\partial h(x_1, x_2, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\rho_1(x_1, x_2, t) (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t)) \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\rho_2(x_1, x_2, t) (H(x_1, x_2) + h(x_1, x_2, t)) \right); \quad (8.3)$$

Приймаючи до уваги закон Дарсі $u_1(x_1, x_2, t) = -k \frac{\partial h(x_1, x_2, t)}{\partial x_1}$,

$u_2(x_1, x_2, t) = -k \frac{\partial h(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}$, з (8.3) маємо

$$n \frac{\partial h(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \left(H(\mathbf{X}) + h(\mathbf{X}, t) \right) \frac{\partial h(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \left(H(\mathbf{X}) + h(\mathbf{X}, t) \right) \frac{\partial h(\mathbf{X}, t)}{\partial x_2} \right); \quad (8.4)$$

де $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$.

Рівняння (8.4) називається **рівнянням Буссінеска** і є нелінійним.

Припустимо, що підстилаюча поверхня є горизонтальною, тобто $H(x_1, x_2) = H_0 = const$. Введемо позначення

$$\bar{h}(\mathbf{X}, t) = H_0 + h(\mathbf{X}, t).$$

Звідси

$$\frac{\partial \bar{h}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{h}(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1} = \frac{\partial h(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \bar{h}(\mathbf{X}, t)}{\partial x_2} = \frac{\partial h(\mathbf{X}, t)}{\partial x_2}$$

і рівняння Буссінеска набуває вигляду

$$\frac{\partial \bar{h}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \bar{h}(\mathbf{X}, t) \frac{\partial \bar{h}(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \bar{h}(\mathbf{X}, t) \frac{\partial \bar{h}(\mathbf{X}, t)}{\partial x_2} \right).$$

§8.3. Математична модель фільтрації в деформівному пористому середовищі

В темі 6 ми припустили, що пористе середовище є недеформівним в часі. Тобто, пористість n пористого середовища була функцією



лише просторових змінних (x_1, x_2, x_3) . Однак, очевидно, що в найпростішому випадку при збільшенні тиску в поровій рідині буде збільшуватись об'єм пор, і навпаки – при зменшенні тиску об'єм пор буде зменшуватись. Таким чином, в даному випадку пористість буде залежати від тиску в поровій рідині, а отже і від часу.

В розглядуваному пористому середовищі виділимо елементарний паралелепіпед об'ємом V з ребрами, паралельними осям координат і довжинами dx_1 , dx_2 та dx_3 (рис. 8.5).

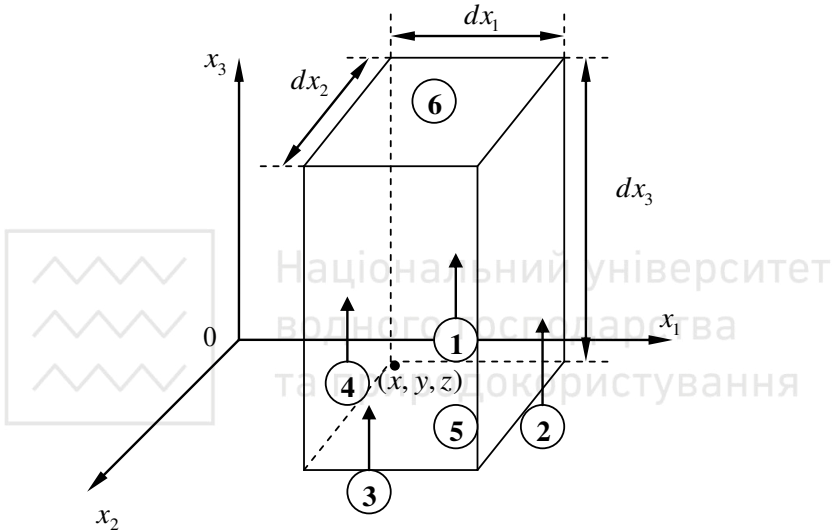


Рис. 8.5. Виділений фрагмент пористого середовища

Припустимо, що порова рідина є нестискуваною, тобто $\rho = const$. Складемо баланс маси рідини у виділеному об'ємі ґрунту V протягом проміжку часу $[t; t + dt]$. Через грань 1 (рис. 8.5) протягом часу dt у виділений фрагмент пористого середовища зайде порова рідина масою

$$m_1 = u_2(x_1, x_2, x_3, t) \rho dx_1 dx_3 dt,$$

а через грань 3 вийде

$$m_2 = u_2(x_1, x_2 + dx_2, x_3, t) \rho dx_1 dx_3 dt.$$

Отже, зміна маси порової рідини протягом часу dt за рахунок граней 1 та 3 буде

$$dm_2 = u_2(x_1, x_2, x_3, t) \rho dx_1 dx_2 dt - u_2(x_1, x_2 + dx_2, x_3, t) \rho dx_1 dx_3 dt = \\ = u_2(x_1, x_2, x_3, t) - u_2(x_1, x_2 + dx_2, x_3, t) \rho dx_1 dx_3 dt.$$

Розкладаючи функцію $u_2(x_1, x_2 + dx_2, x_3)$ в ряд Тейлора по змінній x_2 і нехтуючи нескінченно малими другого порядку і вище, маємо

$$dm_1 = \left(u_2(x_1, x_2, x_3, t) - u_2(x_1, x_2 + dx_2, x_3, t) - \right. \\ \left. - \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} dx_2 \right) \rho dx_1 dx_3 dt = - \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 dt = \\ = - \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} \rho V dt.$$

Аналогічно, для граней 4 – 2

$$dm_1 = \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} \rho V dt,$$

і для граней 5 – 6

$$dm_3 = - \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \rho V dt.$$

Отже, загальна зміна маси порової рідини в об'ємі V за рахунок всіх граней буде

$$dm = dm_1 + dm_2 + dm_3, \\ dm = - \left(\frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} \right) \rho V dt, \\ dm = - \operatorname{div} \bar{u} \rho V dt. \quad (8.5)$$

Тепер дослідимо зміну маси порової рідини dm іншим способом, використовуючи зміну в часі.

В момент часу t маса порової рідини в об'ємі V пористого середовища дорівнює $\rho n(x_1, x_2, x_3, t) V(x_1, x_2, x_3, t)$, а в момент часу $(t + dt)$: $\rho n(x_1, x_2, x_3, t + dt) V(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t)$.

Отже, маса порової рідини зміниться на величину (з точністю до нескінченно малих другого порядку)



$$dm = \rho \left(n(x_1, x_2, x_3, t)V(x_1, x_2, x_3, t) + n(x_1, x_2, x_3, t+dt) \times \right. \\ \left. \times V(x_1, x_2, x_3, t+dt) \right) = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(n(x_1, x_2, x_3, t)V(x_1, x_2, x_3, t) \right) dt.$$

Відомо, що

$$n = \frac{e}{e+1},$$

де e – коефіцієнт пористості. Також $\frac{V_n}{V_T} = e$. Тоді $\frac{V - V_T}{V_T} = e$,

$$\frac{V}{V_T} - 1 = e, \quad \frac{V_n}{V_T} = e + 1, \quad V_T = \frac{V}{1 + e}. \quad \text{Отже,}$$

$$dm = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{eV(x_1, x_2, x_3, t)}{1 + e} \right) dt, \quad dm = \rho \frac{\partial}{\partial t} (eV_T) dt.$$

Знехтуємо деформаціями твердих частинок ґрунту. Тоді



$$dm = \rho V_T \frac{\partial e}{\partial t} dt, \\ dm = \rho \frac{V}{1 + e} \frac{\partial e}{\partial t} dt.$$

Згідно компресійної залежності $e = -\frac{a}{1 + (r-1)\xi} \sigma^e + const$, маємо

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{a}{(1 + (r-1)\xi)} \frac{\partial \sigma^e}{\partial t},$$

де r – розмірність задачі, ξ – коефіцієнт бічного тиску. Оскільки

$\sigma = \sigma^e + rp$ (див. тема 5), то $\frac{\partial \sigma^e}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} - r \frac{\partial p}{\partial t}$. Тоді маємо

$$-div \bar{\mathbf{u}} \rho V dt = \rho \frac{V}{1 + e} \left(-\frac{a}{1 + (r-1)\xi} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - r \frac{\partial p}{\partial t} \right) dt,$$

$$\frac{a}{(1 + e)(1 + (r-1)\xi)} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - r \gamma \frac{\partial h}{\partial t} \right) = -div \bar{\mathbf{u}},$$

де $\gamma = \rho g$ – питома вага порової рідини.



Нехай ґрунтове середовище знаходиться під впливом сталих зовнішніх навантажень, тобто $\sigma = const$. Отже, $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$. Тоді,

враховуючи закон Дарсі, маємо

$$\frac{\partial h(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{(1+e)(1+(r-1)\xi)}{r\gamma} \operatorname{div} \langle \operatorname{grad} h(\mathbf{X}, t) \rangle \quad (8.6)$$

Рівняння (8.6) і описує фільтрацію в деформівному скелеті ґрунту.

§8.4. Узагальнення закону Дарсі

Узагальнення закону Дарсі, наприклад, для ґрунтів полягають в наступному:

1. Як відомо, закон Дарсі має вигляд

$$\bar{\mathbf{u}} = -k \operatorname{grad} h \quad (8.7)$$

Коефіцієнт фільтрації k є характеристикою провідності пористого середовища і залежить від властивостей ґрунту, величини та форми його зерен, а також від в'язкості рідини, яка фільтрується в ґрунті. В'язкість рідини залежить від температури пористого середовища, а звідси впливає залежність коефіцієнта фільтрації від температури. При зростанні температури коефіцієнт фільтрації збільшується. Ступінь збільшення залежить від характеристик та виду ґрунту. Є ґрунти, в яких при збільшенні температури від 20°C до 40°C коефіцієнт фільтрації зростає в 1,5 – 3 рази, а є такі, в яких збільшення відбувається в 10-ки разів.

Найбільш відомі загальні формули залежності коефіцієнта фільтрації від температури [17]:

$k(T) = k_0(1 + 0,033T + 0,00022T^2)$ – формула Пуазейля, де k_0 – коефіцієнт фільтрації при температурі 0°C ; $[T] = ^{\circ}\text{C}$.

$k(T) = k_{10}(0,7 + 0,03T)$ – формула Хазена, де k_{10} – коефіцієнт фільтрації при температурі 10°C .

2. В'язкість рідини, яка фільтрується, залежить не лише від температури, але і від концентрації розчинених в ній солей. Також залежність $k = k(c)$ пояснюється тим, що при наявності розчинених солей вже фільтрується не вода, а слабкий електроліт. В результаті протилежних зарядів електроліта, що фільтрується, та шарів зв'язаної води, дані шари стискаються і проникливість пористого середовища



зростає. Графічно залежність $k = k(c)$ можна схематично зобразити згідно рис.8.6.

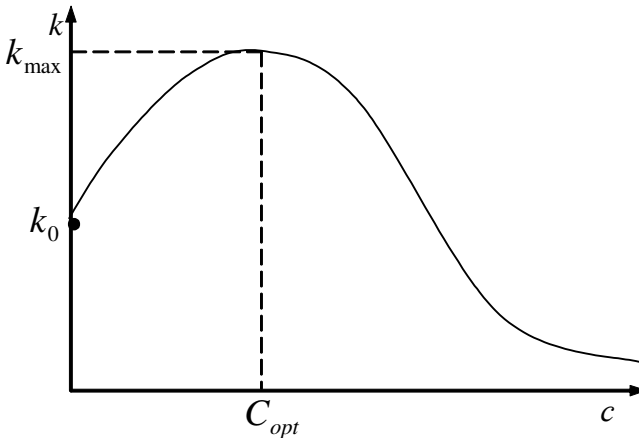


Рис. 8.6. Схематична залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації розчинених солей

Як правило, c_{opt} лежить в межах $30-70 \frac{г}{літр}$. Таких експериментів є досить багато і їх детальний огляд наведено в монографії [Власюк, Мартинюк, 2008].

Отже, в загальному випадку $k = k(c, T)$.

3. Закон (8.7), де k – скалярна величина, виражає закон фільтрації в середовищі, пропускні здатності якого в усіх напрямках однакові – так зване ізотропне пористе середовище. Процес фільтрації ускладнюється в анізотропних пористих середовищах, фільтраційні властивості яких залежать від напрямку (рис. 8.7, 8.8).

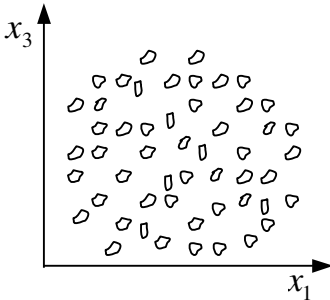


Рис. 8.7. Ізотропне пористе середовище

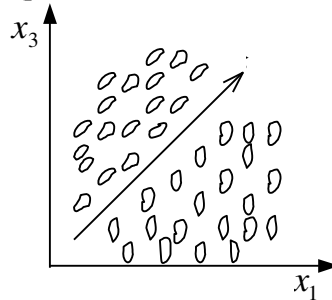


Рис. 8.8. Анізотропне пористе середовище



Для анізотропних ґрунтів кожна компонента вектора швидкості фільтрації \vec{u} є лінійною комбінацією компонент градієнта напору в даній точці. Тоді узагальнений закон Дарсі для анізотропних пористих середовищ набуває вигляду

$$\vec{u} = -\mathbf{K} \text{grad} h \quad (8.8)$$

де \mathbf{K} – тензор коефіцієнтів фільтрації, який називається узагальненим коефіцієнтом фільтрації

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}.$$

Тоді, наприклад, $u_1 = -k_{11} \frac{\partial h}{\partial x_1} - k_{12} \frac{\partial h}{\partial x_2} - k_{13} \frac{\partial h}{\partial x_3}$. Аналогічні

формули мають місце для u_2 та u_3 .

Якщо шляхом повороту системи координат тензор коефіцієнтів фільтрації можна привести до діагонального вигляду, то говорять, що пористе середовище має головні осі анізотропії. В ортотропних ґрунтах напрям осей координат співпадає з напрямками головних осей анізотропії, а тензор коефіцієнтів фільтрації набуває вигляду (якщо головні осі анізотропії однакові для кожної точки області фільтрації)

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix}.$$

4. Зі швидкістю фільтрації \vec{u} пов'язують безрозмірний параметр Re – число Рейнольдса

$$Re = \frac{|\vec{u}| \cdot d}{\nu},$$

де d – геометричний розмір (як правило, діаметр частинок ґрунту); ν – в'язкість рідини, яка фільтрується.

При невеликих числах Re ($Re < 1$) лінійна залежність між градієнтом напору та швидкістю фільтрації має місце, що і виражається законом Дарсі (8.7) (або (8.8)). При $Re > 1$ така лінійна залежність порушується. Досить часто замість (8.7) використовують формулу



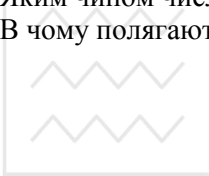
$$u = \alpha \cdot (\text{grad}h)^m,$$

де α та m визначаються експериментальним шляхом. При $Re \in [1, 10]$, $m = 2$ і дану формулу називають формулою Дюпюї-Форхгеймера.

Якщо $Re > 150$, то фільтраційний потік стає турбулентним.

Питання для самоконтролю

1. Що являє собою профільна схема фільтрації?
2. В яких випадках використовується планова модель фільтрації?
3. Рівняння Буссінеска описує...
4. Запишіть вигляд рівняння фільтрації в деформівному пористому середовищі.
5. Пористе середовище називається ортотропним, якщо...
6. В яких випадках перестає виконуватись закон Дарсі?
7. Яким чином число Рейнольдса пов'язане зі швидкістю фільтрації?
8. В чому полягають узагальнення закону Дарсі?





МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛО-МАСОПЕРЕНОСУ

ТЕМА 9. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ МАСОПЕРЕНОСУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Базові поняття: концентрація солей, масоперенесення, дифузія, питомий потік розчинених солей, закон Фіка, метод скінченних різниць

§9.1. Рівняння масопереносу

Нехай в поровій рідині пористого середовища розчинені деякі солі з концентрацією $c(x_1, x_2, x_3, t)$. Розмірність цієї фізичної величини $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ або $\frac{\text{г}}{\text{літр}}$. Задача масопереносу полягає в прогнозі зміни концентрації солей порового розчину в часі.

Зміна концентрації солі зумовлюється трьома факторами:

- 1) дифузією солі в поровій рідині (тобто, переміщенням молекул солі від місць з більшою концентрацією до місць з меншою концентрацією);
- 2) міграцією (фільтрацією) порової рідини;
- 3) процесами масообміну між рідкою та твердою фазами середовища – розчинення солей або випадання в осад.

Згідно закону Фіка питомий потік \vec{q} розчинених солей в однокомпонентному розчині визначається як

$$\vec{q} = c \cdot \vec{u} - \mathbf{D} \cdot \text{grad}c, \quad (9.1)$$

де \vec{u} – швидкість фільтрації порової рідини;

\mathbf{D} – коефіцієнт конвективної дифузії.

З фізичної точки зору питомий потік розчинених солей – це маса солей, яка проходить через площу середовища одиничного перерізу, перпендикулярну до напрямку потоку, за одиницю часу.

В проєкціях на осі координат (9.1) набуде вигляду

$$q_i = c \cdot v_i - D \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (9.2)$$

В (9.2) зроблене припущення, що пористе середовище є ізотропним щодо дифузії (тобто, коефіцієнт дифузії не залежить від напрямку). В таблиці 9.1 наведено значення коефіцієнта дифузії для деяких ґрунтів.



Таблиця 9.1. Значення коефіцієнта дифузії

Середовище	Сіль	$D, \text{ м}^2/\text{доба}$
Глина каолінітова	NaCl	$0,885 \cdot 10^{-4}$
Глина майкопська	NaCl	$0,484 \cdot 10^{-4}$
Чорнозем	NaCl	$0,567 \cdot 10^{-4}$

Для отримання рівняння масопереносу виділимо в пористому середовищі елементарний паралелепіпед з ребрами, паралельними до осей координат і довжинами dx_1 , dx_2 , dx_3 (рис. 9.1).

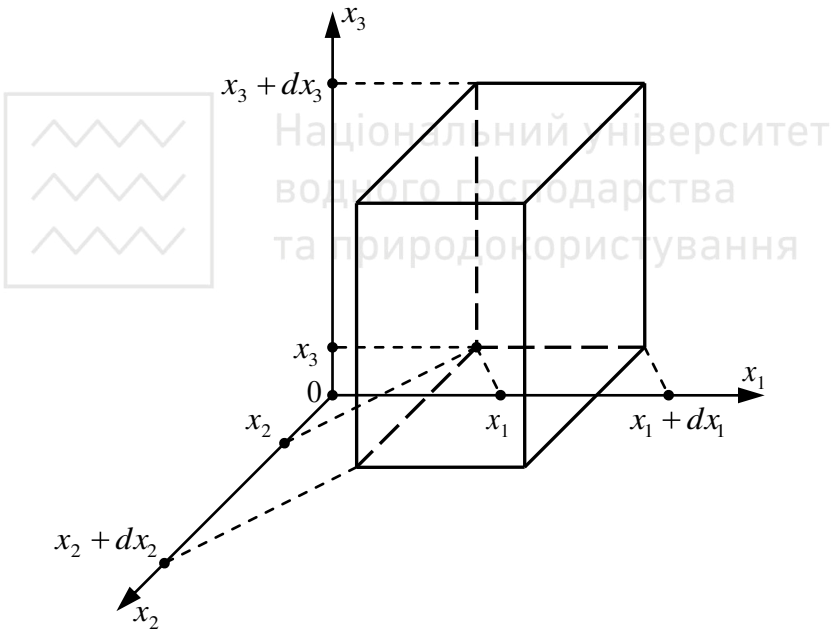


Рис. 9.1. Виділений фрагмент пористого середовища

Маса солі, яка входить в елемент ґрунту через грань $dx_2 dx_3$ за час dt буде

$$q_1(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 dt.$$

Маса солі, яка виходить через грань $dx_2 dx_3$ буде



$$q_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 dt.$$

Використовуючи розклад в ряд Тейлора в околі точки (x_1, x_2, x_3) і нехтуючи нескінченно малими другого порядку і вище, отримуємо

$$q_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 dt = \left(q_1(x_1, x_2, x_3, t) + \frac{\partial q_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 dt.$$

Отже, зміна маси солей безпосередньо в об'ємі $V dx_1 dx_2 dx_3$ за рахунок грані $dx_2 dx_3$ буде

$$q_1(\mathbf{X}, t) dx_2 dx_3 dt - \left(q_1(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial q_1(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 dt = - \frac{\partial q_1(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1} V dt,$$

де $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$.

Аналогічно за рахунок грані $dx_1 dx_3$, маса солей зміниться на величину

$$- \frac{\partial q_2(\mathbf{X}, t)}{\partial x_2} V dt,$$

а за рахунок грані $dx_1 dx_2$

$$- \frac{\partial q_3(\mathbf{X}, t)}{\partial x_3} V dt.$$

Отже, зміна маси солей в розглядуваному об'ємі за рахунок всіх трьох граней за час dt буде

$$- \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i(\mathbf{X}, t)}{\partial x_i} V dt. \quad (9.3)$$

З іншого боку, початкова маса солей всередині об'єму V дорівнює $nc(\mathbf{X}, t)V$, а за час dt вона стане рівною

$$nc(\mathbf{X}, t + dt)V + \frac{\partial N}{\partial t} V dt,$$

де $N(\mathbf{X}, t)$ – концентрація солей в твердій фазі, а $\frac{\partial N(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$ описує збільшення (зменшення) концентрації солей в твердій фазі за рахунок кристалізації (розчинення). Використовуючи розклад в ряд Тейлора по



змінній t і нехтуючи нескінченно малими другого порядку і вище, отримуємо

$$\left(nc(\mathbf{X}, t + dt) + \frac{\partial N(\mathbf{X}, t)}{\partial t} dt \right) V = \left(nc(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \left(\rho c(\mathbf{X}, t) + N(\mathbf{X}, t) \right)}{\partial t} dt \right) V.$$

Отже, маса солей зміниться на величину

$$\frac{\partial \left(\rho c(\mathbf{X}, t) + N(\mathbf{X}, t) \right)}{\partial t} V dt. \quad (9.4)$$

З (9.3) та (9.4) отримуємо

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i(\mathbf{X}, t)}{\partial x_i} V dt = \frac{\partial \left(\rho c(\mathbf{X}, t) + N(\mathbf{X}, t) \right)}{\partial t} V dt,$$

або, враховуючи, що $n = const$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho c(\mathbf{X}, t) \right) = -div \bar{\mathbf{q}} - \frac{\partial N(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (9.5)$$

Враховуючи закон Фіка (9.1), з (9.5) отримуємо рівняння масопереносу солей в пористому середовищі

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho c(\mathbf{X}, t) \right) = div(\mathbf{D} grad c(\mathbf{X}, t)) - div(\mathbf{c}\mathbf{u}) - \frac{\partial N(\mathbf{X}, t)}{\partial t}.$$

Припустимо, що пористе середовище є недеформівним в часі, тобто $n = n(\mathbf{X})$. Зважаючи на рівняння фільтрації $div \mathbf{u} = 0$, маємо наступне рівняння масопереносу:

$$n \frac{\partial c(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = div \left(\rho grad c(\mathbf{X}, t) \right) - \mathbf{u} grad c - \frac{\partial N(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (9.6)$$

Залежність $\frac{\partial N(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = f(c, N)$ називається рівнянням кінетики

масообміну солей і описує процеси розчинення та кристалізації солей. Часто його приймають у вигляді лінійної залежності

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma_m (c - C_m), \quad (9.7)$$

де γ_m – коефіцієнт швидкості масообміну; C_m – концентрація граничного насичення (максимально можлива концентрація солей) в поровій рідині.

Якщо $c(\mathbf{X}, t) > C_m$, то солі випадають в осад, а якщо $c(\mathbf{X}, t) < C_m$, то солі розчиняються [5].

§9.2. Початкові та граничні умови, їх фізична інтерпретація

Розглянемо процес масопереносу солей в області Ω , яка обмежена межею Γ . Для виділення єдиного розв'язку рівняння (9.6) потрібно доповнити його початковими та граничними умовами для невідомої функції $c(\mathbf{X}, t)$.

В початковий момент часу t_0 початкова умова задається у вигляді

$$c(\mathbf{X}, t)|_{t=t_0} = c_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad (9.8)$$

де $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$; $c_0(\mathbf{X})$ – відома функція.

Граничні умови залежать від нижченаведених чинників.

1. Межа (частина межі) Γ області Ω непроникна. Цей випадок включає в себе два підвипадки.

1.1. Непроникність зумовлена заляганням несольового кам'яного пласта. Тоді потік солей в напрямку зовнішньої нормалі до межі Γ дорівнює нулю. Враховуючи закон Фіка (9.1), маємо



$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{n})|_{\Gamma} &= 0, \\ \left(c(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{n}) - \mathbf{D} \frac{\partial c}{\partial n} \right)|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Враховуючи, що на непроникній межі $(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0$, маємо

$$-\mathbf{D} \frac{\partial c}{\partial n}|_{\Gamma} = 0.$$

Якщо припустити, що коефіцієнт дифузії є скалярною величиною, то, враховуючи $D \neq 0$, маємо

$$\frac{\partial c}{\partial n}|_{\Gamma} = 0. \quad (9.9)$$

1.2. Непроникність зумовлена заляганням сольового пласта. Тоді при ідеалізації процесу розчинення може задаватись гранична умова першого роду

$$c|_{\Gamma} = C_m.$$

Експериментально встановлено наявність в околі сольового пласта тонкого дифузійного примежового шару, в якому відбуваються складні процеси масообміну та дифузії. В даному випадку задається гранична умова третього роду [6]:



$$\left(D \frac{\partial c}{\partial n} + \left(-\frac{D}{\delta} + (\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{n}) \right) c \right) \Big|_{\Gamma} = -\frac{DC_m}{\delta}, \quad (9.10)$$

де δ – товщина дифузійного примежового шару.

2. Межа Γ проникна (дренована). В даному випадку можуть задаватись граничні умови трьох родів.

2.1. Якщо на виході фільтраційного потоку відома концентрація солей, тоді задається гранична умова першого роду

$$c(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де $C_1(\mathbf{X}, t)$ – відома функція.

2.2. Гранична умова третього роду (умова Данквертса) враховує як конвективний, так і фільтраційний механізми відводу розчиненої речовини на проникній ділянці

$$\left(\mathbf{D} \frac{\partial c}{\partial n} - (\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{n})(c - C_2(\mathbf{X}, t)) \right) \Big|_{\Gamma} = 0,$$

де $C_2(\mathbf{X}, t)$ – відома концентрація солей в поровому розчині поза межею Γ області Ω .

2.3. Умова швидкого виносу розчинених солей (гранична умова другого роду) отримується з умови Данквертса згідно припущення, що поза областю Ω концентрація миттєво досягає значення $C_2(\mathbf{X}, t)$

$$\mathbf{D} \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

§9.3. Апроксимація диференціального рівняння масопереносу та граничних умов методом скінченних різниць

Розглянемо наступну крайову задачу для рівняння масопереносу:

$$n \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} - u \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} + \gamma_1 (C_m - c(x, t)), \quad x \in (0; l), \quad t > 0, \quad (9.11)$$

$$c(x, 0) = C_0(x), \quad x \in [0; l], \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad c(x, t) \Big|_{x=l} = \tilde{C}(t), \quad t \in [0; T], \quad (9.13)$$



де $C_0(x), \tilde{C}(t)$ – задані функції.

Відмітимо, що в рівнянні (9.11) ми припустили, що $D = const$.

Введемо по змінній x різницеву сітку з кроком h_1

$$\Omega_{h_1} = \{x_i = i \cdot h_1, i = \overline{0, n_1}, h_1 \cdot n_1 = l\}$$

та сітку по змінній t з кроком τ

$$\Omega_\tau = \{t_j = j \cdot \tau, j = \overline{0, s}, s \cdot \tau = T\}.$$

Для апроксимації диференціального рівняння (9.11) використаємо монотонну неявну різницеву схему Самарського

$$\begin{aligned} n \frac{c_i^{(j+1)} - c_i^{(j)}}{\tau} = \eta_i^{(j+1)} \frac{c_{i+1}^{(j+1)} - 2c_i^{(j+1)} + c_{i-1}^{(j+1)}}{h_1^2} + (r^+)_i^{(j+1)} \frac{c_{i+1}^{(j+1)} - c_i^{(j+1)}}{h_1} + \\ + (r^-)_i^{(j+1)} \frac{c_i^{(j+1)} - c_{i-1}^{(j+1)}}{h_1} + \gamma_1 (C_m - c_i^{(j+1)}), \end{aligned} \quad (9.14)$$

де

$$\begin{aligned} \eta_i^{(j+1)} = \frac{D}{1 + \frac{h_1 |u_i^{(j+1)}|}{2D}}, \quad (r^+)_i^{(j+1)} = \frac{-u_i^{(j+1)} + |u_i^{(j+1)}|}{2} \geq 0, \\ (r^-)_i^{(j+1)} = \frac{-u_i^{(j+1)} - |u_i^{(j+1)}|}{2} \leq 0, \quad i = \overline{1, n_1 - 1}, \quad j = \overline{0, s - 1}. \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язку системи різницевих рівнянь (9.14) використаємо метод прогонки. Для цього зводимо рівняння (9.14) до прогоночного вигляду

$$a_i \cdot c_{i-1}^{(j+1)} - c_i \cdot c_i^{(j+1)} + b_i \cdot c_{i+1}^{(j+1)} = -c_i^{(j)} - f_i^{(j+1)}, \quad (9.15)$$

де

$$\begin{aligned} c_i = 1 + \frac{\tau}{n} \left(\frac{2\eta_i^{(j+1)}}{h_1^2} + \frac{(r^+)_i^{(j+1)} - (r^-)_i^{(j+1)}}{h_1} + \gamma_1 \right), \\ a_i = \frac{\tau}{n} \left(\frac{\eta_i^{(j+1)}}{h_1^2} - \frac{(r^-)_i^{(j+1)}}{h_1} \right), \quad b_i = \frac{\tau}{n} \left(\frac{\eta_i^{(j+1)}}{h_1^2} + \frac{(r^+)_i^{(j+1)}}{h_1} \right), \\ f_i^{(j+1)} = \frac{\tau}{n} \gamma_1 C_m. \end{aligned}$$



(9.15) безпосередньо видно, що $|c_i| > |a_i| + |b_i|$, тобто умови стійкості методу прогонки виконуються. Значення концентрації солей на часовому шарі $(j+1)$ послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$c_i^{(j+1)} = \alpha_{i+1} \cdot c_{i+1}^{(j+1)} + \beta_{i+1}, \quad (9.16)$$

де

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \cdot \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \cdot \beta_i + c_i^{(j)} + f_i^{(j+1)}}{c_i - a_i \cdot \alpha_i}. \quad (9.17)$$

Щоб використати (9.15) – (9.17) потрібно знати $c_i^{(0)}$, $i = \overline{0, n}$, α_1 , β_1 . Значення $c_i^{(0)}$ отримуємо з початкової умови (9.12), тобто

$$c_i^{(0)} = C_0(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Значення α_1 , β_1 отримуємо з граничних умов (9.13). Зокрема,

умову $\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ можна апроксимувати наступним чином з точністю $o(\tau + h_1)$

$$\frac{c_0^{(j+1)} - c_1^{(j+1)}}{h_1} = 0.$$

Звідси $c_0^{(j+1)} = c_1^{(j+1)}$. Тобто в даному випадку $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$.

З умови $c(x, t)|_{x=l} = \tilde{C}(t)$ маємо

$$c_n^{(j+1)} = \tilde{C}(t_{j+1}),$$

тобто для відшукування $c_i^{(j+1)}$ з (9.16) ми отримали початкове значення $c_n^{(j+1)}$ при застосуванні зворотної прогонки.

Розглянемо також випадок задання наступних граничних умов:

$$c(x, t)|_{x=0} = \tilde{C}(t), \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (9.18)$$

Для першої з умов (9.18) маємо

$$c_0^{(j+1)} = \tilde{c}(t_{j+1}),$$



тобто $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \tilde{C}(t_{j+1})$. Для другої з умов (9.18) маємо апроксимацію з точністю $o(\tau + h_1)$

$$\frac{c_{n_1-1}^{(j+1)} - c_{n_1}^{(j+1)}}{h_1} = 0,$$

або $c_{n_1-1}^{(j+1)} = c_{n_1}^{(j+1)}$. При $i = n_1 - 1$ з (9.16) отримуємо $c_{n_1-1}^{(j+1)} = \alpha_{n_1} \cdot c_{n_1}^{(j+1)} + \beta_{n_1}$. Отже, маємо систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} c_{n_1-1}^{(j+1)} = c_{n_1}^{(j+1)}, \\ c_{n_1-1}^{(j+1)} = \alpha_{n_1} \cdot c_{n_1}^{(j+1)} + \beta_{n_1}, \end{cases} \text{ звідки } c_{n_1}^{(j+1)} = \frac{\beta_{n_1}}{1 - \alpha_{n_1}}.$$

В рівняннях (9.11), (9.14) входить функція $u(x, t)$ та відповідні їй сіткові значення $u_i^{(j+1)}$. Тобто, перед знаходженням розв'язку крайової задачі (9.11) – (9.13) функція швидкості фільтрації $u(x, t)$ має бути вже відомою. Згідно закону Дарсі

$$u(x, t) = -k \frac{\partial h(x, t)}{\partial x},$$

де функція напору $h(x, t)$ є розв'язком рівняння Лапласа (див. тему 6)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0,$$

або при $k = const$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0. \quad (9.19)$$

Інтегруючи рівняння (9.19) маємо

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f_1(t),$$

$$h(x, t) = \int f_1(t) dx + f_2(t),$$

$$h(x, t) = f_1(t) \cdot x + f_2(t), \quad (9.20)$$

де $f_1(t)$, $f_2(t)$ – довільні функції, які знаходять з граничних умов для функції $h(x, t)$. Розглянемо наступні випадки:

$$1. \quad h(x, t)|_{x=0} = H_1(t), \quad h(x, t)|_{x=l} = H_2(t), \quad (9.21)$$



де $H_1(t)$, $H_2(t)$ – деякі відомі функції. Тоді з (9.20) та (9.21) маємо

$$\begin{cases} f_2(t) = H_1(t), \\ f_1(t) \cdot l + f_2(t) = H_2(t); \end{cases} \quad \begin{cases} f_1(t) = \frac{H_2(t) - H_1(t)}{l}, \\ f_2(t) = H_1(t). \end{cases}$$

Тобто,

$$h(x, t) = \frac{H_2(t) - H_1(t)}{l} \cdot x + H_1(t).$$

2. $\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$, $h(x, t) \Big|_{x=l} = H_2(t)$. Тоді

$$\begin{cases} f_1(t) = 0, \\ f_1(t) \cdot l + f_2(t) = H_2(t); \end{cases} \quad \begin{cases} f_1(t) = 0, \\ f_2(t) = H_2(t). \end{cases}$$

Отже

3. $h(x, t) \Big|_{x=0} = H_1(t)$, $\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$. Аналогічно з попереднім

випадком, маємо $h(x, t) = H_1(t)$.

Знаючи $h(x, t)$ легко можна знайти $u(x, t)$, використовуючи закон Дарсі.

Питання для самоконтролю

1. Що розуміють під процесом масоперенесення солей?
2. Закон Фіка має вигляд...
3. Якими факторами зумовлюється зміна концентрації солей в поровому розчині пористого середовища?
4. Що називається концентрацією граничного насичення?
5. Запишіть вигляд рівняння, яким описується процес масоперенесення солей.
6. Що означає функція N в рівнянні кінетики масообміну?
7. Запишіть вигляд граничної умови швидкого виносу солей.



Математичне моделювання процесів масопереносу в насичених пористих середовищах

Рівняння, яке описує динаміку зміни концентрації солей в поровому розчині повністю насиченого середовища, в одновимірному випадку має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \right) - u(x,t) \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} - \gamma_m (c(x,t) - C_m) = n \frac{\partial c(x,t)}{\partial t}, \quad (Л4.1)$$
$$x \in (0;l), \quad t > 0.$$

Тут використані наступні позначення:

$c(x,t)$ – концентрація солей в поровому розчині;

D – коефіцієнт дифузії;

$u(x,t)$ – швидкість фільтрації;

n – пористість ґрунту;

γ_m – константа швидкості масообміну;

C_m – концентрація граничного насичення.

Рівняння (Л4.1) потрібно доповнити початковою умовою

$$c(x,0) = C_0(x), \quad x \in (0;l),$$

де $C_0(x)$ – відома функція, та відповідними граничними умовами.

Граничні умови для функції $c(x,t)$ залежать від наступних факторів:

1. При $x=0$ ($x=l$) концентрація солей в поровій воді є відомою. Тоді

$$c(0,t) = c_1(t) \quad c(l,t) = c_2(t),$$

де $c_1(t), c_2(t)$ – задані функції.

2. При $x=0$ ($x=l$) виконується умова швидкого виносу розчинених солей або межа $x=0$ ($x=l$) є непроникною. Тоді

$$\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \right).$$

3. При $x=0$ ($x=l$) виконується гранична умова Данквертса



$$\left[-D \frac{\partial c}{\partial x} + u(c - \tilde{C}_1) \right]_{x=0} = 0 \quad \left(\left[D \frac{\partial c}{\partial x} - u(c - \tilde{C}_1) \right]_{x=l} = 0 \right),$$

де $\tilde{C}_1(x, t)$ – концентрація солей на вході (виході) фільтраційного потоку.

Швидкість фільтрації $u(x, t)$ порового сольового розчину визначається законом Дарсі

$$u(x, t) = -k \frac{\partial h}{\partial x},$$

де k – коефіцієнт фільтрації; $h(x, t)$ – напір в поровій рідині.

В стаціонарному випадку функція h не залежить від часу і є розв'язком рівняння Лапласа (в одновимірному випадку)

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dh}{dx} \right) = 0,$$

яке потрібно доповнити відповідними граничними умовами. Граничні умови для функції $h(x)$ визначаються наступними факторами:

1. На межі $x = 0$ ($x = l$) відомо значення напору. Тоді

$$h(0) = h_1 \quad h(l) = h_2,$$

де h_1, h_2 – задані значення напорів;

2. Межа $x = 0$ ($x = l$) непроникна. Тоді

$$\left. \frac{dh}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \left(\left. \frac{dh}{dx} \right|_{x=l} = 0 \right).$$

Завдання для самостійної роботи

1. Записати математичну модель масопереносу відповідно до постановки задачі.
2. Звести відповідну крайову задачу до СЛАР методом скінченних різниць або методом скінченних елементів.
3. Провести розрахунок з використанням ПЕОМ (в будь-якому середовищі програмування).
4. Результати відобразити в графічному вигляді з можливістю спостереження зміни концентрації солей в часі.
5. Написати звіт з інтерпретацією отриманих результатів та захистити лабораторну роботу.



I. Дано шар ізотропного, повністю насиченого поровим сольовим розчином ґрунту, товщиною l (рис. Л4.1) та нескінченної ширини. В ґрунті задано початковий розподіл концентрації порового сольового розчину $C_0(x)$. Також задано граничні умови для напору на верхній та нижній межах ґрунту, або задано розподіл напорів по всій товщині шару ґрунту (напірна функція не залежить від часу).

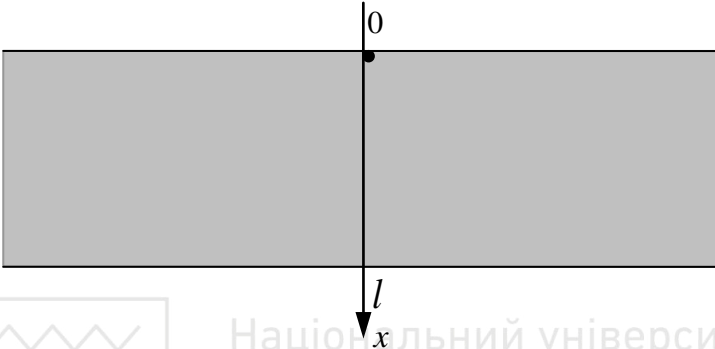


Рис. Л4.1. Шар однорідного ізотропного ґрунту

1. Знайти розподіл концентрації солей в ґрунті, якщо $c(0, t) = C_m$, а нижня межа ґрунту непроникна. Причому $h(0) = H_1$.
2. Знайти розподіл концентрації солей в ґрунті, якщо $c(l, t) = C_m$, а на верхній межі виконується умова швидкого виносу забруднень. Причому $h(0) = H_1, h(l) = H_2$.
3. Знайти розподіл концентрації солей в ґрунті, якщо $c(0, t) = C_m$, а на нижній межі виконується умова Данквертса. Причому $h(x) = x(l - x)$.
4. Знайти розподіл концентрації солей в ґрунті, якщо $c(0, t) = C_1(t)$, а на нижній межі виконується умова швидкого виносу солей. Причому $h(0) = H_1, h(l) = H_2$.
5. Знайти розподіл концентрації солей в ґрунті, якщо верхня межа ґрунту непроникна, а $c(l, t) = C_2(t)$. Причому $h(l) = H_2$.

6. Знайти розподіл концентрації солей в ґрунті, якщо на верхній межі виконується умова Данквертса, а $c(l, t) = C_2$. Причому $h(0) = H_1, h(l) = H_2$.

II. Дано два баки з розчином солі, які з'єднані трубкою довжиною l . В трубці знаходиться ізотропний ґрунт (рис. Л4.2). Напори в обох баках не залежать від часу і дорівнюють H_1 та H_2 відповідно. Початковий розподіл концентрації солей в трубці дорівнює $C_0(x)$.

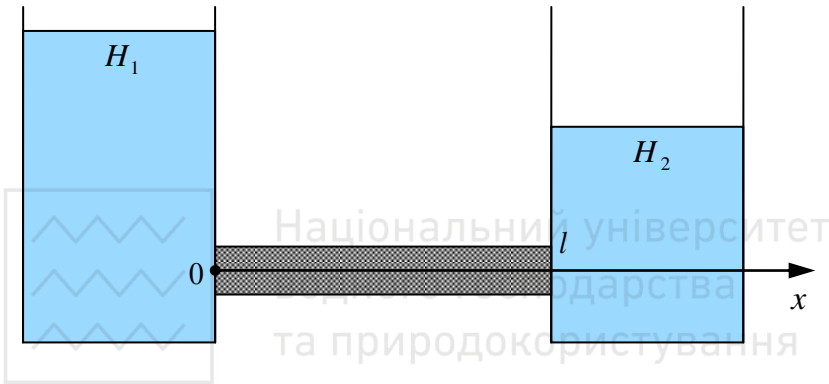


Рис. Л4.2. Трубка, наповнена ґрунтом

7. Визначити розподіл концентрації солей в трубці, якщо в першому баці $c(0, t) = C_m$, а на правому кінці трубки приймається умова швидкого виносу солей.
8. Визначити розподіл концентрації солей в трубці, якщо в другому баці $c(l, t) = C_m$, а на лівому кінці трубки виконується гранична умова Данквертса.
9. Визначити розподіл концентрації солей в трубці, якщо в правому баці $c(l, t) = C_m$, а на лівому кінці трубки виконується умова швидкого виносу солей.
10. Визначити розподіл концентрації солей в трубці, якщо в лівому баці концентрація приймає значення C_1 , а на правому кінці трубки виконується гранична умова Данквертса.



11. Визначити розподіл концентрації солей в трубі, якщо в правому баці концентрація дорівнює C_1 , а в лівому - C_2 .

III. Відбувається фільтрація забрудненої води від водойми до водозабірника (рис. Л4.3). Ґрунт вважається ізотропним. Водоносний пласт має довжину l і відомо початковий розподіл концентрації забруднень в даному пласті $C_0(x)$.

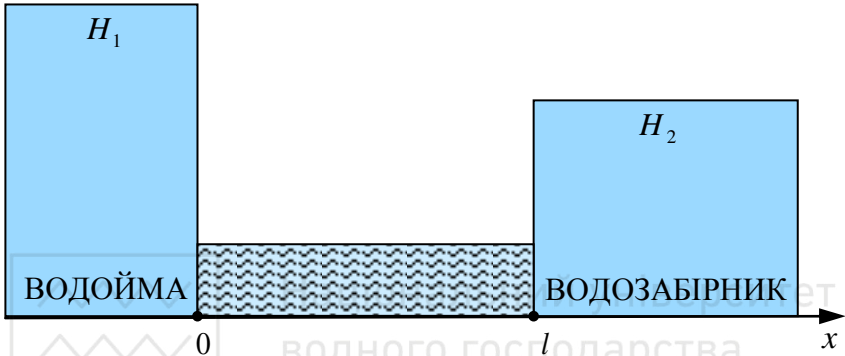


Рис. Л4.3. Фільтрація води від водойми до водозабірника

12. Визначити розподіл концентрації забруднень по довжині водоносного пласта, якщо у водоймі $c(0,t) = C_m$, а у водозабірнику відбувається швидке винесення забруднень.
13. Визначити розподіл концентрації забруднень по довжині водоносного пласта, якщо у водоймі $c(0,t) = C_m$, а у водозабірнику для $c(x,t)$ задається гранична умова Данквертса.
14. Визначити розподіл концентрації забруднень по довжині водоносного пласта, якщо у водоймі $c(0,t) = C_1$, а у водозабірнику $c(l,t) = C_2$.



Числові значення параметрів в математичних моделях масопереносу:

$$n = \frac{S+10}{S+20}; D = 0,01 \cdot S \quad \text{м}^2/\text{доба}; \gamma_m = 6,5 \cdot 10^{-5} \cdot S \left[\frac{1}{\text{доба}} \right];$$

$$k = 1,5 + 0,05 \cdot S \left[\frac{\text{м}}{\text{доба}} \right]; C_m = 10 \cdot s \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]; l = 10 \cdot (s+1) \quad \text{м};$$

де S – номер варіанту.

1. $C_0(x) = C_m \cdot e^{-10x}, H_1 = 10\text{м};$
2. $H_1 = 0\text{м}, H_2 = 15\text{м}, C_0(x) = C_m \cdot e^{-10(l-x)};$
3. $C_0(x) = C_m \cdot e^{-5x}, C_1 = 10\text{кг}/\text{м}^3;$
4. $C_1 = C_m, C_0(x) = 5\text{кг}/\text{м}^3, H_1 = 10\text{м}, H_2 = 0\text{м};$
5. $C_2 = C_m, C_0(x) = 8\text{кг}/\text{м}^3, H_2 = 5\text{м};$
6. $C_2 = C_m, \tilde{C}_1 = 20\text{кг}/\text{м}^3, C_0(x) = C_m \cdot \frac{x}{l}, H_1 = 2\text{м}, H_2 = 10\text{м};$
7. $H_1 = 50\text{м}, H_2 = 10\text{м}, C_0(x) = 0\text{г}/\text{літр};$
8. $H_1 = 10\text{м}, H_2 = 40\text{м}, C_0(x) = C_m \cdot \frac{x}{l}, \tilde{C}_1 = 5\text{кг}/\text{м}^3;$
9. $H_1 = 50\text{м}, H_2 = 100\text{м}, C_0 = 0\text{кг}/\text{м}^3;$
10. $C_1 = 0\text{кг}/\text{м}^3, \tilde{C}_1 = 10\text{кг}/\text{м}^3, H_1 = 15\text{м}, H_2 = 5\text{м}, C_0(x) = C_m;$
11. $H_1 = 30\text{м}, H_2 = 7\text{м}, C_0 = C_m \cdot e^{-10x}, C_1 = C_m, C_2 = 0\text{кг}/\text{м}^3;$
12. $H_1 = 25\text{м}, H_2 = 10\text{м}, C_0(x) = 8\text{кг}/\text{м}^3;$
13. $H_1 = 20\text{м}, H_2 = 5\text{м}, C_0(x) = 8\text{кг}/\text{м}^3, \tilde{C}_1 = 8\text{кг}/\text{м}^3;$
14. $H_1 = 30\text{м}, H_2 = 5\text{м}, C_1 = C_m, C_2 = 5\text{кг}/\text{м}^3, C_0(x) = 5\text{кг}/\text{м}^3.$

ТЕМА 10. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ

Базові поняття: закон Фур'є, теплоперенесення, коефіцієнт теплопровідності, питома теплоємність, фазові перетворення, задача Стефана, релаксація теплових напружень

§10.1. Теплоперенесення в твердих тілах

Основним законом, який описує теплові процеси в теорії теплопровідності є закон Фур'є. Згідно даного закону тепловий потік пропорційний градієнту температури

$$\bar{q} = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad (10.1)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу тіла, $[\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{доба}}$;

T – температура, $[T] = ^\circ\text{C}$. В проєкціях на осі координат закон (10.1) набуває вигляду

$$q_1 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad q_2 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2}, \quad q_3 = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_3}.$$

Виділимо в досліджуваному тілі паралелепіпед із ребрами довжиною dx_1 , dx_2 , dx_3 , які паралельні осям координат (рис. 10.1).

Через грань $dx_2 dx_3$ за час dt в розглядуваний паралелепіпед ввійде кількість тепла $q_1 dx_2 dx_3 dt$, а вийде $q_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 dt$. Або, розкладаючи в ряд Тейлора і нехтуючи нескінченно малими другого порядку, маємо

$$q_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 dt = \left(q_1(x_1, x_2, x_3, t) + \frac{\partial q_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 dt.$$

Отже, зміна кількості тепла в об'ємі $V = dx_1 dx_2 dx_3$ за рахунок даної грані буде

$$-\frac{\partial q_1(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1} V dt,$$

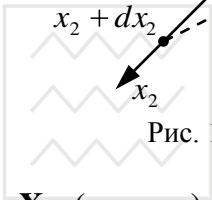
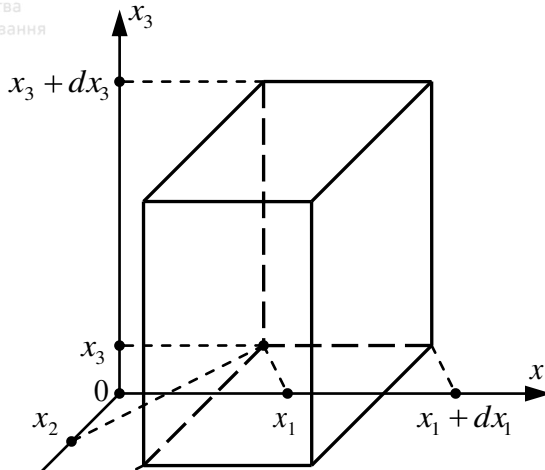


Рис. 10.1. Виділений фрагмент твердого тіла

де $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$. Аналогічно за рахунок грані $dx_1 dx_2$ зміна кількості тепла буде

$$-\frac{\partial q_3(\mathbf{X}, t)}{\partial x_3} V dt$$

і за рахунок грані $dx_1 dx_3$

$$-\frac{\partial q_2(\mathbf{X}, t)}{\partial x_2} V dt.$$

Тому загальна зміна кількості тепла в виділеному об'ємі V за час dt буде

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i(\mathbf{X}, t)}{\partial x_i} V dt. \quad (10.2)$$

З іншого боку, в момент часу t кількість тепла в виділеному об'ємі V була



$$c \underbrace{\rho V}_m \cdot T(\mathbf{X}, t),$$

де c – питома теплоємність матеріалу об'єкта ($[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$); ρ – густина матеріалу.

Припустимо, що $c = \text{const}$, $\rho = \text{const}$. Тоді в момент часу $(t + dt)$ кількість теплової енергії стане

$$c\rho \cdot V \cdot T(\mathbf{X}, t + dt),$$

або розкладаючи в ряд Тейлора по t і нехтуючи нескінченно малими другого порядку і вище, отримаємо

$$c\rho \left(T(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial T}{\partial t} dt \right) \cdot V.$$

Тобто, кількість теплової енергії за час dt зміниться на величину

$$c\rho \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} V dt. \quad (10.3)$$

Прирівнюючи (10.2) та (10.3), маємо

$$c\rho \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} V dt = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial q_i(\mathbf{X}, t)}{\partial x_i} V dt,$$

а з урахуванням закону (10.1)

$$c\rho \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \text{div}(\boldsymbol{\lambda} \text{grad } T(\mathbf{X}, t)). \quad (10.4)$$

Рівняння (10.4) виведене без урахування внутрішніх джерел тепла (за рахунок хімічних реакцій, проходження струму і ін.). Якщо врахувати це явище, то отримаємо

$$c\rho \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \text{div}(\boldsymbol{\lambda} \text{grad } T(\mathbf{X}, t)) + f(\mathbf{X}, t), \quad (10.5)$$

де $f(\mathbf{X}, t)$ – інтенсивність внутрішніх джерел тепла, $[f] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{доба}}$.

§10.2. Перенесення тепла в насичених пористих середовищах

В насичених пористих середовищах перенесення тепла відбувається не лише за рахунок теплопровідності матеріалу середовища, але і за рахунок фільтрації порової рідини. Тому закон Фур'є (10.1) модифікується і набуває вигляду



$$\vec{q} = \rho c_p \vec{u} T - \lambda \text{grad} T, \quad (10.6)$$

де ρ – густина порової рідини; c_p – питома теплоємність порової рідини; \vec{u} – вектор швидкості фільтрації, який визначається законом Дарсі.

Тоді рівняння теплопровідності для даного випадку набуває вигляду

$$\rho c_p n + c_s \rho_s (1-n) \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \text{div} (\lambda \text{grad} T(\mathbf{X}, t) - \rho c_p \vec{u} T(\mathbf{X}, t)) + f(\mathbf{X}, t), \quad (10.7)$$

де n – пористість; c_s – питома теплоємність скелету пористого середовища; ρ_s – густина скелету пористого середовища.

Рівняння (10.7) можна записати в простішому вигляді. Для цього введемо позначення $c_T = \rho c_p n + c_s \rho_s (1-n)$. Величину c_T називають об'ємною теплоємністю пористого середовища і її

розмірність $[c_T] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}}$. Крім того, будемо вважати $\rho = \text{const}$,

$c_p = \text{const}$, а скелет пористого середовища недеформівним. Тоді згідно теми 6 $\text{div} \vec{u} = 0$ і

$$\text{div}(\rho c_p \vec{u} T) = \rho c_p (T \text{div} \vec{u} + \vec{u} \text{grad} T) = \rho c_p \vec{u} \text{grad} T.$$

Тоді рівняння (10.7) набуває вигляду

$$c_T \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} T(\mathbf{X}, t)) - \rho c_p \vec{u} \text{grad} T(\mathbf{X}, t) + f(\mathbf{X}, t). \quad (10.8)$$

Для ґрунтів маємо теплофізичні характеристики, наведені в наступній таблиці:

	$\lambda, \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ\text{C}}$	$c_T, \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}}$	n
Пісок	$15298 \cdot 10^3$	$2,1 \cdot 10^6$	0,4
Глина	$10136 \cdot 10^3$	$2,1 \cdot 10^6$	0,4
Вода	$5,43 \cdot 10^3$	-	-

§10.3. Гіперболічне рівняння теплопереносу

Закон Фур'є (10.1) отриманий на основі припущення нескінченної швидкості розповсюдження тепла в середовищі (градієнт температури



та густина теплового потоку в будь-який момент часу співрозмірні один одному). Але для високоінтенсивних нестационарних теплових процесів потрібно враховувати обмеженість (скінченність) швидкості розповсюдження тепла, так звану інерцію тепла. В результаті закон Фур'є набуває модифікованого вигляду за рахунок наявності інерційного члена

$$\bar{\mathbf{q}} = -\lambda \operatorname{grad} T - \tau_r \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t}, \quad (10.9)$$

де τ_r – час релаксації теплових напружень. Тоді з рівняння нерозривності з урахуванням наявності джерел (стоків) тепла

$$c\rho \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{X}, t) + f(\mathbf{X}, t) \quad (10.10)$$

рівняння теплопереносу набуває вигляду

$$c\rho \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T(\mathbf{X}, t)) + \tau_r \operatorname{div} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + f(\mathbf{X}, t). \quad (10.11)$$

Продиференціюємо рівняння (10.10) по t . Маємо

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial^2 T(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} &= -c\rho \frac{\partial^2 T(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Підставляючи (10.12) в (10.11), отримуємо

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} &= \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T(\mathbf{X}, t)) - \tau_r c\rho \frac{\partial^2 T(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} + \tau_r \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + f(\mathbf{X}, t), \\ c\rho \left(\frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \right) &= \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T(\mathbf{X}, t)) + \\ &+ \tau_r \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + f(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (10.13)$$

Рівняння (10.13) є рівнянням гіперболічного типу. Які фізичні процеси описують рівняння гіперболічного типу? Що це означає для теплових процесів?

Зауважимо, що наявність інерційних членів встановлена і в законі Дарсі і в законі Фіка.

§10.4. Задача Стефана

Розглянемо фазові перетворення: “тверде тіло” – “рідина”. Прикладом таких задач є процеси плавлення та затвердіння в металургії, розчинення сольових пластів, утворення та плавлення льоду і ін.

Будемо вважати, що фазовий перехід відбувається при заданій постійній температурі фазового переходу T^* . Фазовий перехід відбувається на межі розділу фаз, яку позначимо S , причому $S = S(x_1, x_2, x_3, t)$. Дана межа розділяє досліджувану область Ω на дві підобласті. Область $\Omega^+(t)$ зайнята рідкою фазою, де температура перевищує температуру фазового переходу $\Omega^+(t) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega : T(x_1, x_2, x_3, t) > T^*\}$. Відповідно область $\Omega^-(t)$ зайнята твердою фазою $\Omega^-(t) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega : T(x_1, x_2, x_3, t) < T^*\}$ (рис. 10.2).

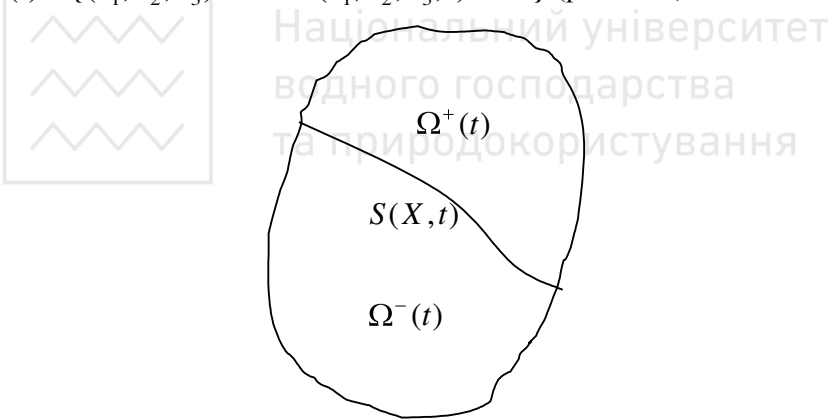


Рис. 10.2. Система “тверде фаза” – “рідка фаза”

Тоді в твердій фазі маємо:

$$c^- \rho^- \frac{\partial T^-(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \text{div}(\lambda^- \text{grad} T^-(\mathbf{X}, t)) + f^-(\mathbf{X}, t), \quad (10.14)$$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega^-.$$

Враховуючи конвективне перенесення (за рахунок руху рідини) в рідкій фазі маємо



$$c^+ \rho^+ \frac{\partial T^+(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda^+ \operatorname{grad} T^+(\mathbf{X}, t)) - c^+ \rho^+ \bar{\mathbf{u}} \operatorname{grad} T^+(\mathbf{X}, t) + \quad (10.15)$$

$$+ f^+(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = (x, x, x) \in \Omega^+,$$

де $\bar{\mathbf{u}}$ – вектор швидкості руху рідкої фази.

На межі контакту $S(\mathbf{X}, t)$ двох середовищ для температури потрібно задавати додаткові умови, які називаються **умовами спряження**. Нехай $[v] = v^+ - v^-$, $(x_1, x_2, x_3) \in S$ – стрибок деякої функції на межі S . Тоді перша умова спряження виражає припущення про неперервність температури

$$[T(\mathbf{X}, t)] = 0, \quad \mathbf{X} \in S, \quad t > 0. \quad (10.16)$$

Фазовий перехід супроводжується виділенням (поглинанням) певної кількості тепла. Тому тепловий потік на межі фазового переходу розривний, що виражається в другій умові спряження

$$\left[\lambda \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right] = -L V_n(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in S, \quad t > 0, \quad (10.17)$$

де L – ентальпія фазового переходу, $L = U + pV$, де U – внутрішня енергія системи, p – тиск, V – об'єм системи, $V_n(\mathbf{X}, t)$ – швидкість руху межі фазового переходу по нормалі.

Сама межа фазового переходу S визначається на кожний момент часу як $S = S(\mathbf{X}, t) = \{\mathbf{X} \in \Omega, T(\mathbf{X}, t) = T^*\}$, тобто на межі фазового переходу повинна виконуватись умова першого роду

$$T(\mathbf{X}, t) = T^*, \quad \mathbf{X} \in S, \quad t > 0. \quad (10.18)$$

Умови (10.16)–(10.18) називаються **умовами Стефана**, а відповідна задача для рівнянь (10.14), (10.15) – **двохфазною задачею Стефана**.

Якщо теплове поле в одній із фаз відоме, то говорять про **однофазну задачу Стефана**. В цьому випадку невідома границя фазового переходу S є не внутрішньою, а зовнішньою (до однофазної задачі можуть приводити і задачі розчинення солей, де замість температури розглядається концентрація $c(\mathbf{X}, t)$ сольового розчину).

Наприклад, будемо рахувати, що область Ω^- зайнята твердою фазою при температурі T^* . Тоді для знаходження температури в



рідкій фазі використовується рівняння (10.15) в змінній області $\Omega^+(t)$ з наступними умовами на межі S :

$$T^+(\mathbf{X}, t) = T^*, \quad \mathbf{X} \in S, \quad t > 0, \quad (10.19)$$

$$\lambda^+ \frac{\partial T^+}{\partial n} = -LV_n(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in S, \quad t > 0. \quad (10.20)$$

Умови типу (10.19), (10.20) характеризують однофазну задачу Стефана.

§10.5. Початкові та граничні умови

Початкові умови задають температурне поле в початковий момент часу

$$T(\mathbf{X}, t)|_{t=0} = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (10.21)$$

де $T_0(\mathbf{X})$ – задана функція.

При дослідженні високоінтенсивних температурних процесів на основі гіперболічного рівняння теплопровідності, потрібно задавати дві початкові умови. Наприклад, в початковий момент часу відома температура та швидкість її зміни в часі. Тоді, окрім умови (10.21) має бути ще й умова

$$\left. \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega,$$

де $v(\mathbf{X})$ – відома функція.

Основні граничні умови є трьох родів.

1. *Першого роду* характеризується заданням температури на межі Γ

$$T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad t > 0,$$

де $T_1(\mathbf{X}, t)$ – відома функція.

2. *Другого роду* характеризується заданням на межі області величини теплового потоку

$$(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{n}})|_{\Gamma} = q_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad t > 0,$$

де $\bar{\mathbf{n}}$ – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі Γ . Якщо досліджувати температурне поле без урахування впливу швидкості фільтрації, то з вищенаведеної умови маємо



$$-\lambda \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = q_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad t > 0.$$

Умова теплоізоляції набуває вигляду

$$-\lambda \frac{\partial T(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

3. **Третього роду** моделює теплообмін між досліджуваним тілом та навколишнім середовищем, яке має температуру $T_1(\mathbf{X}, t)$. Згідно закону Ньютона-Ріхмана тепловий потік пропорційний різниці температур

$$(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{n}}) \Big|_{\Gamma} = \alpha \left(T(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma} - T_1(\mathbf{X}, t) \right), \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (10.22)$$

де α – коефіцієнт теплообміну. Зважаючи на закон Фур'є (10.1), з (10.22) маємо

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \alpha \left(T(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma} - T_1(\mathbf{X}, t) \right), \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad t > 0.$$

Питання для самоконтролю

1. Що розуміють під процесом теплоперенесення?
2. Питомою теплоємністю деякого матеріалу називають...
3. Об'ємною теплоємністю насиченого пористого середовища називається...
4. Чим відрізняється з математичної точки зору однофазна задача Стефана від двофазної?
5. Запишіть вигляд гіперболічного рівняння теплопереносу.
6. В чому полягає задача Стефана?
7. Чим відрізняється закон теплоперенесення в твердих тілах від закону теплоперенесення в водонасичених пористих тілах?
8. З якою метою задають умови спряження?
9. Який фізичний зміст граничної умови третього роду?



Математичне моделювання процесів теплопереносу в насичених пористих середовищах

Рівняння, яке описує динаміку зміни температури насиченого пористого середовища в одновимірному випадку має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (0; l), \quad t > 0. \quad (Л5.1)$$

де $T(x, t)$ – температура пористого середовища;

λ – коефіцієнт ефективної теплопровідності вологого ґрунту;

ρ – густина порової рідини;

c_p – питома теплоємність порової рідини;

c_T – об'ємна теплоємність ґрунту.

Рівняння (Л5.1) потрібно доповнити початковою умовою

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in [0; l]$$

та відповідними граничними умовами. Тут $T_0(x)$ відома функція.

Граничні умови для температури $T(x, t)$ залежать від наступних факторів:

1. При $x = 0$ ($x = l$) температура є відомою

$$T(0, t) = T_1(t) \quad \left(T(l, t) = T_2(t) \right), \quad t \geq 0,$$

де $T_1(t)$, $T_2(t)$ – відомі функції.

2. Задано тепловий потік через межу $x = 0$ ($x = l$)

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = q_1(t) \quad \left(\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = q_2(t) \right), \quad t \geq 0,$$

де $q_1(t)$, $q_2(t)$ – задані значення теплових потоків.

3. При $x = 0$ ($x = l$) теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого T_z , здійснюється згідно закону Ньютона-Ріхмана

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \alpha \left(T(0, t) - T_z \right) \quad \left(\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = \alpha \left(T(l, t) - T_z \right) \right),$$

де α – коефіцієнт теплообміну.



Завдання для самостійної роботи

1. Записати математичну модель теплопереносу відповідно до постановки задачі.
2. Звести крайову задачу до СЛАР методом скінченних різниць або методом скінченних елементів.
3. Провести розрахунок з використанням ПЕОМ (в будь-якому середовищі програмування).
4. Результати відобразити в графічному вигляді з можливістю спостереження зміни температури в часі.
5. Написати звіт з інтерпретацією отриманих результатів та захистити лабораторну роботу.

I. Дано шар ізотропного ґрунту товщиною l (рис. Л5.1) нескінченної ширини. В ґрунті задано початковий розподіл температури $T_0(x)$. Також задано граничні умови для напору на верхній та нижній межах ґрунту, або задано розподіл напорів по всій товщині шару ґрунту (напірна функція не залежить від часу).

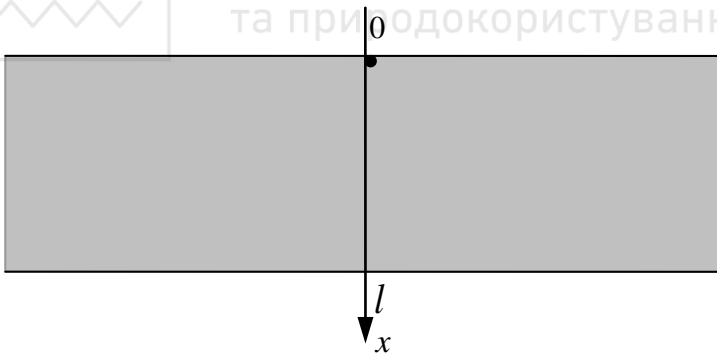


Рис. Л5.1. Шар однорідного ізотропного ґрунту

1. Знайти розподіл температури в ґрунті, якщо $T(0,t) = T_1$, а нижня межа ґрунту теплоізолювана. Причому $h(0) = H_1$, $h(l) = H_2$.
2. Знайти розподіл температури в ґрунті, якщо $T(l,t) = T_2$, а верхня межа ґрунту теплоізолювана. Причому $h(0) = H_1$, а нижня межа ґрунту непроникна.

3. Знайти розподіл температури в ґрунті, якщо $T(l, t) = T_2$, а на верхній межі проходить теплообмін із зовнішнім середовищем, яке має температуру T_z , згідно закону Ньютона-Ріхмана. Розподіл напорів в ґрунті $h(x) = x \cdot (l - x) \cdot H_1$.

4. Знайти розподіл температури в ґрунті, якщо на верхній межі задана температура T_1 , а нижня межа масиву ґрунту теплоізолювана та непроникна. Причому $h(0) = H_1$.

5. Знайти розподіл температури в ґрунті, якщо $T(0, t) = T_1$, а на нижній межі проходить теплообмін із зовнішнім середовищем, яке має температуру T_z , згідно закону Ньютона-Ріхмана. Причому $h(0) = H_1, h(l) = H_2$.

6. Знайти розподіл температури в ґрунті, якщо верхня межа масиву ґрунту теплоізолювана та непроникна, а на нижній межі задана температура T_2 . Причому $h(l, t) = H_2$.

II. Дано два баки, які з'єднані трубою довжиною l . В трубці знаходиться ізотропний ґрунт (рис. Л5.2). Напори в обох баках не залежать від часу і дорівнюють H_1 та H_2 відповідно. Поверхня трубки теплоізолювана. Початковий розподіл температури в трубці дорівнює $T_0(x)$.

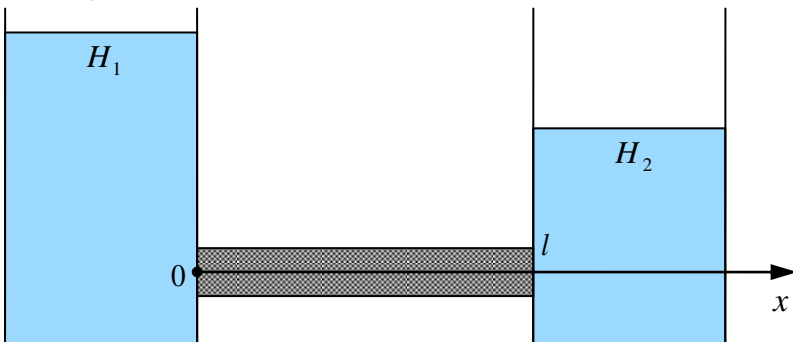


Рис. Л5.2. Трубка, наповнена ґрунтом

7. Визначити розподіл температури в трубці, якщо температура розчину в лівому баці дорівнює T_1 , а на правому кінці трубки задано значення теплового потоку q_2 .
8. Визначити розподіл температури в трубці, якщо температура розчину в правому баці дорівнює T_2 , а на лівому кінці трубки задано значення теплового потоку q_1 .
9. Визначити розподіл температури в трубці, якщо температура розчину в лівому баці дорівнює T_1 , а в правому - T_2 .
10. Визначити розподіл температури в трубці, якщо температура розчину в лівому баці дорівнює T_1 , а на правому кінці трубки здійснюється теплообмін згідно закону Ньютона-Ріхмана (температура розчину в правому баці T_2) (бічна поверхня трубки теплоізолювана).
11. Визначити розподіл температури в трубці, якщо температура розчину в лівому баці дорівнює T_1 , а правий кінець трубки теплоізолюваний (бічна поверхня трубки теплоізолювана).

III. Відбувається фільтрація забрудненої води від водойми до водозабірника (рис. Л5.3). Ґрунт вважається ізотропним. Водоносний пласт має довжину l і відомо початковий розподіл температури ґрунту в даному пласті $T_0(x)$.

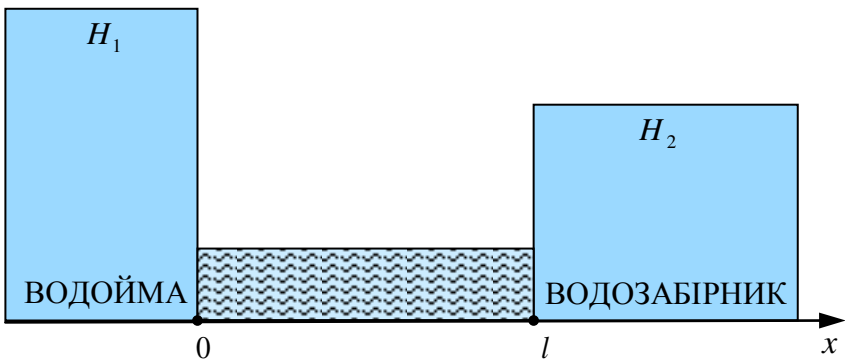


Рис. Л5.3. Фільтрація води від водойми до водозабірника

12. Визначити розподіл температури по довжині водоносного пласта, якщо у водоймі температура $T(0,t) = T_1$, а у водозабірнику, в якому температура T_z , теплообмін здійснюється згідно закону Ньютона-Ріхмана. Водоносний пласт зверху та знизу теплоізований (товщиною водоносного пласта знехтувати).
13. Визначити розподіл температури на довжині водоносного пласта, якщо у водоймі температура $T(0,t) = T_1$, а у водозабірнику - $T(l,t) = T_2$. Водоносний пласт зверху та знизу теплоізований (товщиною водоносного пласта знехтувати).
14. Визначити розподіл температури по довжині водоносного пласта, якщо у водоймі температура T_1 , а у водозабірнику водоносний пласт теплоізований. Водоносний пласт зверху та знизу теплоізований (товщиною водоносного пласта знехтувати).

Числові значення параметрів в математичних моделях теплопереносу:

$$n = \frac{S+10}{S+20}; k = 1,5 + 0,05 \cdot S \left[\frac{\text{м}}{\text{доба}} \right];$$
$$C_T = 700 + 10 \cdot (S-1) \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}} \right]; \lambda = 90 + S \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}} \right];$$
$$\rho = 1000 + S \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]; c_p = 420 + 10 \cdot (S-1) \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \right];$$
$$l = 10 \cdot (s+1) \text{ м};$$

де S – номер варіанту.

1. $T_1 = 30^\circ \text{C}$, $H_1 = 5\text{м}$, $H_2 = 10\text{м}$, $T_0(x) = 30 \cdot e^{-x}$;
2. $T_2 = 20^\circ \text{C}$, $H_1 = 7\text{м}$, $T_0(x) = 0^\circ \text{C}$;
3. $H_1 = 5\text{м}$, $T_2 = 5^\circ \text{C}$, $T_z = 40^\circ \text{C}$, $T_0(x) = 5 \cdot e^{l-x}$, $\alpha = 0,1$;
4. $T_1 = 30^\circ \text{C}$, $H_1 = 5\text{м}$, $T_0(x) = 30 \cdot \frac{l-x}{l}$;
5. $T_1 = 40^\circ \text{C}$, $T_0(x) = 40^\circ \text{C}$, $T_z = 10^\circ \text{C}$, $\alpha = 0.02$, $H_1 = 0\text{м}$, $H_2 = 10\text{м}$;
6. $T_2 = 40^\circ \text{C}$, $T_0(x) = 0^\circ \text{C}$, $H_2 = 10\text{м}$;



7. $T_1 = 40^{\circ}C$, $H_1 = 10m$, $H_2 = 5m$, $q_2 = 5 \frac{Дж}{m^2 \cdot доба}$, $T_0(x) = T_1 \cdot e^{-x}$;
8. $T_2 = 5^{\circ}C$, $H_1 = 20m$, $H_2 = 5m$, $q_1 = -100 \frac{Дж}{m^2 \cdot доба}$, $T_0(x) = T_2 \cdot e^{x-l}$;
9. $T_1 = 30^{\circ}C$, $T_2 = 5^{\circ}C$, $H_1 = 20m$, $H_2 = 5m$, $T_0(x) = 5^{\circ}C$;
10. $T_1 = 35^{\circ}C$, $T_2 = 10^{\circ}C$, $H_1 = 17m$, $H_2 = 6m$, $T_0(x) = 5^{\circ}C$;
11. $T_1 = 35^{\circ}C$, $H_1 = 20m$, $H_2 = 6m$, $T_0(x) = 10^{\circ}C$;
12. $H_1 = 15m$, $H_2 = 5m$, $T_1 = 30^{\circ}C$, $T_2 = 5^{\circ}C$, $\alpha = 0.5$, $T_0(x) = 5^{\circ}C$;
13. $H_1 = 20m$, $H_2 = 10m$, $T_1 = 40^{\circ}C$, $T_2 = 10^{\circ}C$, $T_0(x) = 10^{\circ}C$;
14. $H_1 = 17m$, $H_2 = 7m$, $T_1 = 35^{\circ}C$, $T_0(x) = 5^{\circ}C$.





РОЗДІЛ 4

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ ТА ГІДРОДИНАМІКИ

ТЕМА 11. РІВНЯННЯ ГАЗОВОЇ ДИНАМІКИ

Базові поняття: газ, суцільне середовище, рівняння нерозривності, рівняння руху, рівняння енергії, стискуваність

§11.1. Рівняння нерозривності для стискуваного газу

Газова динаміка вивчає рух стискуваних речовин під дією певних зовнішніх сил або сил тиску самої речовини. При цьому вважається, що $\lambda \ll L$, де λ – довжина вільного пробігу частинки речовини; L – характерні розміри області, в якій досліджується процес. Це припущення дозволяє розглядати речовину, як суцільне середовище.

Для кожної частинки, яка пов'язана з невеликою фіксованою масою стискуваного середовища, вводяться осереднені величини – густина ρ , тиск p , температура T , внутрішня енергія ε , а також швидкість $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ її макроскопічного руху, як єдиного цілого. В загальному випадку всі ці величини залежать від $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$ та часу t .

В подальшому припускаємо відсутність в середовищі процесів теплопередачі, в'язкого тертя, джерел (стоків) енергії та маси, а також зовнішніх об'ємних сил.

Для виведення рівняння нерозривності використаємо підхід, що застосовувався при виведенні рівняння нерозривності для фільтрації ґрунтових вод та процесів тепло-масопереносу. Розглянемо в області, в якій досліджується рух газу, елементарний паралелепіпед з ребрами dx_1 , dx_2 , dx_3 і підрахуємо в ньому баланс маси за час dt (рис. 11.1).

Через грань $dx_2 dx_3$ за час dt в кубик надійде маса газу $\rho(x_1, x_2, x_3, t) v_1(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 dt$, а вийде

$$\rho(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 dt. \quad (11.1)$$

Використовуючи в (11.1) розклад в ряд Тейлора і нехтуючи нескінченно малими вище другого порядку, отримаємо

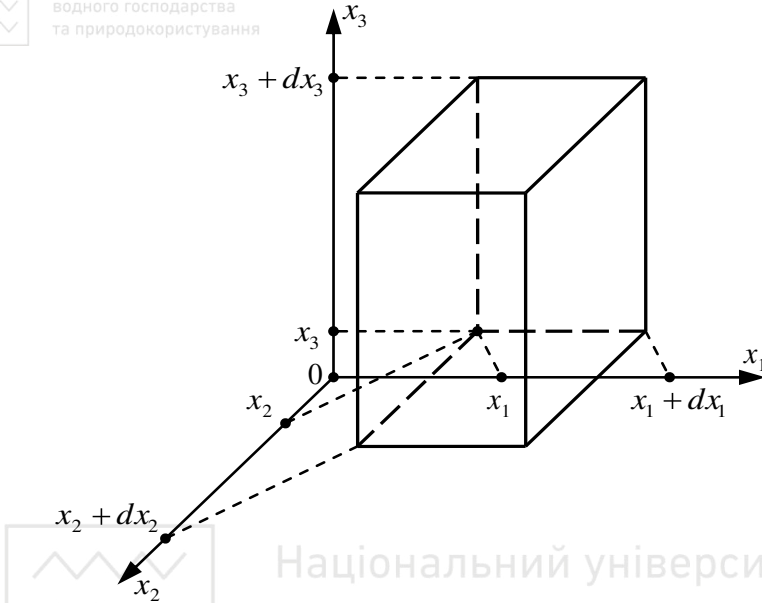


Рис. 11.1. Елементарний паралелепіпед – фрагмент середовища

$$\begin{aligned} & \rho(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 dt = \\ & = \rho(x_1, x_2, x_3, t) v_1(x_1, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 dt + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\rho(x_1, x_2, x_3, t) v_1(x_1, x_2, x_3, t) \underbrace{dx_2 dx_3}_{V} dt \right). \end{aligned}$$

Отже, зміна маси газу в кубіку за час dt завдяки грані $dx_2 dx_3$ буде

$$dm_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \rho(x_1, x_2, x_3, t) v_1(x_1, x_2, x_3, t) \underline{V} dt.$$

Аналогічно

$$dm_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} \rho(x_1, x_2, x_3, t) v_2(x_1, x_2, x_3, t) \underline{V} dt,$$

$$dm_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3} \rho(x_1, x_2, x_3, t) v_3(x_1, x_2, x_3, t) \underline{V} dt.$$



Маса газу в кубіку в момент часу t була $\rho(x_1, x_2, x_3, t)V$, а через проміжок часу dt буде $\rho(x_1, x_2, x_3, t + dt)V$, або, знову ж, використовуючи розклад в ряд Тейлора по змінній t : $\rho(x_1, x_2, x_3, t)V + \frac{\partial \rho(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} V dt$. Тобто, зміна маси dm за рахунок зміни густини буде $dm = \frac{\partial \rho(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t} V dt$. Тоді, згідно

закону збереження маси маємо

$$\sum_{i=1}^3 dm_i = dm,$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x_1} \rho v_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \rho v_2 - \frac{\partial}{\partial x_3} \rho v_3 \right) V dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} V dt,$$

або

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (11.2)$$

де $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t)$, $\vec{v} = (v_1(x_1, x_2, x_3, t); v_2(x_1, x_2, x_3, t); v_3(x_1, x_2, x_3, t))$.

§11.2. Рівняння руху газу

Для отримання рівнянь руху газу застосуємо другий закон Ньютона до елементарної рідкої частинки, що має в деякий момент часу t форму кубика з ребрами dx_1 , dx_2 , dx_3 (рис. 11.1). Рідка частинка – це об'єм, який рухається в просторі і змінює свою форму, але містить в різні моменти часу t одні і ті ж атоми та молекули газу. Тобто, її маса dm постійна. Для простоти виведення вважаємо, що за короткий час dt кубик не змінює своєї форми і зміщується у всіх напрямках на відстані, які набагато менші його розмірів.

Визначимо силу, яка діє на кубик в напрямку осі x_1 , тобто на грань $dx_2 dx_3$. Вона дорівнює різниці тисків на лівій та правій гранях, яка помножена на їх площі

$$F_1 = p(x_1, x_2, x_3, t) - p(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3.$$

Або $F_1 = \frac{p(x_1, x_2, x_3, t) - p(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t)}{dx_1} V$ і при $dx_1 \rightarrow 0$ маємо



$$F_1 = -\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} V. \quad (11.3)$$

З іншого боку сила F_1 дорівнює прискоренню рідкої частинки в напрямку x_1 , помноженому на її масу $dm = \rho V$:

$$F_1 = \frac{d v_1(x_1, x_2, x_3, t)}{dt} \rho(x_1, x_2, x_3, t) V. \quad (11.4)$$

З (11.3), (11.4) маємо

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) \frac{d v_1(x_1, x_2, x_3, t)}{dt} = -\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1}. \quad (11.5)$$

Аналогічно

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) \frac{d v_2(x_1, x_2, x_3, t)}{dt} = -\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2}. \quad (11.6)$$

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) \frac{d v_3(x_1, x_2, x_3, t)}{dt} = -\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3}. \quad (11.7)$$

У векторній формі рівняння (11.5)-(11.7) запишуться наступним чином:

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) \frac{d \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)}{dt} = -\text{grad } p(x_1, x_2, x_3, t). \quad (11.8)$$

В (11.4)-(11.8) через $\frac{df(x_1, x_2, x_3, t)}{dt}$ позначається повна, так звана субстанційна, тобто пов'язана з рухомими частинками (субстанціями), похідна по часу.

Нехай $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ – рівняння траєкторії частинки. Тоді прискорення цієї частинки визначається як

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)}{dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} = \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} \cdot v_1 + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} \cdot v_2 + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_3} \cdot v_3 = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \text{grad}) \vec{v}. \end{aligned}$$

Тоді рівняння (11.8) набувають вигляду

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \text{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

або в покоординатній формі



$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (11.9)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad (11.10)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \quad (11.11)$$

Рівняння (11.2), (11.9)-(11.11) містить п'ять невідомих величин ρ , p , v_1 , v_2 , v_3 . Тому для замикання системи (11.2), (11.9)-(11.11) потрібне ще одне рівняння.

§11.3. Рівняння енергії

Будемо розглядати зміну внутрішньої енергії фіксованої маси газу dm за короткий проміжок часу dt . Згідно припущень в речовині відсутня теплопровідність, в'язкість та джерела (стоки) енергії. Тоді зміна енергії викликається лише роботою сил тиску на гранях кубика при його стисненні або розширенні.

Робота тиску, пов'язана з рухом граней виділеного об'єму вздовж осі x_1 рівна

$$dA_1 = p(x_1, x_2, x_3, t) \cdot \left(v_1(x_1, x_2, x_3, t) - v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t) \right) dt dx_2 dx_3,$$

або

$$dA_1 = p(x_1, x_2, x_3, t) \cdot \frac{v_1(x_1, x_2, x_3, t) - v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t)}{dx_1} dt dV.$$

При $dx_1 \rightarrow 0$ отримаємо

$$dA_1 = -p(x_1, x_2, x_3, t) \cdot \frac{\partial v_1(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} V dt.$$

Тут $p(x_1, x_2, x_3, t)$ – середній тиск в елементарному об'ємі.

Аналогічно

$$dA_2 = -p(x_1, x_2, x_3, t) \cdot \frac{\partial v_2(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2} V dt,$$

$$dA_3 = -p(x_1, x_2, x_3, t) \cdot \frac{\partial v_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3} V dt.$$

Повна робота здійснена газом



$$dA = \sum_{i=1}^3 dA_i = -p \cdot \operatorname{div} \vec{v} V dt,$$

і вона дорівнює зміні внутрішньої енергії об'єму

$$dA = \rho d\varepsilon V,$$

де ε – питома внутрішня енергія. Тоді маємо

$$\rho(x_1, x_2, x_3, t) d\varepsilon V = -p(x_1, x_2, x_3, t) \operatorname{div} \vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) V dt.$$

або при $dt \rightarrow 0$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (11.12)$$

де $\frac{d\varepsilon}{dt}$ – повна похідна внутрішньої енергії за часом.

Оскільки термодинамічні властивості речовини вважаються відомими, то $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$ – відома функція, і рівняння (11.12) замикає систему рівнянь для відшукування газодинамічних величин

В отриманій системі рівнянь (11.2), (11.9)-(11.12) рух газу характеризується залежністю величин від декартових координат x_1 , x_2 , x_3 та часу t . Цей спосіб описання (ейлеревий підхід) трактує рух середовища з точки зору нерухомого стороннього спостерігача.

Зрозуміло, що для запису повноцінної математичної моделі руху стискуваного газу потрібно рівняння (11.2), (11.9)-(11.12) доповнити початковими та граничними умовами для невідомих функцій.

Питання для самоконтролю

1. Які процеси вивчає газова динаміка?
2. При виведенні рівнянь газової динаміки зроблені наступні спрощуючі припущення...
3. Який підхід використано при виведенні рівняння нерозривності для стискуваного газу?
4. Запишіть вигляд рівняння нерозривності для стискуваного газу.
5. Рівняння руху газу мають вигляд...
6. Які невідомі функції містить математична модель газової динаміки?
7. Що являє собою повна (субстанційна) похідна за часом?



ТЕМА 12. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ГІДРОДИНАМІКИ

Базові поняття: рідина, густина рідини, питома вага рідини, в'язкість рідини, нестискувана рідина, масові сили, швидкість руху рідини, вихор-функція

§12.1. Рівняння нерозривності та руху нестискуваної рідини

Дивлячись на спокійний потік води в широкому руслі або на розбурхані вихри гірського потоку, дехто з нас, напевно, задавав собі питання: “а чому вода рухається”, “а за якими законами”, “а чи можливо спрогнозувати ці потоки...”. Звичайно, щоб спрогнозувати – потрібно спочатку описати, або побудувати математичну модель. Сформульовані вище задачі є складовою частиною гідродинаміки. Іншими типовими задачами гідродинаміки є задачі пов'язані з видобуванням нафти.

Розглянемо рух рідини згідно припущень теми 11 щодо руху газів. Тобто, розглянемо рух рідини під впливом внутрішнього тиску та зовнішніх сил за умов відсутності теплопереносу. Також, поки що, знехтуємо в'язкістю рідини, яка, зрозуміло, набагато більша ніж у газів. Тоді міркування щодо руху газів повністю повторюються і для руху рідин, адже середовище, яке рухається, розглядається як суцільне. Тому середовище рідини буде відрізнятися від середовища газу лише значеннями фізичних характеристик, але не принципами виведення диференціальних рівнянь, які описують його рух.

Отже, повторюючи аналогічні міркування теми 11, отримуємо рівняння нерозривності для стискуваної рідини

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (12.1)$$

де ρ – густина рідини; $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор швидкості руху рідини, причому $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = \overline{1,3}$. В даному параграфі розглядаємо рух нестискуваної рідини. Тоді, $\rho = \text{const}$ і рівняння (12.1) набуває вигляду

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (12.2)$$

Аналогічно отримуємо рівняння руху нестискуваної рідини

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{F}, \quad (12.3)$$

де $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$ – внутрішній тиск в рідині; $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ – вектор зовнішніх масових сил, які діють на рідину, причому $f_i = f_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = \overline{1,3}$ (дані сили відносяться до одиниці маси, а тому називаються масовими і мають розмірність прискорення).

Система (12.2), (12.3) містить чотири рівняння і чотири невідомих функції $p(x_1, x_2, x_3, t)$, $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = \overline{1,3}$. Дана система і складає основу математичної моделі руху нестискуваної рідини. Зрозуміло, що її потрібно доповнити початковими та граничними умовами для шуканих функцій.

Рух рідини у відкритих руслах та каналах відбувається під дією зовнішньої сили тяжіння. В даному випадку $\vec{F} = g\nabla(\mp x_3)$, де знак “+” відповідає напрямку осі x_3 вниз, а знак “-” – вгору. Тоді з (12.3) маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + g \nabla(\mp x_3), \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} &= -g \left(\frac{1}{\rho g} \nabla p + \nabla(\mp x_3) \right), \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} &= -g \nabla \left(\frac{p}{\gamma} \pm x_3 \right), \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} &= -g \nabla h, \end{aligned} \tag{12.4}$$

де $\gamma = \rho g$ – питома вага рідини; $h = \frac{p}{\gamma} \pm x_3$ – п’єзометричний напір в рідині.

Залежно від типів і цілей розгляду задач, розглядають систему (12.3), де невідомою є функція тиску $p = p(x_1, x_2, x_3, t)$, або систему (12.4), де невідомою є функція напору $h = h(x_1, x_2, x_3, t)$.

§12.2. В’язкість рідини та її урахування

При виведенні рівнянь газової динаміки ми знехтували явищем в’язкості субстанції, яка рухається. Зрозуміло, що в гідродинаміці в’язкість може значно змінити прогнозні розрахунки, адже густина



рідини набагато більша за густину газу, а тому і значення в'язкості теж більші.

Як і в попередньому пункті, рідину вважаємо нестискуваною, тобто $\rho = const$. Тому рівняння нерозривності залишається у вигляді (12.2). Однак, рівняння руху рідини зміняться.

В рідині виділимо фрагмент у формі прямокутника паралелепіпеда із ребрами dx_1 , dx_2 , dx_3 (рис. 12.1). Вважаємо, що деформації виділеного паралелепіпеда є нескінченно малими протягом малого проміжку часу t . Тоді для руху даного фрагмента застосуємо другий закон Ньютона. Сила, яка діє на виділений фрагмент за рахунок системи граней 1 - 2 визначається як

$$F_1 = \underbrace{p(x_1, x_2, x_3, t) - p(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t)}_s dx_2 dx_3 + \underbrace{+ \rho V f_1(x_1, x_2, x_3, t) - \tau_1(x_1, x_2, x_3, t) - \bar{\tau}_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3, t)}_s dx_2 dx_3. \quad (12.5)$$

Тут $f_1(x_1, x_2, x_3, t)$ – складова вектора масових зовнішніх сил, яка діє в напрямку осі x_1 ; $\bar{\tau}_1(x_1, x_2, x_3, t)$ – напруження внутрішнього тертя рідини, яке діє на гранях, перпендикулярних до осі x_1 (що називається напруженням? чому перед різницею напружень стоїть знак “-”, а перед різницею тисків стоїть знак “+”?)

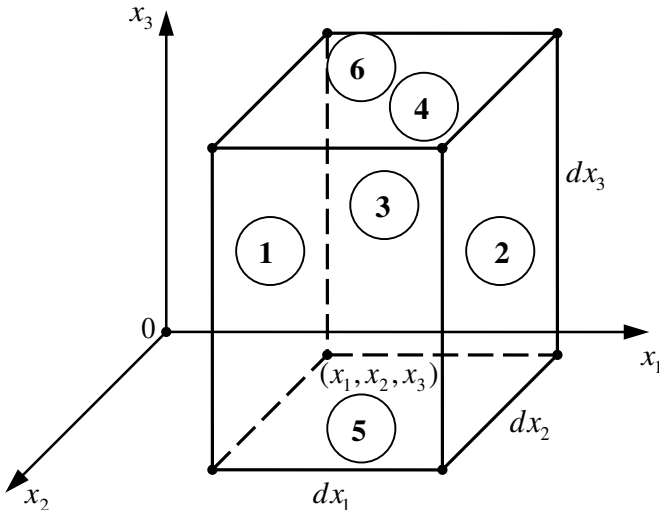


Рис. 12.1. Виділений фрагмент рідини



Тоді, використовуючи розклад в ряд Тейлора і нехтуючи нескінченно малими другого порядку і вище, з (12.5) маємо

$$F_1 = -\frac{\partial p(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1} V + \frac{\partial \bar{\tau}_1(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1} V + \rho V f_1(\mathbf{X}, t),$$

де $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$, $V = dx_1 dx_2 dx_3$.

Аналогічно

$$F_2 = -\frac{\partial p(\mathbf{X}, t)}{\partial x_2} V + \frac{\partial \bar{\tau}_2(\mathbf{X}, t)}{\partial x_2} V + \rho V f_2(\mathbf{X}, t),$$

$$F_3 = -\frac{\partial p(\mathbf{X}, t)}{\partial x_3} V + \frac{\partial \bar{\tau}_3(\mathbf{X}, t)}{\partial x_3} V + \rho V f_3(\mathbf{X}, t).$$

Використовуючи другий закон Ньютона, маємо

$$\underbrace{\rho V}_{m} \underbrace{\frac{dv_i}{dt}}_a = F_1, \quad \rho V \frac{dv_2}{dt} = F_2, \quad \rho V \frac{dv_3}{dt} = F_3,$$

або

$$\rho \frac{dv_1(\mathbf{X}, t)}{dt} = \rho f_1(\mathbf{X}, t) - \frac{\partial p(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_1(\mathbf{X}, t)}{\partial x_1},$$

$$\rho \frac{dv_2(\mathbf{X}, t)}{dt} = \rho f_2(\mathbf{X}, t) - \frac{\partial p(\mathbf{X}, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_2(\mathbf{X}, t)}{\partial x_2},$$

$$\rho \frac{dv_3(\mathbf{X}, t)}{dt} = \rho f_3(\mathbf{X}, t) - \frac{\partial p(\mathbf{X}, t)}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{\tau}_3(\mathbf{X}, t)}{\partial x_3}.$$

Проводячи аналогічні міркування до теми 11 щодо повної похідної за часом, отримуємо рівняння руху рідини

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_3}{\partial x_3} \right) + \vec{F}. \quad (12.6)$$

Вектори напружень тертя $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$, $\bar{\tau}_3$ можна подати через їх складові по координатним осям:

$$\bar{\tau}_1 = \tau_{11} \vec{i} + \tau_{12} \vec{j} + \tau_{13} \vec{k},$$

$$\bar{\tau}_2 = \tau_{21} \vec{i} + \tau_{22} \vec{j} + \tau_{23} \vec{k},$$

$$\bar{\tau}_3 = \tau_{31} \vec{i} + \tau_{32} \vec{j} + \tau_{33} \vec{k}.$$



Тоді система (12.6) в розгорнутому вигляді запишеться наступним чином:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) + f_1, \quad (12.7)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \right) + f_2, \quad (12.8)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right) + f_3. \quad (12.9)$$

Напруження тертя τ_{ij} , $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$, утворюють тензор напружень тертя

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}.$$

Доведено, що цей тензор є симетричним, тобто $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$. Згідно [8], якщо вважати, що складові тензора напружень тертя є лінійними функціями складових тензора швидкостей деформації, то

$$\tau_{11} = 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \tau_{22} = 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad \tau_{33} = 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \quad \tau_{13} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \quad \tau_{23} = \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right),$$

де μ – коефіцієнт фізичної в'язкості рідини.

Тоді для рівняння (12.7) маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} &= 2\mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)}_{\text{div}\vec{v}=0} = \mu \Delta v_1. \end{aligned}$$

Аналогічно, для рівнянь (12.8), (12.9) маємо



$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} = \mu \Delta v_2,$$

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} = \mu \Delta v_3.$$

Отже, система рівнянь (12.7) – (12.9) набуває вигляду

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \Delta v_1 + f_1,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \Delta v_2 + f_2, \quad (12.10)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu \Delta v_3 + f_3,$$

де $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – коефіцієнт кінематичної в'язкості рідини. В згорнутому

вигляді система (12.10) записується як

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{F}. \quad (12.11)$$

Система рівнянь (12.2), (12.11) описує рух нестискуваної в'язкої рідини. Вона називається *системою рівнянь Нав'є-Стокса*.

§12.3. Рівняння руху нестискуваної в'язкої рідини, записані через вихор в двовимірному випадку

Розглянемо рух нестискуваної в'язкої рідини під впливом зовнішніх сил тяжіння в двовимірному випадку. Система рівнянь Нав'є-Стокса в даному випадку набуває вигляду

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -g \frac{\partial h}{\partial x_1} + \nu \Delta v_1, \quad (12.12)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -g \frac{\partial h}{\partial x_2} + \nu \Delta v_2, \quad (12.13)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad (12.14)$$

де функції v_1 , v_2 , h є функціями змінних x_1 , x_2 , t .



Продиференціюємо рівняння (12.12) по x_2 і віднімемо від нього рівняння (12.13), продиференційоване по x_1 . Маємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - \\ & - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - v_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \\ & = g \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} + g \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_1} + v \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta v_1 - v \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta v_2, \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + v_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + v_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \\ & + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = \\ & = v \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \right). \end{aligned} \quad (12.15)$$

Визначаючи вихор як [29]

$$\xi(x_1, x_2, t) = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \quad (12.16)$$

і враховуючи рівняння нерозривності (12.14), з (12.15) маємо

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v \Delta \xi - \bar{v} \nabla \xi. \quad (12.17)$$

Визначаючи функцію току $\varphi(x_1, x_2, t)$ співвідношеннями [29; 27]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = v_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -v_2, \quad (12.18)$$

з (12.16) отримуємо рівняння Пуассона

$$\Delta \varphi(x_1, x_2, t) = \xi. \quad (12.19)$$

Рівняння (12.17) – рівняння параболічного типу, а (12.19) – еліптичного.

Із системи рівнянь (12.17) – (12.19) виключено функцію напору $h(x_1, x_2, t)$ (або тиску $p(x_1, x_2, t)$). Тому для задач гідродинаміки, де

відшукування функції тиску або напору не представляє інтересу, систему рівнянь Нав'є-Стокса (12.12) – (12.14) можна замінити системою (12.17) – (12.19). Потрібно відмітити, що обидві системи рівнянь і (12.12) – (12.14), і (12.17) – (12.19) є нелінійними. Числові методи розв'язання крайових задач для таких систем детально описані в роботі [29].

§12.4. Рівняння Пуассона для напору (тиску)

Не зменшуючи загальності, розглянемо систему рівнянь Нав'є-Стокса (12.12) – (12.14) в двовимірному випадку. Для відшукування функції напору $h(x_1, x_2, t)$ рівняння (12.12), (12.13) є незручними. Для цього продиференціюємо рівняння (12.12) по x_1 і додамо до рівняння (12.13), продиференційоване по x_2 . Маємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + v_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ & + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + v_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} = \\ & = -g \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \right) + \nu \left(\frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3} \right). \end{aligned}$$

Далі врівнюємо рівняння нерозривності (12.14)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 = -g \Delta h + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right), \\ & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 = -g \Delta h, \\ & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 - 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -g \Delta h, \end{aligned}$$



$$\Delta h = \frac{2}{g} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \quad (12.20)$$

Рівняння (12.20) – це рівняння Пуассона, в якому вільний член залежить від похідних тех невідомих функцій $v_1(x_1, x_2, t)$ та $v_2(x_1, x_2, t)$. Його (рівняння), як правило, і використовують для відшукування напору $h(x_1, x_2, t)$. Аналогічне рівняння можна отримати для тиску $p(x_1, x_2, t)$, якщо в системі Нав'є-Стокса (12.12) – (12.14) замість напору фігурує функція $p(x_1, x_2, t)$.

§12.5. Граничні та початкові умови

Нехай процес руху рідини досліджується в області Ω з межею Γ . Перші рівняння системи Нав'є-Стокса містять похідні по часу від функцій швидкості руху рідини $v_1(\mathbf{X}, t)$, $v_2(\mathbf{X}, t)$, $v_3(\mathbf{X}, t)$. Тому для них, окрім граничних умов, потрібно задавати і початкові умови в початковий момент часу t_0 . Відшукування функції тиску (напору) зводиться до розв'язання рівняння Пуассона, а тому для цієї невідомої функції потрібно задавати лише граничні умови (хоча вона і залежить від часу).

Початкові умови для вектора $\vec{v}(\mathbf{X}, t)$ полягають в заданні його початкового значення

$$\vec{v}(\mathbf{X}, t) \Big|_{t=t_0} = \vec{v}_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega},$$

де $\vec{v}_0(\mathbf{X})$ – деяка відома вектор-функція.

Граничні умови залежать від наступних факторів. Якщо межа (або частина межі) Γ є непроникною, то для в'язкої рідини на цій межі задаються граничні умови прилипання – швидкість руху рідини на такій поверхні дорівнює нулю

$$\vec{v}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0.$$

Для напору (тиску) задається гранична умова другого роду

$$\frac{\partial h(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0,$$

де $\frac{\partial}{\partial n}$ – оператор похідної по зовнішній нормалі до межі Γ .



Якщо межа (частина межі) Γ проникна, то як для швидкості $\vec{v}(\mathbf{X}, t)$, так і для напору $h(\mathbf{X}, t)$ чи тиску $p(\mathbf{X}, t)$ на такій межі задаються граничні умови першого роду

$$\vec{v}(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = \vec{V}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = \mathbf{H}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де $\vec{V}(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)$ – задані функції.

Особливий випадок являють собою вільні поверхні рідини. Якщо, наприклад, Γ є плоскою фіксованою поверхнею рідини, то

$$v_1(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = v_2(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial v_3(\mathbf{X}, t)}{\partial x_3} \right|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0.$$

Граничні умови для системи Нав'є-Стокса в змінних вихор-функція току детально розглянуті в роботі [29].



Питання для самоконтролю

1. Які процеси вивчає гідродинаміка?
2. Яка рідина називається стискуваною (нестискуваною)?
3. Як проявляється припущення нестискуваності рідини на виведенні рівняння нерозривності?
4. Як враховується в'язкість при виведенні рівнянь руху рідини?
5. Коефіцієнтом кінематичної в'язкості рідини називається...
6. Чим відрізняється принципи виведення рівняння нерозривності для газу від виведення аналогічного рівняння для рідини?
7. В яких випадках систему рівнянь Нав'є-Стокса доцільно зводити до запису через функцію-вихор?
8. Що означає функція ξ в рівнянні Пуассона?
9. Запишіть вигляд рівняння Пуассона для тиску.
10. Які початкові умови задають для відшукування функції тиску (напору)?
11. Які граничні умови ставляться на вільній поверхні рідини?



СПЕЦІАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕЯКИХ СИСТЕМ

ТЕМА 13. ДЕЯКІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СУПЕРНИЦТВА

Базові поняття: модель популяцій Мальтуса, гонка озброєнь, система “хижак-жертва”, бойові дії армій

§13.1. Модель популяцій

Модель популяцій розглянемо на прикладі зміни чисельності населення планети Земля. Зокрема, розглянемо одну із найпростіших моделей популяцій, яка називається моделлю Мальтуса. В її основу покладено просте твердження – швидкість зміни населення протягом часу t пропорційна його поточній чисельності $N(t)$, помноженій на різницю коефіцієнтів народжуваності $\alpha(t) \geq 0$ та смертності $\beta(t) \geq 0$. Тоді

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \Delta t \cdot (\alpha(t) - \beta(t)) N(t),$$

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (\alpha(t) - \beta(t)) N(t).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ маємо

$$\frac{dN(t)}{dt} = (\alpha(t) - \beta(t)) N(t).$$

Інтегруючи вищеотримане рівняння, отримуємо

$$\frac{dN}{N} = (\alpha(t) - \beta(t)) dt, \quad \ln N = \int_{t_0}^t (\alpha(t) - \beta(t)) dt + c,$$

$$N(t) = c_1 e^{\int_{t_0}^t (\alpha(t) - \beta(t)) dt},$$

де $c_1 = e^c$; $c = const$ – довільна константа.

Нехай в початковий момент часу $N(t_0) = N_0$. Тоді

$$N(t_0) = c_1 \cdot e^0 = N_0 \implies c_1 = N_0.$$

Отже,



$$N(t) = N_0 e^{\int_0^t (\alpha(t) - \beta(t)) dt}$$

При $\alpha > \beta$ чисельність населення зростає за експоненціальним законом, а при $\alpha < \beta$ – спадає.

§13.2. Система “хижак-жертва”

Суперництво хижака та жертви виражається в зміні чисельності жертви за рахунок поїдання хижаком, що в свою чергу впливає на чисельність хижака.

Математична модель двовидової системи “хижак-жертва” будується з урахуванням наступних спрощуючих припущень:

1. Чисельності популяцій жертв N та хижаків M залежать лише від часу (так звана точкова модель, яка не враховує просторовий розподіл популяцій по території).

2. При відсутності взаємодії швидкість зростання кількості жертв (оскільки їх не поїдають хижаки) пропорційна їх наявній кількості з коефіцієнтом $\alpha > 0$, а швидкість зменшення кількості хижаків пропорційна їх кількості з коефіцієнтом $\beta > 0$ (оскільки немає що їсти).

3. Природна смертність жертви та хижака вважаються несуттєвими.

4. Ефект насичення чисельності обох популяцій не враховується (тобто, їх чисельності можуть стати як завгодно великими).

5. Швидкість зростання чисельності жертви зменшується пропорційно чисельності хижаків, тобто на величину $cM(t)$, $c > 0$, а темп зростання хижаків збільшується пропорційно чисельності жертви, тобто на величину $bN(t)$, $b > 0$.

Згідно припущень

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \Delta t \cdot (\alpha(t) - cM(t))N(t).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ маємо

$$\frac{dN(t)}{dt} = (\alpha(t) - c(t)M(t))N(t). \quad (13.1)$$

Аналогічно, для чисельності хижака маємо



$$M(t + \Delta t) - M(t) = \Delta t \cdot (-\beta(t) + b(t)N(t))M(t),$$

$$\frac{M(t + \Delta t) - M(t)}{\Delta t} = \left(-\beta(t) + b(t)N(t) \right) M(t).$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ маємо

$$\frac{dM}{dt} = \left(-\beta(t) + b(t)N(t) \right) M(t). \quad (13.2)$$

Система рівнянь (13.1), (13.2) називається **системою Лоткі-Вольтерра**. З неї за початковими даними популяцій

$$N(0) = N_0, \quad M(0) = M_0 \quad (13.3)$$

визначаються чисельність популяцій для будь-якого моменту часу $t > 0$.

Система рівнянь (13.1), (13.2) є нелінійною, тому знайти її аналітичний розв'язок неможливо. Однак, вона має положення рівноваги (або стаціонарний, незалежний від часу розв'язок).

Положення рівноваги отримуємо з умови $\frac{dN}{dt} \equiv 0$, $\frac{dM}{dt} \equiv 0$. Тоді з

(13.1), (13.2) отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha(t) - c(t)M \stackrel{\sim}{=} 0, \\ -\beta(t) + b(t)N \stackrel{\sim}{=} 0. \end{cases}$$

Звідси

$$M(t) = \frac{\alpha(t)}{c(t)}, \quad N(t) = \frac{\beta(t)}{b(t)}.$$

Отже, якщо початкові значення $N_0 = \frac{\beta(0)}{b(0)}$, $M_0 = \frac{\alpha(0)}{c(0)}$, то система

“хижак-жертва” так і буде залишатись в даному положенні рівноваги.

§13.3. Гонка озброєнь між двома країнами

Припускається, що загальна кількість зброї у кожній країні змінюється з часом в залежності від трьох наступних факторів:

- 1) кількості зброї у супротивника;
- 2) зношеності вже існуючої власної зброї;
- 3) ступеня недовіри між країнами.

Темпи приросту та зменшення озброєнь пропорційні вказаним факторам. Нехай $M_1(t)$, $M_2(t)$ – об'єми озброєнь; $\alpha_1(t) > 0$,



$\alpha_2(t) > 0$ – коефіцієнти пропорційності швидкості зростання зброї до кількості зброї у супротивника; $\beta_1(t) > 0$, $\beta_2(t) > 0$ – коефіцієнти, що характеризують швидкість старіння власної зброї; $\gamma_1(t) \geq 0$, $\gamma_2(t) \geq 0$ – функції, що описують рівень взаємної недовіри конкурентів, який вважається незалежним від кількості озброєнь.

Тоді маємо

$$M_1(t + \Delta t) - M_1(t) = \Delta t \cdot [\alpha_1(t)M_2(t) - \beta_1(t)M_1(t) + \gamma_1(t)].$$

Здійснюючи граничний перехід при $\Delta t \rightarrow 0$, отримуємо

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = \alpha_1(t)M_2(t) - \beta_1(t)M_1(t) + \gamma_1(t). \quad (13.4)$$

Аналогічно

$$\frac{dM_2(t)}{dt} = \alpha_2(t)M_1(t) - \beta_2(t)M_2(t) + \gamma_2(t). \quad (13.5)$$

Система рівнянь (13.4), (13.5), яка і описує систему “гонка озброєнь між двома країнами”, має положення рівноваги при $\frac{dM_1(t)}{dt} \equiv 0$,

$\frac{dM_2(t)}{dt} \equiv 0$. Тому рівноважні значення M_1^0 , M_2^0 знаходяться з умови

$$\begin{cases} \alpha_1 M_2^0 - \beta_1 M_1^0 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_2 M_1^0 - \beta_2 M_2^0 + \gamma_2 = 0. \end{cases} \quad (13.6)$$

Розв’язуючи СЛАР (13.6), отримаємо (наприклад, за формулами Крамера)

$$M_1^0 = \frac{\gamma_1 \beta_2 + \alpha_1 \gamma_2}{\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2},$$

$$M_2^0 = \frac{\alpha_2 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_2}{\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2}.$$

Для того, щоб рівновага існувала, потрібно щоб $M_1^0 \geq 0$, $M_2^0 \geq 0$. Звідси

$$\beta_1 \beta_2 > \alpha_1 \alpha_2. \quad (13.7)$$

Смисл умови (8.9) наступний. Припустимо, що параметри α_1 , β_1 , β_2 незмінні, а параметр α_2 збільшується. Це означає, що перша

держава не змінює своєї стратегії в області озброєнь, а друга нарощує озброєння при незмінному темпі старіння зброї β_2 . Тоді при достатньо великій величині α_2 нерівність (13.7) обов'язково порушиться і рівновага стане неможливою.

Також відмітимо, що якщо обидва параметри γ_1, γ_2 , які характеризують ступінь недовіри, рівні нулю, то положенню рівноваги відповідає відсутність озброєнь у обох сторін.

§13.4. Бойові дії двох армій

В суперництві можуть приймати участь як регулярні армії, так і партизанські загони. Головною характеристикою суперників в розглядуваній моделі є чисельність живої сили сторін $N_1(t) \geq 0$, $N_2(t) \geq 0$. Якщо в деякий момент часу чисельність однієї із армій перетворюється в нуль, то дана сторона вважається програвшою (при чому в даний момент чисельність іншої сторони має бути додатною).

У випадку дій між регулярними частинами динаміка зміни їх кількості визначається трьома факторами:

- 1) швидкістю зменшення складу із-за причин, безпосередньо не пов'язаних з бойовими діями (хвороби, травми, дезертирство);
- 2) темпом втрат, які обумовлені бойовими діями супротивника (які в свою чергу визначаються якістю їх стратегії та тактики, рівнем морального духу та професіоналізму бійців, озброєнням і ін.);
- 3) швидкістю надходження підкріплень, яка вважається деякою заданою функцією часу.

Тоді, аналогічно до попередніх параграфів, для $N_1(t)$, $N_2(t)$ отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(t)}{dt} &= -\alpha_1(t)N_1(t) - \beta_2(t)N_2(t) + \gamma_1(t), \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= -\alpha_2(t)N_2(t) - \beta_1(t)N_1(t) + \gamma_2(t). \end{aligned} \quad (13.8)$$

Тут: $\alpha_i(t) \geq 0$, $i=1,2$ – коефіцієнти, що характеризують швидкість втрат в силу не бойових причин; $\beta_i(t) \geq 0$, $i=1,2$ – коефіцієнти, що характеризують темпи втрат із-за дій супротивника; $\gamma_i(t) \geq 0$, $i=1,2$ – функції швидкості надходжень підкріплень.



Війна між регулярними та партизанськими загонами описується іншою моделлю. Головна відмінність в тому, що нерегулярні з'єднання в порівнянні з армійськими менш вразливі, оскільки діють приховано. Тому рахується, що темп втрат партизан пропорційний не лише чисельності армійських з'єднань супротивника $N_1(t)$, але і чисельності самих партизан $N_2(t)$, тобто визначається членом $\beta_1(t)N_1(t)N_2(t)$. В результаті отримуємо нелінійну модель

$$\begin{aligned}\frac{dN_1(t)}{dt} &= -\alpha_1(t)N_1(t) - \beta_2(t)N_2(t) + \gamma_1(t), \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= -\alpha_2(t)N_2(t) - \beta_1(t)N_1(t)N_2(t) + \gamma_2(t).\end{aligned}\tag{13.9}$$

Моделі (13.8), (13.9) називаються *моделями Ланчестера*. Їх також потрібно доповнити початковими умовами

$$N_1(0) = N_1^0, \quad N_2(0) = N_2^0.$$

Покладемо в моделі (13.8) всі коефіцієнти константами. Для короткострокових кампаній допустиме припущення $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тобто, армії не отримують підкріплень і в них відсутні втрати із-за не бойових причин. Тоді з (13.8) маємо

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\beta_2 N_2(t), \quad \frac{dN_2(t)}{dt} = -\beta_1 N_1(t),$$

$$N_1(0) = N_1^0, \quad N_2(0) = N_2^0.$$

Звідси отримуємо (поділивши перше рівняння на друге)

$$\frac{dN_1}{dN_2} = \frac{\beta_2 N_2(t)}{\beta_1 N_1(t)},$$

$$\beta_1 N_1(t) dN_1 = \beta_2 N_2(t) dN_2,$$

$$\beta_1 N_1^2(t) = \beta_2 N_2^2(t) + c.$$

Константу c знайдемо з початкових умов

$$\beta_1 (N_1^0)^2 = \beta_2 (N_2^0)^2 + c,$$

$$c = \beta_1 (N_1^0)^2 - \beta_2 (N_2^0)^2.$$

Отже, розв'язком в даному випадку буде

$$\beta_1 N_1^2(t) - \beta_2 N_2^2(t) = \beta_1 (N_1^0)^2 - \beta_2 (N_2^0)^2.\tag{13.10}$$

(13.10) однозначно визначається переможець. Якщо $\beta_1(N_1^0)^2 - \beta_2(N_2^0)^2 > 0$, то перемагає перша армія; якщо $\beta_1(N_1^0)^2 - \beta_2(N_2^0)^2 < 0$, то перемагає друга армія; якщо $\beta_1(N_1^0)^2 - \beta_2(N_2^0)^2 = 0$, то сторони знищують одна одну одночасно і переможця немає. Отже, для перемоги важлива не лише початкова чисельність армій, але і значення коефіцієнтів β_1 , β_2 , якими визначається майстерність, якість озброєнь та ін.

Питання для самоконтролю

1. В основу моделі популяцій Мальтуса покладено наступне припущення...
2. На основі яких припущень будується математична модель системи “хижак-жертва”?
3. Чи має система “хижак-жертва” положення рівноваги?
4. Запишіть математичну модель системи гонки озброєнь між двома країнами.
5. Назвіть фактори, що визначають динаміку зміни чисельності армій.
6. Чим відрізняються моделі війни між регулярними частинами та партизанськими загонами?
7. Яким значенням чисельностей зброї відповідає положення рівноваги у випадку відсутності недовіри між державами?



Лабораторна робота №6 Математичні моделі суперництва

Хоча всі моделі суперництва теми 13 виведені з найпростіших припущень, але в своїй більшості вони є нелінійними. Тому знайти аналітичні розв'язки відповідних задач Коші неможливо. Отже, потрібно застосувати чисельні методи.

Припустимо, наприклад, що розв'язок задачі Коші (13.1)-(13.3) шукається при $t \in (0; T]$. Розіб'ємо відрізок $[0, T]$ на n частин з кроком τ точками $t_j = j\tau$, $j = \overline{0, n}$, $t_n = T$. Нехай $f(t_j) = f^{(j)}$. Тоді для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (13.1)-(13.3) можна запропонувати наступну схему:

1) При $j = 0$ покладемо $N^{(j)} = N_0$; $M^{(j)} = M_0$.

2) Знаходимо $N^{(j+1)}$ з різницевої схеми

$$\frac{N^{(j+1)} - N^{(j)}}{\tau} = \alpha^{(j+1)} - c^{(j+1)} M^{(j)} N^{(j+1)}$$

3) Знаходимо $M^{(j+1)}$ з різницевої схеми

$$\frac{M^{(j+1)} - M^{(j)}}{\tau} = \beta^{(j+1)} + b^{(j+1)} N^{(j+1)} M^{(j+1)}$$

4) Значення j збільшуємо на 1. Якщо $j > n$, то завершуємо роботу; в протилежному випадку переходимо до пункту 2.

Очевидно, що постають питання про точність та стійкість запропонованої схеми. За більш детальною інформацією потрібно звернутись до [Бахвалов, Жидков].

Завдання для самостійної роботи

1. Чисельно розв'язати задачі Коші, якими описуються наступні моделі суперництва.
2. Здійснити програмну реалізацію відповідних алгоритмів в будь-якому середовищі програмування.
3. Графічно відобразити зміну в часі чисельності популяцій, зброї в країнах або чисельності двох армій.
4. Провести аналіз отриманих результатів.

Национальний університет
та державної академії
водного господарства

I. Система «хижак – жертва»

1. $N_0 = 100; M_0 = 100; \alpha = 2,5; \beta = 1,5; c = 0,02; b = 0,01.$
2. $N_0 = 78; M_0 = 56; \alpha = 1,3; \beta = 1,4; c = 0,023; b = 0,007.$
3. $N_0 = 52; M_0 = 127; \alpha = 3; \beta = 2; c = 0,035; b = 0,012.$
4. $N_0 = 135; M_0 = 203; \alpha = 0,5; \beta = 0,5; c = 0,01; b = 0,01.$
5. $N_0 = 183; M_0 = 25; \alpha = 0,9; \beta = 0,21; c = 0,015; b = 0,02.$
6. $N_0 = 50; M_0 = 83; \alpha = 1; \beta = 1,7; c = 0,01; b = 0,01.$
7. $N_0 = 300; M_0 = 251; \alpha = 2,7; \beta = 2; c = 0,024; b = 0,018.$
8. $N_0 = 189; M_0 = 150; \alpha = 1,8; \beta = 1,6; c = 0,022; b = 0,024.$
9. $N_0 = 50; M_0 = 105; \alpha = 2; \beta = 0,69; c = 0,015; b = 0,015.$
10. $N_0 = 141; M_0 = 173; \alpha = 1,5; \beta = 0,9; c = 0,031; b = 0,02.$

II. Гонка озброєнь між двома країнами

11. $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0,3; \beta_1 = 0,2; \beta_2 = 0,1; M_1^0 = 132; M_2^0 = 78;$
 $\gamma_1 = 0,3; \gamma_2 = 0,3.$
12. $\alpha_1 = 0,13; \alpha_2 = 0,15; \beta_1 = 0,01; \beta_2 = 0,02; M_1^0 = 200;$
 $M_2^0 = 321; \gamma_1 = 0; \gamma_2 = 0,001.$
13. $\alpha_1 = 2; \alpha_2 = 0,5; \beta_1 = 0,2; \beta_2 = 0,02; M_1^0 = 1000; M_2^0 = 230;$
 $\gamma_1 = 0,01; \gamma_2 = 0,05.$
14. $\alpha_1 = 1,2; \alpha_2 = 1,4; \beta_1 = 0,1; \beta_2 = 0,1; M_1^0 = 362; M_2^0 = 400;$
 $\gamma_1 = 0,05; \gamma_2 = 0,01.$
15. $\alpha_1 = 2,2; \alpha_2 = 0,8; \beta_1 = 0,35; \beta_2 = 0,8; M_1^0 = 160; M_2^0 = 172;$
 $\gamma_1 = 1; \gamma_2 = 2.$
16. $\alpha_1 = 1,8; \alpha_2 = 1,2; \beta_1 = 0,02; \beta_2 = 0,1; M_1^0 = 210; M_2^0 = 190;$
 $\gamma_1 = 0,1; \gamma_2 = 2.$
17. $\alpha_1 = 1,6; \alpha_2 = 1,9; \beta_1 = 0,15; \beta_2 = 0,15; M_1^0 = 500; M_2^0 = 500;$
 $\gamma_1 = 3; \gamma_2 = 4.$
18. $\alpha_1 = 2,1; \alpha_2 = 1,2; \beta_1 = 0,25; \beta_2 = 0,2; M_1^0 = 260; M_2^0 = 300;$
 $\gamma_1 = 0,7; \gamma_2 = 1.$



19. $\alpha_1 = 1,5$; $\alpha_2 = 0,7$; $\beta_1 = 0,2$; $\beta_2 = 0,54$; $M_1^0 = 148$; $M_2^0 = 250$;
 $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 0,15$.
20. $\alpha_1 = 0,75$; $\alpha_2 = 2,2$; $\beta_1 = 0,3$; $\beta_2 = 0,16$; $M_1^0 = 233$; $M_2^0 = 340$;
 $\gamma_1 = 0,02$; $\gamma_2 = 1,2$.

III. Бойові дії двох армій (бойові дії партизан не враховуються)

21. $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1,5$; $\beta_1 = 2,7$; $\beta_2 = 3$; $N_1^0 = 1000$; $N_2^0 = 900$;
 $\gamma_1 = 20$; $\gamma_2 = 25$.
22. $\alpha_1 = 0,1$; $\alpha_2 = 0,1$; $\beta_1 = 1,8$; $\beta_2 = 2$; $N_1^0 = 600$; $N_2^0 = 600$;
 $\gamma_1 = 10$; $\gamma_2 = 8$.
23. $\alpha_1 = 1,3$; $\alpha_2 = 0,8$; $\beta_1 = 1,5$; $\beta_2 = 1,6$; $N_1^0 = 753$; $N_2^0 = 800$;
 $\gamma_1 = 5$; $\gamma_2 = 4$.
24. $\alpha_1 = 1,7$; $\alpha_2 = 2$; $\beta_1 = 2$; $\beta_2 = 2$; $N_1^0 = 1200$; $N_2^0 = 1000$;
 $\gamma_1 = 10$; $\gamma_2 = 12$.
25. $\alpha_1 = 2,7$; $\alpha_2 = 1,5$; $\beta_1 = 1,3$; $\beta_2 = 2,1$; $N_1^0 = 1300$; $N_2^0 = 2000$;
 $\gamma_1 = 12$; $\gamma_2 = 10$.
26. $\alpha_1 = 1,9$; $\alpha_2 = 2$; $\beta_1 = 3$; $\beta_2 = 2,9$; $N_1^0 = 2000$; $N_2^0 = 2000$;
 $\gamma_1 = 20$; $\gamma_2 = 20$.
27. $\alpha_1 = 0,5$; $\alpha_2 = 0,9$; $\beta_1 = 1,5$; $\beta_2 = 1,7$; $N_1^0 = 670$; $N_2^0 = 700$;
 $\gamma_1 = 50$; $\gamma_2 = 40$.
28. $\alpha_1 = 1,1$; $\alpha_2 = 1$; $\beta_1 = 1,3$; $\beta_2 = 2,4$; $N_1^0 = 1500$; $N_2^0 = 500$;
 $\gamma_1 = 10$; $\gamma_2 = 40$.
29. $\alpha_1 = 2,2$; $\alpha_2 = 1,5$; $\beta_1 = 2,3$; $\beta_2 = 1,6$; $N_1^0 = 1860$; $N_2^0 = 1900$;
 $\gamma_1 = 15$; $\gamma_2 = 15$.
30. $\alpha_1 = 1,2$; $\alpha_2 = 1,8$; $\beta_1 = 2,5$; $\beta_2 = 1$; $N_1^0 = 1000$; $N_2^0 = 970$;
 $\gamma_1 = 25$; $\gamma_2 = 14$.



ТЕМА 14. ДИСКРЕТНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

Базові поняття: потокові моделі, граф, орієнтований граф, петля, транспортна сітка, потік, розріз сітки, мінімальний розріз, найкоротший шлях, найкоротший маршрут, максимальний потік

§14.1. Потокові моделі

Із класу дискретних математичних моделей розглянемо потокові моделі, які часто називаються *транспортними сітками*. Потокові моделі в свою чергу відносяться до класу графових моделей.

Методами теорії потоків розв'язуються наступні задачі:

1) транспортна задача;
2) про найкоротший шлях;
3) про оптимальне використання доріг – потрібно скласти план руху автомобілів таким чином, щоб в кінцевий пункт прибула їх максимальна кількість;

4) про попит та пропозицію – оптовий торговець може в кожний із N послідовних інтервалів часу купувати, продавати і зберігати деякий товар. Визначити оптимальну стратегію торговця, щоб отримати максимальний прибуток за N періодів;

5) про оптимальне призначення – розподілити n робітників по m машинах, щоб загальне виробництво було максимальним;

6) про оптимальний за вартістю графік робіт.

Означення 14.1. **Графом** G назвемо пару (V, E) , де V – множина деяких об'єктів довільної природи (вершини), E – множина неупорядкованих пар елементів із V (ребра).

Графи зручно зображати графічно (рис. 14.1). Тут $V = \{r, x, v, u, \omega\}$; $E = \{(x, v), (v, u), (v, \omega), (u, \omega), (\omega, r), (r, r)\}$.

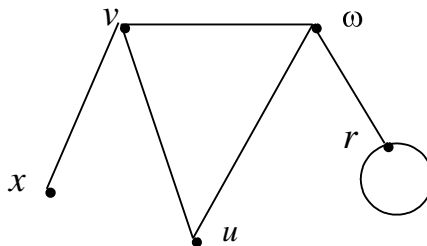


Рис. 14.1. Граф G

Означення 14.2. **Орієнтованим графом (орграфом) D** називається пара (V, A) , де V – множина вершин, A – множина впорядкованих пар елементів із V (дуги).

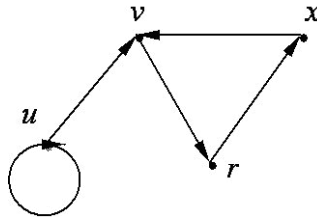


Рис. 14.2. Орграф D

Орграф зображено на рис. 14.2, де $V = \{x, u, v, r\}$, $A = \{(u, v), (x, v), (v, r), (r, x), (u, u)\}$.

Означення 14.3. **Вершина u суміжна** з вершиною v в орграфі D , якщо існує дуга із u до v .

Означення 14.4. Дуга (x, x) орграфа (V, A) , якщо така існує, називається **петлею**.

Означення 14.5. Якщо в орграфі (V, A) є декілька дуг, що з'єднують дві вершини u та v , то він називається **мультиорграфом**.

Означення 14.6. Скінченний орграф (V, A) без петель називається **сіткою** інколи – **транспортною сіткою**, якщо кожній дузі $(x_i, x_j) \in A$ поставлено у відповідність ціле число $c(x_i, x_j) \geq 0$, яке називається **пропускною можливістю дуги**.

Сітка володіє двома властивостями:

1. Існує лише одна вершина x_0 (джерело; вхід), з якої дуги виходять, але жодна не входить.
2. Існує єдина вершина x_z (стік; вихід), в яку дуги входять, але жодна дуга не виходить (рис. 14.3).

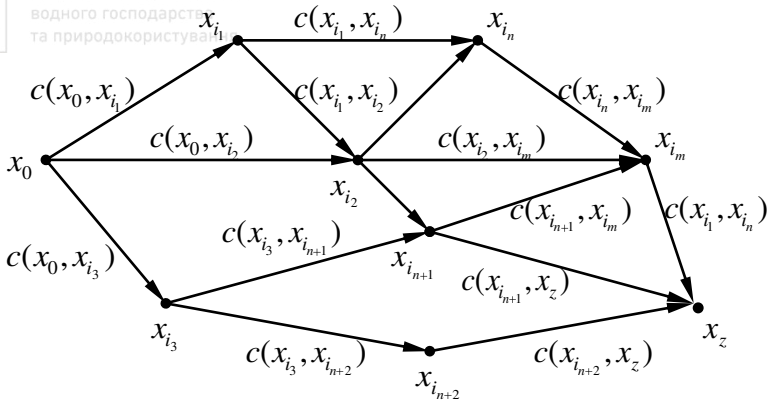


Рис. 14.3. Приклад транспортної сітки

Далі розглянемо дві задачі – про найкоротший шлях та про максимальний потік. Для цього введемо поняття функції потоку на транспортній сітці.

Нехай $u_{x_i}^-$ – множина дуг, які входять у вершину x_i , а $u_{x_i}^+$ – множина дуг, які виходять із вершини x_i .

Означення 14.7. Функція $\varphi(x_i; x_j)$, яка визначена на множині дуг транспортної сітки і приймає невід’ємні цілочислові значення, називається **потокотм транспортної сітки**, якщо

$$\varphi(x_i; x_j) \leq c(x_i; x_j), \quad (14.1)$$

$$\sum_{(x_i; x) \in u_{x_i}^-} \varphi(x_i; x) - \sum_{(x; x_j) \in u_{x_j}^+} \varphi(x; x_j) = 0 \quad (x \neq x_0, x \neq x_z). \quad (14.2)$$

Умова (14.1) означає, що потік дуги не може перевищувати її пропускну здатність. Умова (14.2) – це закон збереження: сумарний потік дуг, які входять у вершину, дорівнює сумарному потоку дуг, які виходять із вершини (за виключення точок джерела та стоку).

Говорять, що задано потік $\varphi(x_i; x_j)$ на сітці, якщо задано значення потоку на кожній дузі. Отже, кожна дуга сітки характеризується двома числами – пропускну здатністю та величиною потоку.

Із (14.2) випливає, що сума потоків, які виходять з початкової вершини, дорівнює сумі потоків, які входять в кінцеву вершину, тобто

$$\sum_{(x_0; x_i) \in u_{x_0}^+} \varphi(x_0; x_i) = \sum_{(x_i; x_z) \in u_{x_z}^-} \varphi(x_i; x_z) = \Phi. \quad (14.3)$$



Величина Φ називається **сумарним потоком** на кінцевих дугах.

Нехай множина всіх вершин сітки (V, A) розбита на дві взаємно доповнювальні підмножини P та $C(P)$, причому $x_0 \in P$, $x_z \in C(P)$, $P \cup C(P) = V$.

Означення 14.8. Множина дуг $(x_i; x_j)$, де $x_i \in P$, $x_j \in C(P)$, називається **розрізом сітки** (V, A) . Сума пропускних здатностей (можливостей) дуг розрізу називається **величиною розрізу** і позначається Γ або $\Gamma[P, C(P)]$. (Наприклад, якщо розрізати карту автомобільних доріг ножицями – отримаємо розріз).

В загальному випадку величина потоку на кінцевих дугах ніколи не перевищує величину розрізу

$$\Phi \leq \Gamma. \quad (14.4)$$

Про це говорить

Теорема 14.1 (теорема Форда-Фалкерсона). В будь-якій сітці максимальне значення сумарного потоку на кінцевих дугах дорівнює мінімальній пропускній здатності розрізу цієї сітки.

Приклад 14.1. Для сітки, яка зображена на рис.14.4, $\max \Phi = 4$. Можна знайти розріз, пропускна здатність якого $\Gamma = 4$. Це розріз із дуг (x_0, x_1) , (x_2, x_1) , (x_2, x_z) . Отже, розріз не завжди співпадає з поняттям розрізу за допомогою ножиць, оскільки в цей розріз не включена дуга (x_1, x_2) , в зв'язку з тим, що $\varphi(x_1, x_2) = 0$.

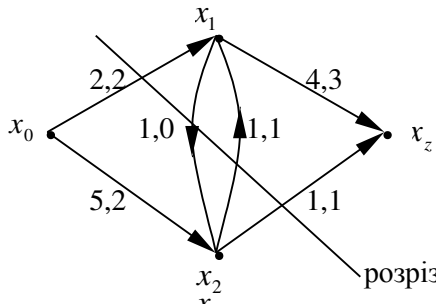


Рис. 14.4. Транспортна сітка прикладу 14.1

Внутрішні вершини сітки x_i , x_j можуть з'єднуватись кількома дугами. Їх можна замінити однією дугою, пропускна здатність якої



$$c = \sum_k c_k(x_i, x_j) + \sum_r c_r(x_j, x_i),$$

де c_k , c_r – пропускні здатності дуг (x_i, x_j) та (x_j, x_i) відповідно.

Потік на даній дузі

$$\varphi(x_i, x_j) = \sum_k \varphi_k(x_i, x_j) - \sum_r \varphi_r(x_j, x_i).$$

Якщо виявиться, що $\varphi(x_i, x_j) < 0$, то це означає, що потрібно змінити напрямок дуги (x_i, x_j) на (x_j, x_i) і прийняти

$$\varphi(x_j, x_i) = -\varphi(x_i, x_j).$$

Так дві дуги між вершинами x_1 та x_2 на рис. 14.4 можна замінити однією дугою (x_2, x_1) з пропускнуою здатністю

$$c = c_1(x_1, x_2) + c_2(x_2, x_1) = 1 + 1 = 2,$$

та потоком

$$\varphi(x_2, x_1) = \varphi_1(x_2, x_1) - \varphi_2(x_1, x_2) = 1 - 0 = 1.$$

Тому надалі будемо розглядати транспортні сітки, в яких вершини з'єднані не більше, як однією дугою.

§14.2. Задача відшукування найкоротшого маршруту (шляху)

Випадок 14.1. Нехай задана неорієнтована сітка комунікацій з N пунктів (потік можливий як від x_i до x_j , так і в протилежну сторону з однаковою пропускнуою спроможністю). Потрібно знайти найкоротший шлях між будь-якими двома пунктами такої сітки. Будемо позначати її як неорієнтований граф (V, E) .

Складемо матрицю $C = \{C_{ij}\}_{i=1; j=1}^{N; N}$, де

$$C_{ij} = \begin{cases} c(x_i, x_j), & \text{якщо } i \neq j, (x_i, x_j) \in E; \\ 0, & i = j; \\ M, & \text{якщо } i \neq j, (x_i, x_j) \notin E; \end{cases}$$

де M – нескінченно велике додатне число. Вважаємо, що маршрут, складений із s ребер, має довжину s .

Означення 14.9. s -**оптимальним** називається такий направлений маршрут із x_i в x_j довжини не більше s , який пов'язаний з

мінімальними витратами в порівнянні зі всіма іншими направленими маршрутами із x_i в x_j , які мають довжину не більше s .

Нехай $C^{(s)} = \{C_{ij}^{(s)}\}_{i=1; j=1}^{N; N}$ – матриця витрат для s -оптимальних маршрутів. По діагоналі в $C^{(s)}$ стоять нулі, а M вказує на відсутність маршруту довжиною не більшою s . Згідно позначень $C^{(1)} \equiv C$.

В основі **алгоритму Беллмана-Шимбела** лежить очевидне співвідношення

$$C_{ij}^{(m+n)} = \min_{1 \leq \lambda \leq N} (C_{i\lambda}^{(m)} + C_{\lambda j}^{(n)}). \quad (14.5)$$

З (14.5) отримуємо

$$C_{ij}^{(2k)} = \min_{1 \leq \lambda \leq N} (C_{i\lambda}^{(k)} + C_{\lambda j}^{(k)}). \quad (14.6)$$

Використовуючи (14.6) можемо послідовно формувати матриці

$$C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(4)}, C^{(8)}, \dots, C^{(2^k)}, \dots \quad (14.7)$$

Очевидно, що всі вищевказані матриці є симетричними.

Довжина будь-якого маршруту сітки (V, E) не перевищує $(N-1)$.

Тому при $s \geq (N-1)$

$$C^* = C^{(s)}, \quad (14.8)$$

де C^* – матриця витрат для оптимальних маршрутів.

Елементи послідовності (14.7) обчислюються до тих пір, поки при деякому d не будуть отримані дві рівні сусідні матриці $C^{(2^d)} = C^{(2^{d+1})}$. Тоді $C^* = C^{(2^d)}$, оскільки (14.8) може мати місце для $s < (N-1)$.

Якщо знайшли C^* , то легко скласти оптимальний маршрут із x_i в x_j . Якщо $C_{ij}^* = M$, то не існує жодного маршруту, що розпочинається в x_i і закінчується в x_j для будь-яких вершин x_i та x_j . Можна показати, що $C_{ij}^* = M$ можливо лише тоді, коли сітку можна розбити на дві взаємно незалежні підсітки. В протилежному випадку оптимальний маршрут будується нижчеописаним способом.

Знаходимо індекс λ_1 із умови

$$C_{i\lambda_1} + C_{\lambda_1 j}^* = \min_{\lambda \in V_i} (C_{i\lambda} + C_{\lambda j}^*),$$



де V_i – множина вершин, з'єднаних ребрами з x_i . Тоді оптимальний маршрут за пунктом x_i проходить через x_{λ_1} . Якщо знайдено пункти $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_r}$, то наступний $x_{\lambda_{r+1}}$ шукаємо за правилом

$$C_{\lambda_r \lambda_{r+1}} + C_{\lambda_{r+1} j}^* = \min_{\lambda \in V_{\lambda_r}} (C_{\lambda_r \lambda} + C_{\lambda j}^*). \quad (14.9)$$

Процес (14.9) продовжується доти, поки при деякому k отримаємо $x_{\lambda_{k+1}} = x_j$. Отже, оптимальним маршрутом буде $x_i, x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_s}, x_j$.

Приклад 14.2. Задана сітка (рис. 14.7). Знайти найкоротший маршрут між будь-якими її двома вершинами.

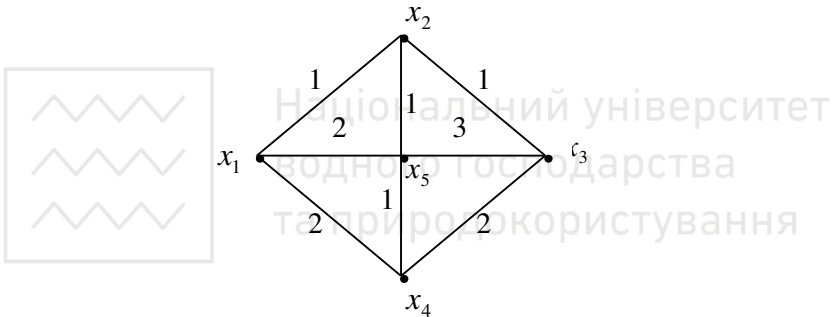


Рис. 14.7. Сітка прикладу 14.2

Формуємо матрицю

$$C = C^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & M & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & M & 1 \\ M & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & M & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи (14.6), при $k = 1$ утворюємо матрицю



$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де, наприклад,

$$C_{13}^{(2)} = \min(C_{11}^{(1)} + C_{13}^{(1)}; C_{12}^{(1)} + C_{23}^{(1)}; C_{13}^{(1)} + C_{33}^{(1)}; C_{14}^{(1)} + C_{43}^{(1)}; C_{15}^{(1)} + C_{53}^{(1)}) = \\ = \min(M; 2; M; 4; 5) = 2. \text{ і т.д.}$$

Порахувавши за тим же правилом (14.6) матрицю $C^{(4)}$, отримуємо $C^{(4)} = C^{(2)}$. Отже, $C^* = C^{(2)}$.

Знайдемо оптимальний маршрут, наприклад, між x_1 та x_3 . Згідно з (14.9) знаходимо λ_1 з умови

$$C_{1\lambda_1} + C_{\lambda_1 3}^* = \min_{\lambda \in V_1} (C_{1\lambda} + C_{\lambda 3}^*) = \min(C_{12} + C_{23}^*, C_{14} + C_{43}^*, C_{15} + C_{53}^*) = \\ = \min(2; 4; 4) = 2 \text{ і досягається він при } \lambda_1 = 2. \text{ На наступному кроці} \\ \text{отримуємо } \lambda_2 = 3. \text{ Отже, оптимальний маршрут } x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \text{ і його} \\ \text{довжина } C_{13}^* = 2.$$

Випадок 14.2. Нехай задана орієнтована мережа комунікацій (V, A) з N пунктів. Відмінність від випадку 14.1 – можливість руху між двома пунктами лише в одному напрямку.

Означення 14.10. **Шляхом** в оргграфі (V, A) називається послідовність $x_i, (x_i, x_{i_2}), x_{i_2}, (x_{i_2}, x_{i_3}), x_{i_3}, \dots, (x_{i_{n-1}}, x_{i_n}), x_{i_n}$, де (x_i, x_j) – дуга від x_i до x_j .

В даному випадку задача полягає у відшуканні найкоротшого шляху від x_i до x_j , або в доведенні відсутності такого шляху.

Знайдемо найкоротший шлях від x_1 до x_s . Кожен крок нижченаведеного алгоритму полягає в розширенні множини відмічених пунктів сітки та виділенні певних її дуг.



Алгоритм **методу Мінті** по розв'язуванню даної задачі наступний:

1. Відмічаємо пункт x_1 і ставимо йому у відповідність число $h_1 = 0$.
2. Розглядаємо всі невідмічені пункти сітки, які є кінцями дуг з початком хоча б в одному із відмічених її пунктів. Якщо таких невідмічених пунктів немає, то шляху від x_1 до x_s не існує і завершуємо роботу алгоритму.
3. Для кожної дуги (x_{h_i}, x_j) з пункту 2 (де x_{h_i} – відмічені пункти) обчислюємо суму $[h_i + c(x_{h_i}, x_j)]$. Нехай $\min[h_i + c(x_{h_i}, x_j)]$ досягається при $j = k$, $i = p$. Тоді відмічаємо пункт x_k і йому ставимо у відповідність число $h_k = h_p + c(x_{h_p}, x_k)$.
4. Якщо $x_k = x_s$, то шлях знайдено і переходимо до пункту 5; якщо $x_k \neq x_s$ – переходимо до пункту 2.
5. Встановлення шляху здійснюємо в зворотному порядку від x_s до x_1 . Для пункту x_s встановлюємо пункт x_{s-1} , який йому співставлявся на 3-му кроці алгоритму; для пункту x_{s-1} пункт x_{s-2} і т.д. поки не прийдемо до вузла x_1 .

Приклад 14.3. Для заданої сітки на рис. 14.8 встановити найкоротший шлях від x_1 до x_7 .

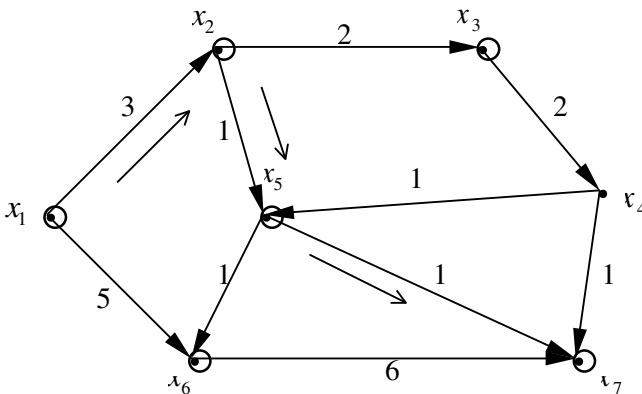


Рис. 14.8. Сітка прикладу 14.3



Розв'язок методом Мінті зручно проводити за допомогою нижченаведеної таблиці.

Номер ітерації	Відмічені пункти	Невідмічені пункти	Числа h_i	Числа c	h_i , min суми	Наступний відмічений пункт
0	-	-	-	0	0	x_1
1	x_1	x_2 x_6	0 0	3 5	3	x_2
2	x_1 x_2	x_6 x_3 x_5	0 3 3	5 2 1	4	x_5
3	x_1 x_2 x_5	x_6 x_3 x_6 x_7	0 3 4 4	5 2 1 1	5 5 5 5	x_6 x_3 x_6 x_7

На третій ітерації одним із відмічених є пункт x_7 . Отже, найкоротший шлях знайдено: $x_7 \leftarrow x_5 \leftarrow x_2 \leftarrow x_1$ і довжина його $3+1+1=5$ (або останнє число h_i в таблиці, яке відповідає вузлу x_7).

Зауважимо, що метод Мінті дозволяє знайти всі найкоротші шляхи від x_1 до x_s (якщо цих шляхів є кілька).

§14.3. Задача відшукання максимального потоку

Нехай задано сітку (V, A) . Потрібно визначити максимальний потік, який можливий між джерелом x_0 та стоком x_s . Тобто, потрібно визначити $\max \Phi$. Нижченаведений алгоритм базується на теоремі Форда-Фалкерсона і полягає в пошуку величини мінімального розрізу сітки.



Алгоритм Форда-Фалкерсона

1. $\varphi(x_i, x_j) := 0$ якщо $(x_i, x_j) \in A$. (Тут “:=” символ присвоєння значення). Тобто, значення потоку на всіх існуючих дугах покладається рівним нулю.

2. Відмічаємо джерело x_0 індексом 0, тобто x_0^0 .

3. Перебираємо всі відмічені вершини і розглядаємо суміжні з ними ще не відмічені вершини. Нехай x_i – відмічена, а x_j – суміжна з нею невідмічена.

Можливі чотири випадки:

3.1. $x_i \xrightarrow{\varphi(x_i, x_j) = C(x_i, x_j)} x_j \Rightarrow x_j$ не відмічається (дуга (x_i, x_j) вже є насиченою);

3.2. $x_i \xrightarrow{\varphi(x_i, x_j) < C(x_i, x_j)} x_j \Rightarrow x_j$ відмічається як x_j^{+i} (дуга (x_i, x_j) не є насиченою);

3.3. $x_i \xrightarrow{\varphi(x_i, x_j) > 0} x_j \Rightarrow x_j$ відмічається як x_j^{-i} (на дузі (x_i, x_j) є відмінний від нуля потік і він йде в протилежну сторону відносно x_i);

3.4. $x_i \xrightarrow{\varphi(x_i, x_j) = 0} x_j \Rightarrow x_j$ не відмічається.

4. Якщо помічена вершина x_j є стоком x_z (відбувся прорив), то між x_0 та x_z існує шлях μ із помічених вершин. Оскільки μ не містить жодної насиченої дуги, то можна змінити значення потоків на всіх дугах цього шляху на величину

$$h = \min_{\substack{(x_i, x_j^{+i}) \in \mu \\ (x_\alpha^{-\beta}, x_\beta) \in \mu}} [C(x_i, x_j^{+i}) - \varphi(x_i, x_j^{+i}), \varphi(x_\alpha^{-\beta}, x_\beta)].$$

Причому потік на дузі збільшується на h , якщо орієнтація дуги співпадає з напрямком руху від x_0 до x_z , і зменшується на це ж значення, якщо цей напрямок протилежний. Після такої зміни отримують новий потік, збільшений на h . Стираємо старі помітки і переходимо до пункту 2 алгоритму.

5. Якщо стік x_z не можна помітити, то максимальний потік знайдено і робота алгоритму завершується.

Приклад 14.4. Знайти максимальний потік для сітки, зображеної на рис. 14.9.

До рис. 14.9: $h = \min(5 - 0, 3 - 0, 6 - 0) = 3$.

До рис. 14.10: $h = \min(5 - 3, 2 - 0, 10 - 0) = 2$.

До рис. 14.11: $h = \min(3 - 0, 2 - 0, 6 - 3) = 2$.

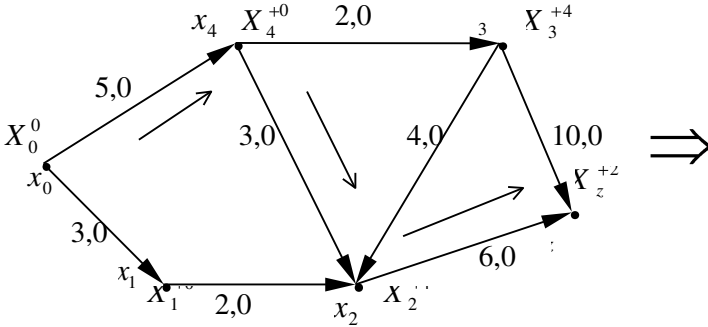


Рис. 14.9. Початкова сітка до прикладу 14.4

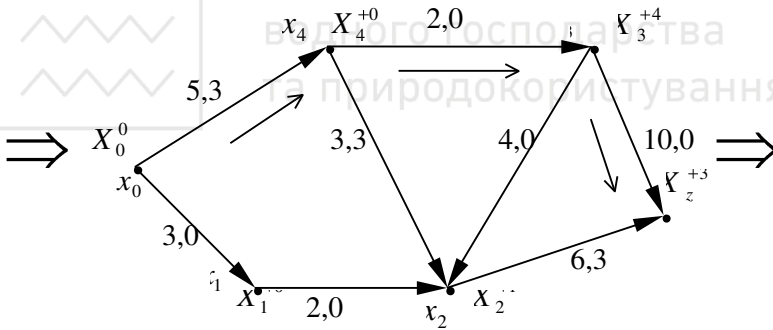


Рис. 14.10.

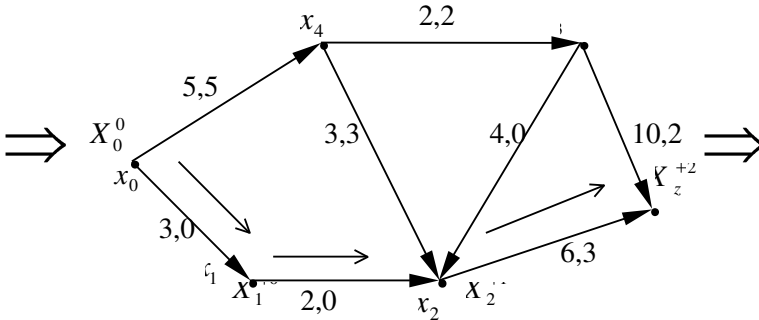


Рис. 14.11.

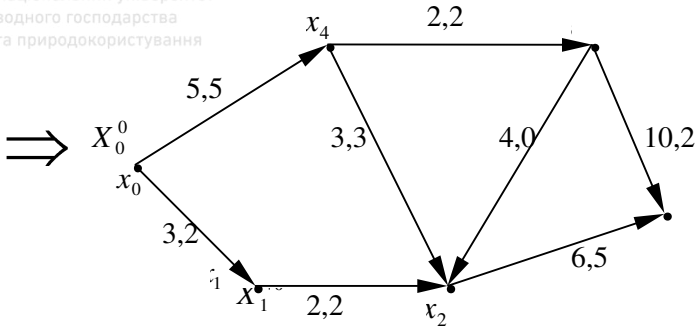


Рис. 14.12.

Кожен із вищенаведених рисунків відображає одне проходження алгоритму Форда-Фалкерсона. Оскільки x_2 для сітки на рис. 14.12 відмітити не можна, то максимальний потік знайдено і його величина $\Phi = 7$.



Питання для самоконтролю

1. Назвіть задачі, які розв'язуються методами теорії потоків.
2. Що називається графом?
3. Дайте означення орієнтованого графа.
4. Якими властивостями володіє транспортна сітка?
5. Що називається потоком на транспортній сітці?
6. Який принцип покладено в основу алгоритму Беллмана-Шимбела?
7. В чому полягає алгоритм методу Мінті?
8. Як визначити максимальний потік в сітці?
9. Про що говорить теорема Форда-Фалкерсона? Який алгоритм базується на цій теоремі?



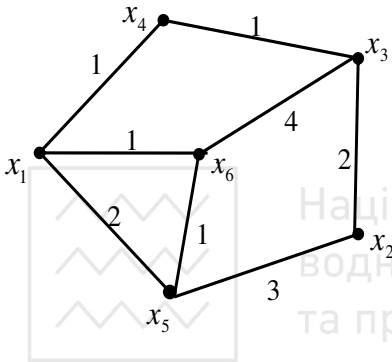
Лабораторна робота №7 Потокові дискретні математичні моделі

Завдання для самостійної роботи

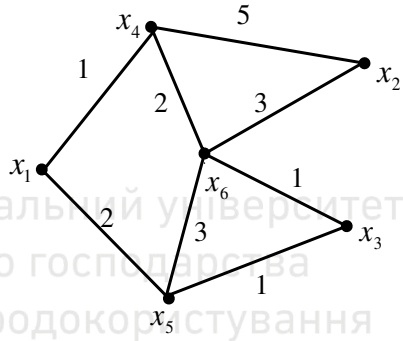
Завдання 1.

Визначити найкоротший маршрут між вузлами x_1 та x_2 методом Беллмана-Шимбелла.

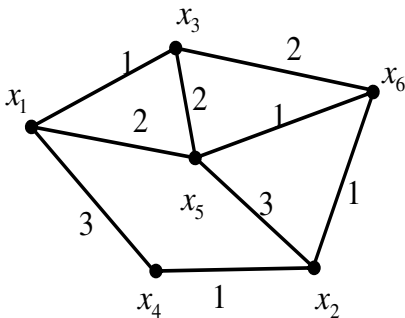
1.



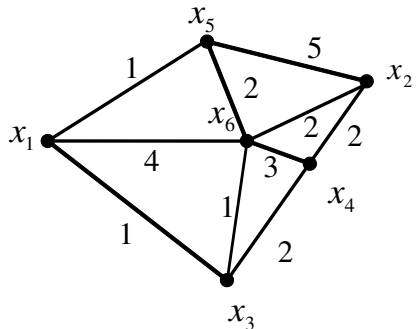
2.

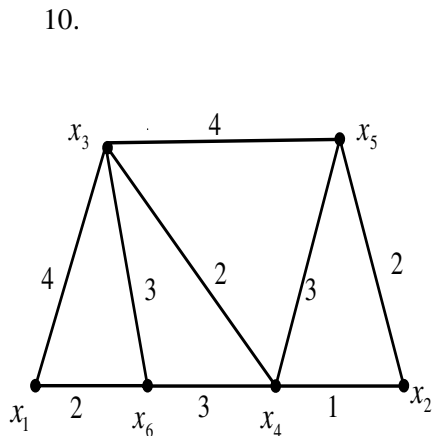
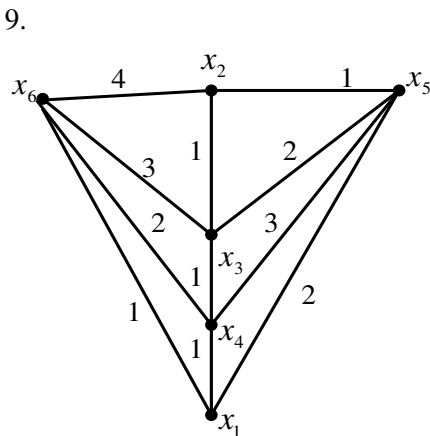
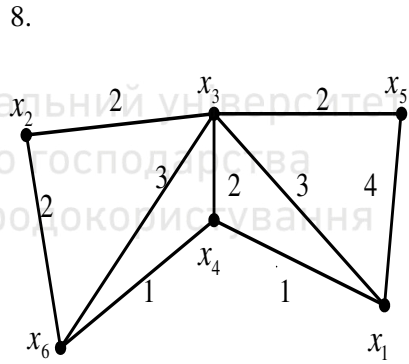
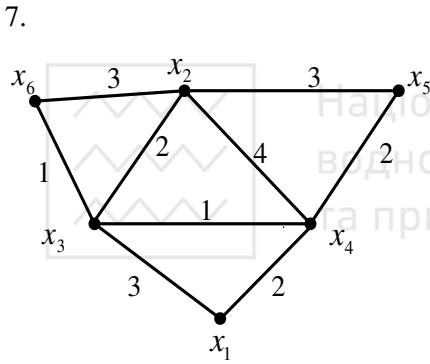
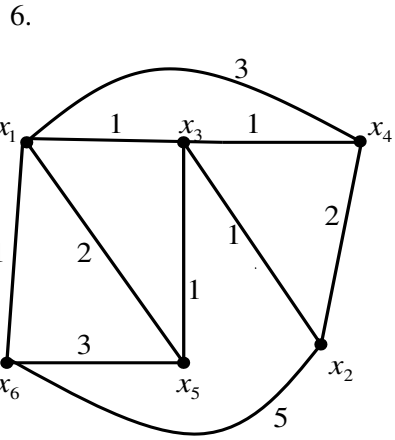
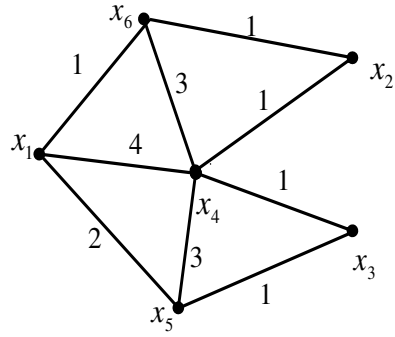


3.



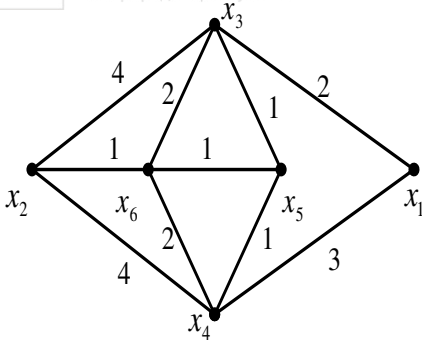
4.



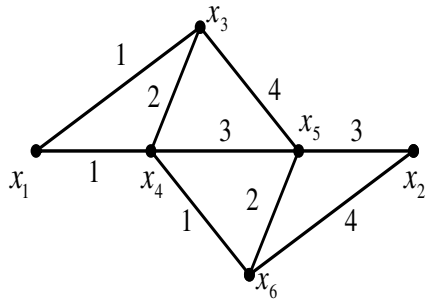


11.

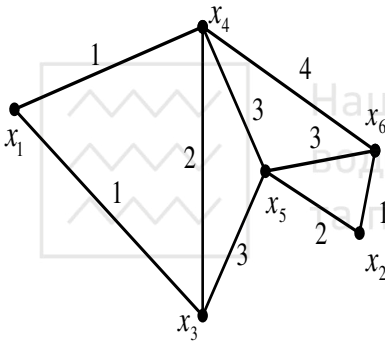
Національний університет
водного господарства
та природокористування



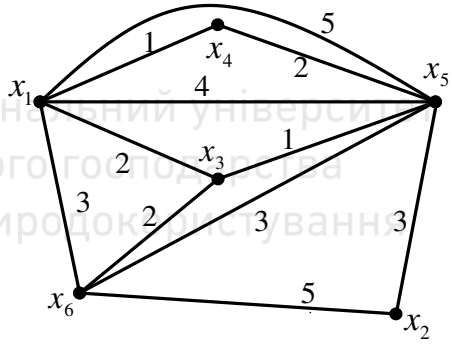
12.



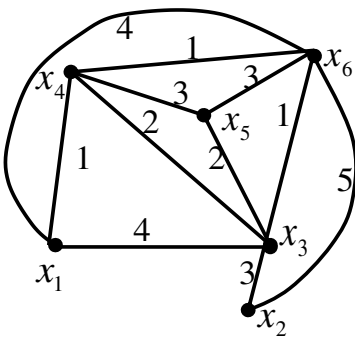
13.



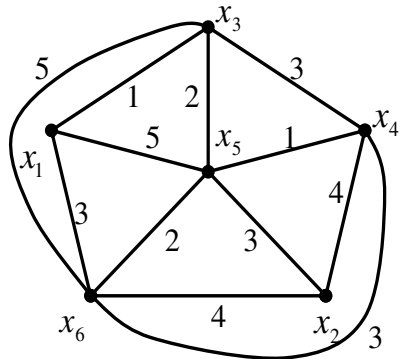
14.



15.

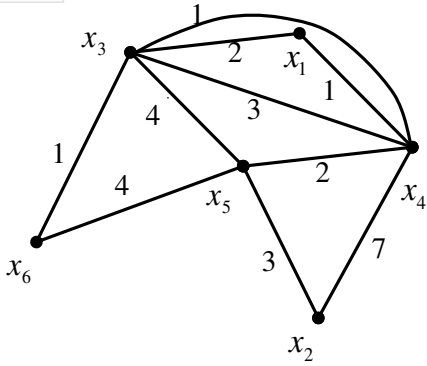


16.

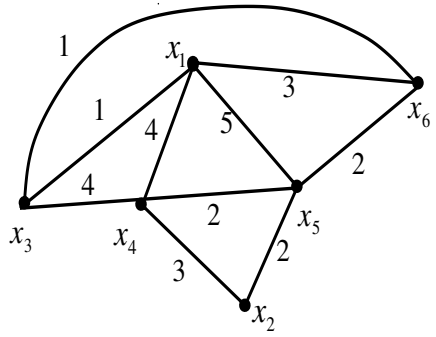


17.

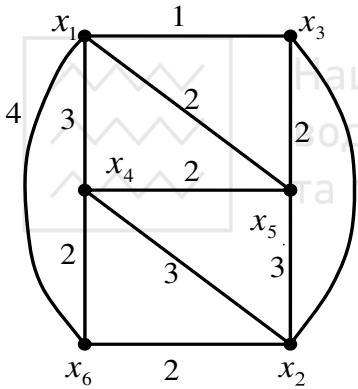
Національний університет
водного господарства
та природокористування



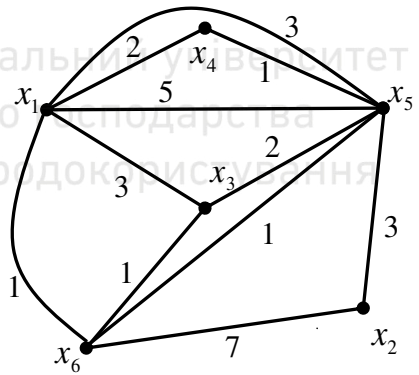
18.



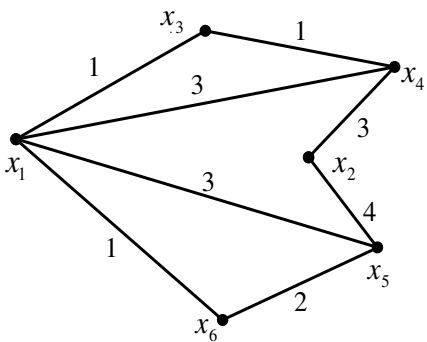
19.



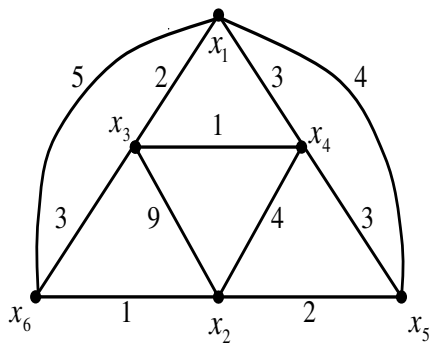
20.



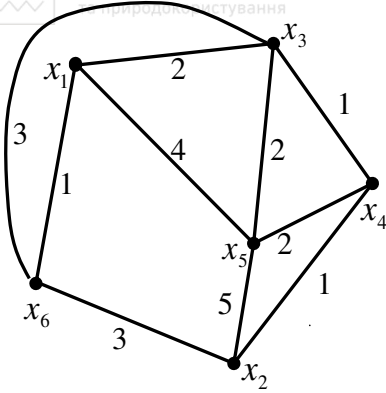
21.



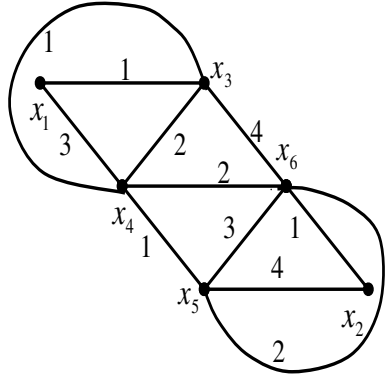
22.



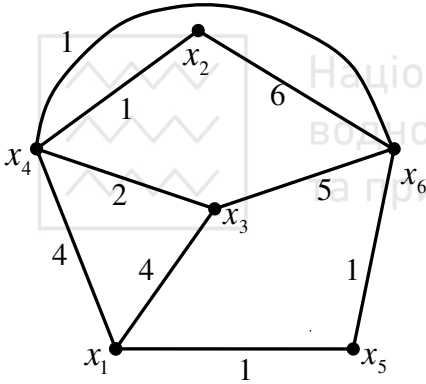
23.



24.



25.

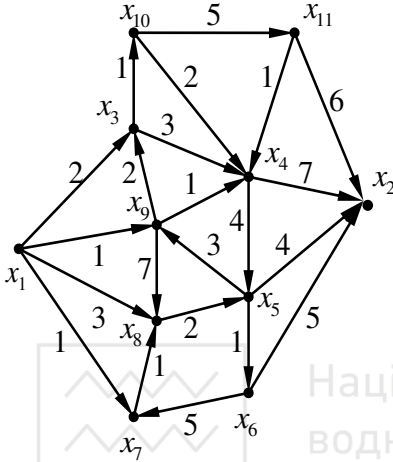




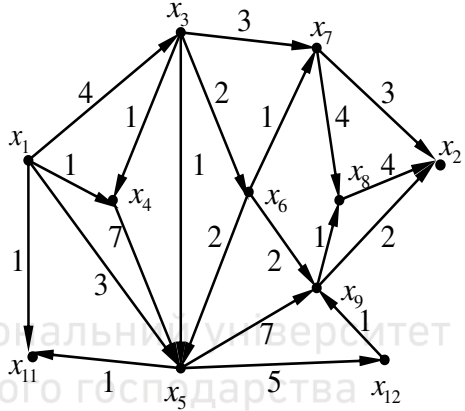
Завдання 2.

Визначити найкоротший шлях між вузлами x_1 та x_2 методом Мінті.

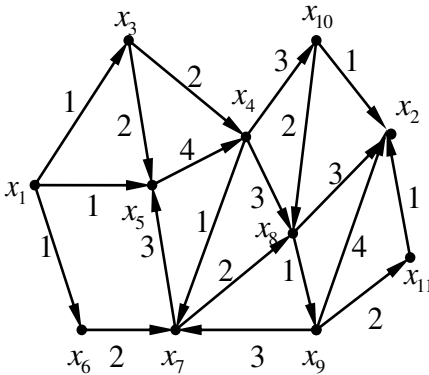
1.



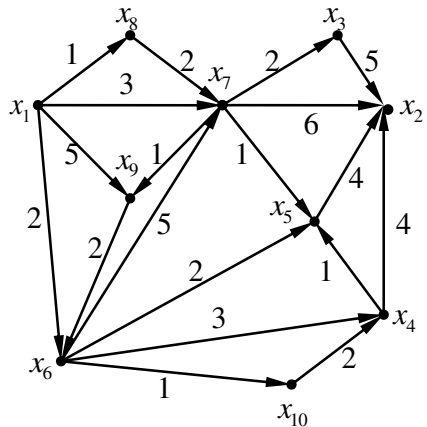
2.



3.

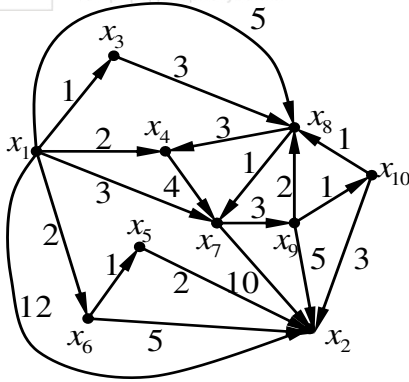


4.

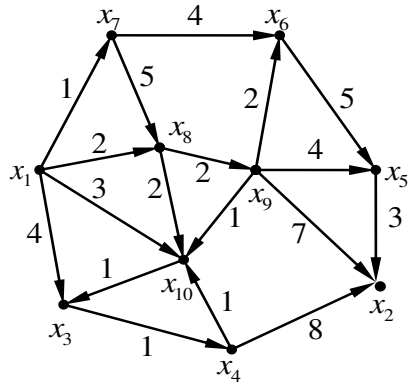


5.

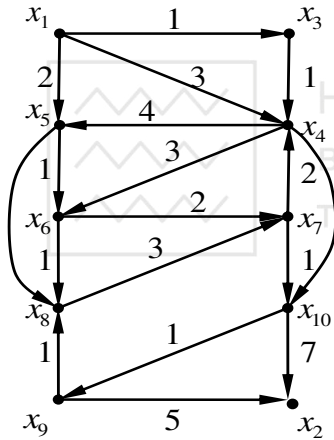
Національний університет
водного господарства
та природокористування



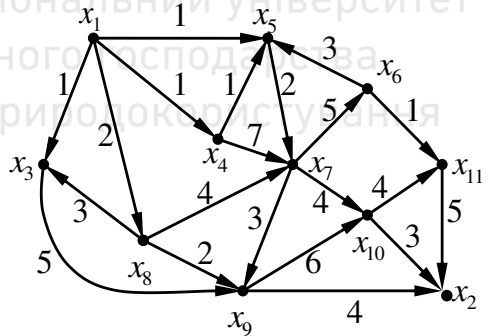
6.



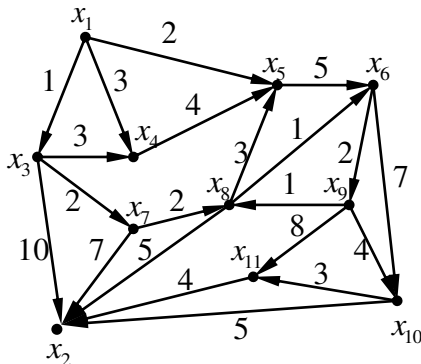
7.



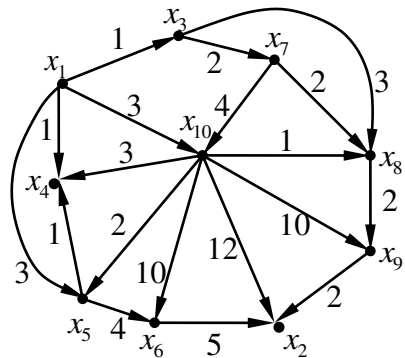
8.



9.

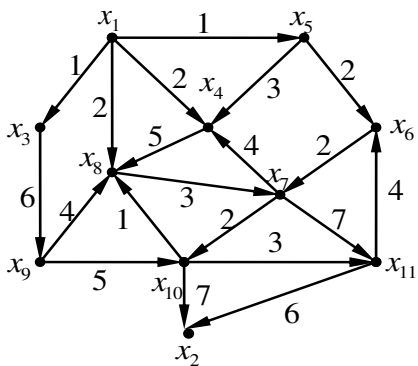


10.

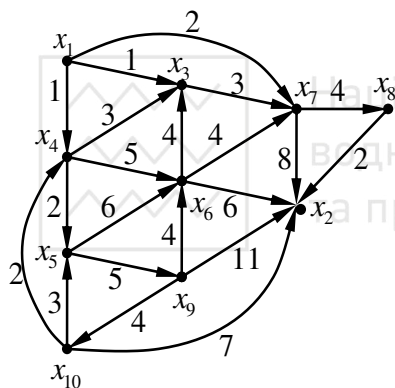




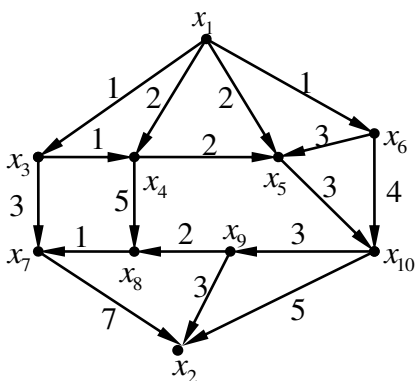
11.



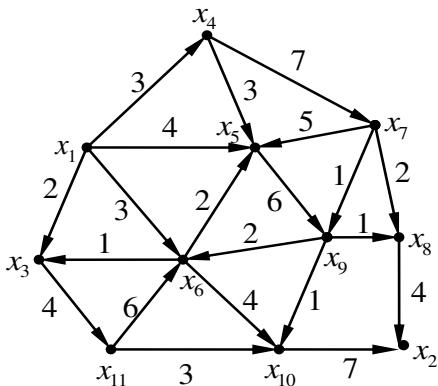
13.



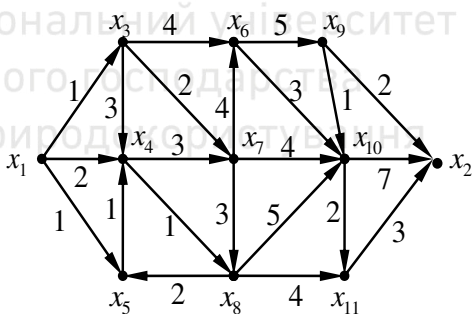
15.



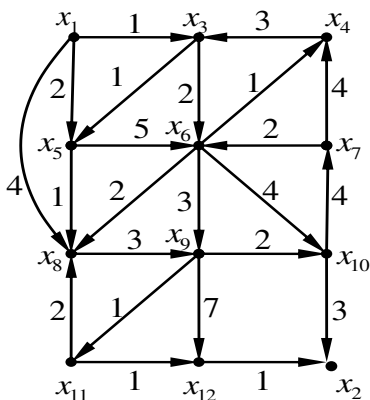
12.



14.

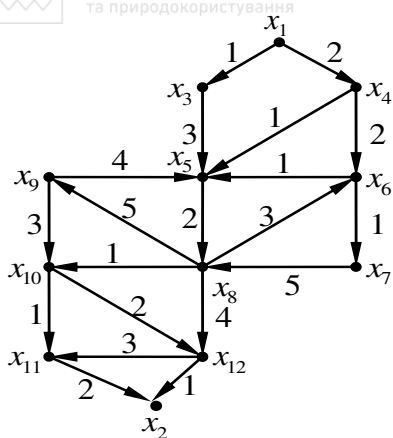


16.

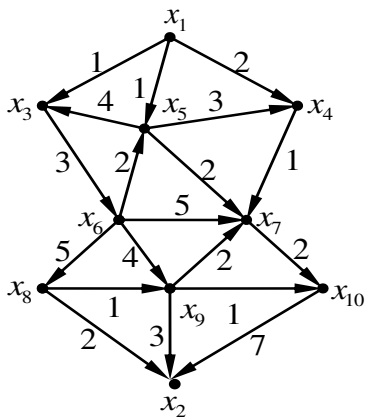


17.

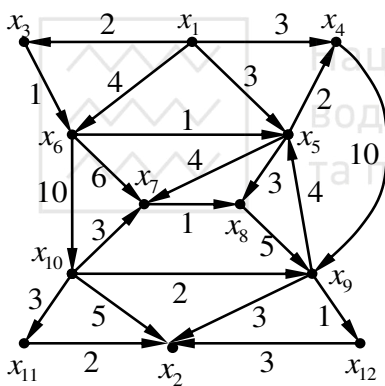
Національний університет
водного господарства
та природокористування



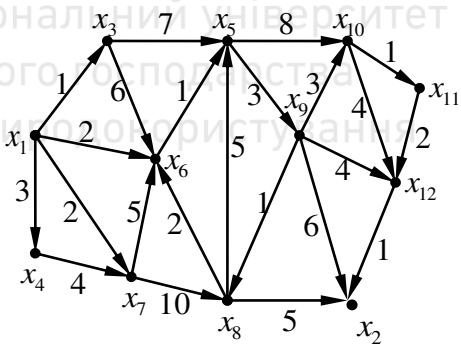
18.



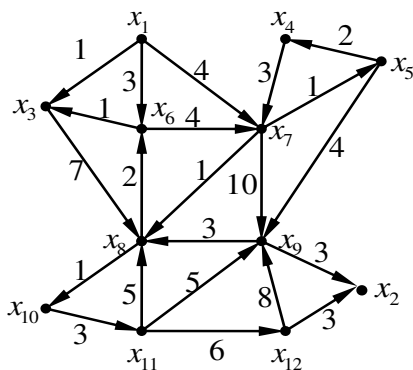
19.



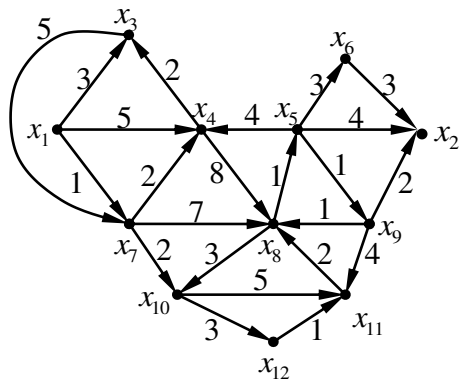
20.



21.

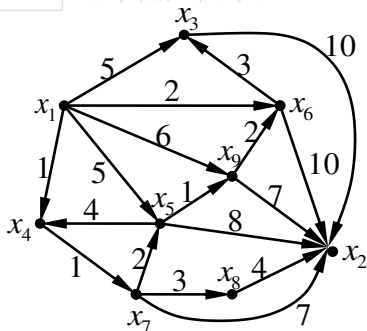


22.

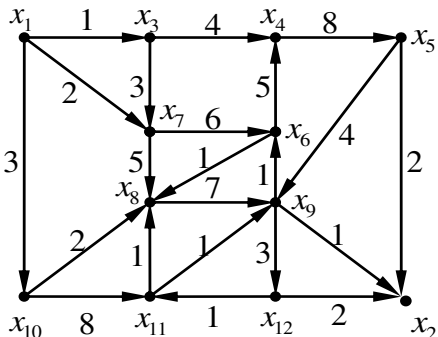


23.

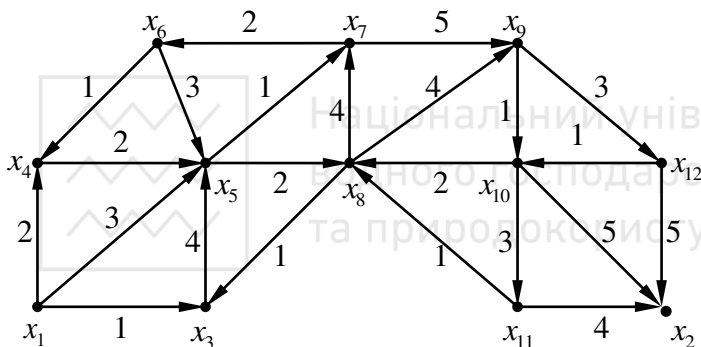
Національний університет
водного господарства
та природокористування



24.



25.



Завдання 3.

Визначити максимальний потік між вузлами x_1 та x_2 методом Форда-Фалкерсона. Завдання взяти із завдання 2. Варіант вибирати за правилом $(26 - k)$, де k – номер студента в списку.

ТЕМА 15. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ (СМО)

Базові поняття: система масового обслуговування, джерело, черга, потік, вимога на обслуговування, позначення Кендела, дисципліна черги, розподіл часу обслуговування

§15.1. Основні компоненти моделей масового обслуговування

Перше питання, яке в нас виникає: де в реальному житті ми стикаємось із системами масового обслуговування? Відповідь проста: повсюдно і щоденно! Система кас в супермаркеті чи на залізничному вокзалі; автозаправна станція; лікарні; черга документів на друк і т. д.

В СМО визначальну роль відіграє фактор випадковості. Всі СМО характеризуються наявністю черги та необхідністю перебування в стані очікування. Тому ціллю вивчення обслуговуючої системи через математичне моделювання є оцінка та взяття під контроль деяких кількісних показників функціонування СМО.

Основними елементами, пов'язаними з масовим обслуговуванням будь-якого типу, є

- 1) заявка на обслуговування або вимога;
- 2) механізм обслуговування або обслуговуюча система.

Елементи обслуговуючої системи називаються **вузлами обслуговування**.

В моделях СМО взаємодія між вимогою та вузлом обслуговування представляє інтерес лише з точки зору довжини інтервалу часу, який потрібний для повного обслуговування. Тому для визначення характеристик вхідного потоку вимог з точки зору математики інтерес представляють відрізки часу, які розділяють послідовні надходження вимог на обслуговування. Саму процедуру обслуговування теж розглядають з точки зору лише часу обслуговування. Оскільки час в обох випадках є випадковою величиною, то в СМО оперують поняттями **розподіл часу обслуговування** та **розподіл моментів надходження вимог**.

Далі важливо враховувати принцип, згідно якого вимоги із черги надходять до вузла обслуговування – **дисципліна черги**:

- 1) перший прийшов, перший обслуговується;
- 2) останній прийшов, перший обслуговується;
- 3) випадковий вибір вимог.



Якщо вимоги обслуговуються згідно пріоритетності, то організуються декілька черг, кожна з яких характеризується своїм рівнем пріоритетності.

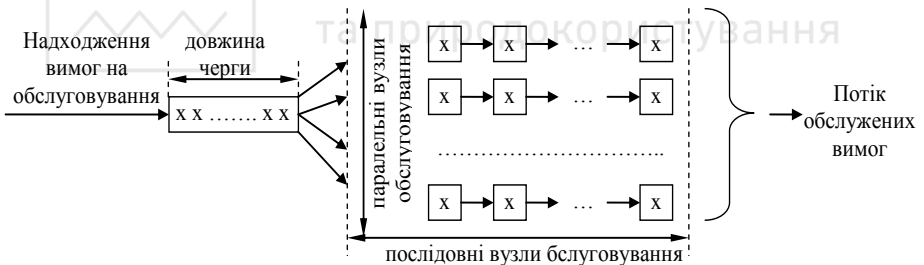
Також в СМО може функціонувати кілька вузлів обслуговування. Якщо всі вузли пропонують однакові послуги, тоді маємо **СМО з паралельним обслуговуванням**. Якщо вузли надають різні послуги, тоді маємо **СМО з послідовним обслуговуванням**. Наприклад, автомобіль на заводі проходить через різні цехи – це послідовне обслуговування. Але в конкретному цесі є кілька конвєсерів по виконанні однотипних робіт – це паралельне обслуговування.

Наступною характеристикою є **допустима довжина черги**, тобто існують СМО, в яких довжина черги обмежена числом N клієнтів і $(N + 1)$ -ша вимога відкидається. Звичайно, нам всім знайомий сигнал телефону, коли абонент зайнятий. Тобто, нашу вимогу “відхилено”.

Також потрібно враховувати **природу джерела**, що генерує вимоги – або обмежена кількість вимог, або нескінченна.

Можна побудувати стільки математичних моделей СМО, скільки існує всеможливих комбінацій вищеперелічених характеристик.

Схематично СМО можна зобразити наступним чином:



§15.2. Розподіл моментів часу надходження вимог на обслуговування

Вважаємо, що для вхідного та вихідного потоків клієнтів в СМО виконують наступні властивості:

1. Ймовірність події надходження або вибуття клієнта із СМО в інтервалі часу $[t, t + h]$ залежить лише від величини h . Тобто, ймовірність такої події не залежить ні від кількості подій, які трапились до моменту часу t , ні від величини самого моменту часу t . У випадкових процесах такі процеси називаються стаціонарними.



2. Ймовірність реалізації події на нескінченно малому проміжку часу h більше нуля, але менше одиниці.

3. На нескінченно малому проміжку часу h реалізується не більше однієї події.

Властивості 1–3 – це спрощуючі припущення.

Позначимо через $p_n(t)$ ймовірність настання n подій протягом проміжку часу довжиною t . Властивість 1 означає, що події є статистично незалежними та рівноймовірними. Тому $p_0(t+h) = p_0(t) \cdot p_0(h)$. Отже, $p_0(t) = e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$ (перед константою α стоїть знак “мінус”, оскільки згідно властивості 2: $0 < p_0(t) < 1$). Використовуючи розклад в ряд Тейлора і нехтуючи нескінченно малими другого порядку і вище відносно h , маємо

$$p_0(h) = e^{-\alpha h} = 1 - \frac{\alpha h}{1!} + \frac{(\alpha h)^2}{2!} - \frac{(\alpha h)^3}{3!} + \dots \approx 1 - \alpha h.$$

Враховуючи властивість 3, отримуємо

$$p_1(h) = 1 - p_0(h), \text{ звідки } p_1(h) = \alpha h.$$

Отже, ймовірність настання події протягом проміжку h прямо пропорційна величині h .

Нехай $f(t)$ є густиною ймовірності того, що довжина інтервалу часу між послідовним настанням випадкової події дорівнює t ($t \geq 0$).

Тоді функція $F(t) = \int_0^t f(t) dt$ є функцією розподілу величини t .

Згідно теорії ймовірності можна стверджувати, що якщо T – це інтервал часу, який пройшов після реалізації останньої події, то

$$p(t \geq T) = p_0(T). \quad (15.1)$$

Тобто, ймовірність того, що інтервал часу між моментами реалізації послідовних подій не менше T , дорівнює ймовірності того, що протягом T події не відбувалися. Оскільки $p_0(T) = e^{-\alpha T}$, то

отримуємо $\int_T^\infty f(t) dt = e^{-\alpha T}$. Або

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt - \int_{-\infty}^0 f(t) dt - \int_0^T f(t) dt = e^{-\alpha T}.$$



$$1 - F(T) = e^{-\alpha T}.$$

Диференціюючи останню рівність по T , отримуємо $-f(t) = -\alpha e^{-\alpha T}$,
або

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha T}. \quad (15.2)$$

Тобто, маємо експоненціальний розподіл проміжків часу T .

Звідси можна зробити наступні висновки:

1) для процесу, який характеризується ймовірностями $p_n(t)$, інтервали часу між послідовними реалізаціями подій розподілені експоненціально;

2) для експоненціального розподілу математичне сподівання випадкової величини $T \geq 0$ визначається

$$\begin{aligned} E(T) &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} T e^{-\alpha T} dT = \alpha \int_{-\infty}^0 T e^{-\alpha T} dT + \alpha \int_0^{+\infty} T e^{-\alpha T} dT = \\ &= -T e^{-\alpha T} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha T} dT = -\frac{e^{-\alpha T}}{\alpha} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

$E(T)$ – середнє значення часових інтервалів між моментами

послідовної реалізації подій. Тоді $\frac{1}{E(T)} = \alpha = \lambda$ – частота виникнення

подій протягом одиничного проміжку часу. Отже, α – кількість вимог, які надходять в СМО за одиницю часу.

Розглянемо процес чистого надходження вимог. Це означає, що вимога, яка надійшла в СМО, приєднується до черги і не залишає її доти, поки її не обслужать. Ці процеси ще називають **процесами чистого народження**.

Для нескінченного малого проміжку h при $n > 0$, отримаємо

$$p_n(t+h) = \begin{cases} n \text{ надходжень протягом проміжку часу } t \text{ та} \\ \text{нуль надходжень протягом проміжку часу } h; \\ \text{або} \\ (n-1) \text{ надходжень протягом проміжку часу } t \text{ та} \\ \text{одне надходження протягом проміжку часу } h. \end{cases}$$

Тоді



$$p_n(t+h) = p_n(t) \cdot p_0(h) + p_{n-1}(t) \cdot p_1(h), \quad n > 0,$$

$$p_0(t+h) = p_0(t) \cdot p_0(h), \quad n = 0.$$

Оскільки $p_0(h) = 1 - \alpha h$, $p_1(h) = \alpha h$, то

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1 - \alpha h) + p_{n-1}(t)\alpha h,$$

$$p_n(t+h) - p_n(t) = -\alpha p_n(t)h + \alpha p_{n-1}(t)h.$$

Аналогічно

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1 - \alpha h),$$

$$p_0(t+h) - p_0(t) = -\alpha h p_0(t).$$

Або, поділивши на h , маємо

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = -\alpha p_n(t) + \alpha p_{n-1}(t),$$

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\alpha p_0(t).$$

Переходячи до границі при $h \rightarrow 0$, отримаємо

$$p'_n(t) = -\alpha p_n(t) + \alpha p_{n-1}(t). \quad (15.3)$$

$$p'_0(t) = -\alpha p_0(t). \quad (15.4)$$

Розв'язком різницево-диференціальних рівнянь (15.3), (15.4) є функція (при врахуванні, що $\lambda = \alpha$)

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (15.5)$$

тобто розподіл $p_n(t)$ є пуассонівським із середнім значенням та дисперсією рівними λt .

Отже, коли часові інтервали між моментами послідовних надходжень вимог на обслуговування розподіленні експоненціально із середнім значенням $\frac{1}{\lambda}$, то число надходжень в інтервалі часу t характеризується пуассонівським розподілом із середнім значенням λt .

§15.3. Вихідні потоки

Процес на виході СМО розглядається в припущенні, що система починає функціонувати при наявності в ній N клієнтів, які після



завершення їхнього обслуговування вибувають із системи з інтенсивністю μ . Такі процеси називаються **процесами чистої загибелі**. Прикладом такого процесу є вилучення зі складу запасів, які там зберігаються. Тоді припускають, що на складі є N одиниць запасів, які вилучаються із даного складу з інтенсивністю μ .

Нехай $q_n(t)$ – ймовірність того, що на протязі t одиниць часу зі складу буде вилучено n одиниць запасів. Як і у випадку чистого народження для малого інтервалу часу $h \neq 0$ маємо

$$q_0(h) = e^{-\mu h} \approx 1 - \mu h,$$

$$q_1(h) = 1 - q_0(h) \approx \mu h.$$

Якщо на протязі t одиниць часу число вибувань дорівнює N , то ймовірність відсутності вибувань протягом проміжку часу h дорівнює 1. Тоді маємо

$$q_N(t+h) = q_N(t) \cdot q_0(h) + q_{N-1}(t) \cdot q_1(h) = q_N(t) + q_{N-1}(t) \cdot \mu h,$$

або

$$\frac{q_N(t+h) - q_N(t)}{h} = \mu q_{N-1}(t).$$

При $h \rightarrow 0$ маємо

$$q'_N(t) = \mu q_{N-1}(t). \tag{15.6}$$

Далі

$$q_n(t+h) = q_n(t) \cdot q_0(h) + q_{n-1}(t) \cdot q_1(h) = q_n(t)(1 - \mu h) + q_{n-1}(t)\mu h,$$

або використовуючи граничний перехід при $h \rightarrow 0$

$$q'_n(t) = -\mu q_n(t) + \mu q_{n-1}(t). \tag{15.7}$$

Так само

$$q_0(t+h) = q_0(t) \cdot q_0(h) = q_0(t)(1 - \mu h),$$

$$q'_0(t) = -\mu q_0(t). \tag{15.8}$$

Зауважимо, що рівняння (15.7) виконується при умові $1 \leq n \leq N$.

Система різницево-диференціальних рівнянь (15.6)-(15.8) має своїм розв'язком



$$\begin{cases} q_n(t) = \frac{(\mu t)^n e^{-\mu t}}{n!}, & n = \overline{1, N}, \\ q_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^N q_n(t). \end{cases} \quad (15.9)$$

В більшості випадків дослідників цікавить ймовірність того, що через t одиниць часу в системі залишиться лише n клієнтів або вимог на обслуговування. Позначимо цю ймовірність через $S_n(t)$. Якщо початково в системі було N клієнтів, то очевидно, що $S_n(t) = q_{N-n}(t)$. Тоді з (15.9) отримуємо

$$S_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (15.10)$$

$$S_0(t) = 1 - \sum_{n=1}^N S_n(t).$$

§15.4. Позначення Кендела та основні операційні характеристики СМО

Загальноприйняті позначення СМО мають вигляд $(a/b/c):(d/e/f)$.

Дані позначення у вигляді $(a/b/c)$ були вперше введені Кенделом в 1953 р. В 1966 р. математик Лі доповнив їх ще форматом (d/e) .

Основні значення позначень наступні:

- a – розподіл моментів надходження вимог на обслуговування;
- b – розподіл часу обслуговування або вибувань обслужених клієнтів;
- c – число паралельно функціонуючих вузлів обслуговування ($c = 1, 2, 3, \dots, \infty$);
- d – дисципліна черги;
- e – максимальне число клієнтів, що допускаються в систему (клієнти в черзі та клієнти, що обслуговуються);
- f – потужність джерела, що генерує вимоги на обслуговування.

Для a та b використовують наступні стандартні позначення:

M – пуассонівський або марківський розподіл моментів надходження вимог на обслуговування та вибуття обслужених клієнтів із системи;

D – детермінований або фіксований інтервал часу між моментами послідовного надходження вимог в систему або вибувань;

GI – довільний або невизначений розподіл моментів надходження вимог;

G – довільний розподіл моментів вибуття обслужених вимог.

На початку функціонування СМО спостерігається не встановлений або перехідний режим, тобто коли поведінка системи залишається функцією часу. При $t \rightarrow \infty$ настає стаціонарний режим функціонування, який ми будемо досліджувати. Найбільше дослідників цікавлять наступні характеристики СМО:

- 1) p_n – ймовірність того, що в системі знаходиться n клієнтів;
- 2) L_s – середнє число клієнтів в системі;
- 3) L_q – середнє число клієнтів в черзі;
- 4) W_s – середній час перебування клієнта в системі;
- 5) W_q – середній час перебування клієнта в черзі.

За означенням L_s , L_q визначаються наступним чином:

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n, \quad L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n - c) p_n. \quad (15.11)$$

Якщо відомо, з якою частотою λ заявки надходять в систему, то можна скористатися формулою

$$L_s = \lambda W_s, \quad L_q = \lambda W_q. \quad (15.12)$$

Якщо система має обмежену довжину черги, то замість λ використовують λ_{ef} – ефективну частоту надходжень, де

$$\lambda_{ef} = \beta \lambda, \quad 0 < \beta < 1. \quad (15.13)$$

Тоді (15.12) набувають вигляду

$$L_s = \lambda_{ef} W_s, \quad L_q = \lambda_{ef} W_q. \quad (15.14)$$

Очевидно, що

$$W_s = W_q + \langle \text{середній час на обслуговування клієнта} \rangle.$$

Якщо середня частота обслуговування μ , то середній час на

обслуговування буде $\frac{1}{\mu}$ і тоді



$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}. \quad (15.15)$$

Домноживши (15.15) на λ , маємо

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}. \quad (15.16)$$

Залежність (15.16) залишається справедливою, якщо λ замінити на λ_{ef}

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}.$$

Звідси

$$\lambda_{ef} = (L_s - L_q)\mu.$$

Якщо відомо p_n , тоді

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} np_n \Rightarrow \begin{cases} L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow W_q = \frac{L_q}{\lambda} \Rightarrow W_s = W_q + \frac{1}{\mu}, \\ W_s = \frac{L_s}{\lambda} \Rightarrow W_q = W_s - \frac{1}{\mu} \Rightarrow L_q = \lambda W_q. \end{cases}$$

§15.5. СМО (М/М/1) : (GD/∞/∞)

В даній СМО є єдиний вузол обслуговування, а на довжину черги та потужність джерела вимог умов не накладається. Вхідний та вихідний потоки є пуассонівськими з параметрами λ та μ і для цих потоків виконуються спрощуючі умови пункту 15.2.

Тоді маємо

$$p\{\text{нуль надходжень протягом інтервалу часу } h\} = e^{-\lambda h} \approx 1 - \lambda h,$$

$$p\{\text{одне надходження протягом інтервалу часу } h\} = 1 - e^{-\lambda h} \approx \lambda h,$$

$$p\{\text{нуль вибувань протягом інтервалу часу } h\} \approx 1 - \mu h,$$

$$p\{\text{одне вибування протягом інтервалу часу } h\} \approx \mu h.$$

Ймовірність перебування в системі в момент часу $(t + h)$ рівно n клієнтів буде $p_n(t + h)$. Це можливо, якщо (враховуючи, що протягом інтервалу часу h реалізується не більше однієї події)



- 1) в кінці моменту часу t в системі знаходилося n клієнтів і протягом часу h не було жодних надходжень і жодних вибувань;
- 2) в кінці моменту часу t в системі знаходився $(n-1)$ клієнт і протягом проміжку часу h відбулось одне надходження та не було жодних;
- 3) в кінці моменту часу t в системі знаходився $(n+1)$ клієнт і протягом часу h не було надходжень але було одне вибування.

Тоді згідно закону повної ймовірності маємо

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-\lambda h)(1-\mu h) + p_{n-1}(t)(1-\mu h)\lambda h + p_{n+1}(t)(1-\lambda h)\mu h, \quad n \geq 1. \quad (15.17)$$

При $n=0$ другого випадку бути не може і ймовірність того, що не вибуде жоден клієнт при знаходженні в системі нуль клієнтів, дорівнює 1. Отже

$$p_0(t+h) = p_0(t)(1-\lambda h) + p_1(t)(1-\lambda h)\mu h. \quad (15.18)$$

З (15.17) маємо

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = p_n(t)(-\mu - \lambda + \lambda\mu h) + p_{n-1}(t)(1-\mu h) + p_{n+1}(t)\mu(1-\lambda h),$$

і при $h \rightarrow 0$ отримуємо

$$p'_n(t) = -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t). \quad (15.19)$$

З (15.18) при $h \rightarrow 0$ дістанемо

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t). \quad (15.20)$$

За домовленістю ми розглядаємо стаціонарний режим функціонування системи. Тоді при $t \rightarrow \infty$: $p_n(t) = p_n$, $p'_n(t) = 0$.

Тоді з (15.19) та (15.20) маємо

$$\begin{aligned} -(\lambda + \mu)p_n + \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} &= 0, \\ -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0. \end{aligned} \quad (15.21)$$

Можна показати, що розв'язком системи (15.21) є функція

$$p_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n=0,1,\dots \quad (15.22)$$

де $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$. Тоді за означенням маємо



$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n =$$

$$= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) = (1-\rho)\rho \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

§15.6. СМО (M/M/1) : (GD/N/∞)

В даній СМО максимальне число вимог, що допускаються в систему, рівне N . Тобто, при наявності одного вузла обслуговування в черзі може бути не більше як $(N-1)$ вимога.

Для $0 \leq n \leq N$ рівняння, які описують стан системи, співпадають з (15.21). Відмінність буде лише при $n = N$. Тоді отримаємо

$$p_N(t+h) = p_N(t)(1-\mu h) + p_{N-1}(t)(1-\mu h)\lambda h.$$

При $h \rightarrow 0$ маємо

$$p'_N(t) = -\mu p_N(t) + \lambda p_{N-1}(t).$$

В стаціонарному режимі функціонування отримуємо наступну систему рівнянь, яка і є математичною моделлю розглядуваної СМО

$$\begin{cases} -(\lambda + \mu)p_n + \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} = 0, \\ -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\ -\mu p_N + \lambda p_{N-1} = 0. \end{cases} \quad (15.23)$$

Розв'язок системи (15.23) має наступний вигляд:

$$p_n = \begin{cases} \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \right) \rho^n, & \rho \neq 1, \quad 0 \leq n \leq N, \\ \frac{1}{N+1}, & \rho = 1, \quad 0 \leq n \leq N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

Тоді можна показати, що середнє число клієнтів, які перебувають в системі, дорівнює



$$L_s = \begin{cases} \frac{N}{2}, & \rho = 1, \\ \frac{\rho(1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}, & \rho \neq 1. \end{cases}$$

А як показано в пункті 15.4, знаючи L_s можна обчислити всі інші операційні характеристики СМО.

Питання для самоконтролю

1. Що називається вузлом обслуговування?
2. В СМО виділяють наступні дисципліни черги...
3. Якою може бути конфігурація обслуговуючої системи в СМО?
4. Назвіть властивості, які виконуються для вхідного та вихідного потоків клієнтів в СМО.
5. Яким співвідношенням пов'язані операційні характеристики СМО W_s та W_q ?
6. Загальноприйняті позначення СМО мають вигляд... Пояснити кожну складову.
7. Яка відмінність між СМО $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ та $(M/M/1):(GD/N/\infty)$?
8. Яку операційну характеристику СМО потрібно знати, щоб знайти всі інші?
9. Згідно з якими припущеннями побудовані математичні моделі СМО даної теми?



Лабораторна робота №8 Математичні моделі систем масового обслуговування

Визначення операційних характеристик деяких СМО зручно звести до наступної таблиці:

	$(M/M/1):$ $(GD/\infty/\infty)$	$(M/M/1): (GD/N/\infty)$	$(M/M/c): (GD/\infty/\infty)$
p_n	$(1-\rho)\rho^n$	$\begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}}, & \text{якщо } \rho \neq 1, \\ & n \leq N; \\ \frac{1}{N+1}, & \text{якщо } \rho = 1, n \leq N; \\ 0, & \text{якщо } n > N. \end{cases}$	$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, & \text{якщо } 0 < n \leq c; \\ \frac{\rho^n}{c^{n-c} \cdot c!} p_0, & \text{якщо } n > c; \end{cases}$ $P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)} \right)^{-1}.$
L_s	$\frac{\rho}{1-\rho}$	$\begin{cases} \frac{\rho \left[- (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1} \right]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}, \\ & \text{якщо } \rho \neq 1; \\ N/2, & \text{якщо } \rho = 1. \end{cases}$	$L_q + \rho$
L_q	$\frac{\rho^2}{1-\rho}$	$\begin{aligned} & \lambda_{\text{еф}} \cdot W_q \\ & (\lambda_{\text{еф}} = \lambda(1-p_N)) \end{aligned}$	$\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} P_0$
W_s	$\frac{1}{\mu(1-\rho)}$	$\frac{L_s}{\lambda_{\text{еф}}} \quad (\lambda_{\text{еф}} = \lambda(1-p_N))$	$W_q + \frac{1}{\mu}$
W_q	$\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$	$W_s - \frac{1}{\mu}$	$\frac{L_q}{\lambda}$



Приклад Л8.1. На автотранспортну станцію автомобілі надходять у відповідності з пуассонівським розподілом із середньою інтенсивністю 5 авто/год. Розподіл довжини проміжку часу, що витрачається на миття одного автомобіля підкоряється експоненціальному закону із середнім значенням 10 хвилин на 1 автомобіль. Станція одночасно може обслуговувати 1 автомобіль. Оцінити характеристики даної СМО.

Розв'язання. Для даної СМО скористаймося моделлю $(M/M/1): (GD/\infty/\infty)$. В даному випадку $\lambda = 5$ авто/год,

$$\mu = \frac{60}{10} = 6 \text{ авто/год} \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} < 1. \text{ Отже, система може}$$

функціонувати в стаціонарному режимі. Визначимо, під яку кількість автомобілів потрібно організувати на автотранспортній стоянці. Це еквівалентне відшукуванню

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{1}{6}} = \frac{25}{6} \approx 4 \text{ автомобілі.}$$

Однак L_q – це математичне сподівання, а тому в довільний момент часу може відрізнятись від реально необхідних місць. Тому до вирішення цієї проблеми можна підійти з іншого боку: потрібно організувати стоянку під таку кількість місць, щоб одночасно забезпечити, наприклад, 80% новоприбулих клієнтів. Це еквівалентне умові

$$p_0 + p_1 + \dots + p_s \geq 0,8,$$

де s – кількість місць на стоянці. Тоді отримуємо

$$(1-\rho) + (1-\rho)\rho + \dots + (1-\rho)\rho^s \geq 0,8,$$

$$(1-\rho)(1 + \rho + \dots + \rho^s) \geq 0,8,$$

$$(1-\rho) \cdot \frac{1-\rho^{s+1}}{1-\rho} \geq 0,8,$$

$$1-\rho^{s+1} \geq 0,8,$$

$$\rho^{s+1} \leq 0,2,$$

$$(s+1)\ln\rho \leq \ln 0,2,$$



$$s \geq \frac{\ln 0,2}{\ln \rho} - 1,$$

$$s \geq 8 \text{ (автомобілів).}$$

Отже, величина s в 2 рази більша від L_q .

Доля часу, протягом якого автомийка буде простоювати, дорівнює ймовірності того, що на станції не буде жодного автомобіля.

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \approx 0,17 \Rightarrow 17\% \text{ робочого часу автомийка}$$

простоє.

Середня тривалість перебування клієнта в системі

$$W_s = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{6\left(1-\frac{5}{6}\right)} = 1 \text{ (година).}$$

Приклад Л8.2. Розглянемо попередній приклад і вважаємо, що на станції є стоянка для 5-ти автомобілів. Якщо всі місця зайняті, то автомобіль, який прибув на станцію, повинен шукати іншу станцію. Оцінити характеристики СМО.

Розв'язання. Для даної СМО використовуємо модель $(M/M/1):(GD/N/\infty)$, де $N = 5 + 1 = 6$.

Визначимо, скільки клієнтів втрачає станція через обмеженість стоянки. Практично це еквівалентне різниці між λ та λ_{ef} , тобто

$$\lambda - \lambda_{ef} = \lambda p_n.$$

Тоді

$$p_N = p_6 = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{n+1}} \right) \rho^n = \left(\frac{1-\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^7} \right) \left(\frac{5}{6} \right)^6 = 0,0774.$$

Отже, частота виникнення ситуацій, коли автомобіль, який прибув, не має можливості приєднатися до черги буде

$$\lambda p_N = 5 \cdot 0,0774 = 0,387 \text{ авто/год.}$$

При 8-ми годинному робочому дні в середньому втрачається 3 автомобілі.

Щоб знайти середню тривалість перебування клієнта в системі W_s , знайдемо L_s . Отримуємо

$$L_s = \frac{\rho \left[1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1} \right]}{(1-\rho)(1+\rho^{N+1})} = \frac{5 \cdot \left[1 - 7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \right]}{6 \cdot \left[\left(1 - \frac{5}{6}\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7\right) \right]} = 2,29 \text{ (авто)}.$$

З урахуванням того, що $\lambda_{ef} = \lambda(1 - p_6) = 5(1 - 0,0774) = 4,613$ отримаємо

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}} = \frac{2,29}{4,613} \approx 0,5 \text{ (год)}.$$

Отже, в порівнянні з прикладом Л8.1, середня тривалість перебування клієнта в системі зменшилась вдвоє.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. (i – номер варіанту)

Автоїдальня, яка розміщена на автомагістралі, має прилавок, біля якого може зупинитись один автомобіль. За статистичними оцінками автомобілі під'їжджають до автоїдальні відповідно до пуассонівського розподілу ймовірностей із середньою частотою $(20+i)$ автомобілів за 1 годину. Для виконання замовлення клієнта в середньому потрібна 1 хвилина, але, взагалі кажучи, тривалості обслуговування розподілені за експоненціальним законом. Потрібно обчислити:

- ймовірність того, що біля автоїдальні не буде жодного автомобіля;
- середнє число клієнтів, що чекають на обслуговування (але тих, які в даний момент часу ще не обслуговуються);
- середній час очікування від моменту прибуття клієнта до початку його обслуговування;
- ймовірність того, що клієнт, який прибув, має можливість зайняти чергу на під'їзній доріжці до автоїдальні (під'їзна доріжка дозволяє стати в чергу для 10 автомобілів).



Завдання 2. (i – номер варіанта)

Хворі прибувають в поліклініку у відповідності з пуассонівським розподілом ймовірностей при $\lambda = (18 + i)$ пацієнтів за годину. Хол для очікування прийому у лікаря не може вмістити більше $(12 + i)$ клієнтів. Тривалість прийому у лікаря підкоряється експоненціальному закону розподілу ймовірностей із середнім значенням $\mu = (8 + i)$ пацієнтів за годину. Потрібно визначити:

- ефективну частоту надходження хворих в поліклініку;
- ймовірність того, що клієнт, який прибув, не буде чекати;
- ймовірність того, що черговий хворий, який прибув, знайде в холі для очікування вільне місце;
- середню тривалість перебування хворого в поліклініці;
- ймовірність того, що черговий хворий не зможе потрапити в поліклініку з причини відсутності в холі для очікування вільних місць.





ЛІТЕРАТУРА

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 250с.
2. Бахвалов Н.С., Житков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ, 2004. – 636 с.
3. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука, 1990. – 360 с.
4. Веников В.А., Веников Г.В. Теорія подоби́я и моделирования. – М.: Высш. Школа, 1984. – 256с.
5. Веригин Н.Н., Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод. – М.: Колос, 1979. – 336с.
6. Власюк А.П. Чисельне розв'язання задачі розчинення і винесення пластових солей з основи гідротехнічної споруди // Доп. НАН України. – 1995. – № 8. – С. 37-39.
7. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416с.
8. Гинзбург И.П. Прикладная гидрогазодинамика. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1958. – 340с.
9. Грунтоведение // Под ред. Е.М.Сергеева. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 390 с.
10. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. Думка, 2001. – 606 с.
11. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. Думка, 1998. – 614 с.
12. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 495 с.
13. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов. – М.: Высш. шк., 1991. – 447 с.
14. Катренко А.В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2003. – 424 с.
15. Киселёв А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высш. шк., 1967. – 311с.
16. Кузин Л.Т. Основы кибернетики: в 2-х томах. Т.2. Основы кибернетических моделей. – М.: Энергия, 1979. – 584с.

17. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. – Киев: Наук. Думка, 1991. – 264 с.
18. Ляшко С.И. Оптимизация и математическое моделирование массопереноса подземных вод. – Киев: Наук. Думка, 1998. – 256 с.
19. Математические модели фильтрации и их приложения: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 1999. – 204 с.
20. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунз, Н.А. Верезуб и др. – М.: Наука, 1987. – 271 с.
21. Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем. – М.: Наука, 1989. – 271 с.
22. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод / Под ред. Н.Н. Веригина. – М.: Колос, 1979. – 336 с.
23. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. – Київ: Вища шк., 2002. – 308 с.
24. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
25. Молчанов А.А. Моделирование и проектирование сложных систем. Киев: Выща школа, 1988. – 359 с.
26. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975. – 464 с.
27. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
28. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальному, биологическому и экологическому задачам. – М.: Наука, 1986. – 496 с.
29. Роч П.Дж. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
30. Рыжиков Ю. И. Имитационное моделирование. Теория и технологии. – СПб.: КОРОНА принт; Москва: Альтекс-А, 2004. – 384 с.
31. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи, методы, примеры. – М.: Наука, 2001. – 352 с.
32. Самарський А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
33. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – Київ: Вища школа, 1994. – 455 с.

34. Семененко М.Г. Введение в математическое моделирование. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 112 с.
35. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. Думка, 1985. – 384 с.
36. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
37. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высш. школа, 2001. – 343 с.
38. Спицнадель В.Н. Основы системного анализа. – Санкт-Петербург: Изд. дом “Бизнес-пресса”, 2000. – 326 с.
39. Сявавко М., Рибицька О. Математичне моделювання за умов невизначеності. – Львів: Українські технології, 2000. – 319 с.
40. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. – Минск: Дизайн ПРО, 2004. – 640 с.
41. Тер-Мартirosян З.Г. Прогноз механических процессов в массивах многофазных грунтов. – М.: Недра, 1986. – 292 с.
42. Томашевський В.М. Моделювання систем. – Київ: Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.

