

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ**

В.Л. Кузнецов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Часть 1

Москва –2003

Рецензенты: д-р. техн. наук, профессор Камзолов С.К.

д-р. техн. наук , профессор Крупенников С.А.,

Кузнецов В.Л.

Математическое моделирование: Учебное пособие.- М.: МГТУГА, 2003.

Пособие составлено в соответствии с программой по курсу математического моделирования и требований ГОС для студентов специальности 073000 дневного обучения.

Учебное пособие представляет собой введение в теорию математических моделей, где основное внимание уделено расширенному толкованию их классификации.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры 03.11.03 и методического совета по специальности 073000 от 27.11.03.

" Хороший специалист не тот, кто может предложить десяток подходов к решению проблемы, а тот, кто знает сотню " подводных камней " на пути реализации этих решений "

Академик Я.Б. Зельдович

ПРЕДИСЛОВИЕ

Хорошая математическая подготовка необходима любому инженеру, занимающемуся творческой работой. Однако владение математическим аппаратом составляет лишь часть арсенала средств, необходимых исследователю в его профессиональной деятельности. Важнейшим компонентом подготовки инженера-математика является обучение *методам постановки математических задач, возникающих в реальных практических ситуациях.*

Такие математически корректно поставленные задачи, адекватно решаемой проблеме отображающие исследуемые системы, принято называть математическими моделями. Построение и исследование математических моделей с целью получения ответов на поставленные вопросы и составляет предмет математического моделирования.

Математическое моделирование не является наукой в том смысле, как мы понимаем физику, биологию, экономику и, соответственно, не подменяет их и не конкурирует с ними. Математическое моделирование - это *методология* познания, конструирования, проектирования, прогноза поведения сложных систем.

В отличие от экспериментальных исследований, методы математического моделирования дают возможность относительно быстро, без значительных затрат изменять в широком диапазоне параметры, характеристики, свойства исследуемой системы, а прогресс в области компьютерных технологий позволяет преодолеть трудности аналитических методов при исследовании сложных моделей, доводить результаты до числа.

Зародившись и развившись внутри физике, математическое моделирование достаточно интенсивно начало проникать в другие науки (в том числе и социальные) и сферы человеческой деятельности. Спектр применения математических моделей стал необычайно широк, поэтому любая попытка сколь-либо полно осветить все аспекты моделирования изначально обречена на неудачу.

В этом пособии предпринята попытка изложить основы теории построения математических моделей, акцентируя внимание на приближениях (а, следовательно-

но, ограничениях), используемых при моделировании. Дело в том. Что преимущества модельного подхода, когда реальная система заменяется ее упрощенным аналогом, могут обратиться в "подводные камни" - стоит лишь "забыть" о сделанных ограничениях и применить результаты моделирования там, где эти приближения не работают. Это, казалось бы, тривиальное замечание имеет под собой серьезную основу. Моделируя системы, отбрасывая, пренебрегая какими - либо факторами, связями в системе, мы порой наперед не знаем, чем грозит нам это приближение, как это может сказаться на поведении модели.

Поэтому прикладной математик всегда должен помнить о сделанных предположениях и в процессе исследования математической модели быть готовым к отказу от некоторых из исходных посылок.

Именно поэтому в задачах с участием "человеческого фактора" в т.н. трудноформализуемых системах, где нельзя однозначно выделить доминирующие отношения, результаты математического моделирования имеют для лица, принимающего решение лишь рекомендательный характер.

Курс "Математическое моделирование" в плане исследования моделей значительно пересекается по тематике с читаемым примерно в это же время курсом "Основы теории систем". Поэтому в этом пособии относительно мало внимания уделяется математическим аспектам исследования поведения построенных математических моделей. Иллюстрация изложенных принципов построения моделей на конкретных больших примерах предполагается рассмотреть во второй части пособия.

1. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1 ЦЕЛЬ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ

1.1.1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И КОНКРЕТИЗАЦИЯ ЦЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Первая проблема, возникающая на пути прикладного математика при разработке модели, состоит в правильном осознании ставящейся задачи и цели проводимых исследований.

Сложность реального мира, который мы пытаемся понять, и элементами которого стремимся управлять, неизбежно приводит к узкой специализации исследователей. Внешне это проявляется в том, что заказчик – представитель специальной области знаний – порой с трудом может объяснить в форме, понятной математику, что на самом деле нужно сделать, а последнему при этом явно не хватает знаний партнера. Возникнув первоначально в физике – технологии математического моделирования, не встречали таких трудностей, ибо и заказчик (физик-экспериментатор) и "математик" (физик теоретик) говорили на близких языках. Успехи математического моделирования в физике стимулировали процесс проникновения этих методов в другие области знаний (биологию, экономику, социологию, военное дело и т.д.) и здесь уже серьезно возникает очерченная выше проблема. У представителя специальной области знаний (в дальнейшем заказчика) и прикладного математика – разработчика модели – часто выявляются различные взгляды даже на сущность проблемы и, соответственно, на возможные пути ее решения.

Прикладной математик должен уметь кратко, четко и однозначно зафиксировать все требования заказчика, убедившись в их непротиворечивости, или, зафиксировав противоречивые требования, очертить область возможного компромисса.

От корректности решения этого этапа в значительной мере зависит и успех всего исследования. Не раз бывало, что значительный труд, затраченный на решение математической задачи, оказывался потраченным впустую из-за недостаточного внимания к этой стороне дела.

По своей структуре *цели исследования* достаточно условно можно разделить на два класса. Это исследование поведения системы (задачи типа прогноза) и получение информации о внутренней структуре и свойствах исследуемого объекта.

а) К первому классу задач относится т.н. *прямые задачи*. Здесь предполага-

ется, что основные законы функционирования системы известны, но достаточно сложны так, что предсказание поведения системы требует использования трудоемких математических методов и значительного численного счета.

б) Во второй класс входят т.н. *обратные задачи*, связанные с нахождением характеристик модели, с восстановлением отдельных свойств исследуемой системы, ее параметров и т.д. по заданному (известному из эксперимента) поведению системы. Примером здесь могут служить задачи на конструирование технических систем с заданными свойствами или распознавание объектов по результатам его зондирования (например, постановка диагноза по результатам медицинского обследования). К этому же классу задач можно отнести также как задачи оптимального управления, в которых определению подлежит вид законов управления динамической системы, при котором критерий качества функционирования объекта (целевая функция) принимает экстремальное значение, так и т.н. задача *идентификации*, когда по выходным и входным сигналам некоторой системы определяется эквивалентная система, принадлежащая некоторому классу.

1.1.2 АНАЛИЗ ИССЛЕДУЕМОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ ДЕКОМПОЗИЦИЯ

Любая реальная система является сложной в том смысле, что она может быть представлена в виде совокупности взаимосвязанных подсистем, которые в свою очередь также могут быть разделены на подсистемы и т.д. вплоть до самого низкого уровня, который мы назовем *элементарным*. Последнее определяется самим исследователем. Другими словами в каждом конкретном случае мы сами определяем "размер" элементарной подсистемы, рассматривая ее как бесструктурный элемент. В этом смысле *выбор элементарного уровня произволен*, и нижний уровень для одного исследования может оказаться достаточно высоким (многокомпонентным) для другого. Например, при моделировании боевых действий на море боевой корабль может рассматриваться как бесструктурная единица. С другой стороны, при исследовании живучести корабля этот уровень является исходным для начала анализа, т.е. самым верхним.

Анализируя исследуемую систему можно отметить, что ее отдельные элементы по-разному связаны друг с другом. Взаимосвязь между элементами, принадлежащими одной подсистеме сильнее, чем взаимосвязи между элементами разных подсистем. Это различие внутри компонентных и межкомпонентных связей и дает возможность реализовывать *декомпозицию системы* (представление ее в виде вложенной друг в друга совокупности подсистем) и относительно изолированно изучать и описывать ее составляющие.

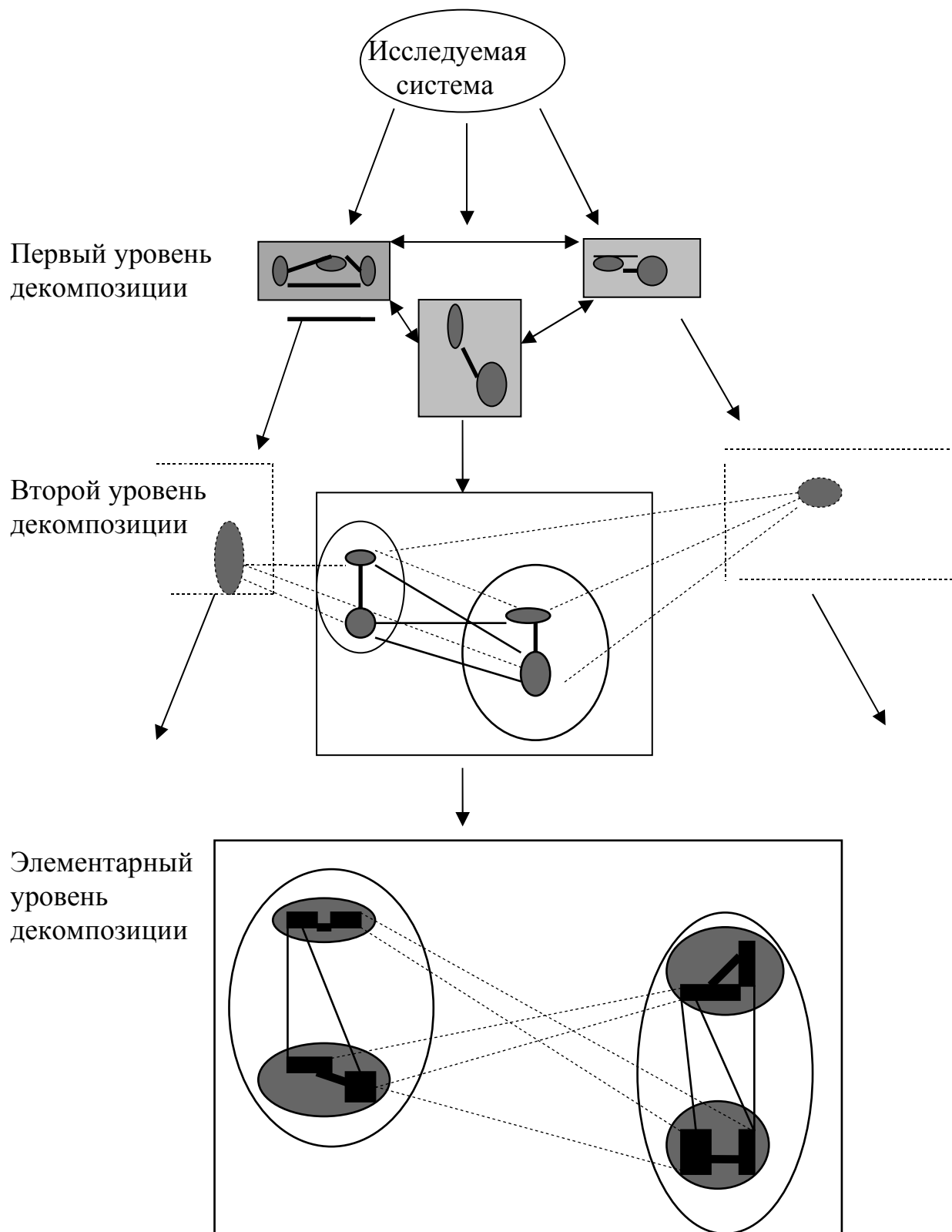


Рис.-1

При моделировании изучаемой системы мы уже на первом этапе исследования определяем (предполагаем) какие из связей системы следует считать существенными, а какие столь слабы, что ими можно пренебречь. Конечно, такая классификация связей является предварительной и ее можно рассматривать лишь как первое приближение. Дальнейшие исследования модели могут привести (и в серьезных задачах практически всегда приводят) к изменению точки зрения на значимость той или иной связи, поэтому всю полученную информацию о связях в исследуемой системе необходимо хранить до момента получения удовлетворительной математической модели – модели, которая в рамках поставленной задачи *адекватна* исследуемой системе. (Достаточно сложное понятие адекватности модели будет рассмотрено далее при изучении требований, предъявляемых к математическим моделям.)

Структурная схема описанного анализа исследуемой системы представлена на рис.-1.

На низшем уровне черными прямоугольниками отмечены элементарные (бесструктурные) подсистемы исследуемой системы, жирными и тонкими сплошными линиями отмечены представляющиеся существенными на начальном этапе исследования связи, пунктиром – более слабые зависимости. Отсутствие связей между некоторыми элементарными блоками означает, что либо такая связь отсутствует, либо ей в данной задаче можно пренебречь.

1.1.3 СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И ИХ ИЕРАРХИЯ

Проведя декомпозицию исследуемой системы можно приступать к построению ее *содержательной модели*. Для этого элементарные подсистемы и связи между ними, символически изображенные на рис.-1, надо наполнить содержанием, опираясь на законы, закономерности и эмпирические данные из той предметной области, в которой поставлена задача. Подсистемы, изображенные на структурной схеме (рис.-1) характеризуются некоторым набором динамических переменных, а связи между подсистемами означают, что между этими переменными (может быть некоторыми из них) существует функциональная связь. Для конкретизации этих связей формулируются некоторые *гипотезы* (говорят также – *постулаты модели*), строятся предположения относительно поведения характеристик элементов системы и связей между ними.

Например, при описании работы электрической схемы какого-либо электротехнического устройства часто предполагается, что для активного сопротивления выполним закон Ома, $U = I \cdot R$ в котором величина сопротивления R –

константа. Более глубокое изучение соответствующего раздела физики показывает, что эта величина зависит от температуры проводника, а та в свою очередь определяется точкой динамического баланса между потоком тепла, отводимым от сопротивления и интенсивностью процесса раскачки кристаллической структуры проводника электронами проводимости, создающими ток. Последний эффект зависит от величины тока I , и, соответственно, величина сопротивления R при прочих разных условиях будет функцией тока, а не константой. Т.о. связь между током и напряжением, вообще говоря, нелинейна. Однако в нашей задаче (предположим) этой нелинейностью можно пренебречь, и мы *постулируем* справедливость закона Ома. Это и есть одна из *гипотез* нашей модели.

Структурную схему исследуемой системы, "расщепленную" до элементарного уровня декомпозиции и сопровождаемую полной системой гипотез будем называть *содержательной моделью системы* для данной задачи.

Подчеркнем здесь еще раз, что выбор элементарного уровня определяется самой задачей, а также опытом и интуицией исследователя (прикладного математика). При этом полезно помнить слова Лапласа о том, что для того чтобы выяснить, что после дождя трава будет мокрой, нет надобности вычислять траектории всех капель...

В практической работе по созданию модели, особенно на начальном этапе, полезно стартовать с наиболее грубой модели, ухватывающей вместе с тем основные закономерности исследуемой системы. Это очень тонкий момент, и чувство меры приходит здесь лишь с опытом.

Перейдем теперь к обсуждению понятия *иерархии содержательных моделей*. Говоря о декомпозиции исследуемой системы, мы отмечали, что отдельные ее элементы связаны между собой по-разному, некоторые связи являются сильными, а некоторые относительно слабыми. Это обстоятельство позволяет слабые связи оборвать, упростив структуру объекта исследования. Однако понятие "слабости" весьма условно, и можно выстроить целую цепочку моделей, ранжированных по числу учитываемых слабых связей. Такую цепочку будем называть иерархией содержательных моделей. Лишь в исключительно редких случаях удастся построение модели даже самой простой системы во всей ее полноте, с учетом всех факторов, существенных для ее поведения. Обычно при построении модели двигаются от простого к сложному, т.е. первоначально рассматривают самую простую модель, изучают ее и лишь затем делают следующий шаг к ее усложнению, включая в рассмотрение одну или несколько отброшенных ранее слабых связей, детализируя и уточняя ранее принятые гипотезы модели.

Рассмотрим в качестве примера задачу о взаимодействии излучения с веществом, известную из общего курса физики. Общая структура исследуемой системы представлена на рис.-2.

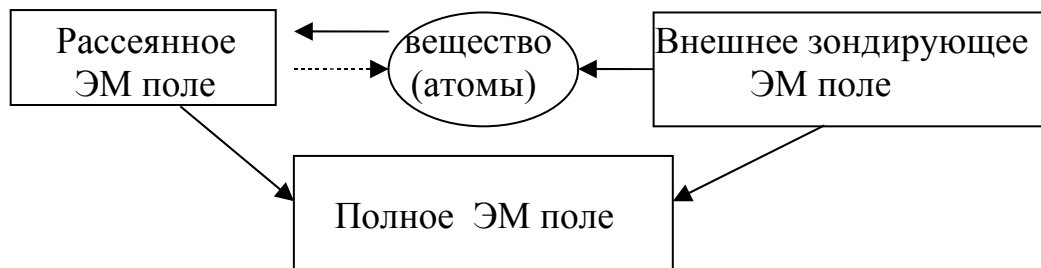


Рис.-2

Суть процесса такова. Электромагнитное поле падает на вещество, порождает в нем осцилляционное движение электронов, которые, двигаясь ускоренно, излучают, порождая рассеянное поле. Суперпозиция рассеянного и падающего поля дает полное поле в пространстве.

Перечислим основные гипотезы модели.

Первая, самая главная – поведение электронов в атомах вещества описывается законами классической физики, а сами электроны рассматриваются как осцилляторы.

Вторая гипотеза – осцилляторы гармонические, т.е. излучают только на частоте действующего на них электромагнитного поля.

Третья гипотеза – эффект воздействия рассеянного поля на порождающий его электрон (торможение излучением) мал.

Построенная на таких гипотезах теория удовлетворительно описывает взаимодействие излучения с веществом лишь вдали от резонанса, т.е. в случае, когда частота падающего поля не слишком близка к собственной частоте колебаний электронов в атомах. В противном случае модель приводит к парадоксальному выводу – малое по амплитуде, но имеющее резонансную частоту внешнее поле может породить значительно более сильное рассеянное поле. Налицо явное нарушение закона сохранения энергии! Возникающее противоречие снимается при отказе от третьей гипотезы (пунктирная линия на рис.-2). Эффект торможения излучением (воздействие рассеянного поля на излучатель) учитывается путем введения эффективной силы трения. При этом модель усложняется, но парадокс исчезает. Эта новая модель как бы поглощает первую и стоит на иерархической лестнице выше.

Отказ от второй гипотезы, т.е. замена гармонического осциллятора ангармоническим, породило целое новое направление в физике – нелинейную оптику, а покушение на первую гипотезу привело к появлению квантово-механического описания и созданию квантовой теории излучения, соответственно.

1.2 ФОРМАЛИЗАЦИЯ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В математической энциклопедии в краткой статье академика А.Н.Тихонова термин *математическая модель* "определяется" как *приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики*. В п. 1.1 мы попытались частично пояснить то, что скрывается за словами "*приближенное описание*", как строится содержательная модель. Заметим, что дальнейшее раскрытие этого термина связано с процедурой исследования математической модели.

На основе содержательной модели выписываются соответствующие уравнения, реализуется ее перевод на формальный математический язык. Другими словами, на этом этапе ставится *математическая задача*, где на языке строго определенных математических понятий следует *полное изложение исходных посылок и постановка вопроса*, которые воспринимаются совершенно одинаково любым математиком, являющимся специалистом в соответствующей области.

Может показаться, что этот этап моделирования носит чисто формальный характер. Однако это не так. Логика (в бытовом понятии), присущая математике, позволяет вскрыть те пробелы, которые неизбежно могут возникнуть при таком сложном процессе как построение содержательной модели. Здесь речь идет о *полноте математической модели*, завершенности постановки математической задачи. Выявленная незавершенность задачи требует привлечение дополнительной информации, формулировке дополнительных гипотез.

Осознать сказанное можно на простом, хорошо известном из курса средней школы примере решения текстовых задач типа "два тракториста вспахали поле, причем первый ...". Основная сложность в решения таких задач заключалась в переводе постановки задачи с вербальной формы на язык математических формул. При этом одним из критериев правильности реализации такого перехода было условие равенства числа искомых переменных числу уравнений. Меньшее число уравнений свидетельствует о том, что не вся информация, заложенная в тексте задачи, переведена в символьный язык математики.

Завершает формулировку математической модели ее "оснащение". Например, информация о начальном состоянии системы в случае решения задачи типа прогноза. Здесь для подчеркивания важности этого момента, как аналогию, полезно напомнить о различии в решениях дифференциального уравнения и соответствующей краевой задачи.

Более подробно математическую модель и вопросы с ней связанные мы обсудим во второй главе. Отметим здесь только, что первоначально построенная математическая модель вряд ли будет представлять собой окончательный вариант —

последующие этапы, связанные с решением математической задачи и анализом полученных результатов почти наверняка заставят вас пересмотреть те или иные позиции формирования содержательной модели, что неизбежно отразится на математической модели.

Таким образом, построенная первоначально математическая модель является лишь первым шагом итерационной процедуры, представляющей процесс математического моделирования.

1.3 ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

После того как математическая модель построена переходят к ее исследованию, т.е. к решению поставленной математической задачи. Однако прикладной математик уже на этапе формирования содержательной модели строит определенные предположения относительно того, какой математический аппарат им будет далее использоваться, и старается сформулировать постулаты модели на адекватном языке. Поэтому класс методов, из которых будет выбираться способ решения данной конкретной задачи уже как бы предопределен. Однако и внутри этого класса существует множество различных подходов. Прежде всего, надо выделить две основные группы решений – это *аналитические методы* и *численные*, с использованием ЭВМ.

Отметим сразу, что ценность аналитических результатов значительно выше ценности результатов численного счета. Это понятно каждому, кто когда-либо сталкивался с проблемой анализа базы числовых данных решения сложной многопараметрической задачи. Однако привлекательность аналитического решения, обусловленная относительной простотой его анализа, с лихвой компенсируется сложностью его получения. Поэтому в серьезных задачах математического моделирования нахождение аналитического решения, как правило, рассчитывать не приходится, использование потенциала ЭВМ – неизбежно. Однако и этот потенциал, к сожалению, ограничен, поэтому, приступая к решению задачи необходимо максимально продвинуться по пути аналитического решения. Как правило, за счет таких "подвижек" удастся существенно сократить время счета, что очень важно при решении больших задач. Т.о. желательно использовать комбинированный *численно-аналитический* метод с максимальной долей присутствия аналитики.

Существуют различные методы, облегчающие построение решения. К ним относятся, например, методы теории подобия, такие как метод анализа размерности и метод автомодельных решений. При решении ряда задач хорошо зарекомендовали себя метод инвариантного погружения и метод усреднения, основанный на разделении "быстрых" и "медленных" переменных. Приведем некоторые примеры.

Метод анализа размерности. Апеллируя к знаниям читателя курса общей физики можно утверждать, что большинство параметров, зависимых и независимых переменных, фигурирующих в математических соотношениях, образующих математическую модель – *размерные величины*. Из этих размерных величин можно образовывать различные комбинации, некоторые из которых окажутся безразмерными. Будем говорить, что *математические модели двух исследуемых систем подобны*, если все соответствующие безразмерные комбинации для них совпадают. Из множества безразмерных комбинаций величин можно выделить основные, через которые выражаются все остальные комбинации. Такие основные комбинации называются *критериями подобия*. Число критериев подобия можно определить следующим образом. Пусть общее число основных независимых параметров системы – n , а число основных размерностей – m , тогда число критериев подобия должно быть $(n - m)$.

В качестве примера рассмотрим незатухающие колебания математического маятника. Параметрами процесса является длина подвеса l , масса груза m , ускорение свободного падения g и наибольший угол отклонения маятника от вертикали φ . Эти параметры имеют следующие размерности:

$$[l] = L, \quad [m] = M, \quad [g] = LT^{-2}, \quad [\varphi] = 1$$

Поскольку лишь три размерности являются основными (L, M, T) , то критерий подобия только один – $(n - m) = (4 - 3) = 1$.

Единственной безразмерной величиной, которую можно построить из совокупности наших параметров, является угол отклонения маятника от вертикали φ . Таким образом, колебания различных маятников с одинаковыми значениями величины φ подобны. Пусть теперь нас интересует частота колебаний ω . Т.к.

$[\omega] = T^{-1}$, то величина $(l \cdot g^{-1} \cdot \omega^2)$ безразмерна и может зависеть только от критерия подобия – φ . Другими словами, мы получаем формулу $(l \cdot g^{-1} \cdot \omega^2) = f(\varphi)$,

откуда $\omega = \sqrt{f(\varphi)} \sqrt{\frac{g}{l}}$. Интересно, что эту формулу мы получили только исходя

из соображений размерности. Задача теперь сводится к определению вида функции $f(\varphi)$. Известно, что при малых φ она равна единице.

Метод усреднения. Рассмотрим теперь одномерное движение тела в стационарном потенциальном поле, на которое наложены малые высокочастотные возмущения. Уравнение движения такого тела имеет вид

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f, \quad (1)$$

где $f = f_1(x)\cos(\omega t) + f_2(x)\sin(\omega t)$.

Представим x в виде суммы

$$x = X + \xi, \quad (2)$$

где $X = \langle x \rangle$.

Здесь условные скобки $\langle \cdot \rangle$ означают процедуру усреднения по временному окну $T \gg \frac{2\pi}{\omega}$.

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} d\tau (\cdot). \quad (3)$$

$X(t)$ - описывает медленное движение частицы, а ξ - малы по амплитуде, но быстрые осцилляции, порожденные возмущающим полем.

С учетом (2) градиент стационарного поля можно записать в виде

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dX} + \xi \frac{d^2U}{dX^2}.$$

Аналогично представляется возмущающее силовое воздействие

$$f(x, t) = f(X, t) + \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \xi.$$

С учетом сказанного уравнение движения частицы (1) можно переписать в виде

$$m \ddot{X} + m \ddot{\xi} = - \frac{dU}{dX} - \xi \frac{d^2U}{dX^2} + f(X, t) + \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \xi. \quad (4)$$

В записанном уравнении можно выделить "медленные" и "быстро осциллирующие" члены. Приравняв их по отдельности, получаем вместо (4) два уравнения

$$m \ddot{\xi} = f(X, t) \quad (5)$$

$$m \ddot{X} = - \frac{dU}{dX} + \langle \xi \frac{\partial f}{\partial X} \rangle. \quad (6)$$

Уравнение (6) строго получается после воздействия оператора усреднения (3) на уравнение (4), а (5) - как разность (4) и (6) с последующим сокращением в правой части лишь основных членов.

Из (5) следует $\xi = - \frac{f}{m\omega^2}$ и уравнение (6) принимает вид

$$m \ddot{X} = - \frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\omega^2} \langle f \frac{\partial f}{\partial X} \rangle. \quad (7)$$

Учитывая, что $\langle f \frac{\partial f}{\partial X} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial X} \langle f^2 \rangle$ уравнение для "медленного" движения частицы можно переписать в виде:

$$m \ddot{X} = - \frac{d}{dX} U_{эфф}, \quad (8)$$

где $U_{эфф} = U + \frac{\Delta}{2m\omega^2} \langle f^2 \rangle$.

Таким образом, воздействие быстро осциллирующих возмущений на частицу эквивалентно в отношении анализа ее "медленного" движения тому, что частица как бы движется в некотором эффективном внешнем поле, определяемом соотношением (8).

Сделанный вывод можно несколько обобщить, отметив, что быстрые процессы, протекающие в нелинейных системах, оказывают влияние на ход медленных процессов.

1.4 АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И КОРРЕКЦИЯ МОДЕЛИ

После того как математическая задача, сформулированная в модели, решена, переходят к следующему этапу исследования – анализу полученных результатов. Фактически первый этап анализа заключается в *верификации модели*, т.е. в выявлении ее *адекватности* (подробнее об этом понятии будет сказано во второй главе). В процессе построения модели мы сделали ряд предположений, загрубив реальную картину, отбросив ряд факторов, которые мы посчитали несущественными. Вопрос о том, правильно ли были сделаны предположения, учтены ли все существенные факторы, или, образно говоря, "с грязной водой мы выплеснули и ребенка из корыта" – кардинальный вопрос проводимого исследования.

Основным подтверждением адекватности принятой модели является согласие следствия из нее с известными из эксперимента или из независимых теоретических исследований свойствами моделируемой системы. При этом, чем больше окажется таких независимых подтверждений, тем больше доверия к модели.

Если анализ полученных результатов показывает, что модель не адекватна исследуемой системе, а математические методы решения не вызывают сомнений, то следует вернуться обратно к содержательной модели и проанализировать ее постулаты. Здесь может оказаться весьма полезной построенная ранее иерархическая цепочка содержательных моделей.

Исследователь в своей работе, особенно при анализе принципиально новых систем и процессов, должен убедиться в справедливости выстроенной им иерархии связей, ответить на вопрос о том, не слишком ли подробную модель он исследует, можно ли ее еще упростить, оставаясь в рамках требуемой адекватности.

Таким образом, видно, что в любом случае вслед за произведенным исследованием математической модели, следует этап ее коррекции. Справедливости ради следует отметить, что к коррекции содержательной модели, предвидя возникающие проблемы, прибегают и на этапе построения математической модели, и на этапе ее решения многое определяется личным опытом прикладного математика.

Все, сказанное ранее о технологии математического моделирования можно представить в виде обобщенной структурной схемы, изображенной на рис.-3.

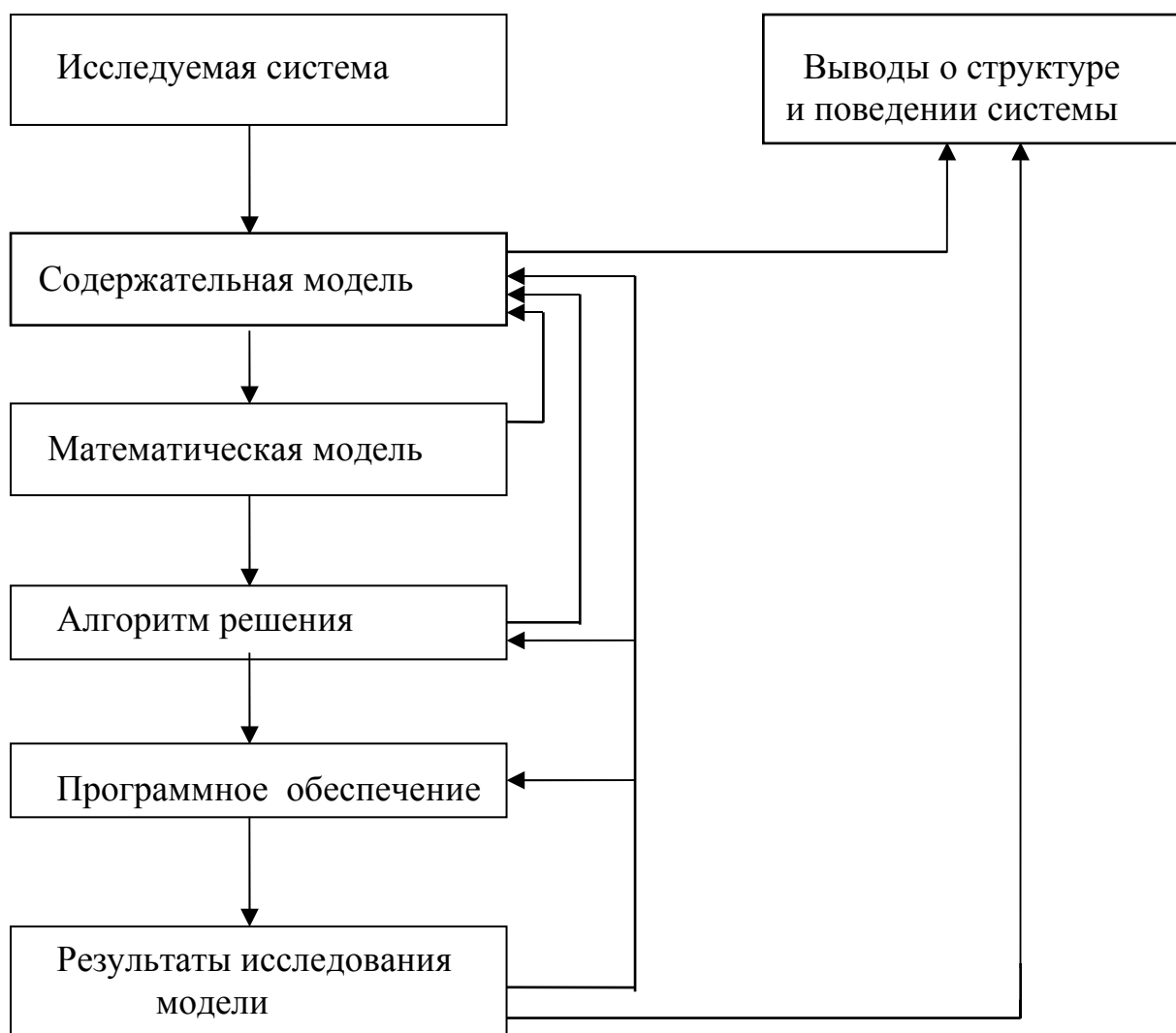


Рис.-3

На приведенной схеме, и без того достаточно громоздкой, не указаны неформальные связи, которые используются при моделировании. А именно, еще

когда строится содержательная модель, прикладной математик должен предвидеть выбор математического аппарата исследования и формировать постулаты модели и рабочие гипотезы в соответствии с этим прогнозом. Еще раз подчеркнем здесь, что такого типа навыки приходят как с собственным опытом, так и на основе изучения опыта создания математических моделей в смежных областях знаний. Поэтому математическое моделирование часто возводят в ранг искусства, а многие монографии и учебники на эту тему построены по армейскому принципу "делай как я".

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

2.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ЕЕ СВОЙСТВА.

Прочтя первую главу, читатель уже получил первичное представление о процессе моделирования как таковом и о математической модели, в частности. Здесь мы попытаемся углубить эти представления. Вся сложность заключается в том, что стандартизированной терминологии пока не существует, да и (как показывает опыт физики как науки) вряд ли возможен - слишком много специалистов из разных областей знаний занимаются моделированием.

1. В философском энциклопедическом словаре модель (от латинского *modulus* - мера, образец, норма) определяется как *аналог* (схема, структура, знаковая система) определенного фрагмента природной или социальной реальности, порождения человеческой культуры и т.п. - *оригинала* модели. С гносеологической (познавательной) точки зрения модель - это "представитель", "заместитель" оригинала в познании и практике.

2. Часто дается близкое по смыслу, но более краткое определение.

Модель это объект - заместитель объекта - оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Говоря о математической модели следует подчеркнуть, что объект - заместитель и объект - оригинал - это объекты разной природы, отличающиеся друг от друга как грузик, колеблющийся перед вашими глазами на пружине, от дифференциального уравнения, описывающего эти гармонические колебания.

3. В этом смысле нам более близко определение математической модели, данное А.Д. Мишкисом.

Пусть мы исследуем совокупность S свойств некоторого объекта A (объект: ситуация, явление, процесс, система и т.д.). Для этого мы строим *математический объект* A' - систему уравнений, арифметических соотношений, геометрических фигур и т.д., исследование которого средствами математики должно дать ответы на поставленные вопросы о свойствах S . В этом случае *математи-*

ческий объект A' называют математической моделью объекта A относительно совокупности свойств S .

В определении подчеркивается не только то, что объекты A и A' имеют разную природу, но и то, что A' определяется не только самим оригиналом A , но и совокупностью его исследуемых свойств S .

Т.о. если мы проводим два исследования одного и того же объекта A по отношению двух различных совокупностей S_1 и S_2 его свойств, то соответствующие математические модели A_1' и A_2' могут быть совершенно различны.

Отсюда следует *первое свойство математических моделей - их множественность*. Подчеркнем, что здесь имеется в виду не только множественность моделей, связанная с их иерархичностью, а результат порожденный необходимостью исследования различных систем S_1, S_2, \dots его свойств.

Например, одно и тоже мощное кучевое облако (Cu. cong.) может рассматриваться как с точки зрения порождения им нисходящих воздушных потоков, растекающихся далее по поверхности земли и воспринимаемых нами как ветровой порыв перед началом сильного ливневого дождя, так и как зону повышенной электрической активности атмосферы.

И то и другое проявление этого объекта представляет повышенную опасность для полета воздушных судов. Нисходящие потоки опасны на этапах взлета - посадки, из-за резкого изменения величины подъемной силы крыла ВС (быстрая смена направление скорости ветра с встречного на попутное).

Возникающие в таком облаке сильные электрические поля могут породить разряд атмосферного электричества (молнию), результатом воздействия которого на ВС может стать частичный или полный выход из строя радиоэлектронной аппаратуры на борту ВС.

Ясно, что в первом случае для модели используются уравнения аэро-гидродинамики и исследуется поле скоростей воздушных потоков (математическая модель относительно совокупности признаков S_1). Во втором случае изучается электрическая структура облака и строится электродинамическая модель (относительно совокупности признаков S_2).

Другим, более важным свойством является *единство математических моделей*. Замечательный факт заключается в том, что различные реальные системы или их содержательные модели могут иметь одну и ту же математическую модель. Классическим примером здесь могут служить математический маятник, совершающий малые колебания и колебания, возбужденные в LC - контуре. В первом случае имеет вид:

$$I \cdot \varphi'' = -mgl \cdot \varphi, \quad (9)$$

где $I = ml^2$ - момент инерции математического маятника относительно точки подвеса.

Во втором случае уравнение для тока в LC - контуре записывается в виде:

$$LI'' + \frac{1}{C}I = 0. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что приведенные уравнения совпадают с точностью до обозначений, т.е. следует ожидать, что обе системы, после "оснащения" их соответствующими начальными или граничными условиями приведут к одной и той же математической модели.

Отмеченная аналогия процессов различной природы в свое время послужила толчком к развитию т.н. *аналогового моделирования*. Суть его заключается в том, что определенные комбинации электрических схем хорошо моделируют операции сложения, умножения, дифференцирования и интегрирования (т.н. сумматоры, дифференциаторы, интеграторы). Точнее, электрические сигналы, проходящие через такие элементы, дифференцируются, интегрируются или суммируются. Из таких элементов набирается схема, математическая модель обработки сигнала в которой идентична математической модели (системе интегро-дифференциальных уравнений) исследуемого объекта. Снимая напряжение с определенных точек такой схемы и подавал его на экран осциллографа - можно сразу наблюдать графическое изображение, соответствующее решению поставленной математической задачи.

Аналоговое моделирование развивалось параллельно численному эксперименту на ЭВМ, но вскоре отступило на второй план под напором прогресса компьютерных технологий

2.2. ТРЕБОВАНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ

Для того, чтобы разрабатываемая математическая модель какого-либо процесса, явления или системы действительно могла претендовать на то, чтобы быть инструментом исследовательского процесса, необходимо, чтобы она удовлетворяла ряду требований. Рассмотрим основные из них.

Адекватность модели. Важнейшим требованием, предъявляемым к математической модели является требование ее *адекватности* (правильного соответствия) изучаемому реальному объекту A относительно выделенной системы S его свойств.

Т.о. адекватность модели отождествляется с соответствием результатов, получаемых с помощью математической моделью и эксперимента. Термин "соответствие" является достаточно расплывчатым, и для его конкретизации обычно говорят о качественном и количественном соответствии.

Правильное качественное соответствие модели предполагает возможность на основании исследования модели сделать правильный вывод о направлении изменения (росте или спаде) каких-либо количественных характеристик изу-

чаемой системы, о характере поведения системы, устойчивости ее состояния или стационарности исследуемых процессов.

Правильное качественное соответствие - это низкий, обязательный уровень адекватности модели. Обычно же требование соответствия предполагает и правильное количественное описание поведения системы. Последнее означает совпадение результатов с некоторой разумной точностью.

В зависимости от исходных требований, предъявляемых к результатам исследования, говорят о качественных или количественных моделях.

В качестве иллюстрации сказанного приведем эволюцию модельных представлений кристаллической структуры твердого тела относительно его термодинамических свойств.

Согласно представлениям классической физики твердое тело можно представить как совокупность атомов, расположенных в узлах кристаллической решетки. В состоянии термодинамического равновесия эти атомы совершают малые хаотические колебания вокруг положения равновесия так, что на каждый из них в среднем приходится энергия $3kT$ (k - постоянная Больцмана, а T - абсолютная температура тела). Тогда весь кристалл, состоящий из $N = \nu NA$ атомов, ν число молей в кристалле, будет обладать тепловой энергией $\varepsilon = 3kT$.

Отсюда следует, что его теплоемкость $C = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = 3R$ не должна зависеть от температуры. Так гласит закон Дюлонга - Пти, согласно которому молярная теплоемкость всех кристаллических тел одинакова и равна $3R$, где R - универсальная газовая постоянная.

Однако предсказания классической модели, хорошо совпадающие с данными эксперимента при обычных (нормальных) температурах, оказались неверными при низких температурах. опыты показали, что при малых T поведение теплоемкости имеет вид $C \sim T^3$, т.е. при $T \rightarrow 0$ теплоемкость не остается постоянной, а стремится к нулю. Это значит, что при низких температурах классическая модель перестает быть адекватной.

Для того, чтобы описать эффект уменьшения теплоемкости Эйнштейн выдвинул новую гипотезу. Согласно его модели атомы, колеблющиеся в узлах решетки, являются квантовыми осцилляторами, энергия которых может принимать лишь дискретные значения $\varepsilon_n = \hbar\omega (n + \frac{1}{2})$, а вероятность того, что осциллятор имеет энергию ε_n подчиняется закону Больцмана. $P_n = C e^{-\varepsilon_n/kT}$ важно, что при этом Эйнштейн полагал, что все гармонические осцилляторы независимы.

В этих приближениях модель Эйнштейна при достаточно высоких температурах дает те же результаты, что и классическая модель, а при низких температурах теплоемкость кристалла описывается формулой

$$C \sim \frac{1}{T^2} e^{-\hbar\omega / kT}.$$

Экспоненциальный множитель изменяется значительно быстрее, чем T^2 , поэтому при приближении к абсолютному нулю теплоемкость стремится к нулю практически по экспоненциальному закону. Однако эксперимент показывает, что теплоемкость кристаллов вблизи нуля убывает не экспоненциально, а по закону T^3 . Следовательно, модель Эйнштейна дает лишь качественно правильный результат, т.е. является *качественно адекватной моделью*.

Количественного согласия с опытом, т.е. *количественной адекватности* удалось добиться Дебаю за счет отказа от гипотезы независимости осцилляторов.

Дебай предположил, что атомы колеблются согласованно (не независимо, но и не синхронно), участвуя в поддержании огромного числа упругих волн (мод), распространяющихся в кристалле.

Идею квантования энергии Дебай применил не к отдельному атому, а к упругой волне и, сделав некоторые упрощающие предположения относительно закона распространения этих волн, получил правильную количественную оценку для теплоемкости кристалла при низких температурах (закон T^3 Дебая).

Можно сказать, что модель Дебая обладает количественной адекватностью.

Однако следует помнить, что *всякая адекватность математической модели реальному объекту лишь относительно, имеет свои пределы*. Эти пределы определены границами применимости рабочих гипотез, использованных при построении модели. Приписывание реальному объекту свойств модели в области значений параметров, когда рабочие гипотезы не справедливы, может привести к серьезным ошибкам.

Требование достаточной простоты. Требование адекватности ориентирует на построение сложных моделей, максимально учитывающих все факторы, способные в той или иной степени повлиять на изучаемые свойства. Однако, такой подход к задаче встречает серьезные проблемы на этапе исследования модели, анализа ее поведения. Чрезмерное усложнение модели, "засорение" ее массой мелких, второстепенных деталей может привести к громоздким системам уравнений, не поддающимся изучению и решению.

Наличие большого числа параметров, допускающих вариацию в процессе исследования модели, делает труднообозримыми результаты, полученные численными методами.

Таким образом, мы приходим к *требованию достаточной простоты* модели по отношению к исследуемой системе ее свойств.

Будем говорить, что модель является достаточно простой, если современные средства исследования дают возможность провести экономно по затратам труда и средств, но с разумной точностью качественный или количественный

анализ (в зависимости от постановки задачи) анализ исследуемых свойств и осмыслить результат.

Ясно, что требование достаточной простоты модели в определенном смысле вступает в противоречие с требованием ее адекватности: как правило, чем модель более адекватна, тем она менее проста и тем труднее ее анализ. Поэтому две опасности всегда подстерегают прикладного математика при построении математических моделей: первая - увязнуть в подробностях и вторая - слишком огрубить явление.

Поиск компромисса в этом вопросе - основной этап построения математической модели, для его (поиска) нельзя написать алгоритм, это искусство, и опыт в нем приобретается постепенно.

Важное требование связано с *полнотой математической модели*, состоящей в завершенности постановки математической задачи, т.е. в том, созданная математическая модель дает принципиальную возможность с помощью математических методов получить интересующую информацию об исследуемой системе.

Заметим здесь, что решение математической задачи лишь "визуализирует", делает доступной информацию, замаскированную в условии задачи, и полнота математической модели означает лишь то, что интересующие нас свойства содержатся в модели.

Например, при исследовании колебаний LC - контура, о котором говорилось в п. 2.1, если нас интересует амплитуда колебаний тока, то одного уравнения (2.2) недостаточно. Дело в том, это амплитуда колебаний определяется энергией электромагнитного поля, заключенного в контуре, а в приведенном уравнении эта информация не содержится, коэффициенты уравнения зависят лишь от параметров контура (индуктивности - L и емкости C).

Энергию, заключенную в LC - контуре, можно считать заданной, если известны в какие - либо определенные моменты времени энергия поля индуктивности

$$-W_L = \frac{LI^2}{2} \text{ и энергия конденсатора } -W_C = \frac{CU^2}{2} .$$

Величину тока I (обычно в начальный момент времени $t = 0$) и, соответственно, W_L задают непосредственно, полагая $I(0)$ известным. А информацию об энергии конденсатора, т.е. величину $U(0)$ "зашифровывают" с помощью закона Ома, который в нашем случае принимает вид:

$$-L \frac{dI}{dt} = U . \quad (11)$$

Т.о. для того, чтобы математическая модель в задаче об амплитуде колебаний тока в LC - контуре была полной, необходимо "оснастить" уравнение (11) дополнительными условиями

$$I(0) = A, \quad I(0) = B, \quad (12)$$

называемыми начальными. Именно в них содержится недостающая информация об энергии в LC - контуре.

Если нас интересует период колебаний тока, который зависит лишь от параметров контура, то потребность в дополнительной информации в виде условий (12) отпадает, и уравнение (11) в рамках этой задачи представляет собой полную математическую модель.

Продуктивность математической модели. Часто в прикладных задачах математическое моделирование выступает альтернативой к натурному эксперименту. При этом преимущество модельного подхода определяется экономическими соображениями.

Изучаемая система, которую мы собираемся исследовать методами математического моделирования, характеризуется различными параметрами, такими как, например, масса, линейные размеры и т.д.

Система характеризуется определенными функциональными соотношениями между параметрами, которые считаются заданными.

Все это - и параметры и функциональные зависимости образуют *исходные данные модели*.

При решении конкретной задачи эти исходные данные должны быть известны, т.е. предполагается, что они могут быть получены из эксперимента, рассчитаны, либо найдены в справочной литературе. При этом, если речь идет об измерениях, то исходные данные должны *легче поддаваться измерению*, чем данные, которые получают при моделировании. В противном случае исследование модели теряет смысл.

Пример

Подъемная сила крыла при дозвуковых скоростях набегающих воздушных потоков.

Из прикладной аэродинамики известна полуэмпирическая формула

$$P = C \frac{\rho v^2}{2} b \quad (13)$$

где P - подъемная сила; ρ и v - соответственно плотность и скорость набегающего потока; b - хорда профиля крыла рис. 4; C - безразмерный коэффициент, зависящий от формы профиля крыла и направления набегающего потока - угла атаки.

Обычно C измеряют при продувке крыла в аэродинамической трубе $C = C(\alpha)$ для наиболее интересных профилей построены. С другой стороны есть формула Жуковского

$$P = \rho v \Gamma, \quad (14)$$

где $\Gamma = \oint_{\gamma} (\vec{v} d\vec{e})$ - циркуляция вектора скорости воздуха по контуру γ , охватывающему профиль крыла. Но как найти Γ ? В теоретическом плане расчет может быть проведен лишь для очень ограниченного числа профилей. Экспериментально измерить Γ существенно сложнее, чем C в полуэмпирической формуле. Поэтому соотношение (13) и связанная с ним модель крыла более продуктивна, чем модель, основанная на формуле Жуковского.

2.2.3. ПОНЯТИЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ.

При описании моделей важную роль играют такие понятия как *состояние системы*, *пространство состояний* и *вектор состояния*.

Под *вектором состояния* мы будем понимать минимальную совокупность величин, задание которых в некоторый момент времени при известных внешних воздействиях на систему определяет ее поведение в последующие моменты времени.

Поясним сказанное на простом примере одномерного движения материальной точки под действием внешних сил. Уравнение движения (II закон Ньютона) в этом случае имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}) \quad (15)$$

В этом примере в качестве системы выступает материальная точка, а внешние воздействия описываются функцией $F(x, \dot{x})$ - силой, действующей на материальную точку.

Заметим, что задание координаты точки еще не определяет вектор состояния системы в данный момент времени в том смысле, что она не позволяет предсказать положение системы в следующие моменты времени. Действительно, при заданной координате точки ее скорость может быть любой, а значит, в зависимости от значений последней будут различными и координаты точки в следующий момент времени (т.е. через бесконечно малый временной интервал dt).

Одновременное же задание координаты и скорости полностью определяет состояние системы в том смысле, что позволяет в принципе предсказать ее дальнейшее движение.

Формально этот результат можно получить, введя для описания движения частицы новые переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$. Тогда исходное уравнение преобразуется в систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m} F(x_1, x_2) \end{cases} \quad (16)$$

Совместно с заданными в некоторый момент времени t_0 начальными условиями - $x_1(t_0) = x_{10}$, $x_2(t_0) = x_{20}$, приведенная система уравнений составляет начальную задачу (задачи Коши), решение которой (при достаточно "хороших" правых частях уравнений) для $t > t_0$ существует и единственно, т.е. будущее системы предсказуемо.

Из приведенного примера следует, что если мы моделируем систему с целью выявления закономерностей ее эволюции в непрерывном времени, то разрабатываемая математическая модель должна сводиться к системе дифференциальных уравнений первого порядка, а совокупность начальных условий (задача Коши) определяет вектор состояния системы в начальный момент времени.

Множество допустимых значений *векторов* состояния образует *пространство состояний*.

Естественно стремление уменьшить размерность пространства состояний. Минимальная размерность достигается в том случае, когда уравнения математической модели являются независимыми. Другими словами, размерность пространства состояний не может быть уменьшена, если ни одно из уравнений математической модели не может быть получено как следствие остальных уравнений.

В качестве примера приведем систему, описываемую так называемыми процессами рождения-гибели известную из курса теории случайных процессов. Случайная функция, описывающая такую систему, может принимать N различных значений с вероятностями P_j , $j = \overline{1, N}$. Тогда исследуемую систему можно ассоциировать с точкой в N -мерном пространстве, а числа $P_j(t)$ интерпретировать как координаты этой точки.

Динамика $P_j(t)$ описывается системой уравнений Колмогорова, состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n P_i(t) \lambda_{ij}(t). \quad (17)$$

Однако это N -мерное пространство не есть пространство состояний.

Это связано с тем, что на вероятности $P_j(t)$ наложено дополнительное условие - условие нормировки $\sum_{j=1}^N P_j(t) = 1$. Это означает, что N уравнений Колмогорова не являются независимыми. Размерность пространства состояний в этой модели $(N - 1)$.

Вообще размерность пространства состояний для динамической системы определяется как число уравнений движения за вычетом числа наложенных *независимых* связей.

Следует заметить, что *выбор вектора состояния не является однозначным*; любой другой вектор, $\overline{X}(t)$ связанный с вектором состояния $\overline{X}(t)$ невырожденным преобразованием, также является вектором состояния.

$$\overline{X}(t) = \hat{M} \cdot \overline{X}(t)$$

В рассмотренном примере движения материальной точки скорость изменения компонент вектора состояния определяется только состоянием самой системы, т.е. все внешние воздействия выражаются через вектор состояния и константы, характеризующие внешнюю по отношению к системе среду. В этом случае говорят, что система *автономна*.

Однако часто бывает так, что влияние внешней среды на систему не может быть выражено только через вектор состояния и константы. Состояние окружающей среды меняется, меняется и ее воздействие на изучаемую систему. В этом случае математическая модель включает в себя систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dt} x_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad i = \overline{1, n} \quad (18)$$

Здесь $u_j = u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$ - описывают изменяющиеся внешние воздействия (управления).

Отметим еще одну особенность описания модели с помощью пространства состояния. Не все компоненты вектора состояния системы могут быть непосредственно измеренными, т.е. являются наблюдаемыми величинами. Они позволяют лишь определять значения параметров из некоторого набора $\{y_k\}$, которые поддаются измерению (наблюдению). Связь наблюдаемых параметров с компонентами вектора состояний обычно записывают в виде алгебраических уравнений

$$y_k = F_k(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad k = \overline{1, l}, \quad (19)$$

которые дополняют математическую модель исследуемой системы. Часто такие системы удобно представлять в виде моделей типа "вход-выход", когда в качестве входных переменных рассматриваются управляющие параметры $\{u_j(t)\}$, $j = \overline{1, m}$ а в качестве выходных переменных - наблюдаемые параметры $\{y_k\}$ $K = \overline{1, l}$. Компоненты вектора состояния играют в этом случае роль скрытых параметров. Схема такой модели представлена на рис. - 5.

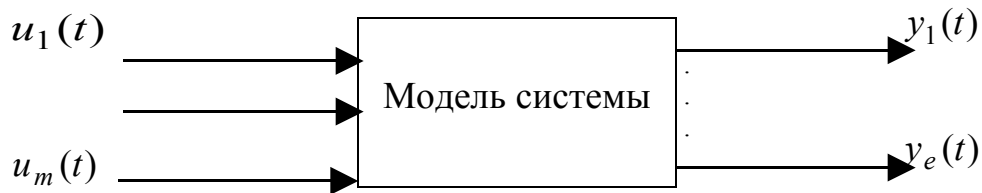


Рис.-5

3. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

3.1. РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К КЛАССИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Существует множество различных способов классификации математических моделей, каждый из которых базируется на выделении своего доминантного признака.

А. В качестве главного признака классификации можно рассматривать, например, предметную область построения модели. Так мы можем выделить математические модели в физике (математическая и теоретическая физика), в химии (теоретическая химия), в биологии (математическая биология), в медицине (математическая медицина), в психологии (математическая психология), в социологии (математическая социология), в экономике (математическая экономика) и т.д.

Более детальную классификацию можно провести, если выделять сходные математические модели в транспортных задачах, в городском и региональном планировании, защите окружающей среды, океанологии, лингвистике, политологии и т.д.

Поскольку математической модели, требующее львиную долю усилий от всех интеллектуальных затрат, связанных с математическим моделированием, предполагает хорошую ориентацию прикладного математика в предметной области исследования (физике, социологии, экономике, защите окружающей среды), то собственно, что большинство исследователей специализируются по одному из приведенных выше классов математических моделей. Однако при изложении методов математического моделирования для прикладных математиков широкого профиля такую классификацию в методическом плане вряд ли можно признать удовлетворительной.

В. Другой подход к классификации математических моделей основан на выделении в качестве доминантного признака математического аппарата, используемого при построении и исследовании математических моделей. В таком слу-

чае говорят об алгебраических, топологических, дифференциальных, интегро-дифференциальных математических моделях. Например к обыкновенным дифференциальным моделям относят модели, содержащие обыкновенные дифференциальные уравнения.

При такой классификации основное внимание уделяется математическому аппарату и в меньшей степени - процедуре "приготовления" математической модели.

С. Математические модели можно классифицировать в соответствии с целями построения этих моделей. Так можно выделить класс моделей, разрабатываемых с целью прогноза поведения системы, с целью проверки гипотез относительно внутренней структуры объекта исследования, с целью оптимизации процессов управления, контроля и воздействия на систему. Список условных функций и соответствующих классов моделей можно продолжить.

Д. Наиболее часто математические модели классифицируются по их природе, особенностям описания.

Так математические модели могут быть:

- линейными и нелинейными, в зависимости от того, каковы базисные уравнения модели;
- статическими и динамическими, в зависимости от того, принимаются во внимание или нет временные зависимости в исследуемой системе;
- функциональными и структурными, в соответствии с глубиной декомпозиции системы, отображаемой в модели;
- дискретные и непрерывные, в соответствии с тем, являются ли переменные, описывающие состояние системы, дискретными или непрерывными величинами;
- детерминированными или стохастическими в зависимости от того, учитываются или нет случайные факторы в системе.

Следует отметить, что приведенное деление на классы (отнюдь не исчерпывающее) представляет собой по сути основание своеобразного алгоритма "идентификации" модели.

Анализируя возможную модель исследуемой системы, мы приписываем ее либо к классу линейных, либо нелинейных моделей. Далее решаем вопрос о возможности использования статической или динамической модели и т.д.. В конце такого анализа приходим, например, к выводу о том, что разрабатываемая модель является структурной линейной динамической детерминированной моделью с дискретным пространством состояний.

3.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ

Современный подход к построению математической модели предполагает первоначальный анализ и декомпозицию системы, выделение существенных для целей исследования свойств и связей частей системы - ее подсистем. Построенную таким образом модель будем называть *структурной*. Описание функционирования такой модели основывается на использовании понятия состояния системы.

Исторически, однако, сложилось так, что при распространении идей моделирования на изучение сложных экономико-технологических систем на первый план вышли так называемые *функциональные модели*, которые отражают только то, как система функционирует, как она реагирует на внешние воздействия. В технической кибернетике в те годы такие модели, не отражающие внутренней структуры системы, было принято называть "черным ящиком" или системой типа "вход-выход".

Функциональные модели представляют собой простейший вид моделей, для которых связь "вход-выход" либо постулируется на основе общих соображений, либо вводится как результат обобщения экспериментальных данных.

Соотношение между функциональными и структурными моделями подобно соотношению между термодинамикой и статистической физикой.

Напомним это различие на примере классического идеального газа.

В статистической физике за модель идеального газа принят ансамбль невзаимодействующих между собой материальных точек. Другими словами, модель идеального газа пригодна при описании агрегатного состояния вещества, для которого энергия взаимодействия частиц пренебрежимо мала по сравнению с их средней кинетической энергией.

Таким образом, при описании вещества оно структурируется (выделяются атомы, молекулы) и выдвигается гипотеза относительно взаимодействия элементов системы (частицы не взаимодействуют между собой, но упруго взаимодействуют со стенками полости, которые считаются бесструктурными). На основании такой структурной модели рассчитывается взаимодействие газа со стенками сосуда, *выводится формула* для давления идеального газа P :

$$P = nkT$$

В термодинамике определение идеального газа строится по-другому. Говорят, что если давление, температура и объем вещества связаны между собой уравнением Менделеева - Клапейрона $PV = \frac{m}{\mu}RT$, то это вещество будем называть идеальным газом. Такая модель идеального газа относится к функциональным

моделям. Если мы задаемся объемом сосуда V , температурой вещества T , и знаем количество молей - $\frac{m}{\mu}$, т.е. если известны входные параметры системы, то выходной параметр P следует рассчитывать по приведенной формуле. При этом что именно находится внутри сосуда и почему начинает возрастать давление с увеличением T – термодинамику спрашивать бессмысленно – вглубь системы, в суть процессов термодинамический подход не проникает.

Из сказанного становится понятно, что, начиная моделировать сложные системы, не имея достаточных априорных сведений о ее структуре, естественно использовать функциональный подход. Однако принцип "черного ящика", предполагающий полное отсутствие априорной информации об устройстве системы, едва ли приемлем и реалистичен в подавляющем большинстве случаев. Его применение следует рассматривать как вынужденный шаг.

Например, до сих пор, часто в основу анализа хозяйственно-экономической деятельности предприятий кладутся функциональные модели, использующие апостериорные данные (отчетные документы), которые обрабатываются методами регрессионного, дисперсионного или корреляционного анализа.

Следует отметить еще одно обстоятельство, связанное с использованием элементов функционального подхода. Проводя декомпозицию системы, строя структурную модель, рано или поздно мы доходим до некоторого уровня, который ранее мы называли элементарным уровнем декомпозиции (см. Рис.-1). На этом уровне каждую элементарную подсистему мы объявляем бесструктурной и применяем для ее описания функциональную модель. Другими словами, каждая структурная модель содержит в себе как элемент - функциональную модель. И это опять же вынужденный шаг, обусловленный в первую очередь требованием достаточной простоты модели.

Так, в приведенной в качестве примера модели классического идеального газа в качестве такой бесструктурной подсистемы выступает частица. Мы не учитывали то, что сама частица (атом или молекула) имеет сложное строение, внутреннюю энергию, которая может меняться при столкновении со стенками сосуда (неупругое соударение) или, например, при поглощении фотона.

Входными параметрами для функциональной модели нашей частицы являются силы, действующие на нее со стороны стенок полости, а выходным параметром - вектор состояния (совокупность координат и компонент вектора скорости).

Таким образом, структурные модели отличаются от функциональных наличием этапа структурирования, декомпозиции исследуемой системы.

3.3. ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ

Как было отмечено ранее, состояние модели системы полностью определяется ее вектором состояния - точкой в пространстве состояний. В общем случае со временем система переходит из одного состояния в другое, меняется положение точки в пространстве состояний. В зависимости от особенностей смены состояний системы говорят о дискретных и непрерывных моделях систем.

Если множество допустимых состояний системы дискретно, то говорят о дискретных моделях.

Напомним, что множество M обладает свойством дискретности, если оно не имеет предельных точек, т.е. если для каждой точки множества M существует такая открытая область пространства $\Delta \lambda$, для которой выделенная точка является единственной внутренней точкой из данного множества M .

Часто дискретность множества понимают как его конечность или счетность, имея в виду лишь то, что элементы такого множества можно занумеровать. В курсе математического моделирования, где изучаются реальные системы и в качестве исходных фигурируют экспериментальные данные, такое определение дискретного множества нельзя считать удовлетворительным.

Интуитивно понятно, что множество состояний целесообразно назвать дискретным, если его различные состояния экспериментально различимы. Вряд ли этому критерию отвечает множество рациональных чисел, которое, как известно, счетно и одновременно является всюду плотным в себе.

Под непрерывными моделями будем понимать модели систем, множество допустимых состояний которых непрерывно.

Конечно, деление всего множества моделей на два класса - дискретные и непрерывные не является достаточно корректным, т.к. существуют системы для которых часть компонент вектора состояний являются дискретными величинами, а часть - непрерывными. Так энергия электрона в кристалле в одной из разрешенных энергетических зон может принимать непрерывный набор значений, а спин электрона, значение которого также является компонентой вектора состояния - дискретной величиной.

При рассмотрении различных задач во многих прикладных областях модели с дискретным пространством состояний являются более естественными, чем непрерывные. Так естественно численность какой-либо популяции биологического вида в задаче биоценоза измерять в целых числах. При анализе эффективности работы транспортных авиапредприятий число пассажиров, совершенных и отложенных авиарейсов, эксплуатируемых воздушных судов также принадлежат множеству натуральных чисел. Даже при рассмотрении проблем управления экономикой промежуточные результаты, такие, как доходы и денежные потоки, всегда привязываются к определенным периодам времени, несмотря на непрерывный

характер изменения самих этих величин, и экономисты практики привыкли мыслить категориями не непрерывных, а дискретных измерений. Дискретные модели более прозрачны, просты для понимания. Но, невзирая на многочисленные преимущества дискретных представлений, многие исследователи тратят большую часть усилий на получение результатов с использованием непрерывных моделей.

Причина этого кажущегося противоречия заключается в осязаемом преимуществе непрерывных моделей для получения результатов в аналитической форме, которая несомненно более удобна для понимания существа проблемы.

В качестве примера рассмотрим простейшую модель организации рекламной компании. Допустим, что некоторая фирма начинает рекламировать новый товар или услугу. Разумеется, что прибыль от будущих продаж должна с лихвой покрывать издержки на дорогостоящую рекламу. Ясно также, что вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет располагать информацией о новинке. Затем, при увеличении числа покупателей прибыль возрастет и перекроет затраты. Очевидно, для фирмы важно знать, как быстро наступит этот момент, ибо на рынке возможно появление конкурента с аналогичным товаром, но, быть может, более высокого качества.

Пусть N_0 - общее число потенциально платежеспособных покупателей, а $N(t)$ - число уже проинформированных клиентов к моменту времени t , прошедшему с начала компании. Очевидно, что $N(t)$ разрывная ступенчатая функция, принимающая целочисленные значения. Однако в модели ее удобно рассматривать как непрерывную функцию, т.е. перейти от дискретного к непрерывному пространству состояний модели множества потенциальных клиентов.

Будем полагать также, что узнавшие о товаре потребители тем или иным способом распространяют полученную информацию среди неосведомленных, выступая как бы дополнительными "рекламными агентами" фирмы. Тогда величина dN/dt - скорость изменения со временем числа потребителей, узнавших о товаре и готовых его купить - пропорциональна произведению числа агентов - $N(t)$ на число непроинформированных клиентов - $(N_0 - N(t))$. Коэффициент пропорциональности - α зависит, в частности, от качества рекламы, которая монотонно возрастает с величиной произведенных затрат (чем выше квалификация людей, создающих рекламу, тем дороже их труд).

Сделаем еще одно серьезное допущение в модели. Будем полагать, что реклама дается интенсивно в короткие сроки так, что вся компания через средства массовой информации может быть рассмотрена как мгновенное событие в момент времени $t = 0$. Т.е. будем полагать, что при $t = 0$ о товаре (или услуге) извещены $N(0) = N_1$ потенциальных потребителей.

В итоге получаем следующую непрерывную математическую модель

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha \cdot N(t)(N_0 - N(t)) \quad (20)$$

$$N(0) = N_1,$$

которая имеет аналитическое решение.

Действительно, решая дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\int \frac{dN}{N(N_0 - N)} = \alpha t + C$$

$$\frac{1}{N_0} \ln \frac{N(t)}{N_0 - N(t)} = \alpha t + C$$

$$N(t) = \frac{N_0}{1 + A \cdot e^{-\alpha N_0 t}},$$

где $A = \exp\{-N_0 \cdot C\}$, приходим к зависимости $N = N(t)$ в виде логистической кривой.

Коэффициент A находится из начальных условий

$$N(0) = N_1 = \frac{N_0}{1 + A} \Rightarrow A = \left(\frac{N_0}{N_1} \right) - 1.$$

Окончательно получаем

$$N(t) = \frac{N_0}{1 + \frac{N_0 - N_1}{N_1} \exp(-\alpha N_0 t)} \quad (21)$$

Здесь параметры N_1 и α определяются затратами на рекламную компанию, а $N(t)$ позволяет оценить прибыль от продажи товара к моменту времени t .

Поведение кривой $N = N(t)$ для различных значений параметров представлено на рис. - 6.

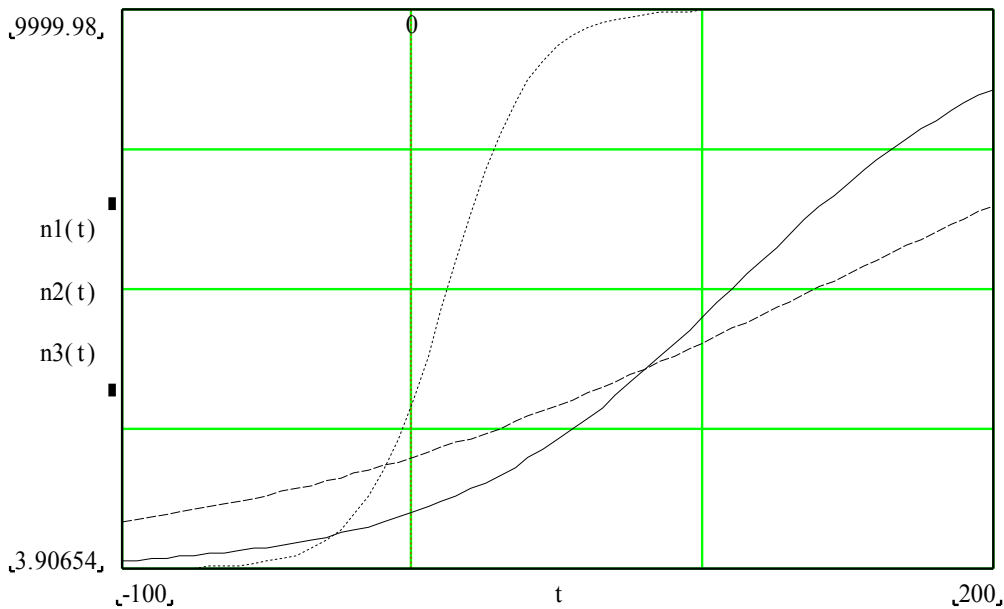


Рис. – 6.

В приведенном примере благодаря переходу от дискретной модели к непрерывной нам удалось получить аналитическое выражение (21), позволяющее оценить роль различных факторов на продвижение нового товара на рынке.

Однако, как бы ни были глубоки и разнообразны аналитические подходы к исследованию непрерывных математических моделей, область их применимости весьма ограничена. Это - либо простые, главным образом линейные, модели, либо отдельные фрагменты сложных нелинейных моделей. Поэтому единственным универсальным способом исследования моделей является применение численных методов с разработкой эффективных *вычислительных алгоритмов*. Процесс создания вычислительного алгоритма состоит из двух этапов:

на первом строятся дискретные аналоги исходных моделей,

на втором дискретные уравнения решаются численно.

Здесь мы уделим основное внимание первому этапу.

Рассмотрим в качестве примера простейшую краевую задачу для уравнения второго порядка на отрезке

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) = -f(x), 0 < x < l, u(0) = u_1, u(l) = u_2 \quad (22)$$

Переход от (22) к дискретной модели можно разбить на две стадии. На первой стадии заменим непрерывную область $0 < x < l$ на дискретную - совокупность конечного числа точек N (если бы переменная x имела смысл времени, то такой

переход соответствовал бы переходу от непрерывного в дискретное время - широко используемому способу описания динамических систем в экономике).

Самый простой способ дискретизации - равномерное деление отрезка $[0, l]$ по правилу $x_i = ih, h = l/N, 0 \leq i \leq N$.

Теперь все фигурирующие в непрерывной модели функции следует рассматривать как функции дискретного аргумента x_i . В дискретной модели аналогом решения $u(x), 0 \leq x \leq 1$ служит аппроксимирующее его приближенное решение $y_i = y(x_i), i = 0, N$.

На второй стадии стоятся дискретные аналоги дифференциального уравнения (22) и входных данных. Наиболее естественная дискретизация дифференциального оператора - замена производных соответствующими конечными разностями.

$$\frac{du}{dx} \rightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad \frac{d^2u}{dx^2} \rightarrow \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Дискретная аппроксимация входных данных в рассматриваемом случае очевидна:

$$f(x_i) = f_i, i = \overline{0, N}, y(0) = y_0 = u_1, y(e) = y_N = u_2.$$

Объединяя сказанное можно записать дискретную математическую модель, соответствующую непрерывной (22):

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = -f_i, \quad i = \overline{1, N-1}, y_0 = u_1, y_N = u_2 \quad (23)$$

Приведенные выше примеры перехода от дискретной модели к непрерывной и обратно не должны создавать у читателя иллюзии тривиальности такого перехода. В качестве классического примера существования подводных камней на этом пути следует напомнить историю вывода формулы Планка для спектральной плотности равновесного излучения - $\rho(\omega, T)$.

Безупречный с классической точки зрения вывод формулы Релея-Джинса давал для $\rho(\omega, T)$, квадратичный вид зависимости по частоте

$$\rho(\omega, T) \sim \omega^2$$

в то время как эксперимент показывал, что при больших частотах $\rho(\omega, T) \sim \omega^3 e^{-\rho\omega}$, т.е. экспоненциально спадает.

В 1900 г. Планку удалось найти вид функции $\rho(\omega, T)$, в точности соответствующий опытными данным, но для этого ему пришлось сделать предположение,

совершенно чуждое классическим представлениям, а именно допустить, что электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии (квантов). Таким образом, Планк получил нужную формулу в рамках дискретной модели. Полагая гипотезу о дискретности недостатком вывода, Планк написал в статье, что в следующей работе он приведет вывод формулы, лишенный этого "недостатка". Однако, ни в следующей, ни в дальнейших работах отказаться от гипотезы дискретности не удалось - переход к непрерывной модели оказался невозможным.

Квантование энергии электромагнитного излучения оказалось фундаментальным законом природы.

Оставив в стороне физическую значимость полученного результата постараемся понять математические причины неудачи в континуализации модели.

Согласно Планку, если излучение испускается порциями $\hbar\omega$, то его энергия ε_n должна быть кратна этой величине:

$$\varepsilon_n = n \cdot \hbar\omega, n \in \overline{N}. \quad (24)$$

Согласно закону Больцмана вероятность P_n того, что энергия излучения имеет величину ε_n , определяется выражением

$$P_n = \frac{e^{-n\hbar\omega/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\hbar\omega/kT}}. \quad (25)$$

Таким образом, среднее значение энергии излучения частоты ω можно определить формулой

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cdot P_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega e^{-n\hbar\omega/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/kT}} \quad (26)$$

Вычисляя соответствующие суммы находим

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (27)$$

Попытаемся в этом выводе перейти к непрерывной модели. Для этого откажемся от основного постулата (24), записав энергию излучения в виде

$$\varepsilon = x \cdot \hbar\omega, x \in [0, \infty) \quad (28)$$

Другими словами допустим возможность дробления фотонов на части:

$$x = n + \xi, \text{ где } 0 \leq \xi < 1.$$

Тогда согласно закону Больцмана плотность вероятности того, что энергия излучения имеет величину ε , будет определяться выражением

$$w(\varepsilon) = \frac{e^{-x\hbar\omega / kT}}{\int_0^{\infty} e^{-x\hbar\omega / kT} dx}, \quad (29)$$

а средняя энергия излучения будет равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \int_0^{\infty} x\hbar\omega W(x\hbar\omega) dx = kT \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что дискретная (26) и непрерывная (29) модели дают одинаковый результат лишь в случае, когда $\frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1$.

Почему же возникает ошибка при больших W .

Суммы, фигурирующие в (26) могут быть точно заменены интегралами от кусочно-постоянных функций:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega / kT} = \int_0^{\infty} e^{-[x]\hbar\omega / kT} dx \quad (31)$$

Здесь $[x]$ - ступенчатая функция, равная максимальной целой части числа x . График этой функции представлен на рис. - 7.

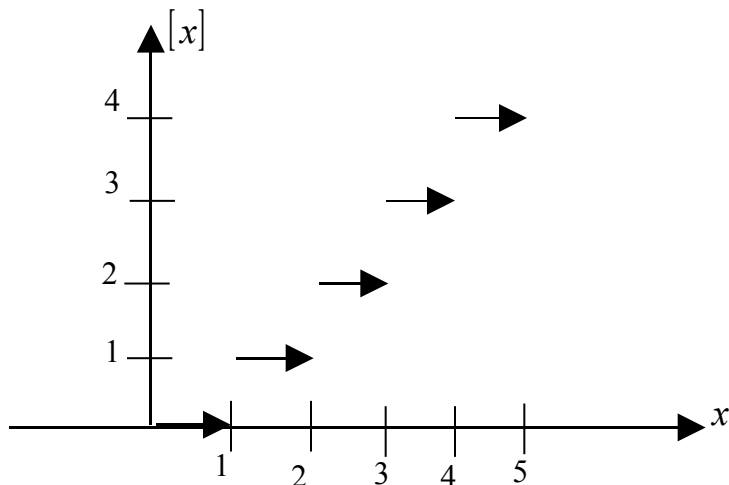


Рис. - 7

Переход к непрерывной модели соответствовал замене кусочно-постоянной функции $e^{-|x|\hbar\omega/kT}$ на непрерывную $e^{-x\hbar\omega/kT}$.

Естественно, что замена подынтегральной функции будет приводить к ошибкам. При этом ошибки будут тем больше, чем протяженнее будет плато кусочно-постоянной функции. При $\frac{\hbar\omega}{kT} \geq 1$ протяженность плато в сравнении с характерным масштабом изменения непрерывной функции становится слишком велика и континуализация приводит к неверным результатам.

3.4. ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ.

Под *динамическими моделями* будем понимать модели систем для которых выполняются два условия:

- вектор состояния системы \vec{X} зависит от времени,
- состояние системы зависит от ее предыстории (от прошлого).

Поясним сказанное на примере непрерывных систем.

Непрерывные динамические модели описываются уравнениями вида

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq t_0 \quad (32)$$

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, n} \quad (33)$$

Уравнения первой группы (32) называются уравнениями динамики системы, а соотношения второй группы (33) определяют начальные условия.

Поскольку $\{x_i\}$ есть вектор состояния, то вся информация о прошлом, необходимая для предсказания будущего поведения системы при $t > t_0$ отображена в начальных условиях (33).

Решение системы уравнений (32) с начальными условиями (33) формально можно записать в виде совокупности соотношений

$$x_i(t) = \Phi_i(u_1, \dots, u_m, t / x_{10}, \dots, x_{n0}), \quad i = \overline{1, n} \quad (34)$$

Отметим, что Φ_i здесь не функции, а функционалы, зависящие от внешних воздействий $u_j(t')$, $j = \overline{1, m}$ при $t' \in (t_0, t]$.

Таким образом, из приведенных соотношений следует, что *состояние динамической системы в момент времени t зависит от ее предыстории*. До момента времени t_0 это информация содержится в начальных условиях, а промежуток времени (t, t_0) характеризуется внешними воздействиями $\{u_j(t')\}$.

Будем говорить, что модель системы статическая, если компоненты вектора

состояния $\vec{X}(t)$ зависят от величины внешних воздействий $\{u_j\}$ в тот же момент времени t , т.е.

$$x_i(t) = \psi_i(u_1(t), \dots, u_m(t)), \quad i = \overline{1, n} \quad (35)$$

Здесь $\psi_i(\cdot)$ - функция, а не функционал, как в (34) - в случае динамических систем. В частном случае, если влияние внешней среды не зависит от времени, согласно (35) получаем:

$$\vec{X} = \overrightarrow{const}, \quad (36)$$

т.е. состояние системы не меняется во времени и ее пространство состояний вырождается в точку.

Таким образом, статическая модель - это модель системы без памяти о прошлом. Такой подход к определению понятия статичности в курсе математического моделирования имеет свой резон. Конечно трудно представить себе широкий класс реальных систем без памяти, однако динамические систем с "короткой" памятью встречаются достаточно часто. Здесь надо только четко определить какая память может считаться короткой. Если все-таки исследуемая система может быть классифицирована как система с короткой памятью, то для нее описания с успехом может быть использована статическая модель. Заметим, что анализ статической модели обычно существенно проще анализа соответствующей динамической модели. Описание системы с короткой памятью с помощью статической модели называется *квазистатическим приближением*.

Обратимся теперь к вопросу о том, каковы условия применимости квазистатического приближения.

Пусть исследуемая система описывается следующей математической моделью

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m), \quad i = \overline{1, n} \\ x_i(t_0) &= x_{i0} \\ u_i(t) &= u_{i0} + \Delta u_i \cdot \theta(t - t_0) \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь x_{i0}, u_{i0} и Δu_i - некоторые константы, а $\theta(\cdot)$ обобщенная функция Хевисайда.

Для простоты мы положили, что f_i явно не зависит от времени. Это означает, что параметры самой системы постоянны, а меняются лишь внешние воздействия - u_i .

Представим решение (36) в виде

$$x_i(t) = x_{i0} + \Delta \psi_i(u_{10} + \Delta u_1, \dots, u_{m0} + \Delta u_{m0}t), \quad i = \overline{1, n}, t > 0 \quad (37)$$

Если существуют n чисел $\{\Delta x_i\}$ таких, что

$$\Delta x_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \psi_i(\cdot),$$

то говорят, что система релаксирует к новому статическому состоянию, определяемому вектором с компонентами

$$x_i = x_{i0} + \Delta x_i.$$

Процесс, происходящий с системой при $t > t_0$ называется *переходным процессом*. У разных систем этот процесс протекает с разной скоростью.

Введем временную характеристику этого процесса - *время релаксации* - как время за которое переходный процесс завершается в основном. В силу общности задачи точнее сформулировать это понятие трудно, поэтому приведем простой пример.

Рассмотрим систему, описываемую одномерной моделью ($n = 1$):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha (x - u(t)), \\ u(t) &= x_0 + \Delta x \cdot \theta(t), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (38)$$

Тогда при $t > 0$

$$\dot{x} = -\alpha (x - x_0 - \Delta x)$$

и

$$x = x_0 + \Delta x(1 - e^{-\alpha t}) \quad (39)$$

Динамика изменения состояния системы представлена на рис. - 8.

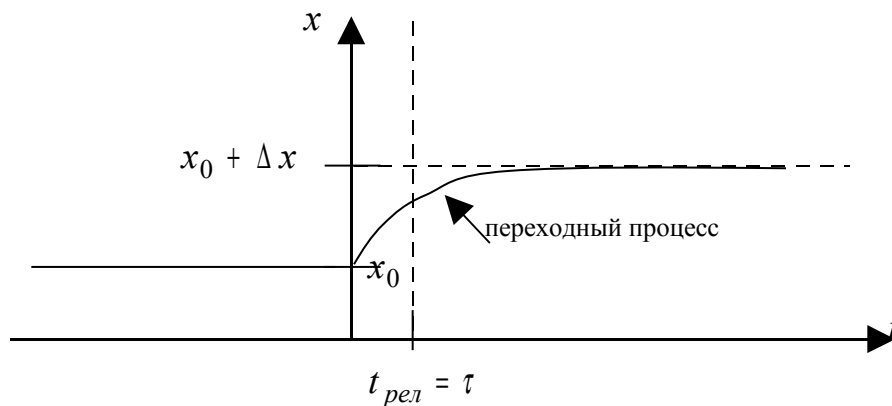


Рис. - 8

$t_{\text{рел}} = \tau = \frac{1}{\alpha}$ - время, за которое отклонение состояния системы от нового

статического состояния - $(x_0 + \Delta x)$, уменьшается в e раз в сравнении с исходным отклонением, равным Δx .

В более сложных системах, в сравнении с рассмотренной, переходного процесс может быть значительно более сложным и указать простое правило вычисления времени релаксации - τ не удастся. Поэтому в общем случае τ может быть оценена только по порядку величины.

Обратимся теперь к анализу изменяющихся внешних воздействий. В рассмотренном простом примере изменения скачкообразны. Это модельное представление реальных внешних воздействий. В общем случае изменения величины условий плавные, и можно ввести характерное время процесса - T , за которое эти изменения значительны. Например, если $u(t) = u_0 \cos[\omega, t]$ - гармоническое воздействие, то в качестве характерного времени можно выбрать период $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Ясно, что T может быть оценено только по порядку величины. Но эта "размазанность" оценки компенсируется жесткостью условий применимости квазистатического приближения.

$$\tau = t_{\text{рел}} \ll T. \quad (40)$$

Неравенство \ll означает, что T больше τ как минимум на порядок. При этом система как бы успевает все время подстраиваться под изменяющиеся внешние воздействия, ее состояние определяется внешними воздействиями в данный момент времени, система лишена памяти на прошлое.

3.5. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

До сих пор мы рассматривали т.н. *детерминированные модели*, в которых все входные данные: параметры системы, начальное состояние и внешние воздействия считались *однозначно определенными величинами*. Однако это идеализация. Понятно, что нельзя с абсолютной точностью задать начальные условия, при построении модели нельзя учесть все связи в системе. Даже когда отброшенные при моделировании связи мало существенны их влияние может проявиться, когда время протекания исследуемых процессов велико.

Рассмотрим простой пример - вращение твердого тела с моментом инерции I вокруг неподвижной оси. В отсутствие моментов внешних сил (равномерное вращение) угол поворота в любой момент времени t будет определяться соотношением

$$\varphi = \varphi_0 + M_0 \cdot t / I,$$

где M_0 - начальный момент импульса тела, φ_0 - начальный угол. Т.к. и M_0 , и φ_0 определены с конечной точностью - $\Delta\varphi_0$ и ΔM_0 , соответственно, то неопределенность в значении угла поворота φ будет линейно возрастать во времени

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \Delta M_0 \cdot t / I. \quad (40)$$

Из (40) видно, что существует такой момент времени $t_k = 2\pi I / \Delta M_0$, начиная с которого угол поворота φ становится полностью неопределенным, так как его неопределенность $\Delta\varphi$ становится больше 2π .

Таким образом, с самого начала нужно учитывать, что для реальной системы начальные условия могут реализовываться как произвольная точка из некоторой области в пространстве состояний, а любое изменение в задании начальных условий задачи может порождать резкое и неожиданное изменение в поведении системы - пучок траекторий в пространстве состояний, выходящий из некоторой малой области, определяемой неоднозначностью начальных условий, спустя время t_k "взрывается", расщепляется на несколько меньших пучков, расходящихся в разные стороны (см. рис. - 9)

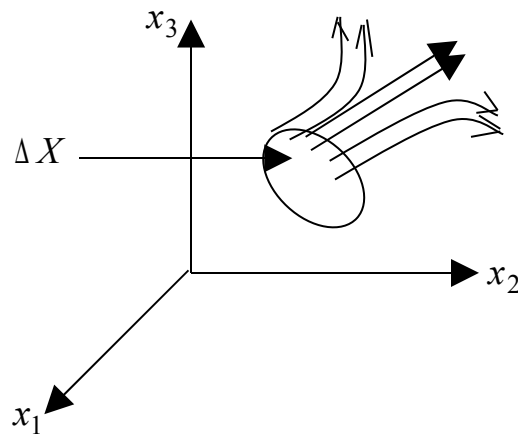


Рис. - 9

ΔX - область возможных значений начального состояния системы.

Примером такого расщепления пучка траекторий может служить поведение электронов в обыкновенном вакуумном диоде при большой плотности тока. В зависимости от малой вариации начальной скорости, с которой электрон покидает катод, электрон либо достигает анода, либо отбрасывается назад к катоду.

Из сказанного следует, что говорить об однозначности предсказаний динамических моделей можно лишь, закрывая глаза на отмеченные выше обстоятельства.

В ситуации, когда неопределенностями, присущими системе нельзя прене-

бредь, обычно используются методы теории вероятностей и математической статистики. Модели таких систем называются *вероятностными* или *стохастическими*. Вероятность при этом трактуется как мера неопределенности, мера недостатка информации о реальных параметрах, связях и начальном состоянии моделируемой системы.

Напомним, что основная задача теории вероятностей состоит в определении вероятностей сложных событий по известным вероятностям более простых.

Если для простоты фиксировать внимание только на неопределенности начальных условий, то вероятностная модель по заданному распределению вероятностей начального состояния системы в момент времени t_0 позволяет определить вероятность того, что в момент времени $t > t_0$ система будет описываться "вектором состояния" \vec{X} .

Другими словами в такой математической модели "зашифровано" отображение

$$P_0(\vec{X}_0, t_0) \rightarrow P(\vec{X}, t) \quad (41)$$

Динамика вероятностной модели в таком подходе описывает эволюцию вероятностного распределения на "пространстве состояний". Естественно, что при построении таких математических моделей возникает ряд вопросов относительно свойств систем и процессов, в них протекающих. В силу сложности проблемы вряд ли следует пытаться сформулировать необходимые условия сведения недетерминированной задачи к схеме (41). Ограничимся анализом достаточных условий, опираясь на информацию, известную из курсов теории вероятностей и случайных процессов.

Во-первых, очевидно, надо располагать начальными вероятностями $P_0(\vec{X}_0, t_0)$. Они относятся к исходным данным модели. Здесь следует обратить внимание на возможные осложнения. Дело в том, что в строгом аксиоматическом подходе Колмогорова вероятность определяется как мера на пространстве элементарных событий, но конкретного рецепта для расчета первичных вероятностей не дается. В этом случае для получения недостающих данных часто используют частотное определение, согласно которому под вероятностью события A в длинной серии испытаний при стремлении числа испытаний к бесконечности. Ну а как быть в ситуации, когда эксперимент уникален, повторение условий его реализации невозможно, о какой серии испытаний в таком случае может идти речь?

Для получения исходных данных для вероятностной модели можно воспользоваться другим - комбинаторным или классическим определением вероятности. Согласно этому определению если испытание имеет n равновероятных исходов и при этом m исходов сопровождаются появлением признака A , то вероятность появления признака A равна отношению $\binom{m}{n}$.

Обычно в курсе теории вероятностей для пояснения дееспособности такого определения приводятся примеры с игральными костями или картами, в которых равновозможные события легко выделить.

Мы здесь рассмотрим более сложный пример - гиббсовский ансамбль макросистем, широко используемый в статистической физике. Рассмотрим какую-либо дискретную систему размерность пространства состояний которой, $N \gg 1$. Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ - вектор состояния этой системы. Если вектор $\vec{\xi}$ задан, что известно микросостояние большой (макро) системы. На языке теории вероятностей это означает, что из множества возможных состояний реализовано одно - мы зафиксировали элементарное событие.

Поставим в соответствие нашей реальной системе множество ее моделей, находящихся в различных микросостояниях. Эта совокупность моделей называется ансамблем Гиббса. Если каждая модель соответствует одному элементарному событию, то введение ансамбля аналогично введению пространства элементарных событий. Рассмотрим далее, как Гиббс вводил вероятностную меру на этом пространстве. Полагалось, что исследуемая система находится в особом состоянии - состоянии термодинамического равновесия и постулировалось, что в этом случае все микросостояния равновозможны. Другими словами, вероятность элементарного события бралась равной обратной величине общего числа этих событий.

Хотя число различных микросостояний (элементарных событий) конечно, но очень велико, и работать в таком пространстве состояний неудобно. Допустим, что существует другой набор параметров $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$, характеризующий систему не столь подробно как вектор $\vec{\xi}$, но для наших исследований - удовлетворительно. При этом $n \ll N$. Компоненты вектора \vec{X} называют макропараметрами системы. Допустим, что существует связь

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \dots, \xi_N), \quad i = \overline{1, n} \quad (42)$$

Таких уравнений n - значительно меньше, чем компонент вектора состояния $\vec{\xi}$. Зная набор $\{\xi_i\}$ мы, согласно (42) однозначно определим вектор \vec{x} , однако задание \vec{x} не определяет однозначно набор $\{\xi_i\}$, существует множество различных микросостояний при заданном \vec{x} . Эта совокупность микросостояний (элементарных событий) определяет микросостояние системы (случайное событие). Учитывая, что элементарные события (микросостояния) не совместны, можно простым суммированием вычислить $P(\vec{x})$ - вероятность макро-состояния. Отметим, что множество допустимых значений $\{x_i\}, i = \overline{1, n}$ не формирует пространство состояний, имея ввиду определение этого понятия данное нами ранее. Оно образует некое подпространство в истинном пространстве состояний, имею-

щем размерность N . Именно поэтому при интерпретации (42) термин "пространство состояний" взят в кавычках.

Обозначенный выше подход, реализуемый в физике, можно попытаться использовать и при построении моделей в других приложениях. Однако при этом следует иметь в виду проблему выбора "микросостояния". Неудачный выбор может привести к ошибочному результату. Примером тому может служить известный парадокс геометрических вероятностей, описание которого можно найти, например, в книге Б.В. Гнеденко «Курс теории вероятностей».

Допустим, что каким-либо способом, но нам удалось построить $P_0(\overline{x_0}, t_0)$.

Следующим достаточным условием сводимости задачи к схеме (41) является *марковость системы*. Под этим термином мы понимаем то, что процессы, протекающие в исследуемой системе, являются марковскими. Образно говоря, если рассматривать текущее состояние процесса $\overline{x}(t)$ в момент времени $t \in T$ как "настоящее", совокупность всех возможных состояний $\{\overline{x}(s), s < t\}$ как прошлое, а совокупность возможных состояний $\{\overline{x}(u), u > t\}$ как "будущее", то для марковских процессов при фиксированном "настоящем" "будущее" не зависит от "прошлого".

Если исследуемая система дискретна, то в дискретном времени марковские процессы описываются уравнениями:

$$P_l(t_m) = \sum_{j=1}^k P_j(t_\mu) \pi_{jl}(t_\mu, t_m), \quad l = \overline{1, n}, \quad 0 \leq t_\mu < t_m, \quad (43)$$

где роль начальных условий играют вероятности $P_j(t_\mu)$.

В непрерывном времени справедливы уравнения Колмогорова:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n P_i(t) \lambda_{ij}(t), \quad P_i(0) = P_{i0}. \quad (44)$$

Нетрудно видеть, что (43), (44) определяют запись отображения (41).

Более сложным на вместе с тем и менее важным подклассом марковских процессов являются процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний. Такие процессы являются естественной моделью для описания эволюции динамических систем, подверженных случайным воздействиям. Возникает вопрос: когда можно считать, что такая динамическая система является марковской? Речь идет о *применимости марковского приближения*.

Опыт исследования динамических систем, подверженных случайным параметрическим воздействиям, показывает, что для применения аппарата марковских случайных процессов оказывается достаточным выполнение следующих условий.

Во-первых, должен выполняться *принцип динамической причинности*: решение в некоторый момент времени должно функционально зависеть лишь от предшествующих по времени значений случайных коэффициентов.

Во-вторых, что наиболее важно для нас, время корреляции случайных воздействий (т.е. случайных функций, входящих в уравнения) должен быть малым по сравнению с наименьшим характерным временем отклика динамической системы (временем релаксации). В этом случае возможна аппроксимация корреляционных функций случайных воздействий дельта-функциями от времени.

По существу аппроксимация какого-то случайного процесса марковским подобна подходу теории возмущений. В качестве малого параметра используется отношение δ_0/ε , т.е. времени корреляции случайных воздействий δ_0 ко времени корреляции отклика δ (времени релаксации). Нулевому приближению по этому малому параметру и отвечает марковское приближение.

Таким образом, для того, чтобы понять можно ли для описания, вообще говоря, немарковского процесса использовать марковское приближение с его хорошо развитым математическим аппаратом (тем самым сократить усилия затрагиваемые на решение задачи) надо оценить время корреляции случайных воздействий и время релаксации системы. Если соответствующее отношение будет мало, то марковское приближение правомерно.

Сделаем еще несколько полезных замечаний относительно использования модели марковских процессов и систем.

1. Любая детерминированная система, описываемая системой дифференциальных уравнений вида $\dot{x}_i = f(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$ и имеющая при начальных условиях $x_i = x_{0i}$ при $t = t_0$ решение $x_i = \psi_i(x_0, t - t_0)$, может рассматриваться как марковская с переходной вероятностью сингулярного типа

$$P[\bar{x}, t | x_0, t_0] = \delta[\bar{x} - \vec{\psi}(\bar{x}_0, t - t_0)] \quad (45)$$

2. Если у какого-либо n -мерного стохастического процесса пренебречь некоторым количеством компонент, то оставшиеся m -компоненты снова составят стохастический процесс. Однако, если n -компонентный процесс был марковским, то m -компонентный процесс ($m < n$), вообще говоря, уже не обязан быть марковским.

Вместе с тем отметим одно интересное обстоятельство. Любую замкнутую изолированную физическую систему в принципе можно описать с помощью марковского процесса, если ввести все микроскопические переменные как компоненты исходного состояния. Действительно, микроскопическое движение в фазовом пространстве детерминировано и, следовательно, обладает свойством марковости. Вопрос, однако, состоит в том. Можно ли найти намного меньшее по размерности пространство переменных, изменение которых во времени будет описы-

ваться многокомпонентным марковским процессом. Хорошо известен, но все еще остается загадочным экспериментальный факт, что это действительно возможно для большинства систем в природе. Конечно же, такое описание даже в лучшем случае является приближенным. Такое сведение к намного меньшему числу переменных называют сверткой или проекцией и обоснование такого приближения все еще является объектом многочисленных дискуссий.

3. Если заданный процесс не является марковским, то иногда его можно представить как часть марковского процесса, вводя дополнительные компоненты, расширяя размерность пространства. Эти дополнительные компоненты нужны для явного описания информации, которая в естественном случае содержалась бы неявно в прошлых значениях переменных. Поясним сказанное.

Допустим марковским является n -мерный случайный процесс, но не располагая этой информацией мы рассматриваем лишь его m компонент ($m < n$). Тогда, зафиксировав при $t = t_0$ (в настоящем) состояние m -мерного процесса, мы оставили свободными $(m - n)$ -компонент марковского n -мерного процесса. Т.е. состояние истинно марковского процесса в настоящем зафиксировано не было! Недостающая информация об $(m - n)$ компонентах теперь заключена в прошлом - в поведении системы при $t < t_0$. Так у нас для m -мерного стохастического процесса получилось, что "будущее" при фиксированном "настоящем" стало зависеть от "прошлого". Устранить эту зависимость можно, введя "утерянные" $(m - n)$ компоненты процесса.

4. Приведем одно полученное для выявления марковости утверждение, известное как теорема Дуба.

Если случайный процесс $\xi(t)$ списывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$d\xi = A(\xi, t)dt + B(\xi, t)dW(t), \quad (46)$$

где $W(t)$ - винеровский процесс, то $\xi(t)$ - марковский процесс.

Польза приведенного соотношения (46) обусловлена тем, что сводит задачу о марковости процесса ξ к задаче о возможности моделирования случайных внешних воздействий с помощью винеровского процесса $W(t)$ - процесса с независимыми приращениями, что, вообще говоря, проще.

3.6. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ. ПРОЦЕДУРА ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Излагая основные этапы технологии математического моделирования, мы выделили содержательную модель как фундамент всего процесса моделирования.

В основу же содержательной модели кладутся законы, закономерности, эмпирические факты, известные в той предметной области, к которой принадлежит исследуемая система. Эти связи между параметрами отражают (в доступной для нас форме) объективные законы природы, которые в подавляющем большинстве случаев являются нелинейными, т.е. неизвестные параметры не образуют линейных комбинаций. Естественно у читателя может возникнуть вопрос: как же так, ведь значительное число законов, с которыми он познакомился в прослушанных ранее курсах, были линейными. Помним кажущееся противоречие на примере хорошо известного закона Гука. Согласно этому закону сила упругости, возникающая при деформации тела пропорциональна относительной величине этой деформации

$$F \sim \Delta l / l. \quad (47)$$

Используя (47) нужно помнить, что этот закон справедлив лишь при малых деформациях. При этом понятие малости может быть конкретизировано лишь после конкретизации самой задачи, выяснения свойств, характеристик деформируемого объекта. Даже резиновые жгуты, имеющие одинаковую геометрию, но изготовленные по разным технологиям имеют различные области применимости соотношения (47). При больших растяжениях упругие деформации уступают место пластическим и далее следует разрыв. Качественный вид зависимости F от Δl представлен на рис. 10.

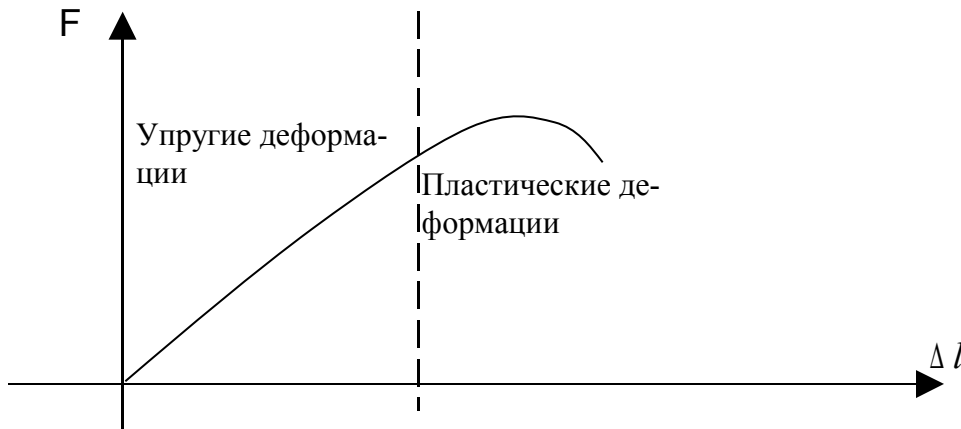


Рис. 10.

Другой простой, пример, касающийся закона Ома, был приведен ранее в п. 1.1.3.

Приведенные примеры показывают, что "истинные" законы природы сложны и в рамках современного языка их формального представления - не линейны. Однако в некоторых областях параметров эти связи могут хорошо описываться линейными соотношениями, и, если эти области имеют значительные размеры, то

имеет смысл говорить об их линейной аппроксимации как о линейных законах.

Ограничивая себя рамками линейности мы безусловно объединяем яркость и многообразие окружающего нас мира, но борьба за линейность связана с тем, что математический аппарат исследования линейных систем разработан на настоящий момент неизмеримо более глубоко в сравнении с аппаратом нелинейных моделей. Очень часто линейность модели можно интерпретировать как осознанную жертву компромисса между требованиями адекватности и простоты математической модели.

3.6.1. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ. КОРРЕКЦИЯ ДЕКОМПОЗИЦИИ.

Линейными моделями будем называть модели. Описываемые линейными уравнениями, т.е. уравнениями, в которых *искомые величины* (в нашем случае - вектор состояния) *входит только первой степени*.

Корректно понятие линейности математической модели можно ввести базирясь на понятии *линейного оператора*.

Оператор A , отображающий пространство P в пространство S , т.е. соотносящий каждому элементу x из P некоторый элемент $y = A \cdot x$ из S , называется линейным, если для любых $x_1, x_2 \in P$ и $\alpha \in R$ выполняются условия

1. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$,
2. $A(\alpha \cdot x) = \alpha Ax$.

Если математическую модель какой-либо системы можно записать, используя только суперпозицию или композицию линейных операторов, то такую модель будем называть линейной.

Рассмотрим в качестве примера линейную непрерывную динамическую модель

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n A_{ij}(t)x_j + \sum_{k=1}^m B_{ik}(t)U_k(t) \quad i = \overline{1, n} \\ x_i(0) &= x_{0i} \quad i = \overline{1, n} \\ U_k(t) &\in U \end{aligned} \quad (48)$$

В векторном виде уравнение (48) можно записать компактно как

$$\dot{\vec{x}} = \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{u}, \quad (49)$$

где \hat{A} - квадратная матрица размерности $(n \times n)$,

\hat{B} - прямоугольная $(m \times n)$ - матрица.

Для линейной модели связь наблюдаемых переменных $\{y_i\}$ с компонентами вектора состояния \vec{x} и вектора внешних воздействий \vec{u} также является линейной.

$$\vec{y} = \hat{C}\vec{x} + \hat{D}\vec{u}$$

Замечание. Отметим, что если для моделей типа "вход - выход" последнее утверждение является обязательным, то для структурных моделей "вещи в себе" определяется уравнениями для вектора состояния, которые линейны, ну а связь с наблюдаемыми переменными, характеризующими исследуемую систему как "вещи для нас", может быть и нелинейной, ибо, полагая связь заданной аналитически, мы сводим проблему к простой процедуре "визуализации" зависимости

$$\vec{y} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{u}).$$

Если матрицы \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} и \hat{D} не зависят от времени, то модель часто называют *стационарной*.

Рассмотрим случай, когда внешнее управление отсутствует, т.е. $\hat{B} \equiv 0$. Математическая модель такой динамической системы представляет собой начальную задачу (задачу Коши)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \hat{A}\vec{x} \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0 \end{aligned} \quad (50)$$

если \hat{A} не зависит от времени, то решение (50) может быть представлено в виде

$$\vec{x}(t) = e^{\hat{A}t} \cdot \vec{x}_0, \quad (51)$$

где $e^{\hat{A}t}$ - матрица размерности $n \times n$, понимаемая в смысле ряда

$$e^{\hat{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n \cdot t^n \quad (52)$$

Согласно (52) решение (51) математической модели (50) представлено в виде бесконечного ряда в значение каждого члена которого вносят вклад все компоненты вектора \vec{x}_0 . Естественно возникают вопросы о том, с чем это связано, можно ли вид решения упростить и если да, то какова физическая интерпретация процедуры, лежащая в основе упрощения.

Начнем с формальных математических выкладок.

Пусть \hat{A} в (50) является *матрицей простой структуры*, т.е. она подобна диагональной матрице.

Говорят, что две матрицы \hat{A} и \hat{B} подобны, если существует третья, невырожденная матрица \hat{T} такая, что

$$\hat{A} = \hat{T}\hat{B}\hat{T}^{-1}.$$

Таким образом, объявление \hat{A} матрицей простой структуры означает существование матрицы \hat{T} с отличным от нуля детерминантом такой, что

$$\hat{A} = \hat{T} \hat{\Lambda} \hat{T}^{-1}, \quad (53)$$

а

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}, 0, \dots, 0 \\ 0, \lambda_{22}, \dots, 0 \\ 0, 0, \dots, \lambda_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{nn}).$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что выбор вектора состояния системы определен не однозначно, т.е. любой другой вектор \vec{z} , определенный через исходный - \vec{x} с помощью невырожденного преобразования, также может рассматриваться как вектор состояния преобразования, также может рассматриваться как вектор состояния.

Определим новый вектор состояния \vec{y} нашей модели следующим образом

$$\vec{y} = \hat{T} \vec{x}, \quad (54)$$

где матрица \hat{T} удовлетворяет (53).

Теперь домножив (50) на \hat{T} слева получим

$$\hat{T} \dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} (\hat{T} \vec{x}) = \dot{\vec{y}} = \hat{T} \hat{A} \vec{x} = \hat{T} \hat{A} \hat{T}^{-1} \cdot \hat{T} \vec{x} = \hat{\Lambda} \vec{y}. \quad (55)$$

Здесь использовано то, что $\hat{T}^{-1} \cdot \hat{T} = \hat{T} \hat{T}^{-1} = \hat{I}$, \hat{I} - единичная матрица, появление которой в матричном произведении не приводит к изменению результата.

Проделав такую же операцию с начальными условиями приходим к новой математической модели

$$\begin{aligned} \dot{\vec{y}} &= \hat{\Lambda} \vec{y} \\ \vec{y}(0) &= \hat{\Lambda} \vec{x}(0) = \hat{\Lambda} \vec{x}_0 = \vec{y}_0. \end{aligned} \quad (56)$$

Самое замечательное в полученной модели заключается в том, что векторное уравнение (56) распадается на n независимых уравнений $\dot{y}_i = \lambda_{ii} \cdot y_i$, $i = \overline{1, n}$, решение которых

$$y_i = y_{0i} \exp\{\lambda_{ii} \cdot t\} \quad i = \overline{1, n} \quad (57)$$

значительно проще решения (51).

Обсудим теперь физический смысл достигнутого упрощения.

По существу мы провели *коррекцию декомпозиции системы*. Напомним, что первичная декомпозиция системы проводилась нами при построении содержательной модели на уровне качественного понимания структуры системы и значимости связей между ее элементами (подсистемами). Строгий математический анализ показывал однако, что использованное разбиение не самое удачное и мож-

но выбрать подсистемы так, чтобы их функционирование, изменения не влияли друг на друга.

Поясним сказанное на примере из курса физики, к которому мы уже обращались ранее. Рассмотрим задачу о теплоемкости твердого тела. Естественной моделью такого тела является совокупность материальных точек, расположенных в узлах кристаллической решетки. Решетка не распадается, поскольку атомы (материальные точки) взаимодействуют между собой. Понятно, что при первичном анализе, при построении содержательной модели декомпозицию надо провести так, что в качестве подсистем будут выступать отдельные атомы. Внутриатомные связи существенно превосходят взаимосвязи атомов в кристаллической структуре, и поэтому сами атомы в модели можно рассматривать как бесструктурные элементы (материальные точки), а для анализа системы ограничиться первым уровнем декомпозиции (см. рис. - 1).

Именно такой моделью воспользовался Эйнштейн. Далее в модели он сделал серьезное упрощение - предположил, что атомы в узлах кристаллической решетки колеблются независимо. Ясно, что это не совсем так - смещение атома от положения равновесия сразу ощущается соседями, их поведение адекватно внешнему воздействию.

Если проводить аналогию с проделанными выше выкладками, то допущение Эйнштейна соответствовало объявлению матрицы \hat{A} в (50) диагональной (хотя это совсем и не так). По образному выражению Л.И. Мандельштама "идеализация мстит за себя", и созданная Эйнштейном модель лишь качественно правильно описывала поведение теплоемкости кристалла при низких температурах.

Количественной адекватности модели удалось добиться Дебаю. В нашей интерпретации он реализовал преобразование (54), которое в теории колебательных систем со многими степенями свободы называется *переходом к нормальным координатам*. Фактически Дебай выбрал в качестве подсистемы не отдельный колеблющийся атом, а совокупность смещений всех атомов решетки, образующих монохроматическую плоскую волну, и в качестве компонент нового вектора состояния амплитуды таких волн. Компоненты нового вектора состояний не влияли друг на друга, и поэтому гипотеза об их статистической независимости оказалось адекватной сущности моделируемого объекта - кристалла.

Так математический анализ подсказал направление коррекции в декомпозиции системы и позволил получить результаты моделирования, хорошо совпадающие с экспериментом.

Заметим, что в более общем случае, когда матрица \hat{A} не является матрицей простой структуры, для динамической модели (50) также можно провести коррекцию декомпозиции. В этом случае преобразованием типа (54) матрица \hat{A} приводится к жордановой нормальной форме:

$$\hat{A} = \hat{T}\hat{Y}\hat{T}^{-1}, \hat{Y} = \text{diag}\{\lambda_1\hat{I}_{l_1} + \hat{H}_{l_1}, \dots, \lambda_S\hat{I}_{l_S} + \hat{H}_{l_S}\}, \quad (58)$$

где \hat{I}_{l_i} - единичные матрицы размера $l_i \times l_i$,

\hat{H}_{l_i} - жорданова клетка размера $l_i \times l_i$

$$\hat{H}_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица \hat{Y} является квазидиагональной матрицей, т.е. блочной матрицей с отличными от нуля элементами только на главной оси.

Если представление (58) удастся отыскать, то соответствующее преобразование (54) позволяет выделить в математической модели (50) S независимых моделей, каждую из которых можно исследовать отдельно.

Подробно эти и другие смежные вопросы освещены в монографии К.А. Абгаряна «Матричное исчисление с приложениями в теории динамических систем».

Рассмотрим теперь модель системы с внешним управлением

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \hat{A}\vec{x} + \hat{B}\vec{u} = \hat{A}\vec{x} + \vec{F}(t) \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0 \end{aligned} \quad (59)$$

решение для которой имеет вид

$$\vec{x}(t) = e^{\hat{A}t}\vec{x}_0 + \int_0^t \hat{G}(t-t')\vec{F}(t')dt', \quad (60)$$

где $G(\cdot)$ матрица Грина рассматриваемой задачи.

Она находится как решение следующей начальной задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{G}}{dt} &= \hat{A} \cdot \hat{G} \text{ при } t > 0 \\ \hat{G}(0) &= \hat{I} - \text{единая матрица.} \end{aligned} \quad (61)$$

Нетрудно видеть, что в нашем случае (\hat{A} не зависит от времени)

$$\hat{G}(t) = e^{\hat{A}t}.$$

Функцию Грина можно рассматривать как решение матричного уравнения

$$\frac{d\hat{G}}{dt} - \hat{A}\hat{G} = \hat{I} \cdot \delta(t), \quad (62)$$

где $\delta(t)$ - δ -функция Дирака.

Из (62) следует, что $\hat{G}(t)$ описывает реакцию системы на импульсное возмущение - $\hat{I} \cdot \delta(t)$.

Функции Грина многих краевых задач читатель может найти в достаточно обстоятельном справочном издании А.Г. Бутковского «Характеристики систем с распределенными параметрами».

3.6.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ. ПРОЦЕДУРА ЛИНЕАРИЗАЦИИ.

Рассмотренные выше линейные модели подчиняются принципу суперпозиции. В этом случае, находя частные решения и суммируя их, как правило, удается построить и общее решение. Для нелинейных моделей принцип суперпозиции неприменим, и общее решение можно найти лишь в редких случаях. Отдельные же частные решения нелинейных уравнений могут не отражать характер поведения объекта в более общей ситуации.

Источниками нелинейности могут быть многие причины. Основные законы в тех предметных областях, где строятся модели, смогут быть нелинейны. Так фундаментальные законы природы - закон тяготения и закон Кулона - изначально нелинейны, и поэтому основанные на них модели, вообще говоря, также нелинейны. Нелинейность модели может порождаться сложной геометрией явления и изменением характера взаимодействия в самом объекте при изменении его состояния.

В сущности, реальным системам и протекающим в них процессам отвечают только нелинейные модели, а линейные справедливы лишь при описании незначительных изменений величин, характеризующих исследуемый объект. Остановимся подробнее на таком подходе к исследованию нелинейных систем, называемом *процедурой линеаризации*.

Пусть наша система описывается нелинейными уравнениями:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}), \quad \vec{y} = \vec{g}(\vec{x}, \vec{u}) \quad (63)$$

И пусть для этой системы при некотором $\vec{u}_1(t)$ известно решение, т.е. известны $\vec{x}_1(t)$ и $\vec{y}_1(t)$ такие, что

$$\dot{\vec{x}}_1 = \vec{f}(\vec{x}_1, \vec{u}_1), \quad \vec{y}_1 = \vec{g}(\vec{x}_1, \vec{u}_1) \quad (64)$$

Как будет вести себя модель системы при управлении $\vec{u}(t)$, близком к $\vec{u}_1(t)$, т.е. $\vec{u}(t) = \vec{u}_1(t) + \delta\vec{u}(t)$. Тогда $\vec{x}(t)$ можно рассматривать как возмущенное движение

$$\vec{x}(t) = \vec{x} + \delta\vec{x}(t),$$

для которого

$$\frac{d}{dt}(\delta\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_1 + \delta\vec{x}, \vec{u}_1 + \delta\vec{u}) - \vec{f}(\vec{x}_1, \vec{u}_1) \quad (65)$$

Это уравнение мы получили вычитая (64) из (63).

Раскладывая \vec{f} в правой части (65) в ряд Тейлора по степеням возмущений и, ограничиваясь величинами первого порядка малости по возмущениям, находим:

$$\delta\dot{\vec{x}} = \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}_1} \cdot \delta\vec{x} + \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}} \right|_{\vec{u}=\vec{u}_1} \cdot \delta\vec{u} \quad (66a)$$

или в компонентах

$$\delta \dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \delta u_k, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, m} \quad (66b)$$

Получившееся уравнение относительно $\delta\vec{x}$ называют уравнением для вариаций. Его решение несравненно проще, чем решение нелинейного уравнения (63).

Решение исходной нелинейной задачи в первом приближении имеет вид

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}_1 + \delta\vec{x}^{(1)} \quad (67)$$

Рассмотрим теперь другой, не так широко известный способ линеаризации нелинейных стохастических моделей (*статическая линеаризация*). В этом подходе все нечетные нелинейные функции случайной величины x заменяются простейшей нечетной функцией вида Ax , а все четные - простейшие четно - константой B . Параметры линеаризации A и B подбираются при этом таким образом, чтобы при замене соблюдалась определенная статистическая эквивалентность.

Рассмотрим некоторые рецепты выбора параметра A при аппроксимации нелинейной нечетной функции $f(x) = -f(-x)$ с помощью линейной функции Ax , считая, что x - гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением ($\bar{x} = 0$) и дисперсией τ^2 .

1. Равенство дисперсий $f(x)$ и Ax :

$$\langle f^2(x) \rangle = A^2 \tau^2$$

При этом

$$A = A_1 = \langle f^2(x) \rangle^{1/2} / \tau \quad (68)$$

2. Механизм отклонения $A \cdot x$ от $f(x)$ (в среднеквадратичном):

$$\langle [Ax - f(x)]^2 \rangle = \min \quad (69)$$

Приравнивая производную по A от (69) к нулю, получаем:

$$A = A_2 = \langle f(x) \cdot x \rangle / \tau^2 \quad (70)$$

3. Определение A как среднего значения производной нелинейной функции:

$$A = \langle f'(x) \rangle$$

Учитывая, что распределение плотности вероятностей $w(x)$ гауссовского процесса удовлетворяет соотношения

$$w'(x) = -\frac{x}{\tau^2} w(x),$$

Находим

$$\begin{aligned} A = A_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)w(x)dx = w(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} fw' dx = \frac{1}{\tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot x \cdot w dx = \\ &= \frac{1}{\tau^2} \langle f \cdot x \rangle = A_2 \end{aligned} \quad (71)$$

Сопоставляя (70) и (71) находим, что второй и третий критерии совпадают.

Нетрудно убедиться в том, что в области малых значений x статистическая линейаризация эквивалента обычной. Малость значений x означает, что распределение плотности вероятностей отлична от нуля лишь вблизи нуля и поведение нелинейной функции $f(x)$ при больших x несущественно. Раскладывая $f(x)$ в ряд по x и ограничиваясь первым неичезающим членом разложения, получаем:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\tau} \langle (f'(0) \cdot x)^2 \rangle^{1/2} = f'(0) \frac{\langle x^2 \rangle^{1/2}}{\tau} = f'(0) \\ A_2 = A_3 &= \frac{1}{\tau^2} \langle f'(0) \cdot x \cdot x \rangle = f'_0 \frac{\langle x^2 \rangle}{\tau^2} = f'(0) \end{aligned}$$

Пример.

Рассмотрим некоторую реальную систему, математическая модель которой имеет вид:

$$dx(t) = -x^3(t)dt + \sqrt{2D}dW(t) \quad (72)$$

Здесь $W(t)$ - винеровский процесс. Такая модель возникает, когда детерминированная система $\dot{x} = -x^3$ оказывается под воздействием случайных возмущений. Последние часто моделируют белым шумом $\xi(t) = \frac{d}{dt}W(t)$. Это соотношение следует понимать в смысле обобщенных функций, т.к. с точки зрения классического анализа винеровский процесс не дифференцируем.

Модель (72) выбрана нами потому, что она допускает точное решение, и можно просто оценить ошибки, возникающие при различных вариантах статисти-

ческой линеаризации.

Проанализируем сначала точное решение рассмотренной модели. Согласно теореме Дуба процесс $x(t)$ является Марковским и для его описания можно воспользоваться уравнением Колмогорова – Фоккера – Планка

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [- (x)^3 w(x, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} [w(x, t)] \quad (73)$$

с начальным условием $w(x, 0) = \delta(x)$. Из (73) нетрудно найти стационарное распределение плотности вероятности марковского процесса $x(t)$:

$$w(x) = \frac{2\mu^{1/4}}{\Gamma(1/4)} e^{-\mu x^4}, \quad (74)$$

где $\mu = \frac{1}{4D}$, а $\Gamma(\cdot)$ - гамма – функция.

Получив распределение (74), нетрудно вычислить моменты стационарного процесса

$$\langle x^{2n+1} \rangle = 0, \quad \langle x^{2n} \rangle = \frac{2^n \Gamma(1/4 + n/2)}{\Gamma(1/4)} D^{n/2}.$$

В частности

$$\langle x^2 \rangle = \tau^2 = \sqrt{D} \frac{2\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}, \quad \langle x^4 \rangle = D \quad (75)$$

Проведем теперь в (72) статистическую линеаризацию заменив x^3 на $\beta \tau^2 \cdot x$, где τ^2 - дисперсия величины x , а β - некоторый числовой коэффициент. Перепишем линеаризованную задачу в виде:

$$\dot{x} + \beta \tau^2 x = \xi(t), \quad x(0) = 0, \quad (76)$$

где $\xi(t)$ - белый шум с корреляционной функцией

$$K_\xi(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = 2D \delta(\tau).$$

Формальное решение (76) имеет вид:

$$x(t) = e^{-\beta \tau^2 t} \int_0^t e^{\beta \tau^2 t'} \cdot \xi(t') dt' \quad (77)$$

Записав аналогичное выражение для $x(t + \tau)$, умножив его на (77) и произведя статистическое усреднение, получаем при $t \rightarrow \infty$ (стационарный случай) следу-

ющее выражение для корреляционной функции процесса $x(t)$:

$$K_x(\tau) = \frac{D}{\beta \tau^2} e^{-\beta \tau^2 \tau} \quad (78)$$

т.е. после линеаризации получаем процесс с дисперсией $\tau^2 = \frac{D}{\beta \tau^2}$ и временем корреляции $T_k = \frac{1}{\beta \tau^2}$.

Отсюда

$$\frac{\tau^2}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \quad (79)$$

Оценим теперь $\sqrt{\beta}$ в соответствии с изложенными выше рецептами статистической линеаризации.

Согласно (68)

$$p \tau^2 = A_1 = \sqrt{\langle x^6 \rangle} / \tau,$$

$$\langle x^6 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^6 \frac{1}{\sqrt{2\pi \tau^2}} e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}} dx = 15$$

и

$$\beta = \sqrt{15} \quad (80)$$

Согласно (70), (71)

$$p = 3 \quad (81)$$

Подставляя (80), (81) в (79) можно сопоставить приближенные значения дисперсии с точной ее величиной – (75)

$$\frac{\tau^2}{\sqrt{D}} = \begin{cases} \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = 0,675 - \text{точно значение} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{15}} \approx 0,508 \text{ при } A = A_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,575 \text{ при } A = A_2 = A_3 \end{cases}.$$

Таким образом, при статистической линеаризации задачи (72) возникают следующие ошибки при определении дисперсии величины x :

- 25% при использовании первого рецепта выбора параметра A ;

- 15% при выборе второго или третьего рецептов.

Полезно обратить внимание на причины возникновения таих расхождений. После линеаризации (72) процесс, аппроксимирующий $x(t)$, стал гауссовым, хотя в действительности распределение плотности вероятности истинного процесса (74) гауссовым не является. Это цена, заплаченная за переход от нелинейной к линейной модели.

Справедливости ради отметим, что изложенные приемы не самые сложные и приведены здесь с целью создать у читателя первичные представления о существующих подходах к процедуре линеаризации. В более сложных модификациях этого подхода ошибки в определении статистических средних удается существенно снизить.

4. НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ

Проводя классификацию моделей, мы разделили все их множество на детерминированные и стохастические, воспользовавшись для описания неопределенности последних аппаратом теории вероятностей. Однако существует класс неопределенностей не поддающихся такому описанию. Попробуйте на традиционном математическом языке выразить утверждения: «этот объект на схеме надо сместить немного левее» или «высказанная идея представляется достаточно интересной». Приведенный пример демонстрирует т.н. лингвистическую неопределенность. Вообще весь спектр задач, исходя из современного уровня понимания этого вопроса, можно разделить на классы по степени неопределенности: полная определенность, стохастическая, лингвистическая, интервальная и полная неопределенность.

Построение моделей в рамках нечеткого подхода позволяет сравнивать модели и придавать точный смысл таким понятиям как "значимый" и "пренебрежимый". Появляется возможность формализации неточных знаний о предметной области, внесения в модель сведений о неполноте информации.

Пожалуй, наиболее поразительным свойством человеческого интеллекта является способность принимать правильные решения в обстановке неполной и нечеткой информации. Построение моделей приближенных рассуждений человека и использование их в компьютерных системах будущих поколений представляет сегодня одну из важнейших проблем науки.

Математическая теория нечетких множеств позволяет описывать нечеткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечеткие выводы. Основанные на этой теории методы построения нечетких систем существенно расширяют области применения компьютеров. Применение теории нечетких множеств оказывается особенно полезным, когда рассматриваемые системы являются слиш-

ком сложными для анализа с помощью общепринятых количественных методов, или когда доступные источники информации интерпретируются качественно, неточно или неопределенно. Наличие математических средств отражения нечеткости исходной информации позволяет строить модели, адекватные реальности, в ситуациях, когда применение классических методов проблематично. Рассмотрим вкратце основы этого нового раздела математики.

4.1. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА

Пусть E – универсальное множество, x – элемент E , а R – некоторое свойство. Тогда обычное (четкое) подмножество A универсального множества E , элементы которого удовлетворяют свойству R , можно определить как множество упорядоченных пар $A = \{ (x, \mu_A(x)) \}$, где $\mu_A(x)$ – характеристическая функция (индикатор подмножества), принимающая значение 1, если x удовлетворяет свойству R и 0 – в противном случае.

Нечеткое подмножество отличается от обычного тем, что для элементов x из E нет однозначного ответа "да – нет" относительно свойства R . В связи с этим, *нечеткое подмножество A универсального множества E* определяется как множество упорядоченных пар $A = \{ (x, \mu_A(x)) \}$, где $\mu_A(x)$ – *характеристическая функция принадлежности* (функция принадлежности), принимающая значения в некотором вполне упорядоченном множестве M (например, $M = [0, 1]$). Функция принадлежности указывает степень (или уровень) принадлежности элемента x подмножеству A , и множество M называют *множеством принадлежностей*. Если $M = \{0, 1\}$, т.е. содержит только два элемента, то нечеткое подмножество A может рассматриваться как обычное или четкое множество.

В теории нечетких множеств вводится понятие лингвистической переменной, значениями которой являются слова или предложения естественного языка, которые описываются нечеткими значениями. Например, лингвистическая переменная ВОЗРАСТ принимает нечеткие значения: молодой, не молодой, старый, не очень старый и т.д.

Пример. Нечеткое подмножество людей, обозначаемое термином «старый», можно определить функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 50 \\ \left[1 + \left(\frac{x - 50}{5} \right)^{-2} \right]^{-1} & \text{при } 50 < x \leq 100 \end{cases} \quad (82)$$

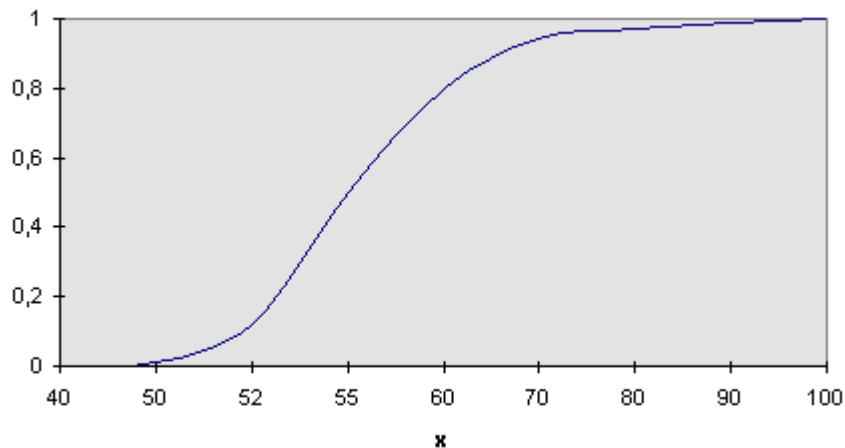


Рис. Функция принадлежности для значений термина «старый»

4.1.1 ПРОСТЕЙШИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Включение. Пусть E – некоторое множество, M – множество принадлежностей, а A и B – два нечетких подмножества E ; будем говорить, что A содержится в B , если

$$\forall x \in E \rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

и обозначать $A \subset B$

Равенство. Пусть E – некоторое множество, M – множество принадлежностей, а A и B – два нечетких подмножества E ; будем говорить, что A и B равны тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in E \rightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

и будем обозначать этот факт следующим образом: $A = B$.

Дополнение. Если E – некоторое множество, $M=[0,1]$ – соответствующее ему множество принадлежностей, а A и B – два нечетких подмножества E , то будем говорить, что A и B дополняют друг друга, если

$$\forall x \in E \rightarrow \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x).$$

Это будем обозначать так: $B = \bar{A}$ или $A = \bar{B}$.

Очевидно, что всегда $\overline{\bar{A}} = A$.

Пересечение. Пусть E – некоторое множество, M – множество принадлежностей, а A и B – два нечетких подмножества E ; пересечение $A \cap B$ определяют как наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B . Функция принадлежности для такого пересечения находится так:

$$\forall x \in E \rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Объединение. Пусть E – некоторое множество, M – множество принадлежностей, а A и B – два нечетких подмножества E ; определим $A \cup B$ как наименьшее нечеткое подмножество, которое содержит одновременно A и B . Функция принадлежности для такого пересечения находится в виде

$$\forall x \in E \rightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

4.1.2. МЕТРИКА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Говоря о различных нечетких подмножествах естественно поставить вопрос о том сколь близки (или далеки) описываемые ими понятия. С этой целью полезно ввести расстояние между нечеткими множествами.

Напомним, что в математике слово «расстояние» нельзя использовать произвольно. Если мы хотим определить расстояние d между любой парой элементов x, y множества E , то должны выполняться следующие условия:

$$\forall x, y, z \in E$$

имеют место соотношения:

- 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 2) $d(x, y) \geq 0$ - неотрицательность;
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$ - симметричность;
- 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Можно показать, что видимые далее расстояния Хемминга и Евклида удовлетворяют приведенным выше условиям.

Под расстоянием Хемминга – между двумя конечными нечеткими подмножествами $A = \{(x_i, \mu_A(x_i))\}_{i=1}^n$ и $B = \{(x_i, \mu_B(x_i))\}_{i=1}^n$, определенными на дискретном универсальном множестве $E = \{x_i\}, i = \overline{1, n}$, понимают величину

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|. \quad (83)$$

Очевидно, что

$$0 \leq d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq n.$$

Соответствующее евклидово расстояние задается формулой

$$e(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}. \quad (84)$$

В этом случае имеем:

$$0 \leq e(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq \sqrt{n}.$$

В случае счетных множеств в соответствующих соотношениях суммирование распространяется до ∞ . Последнее, конечно, имеет смысл, если соответствующие ряды сходятся.

Если $\mathbf{E} = \mathbf{R}$, то расстояние Хемминга вводится по формуле $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx$, а расстояние Евклида определяется другим интегралом $e(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 dx}$.

Поскольку обычное подмножество является частным случаем нечеткого, то естественно поставить вопрос об определении обычного подмножества, ближайшего к данному нечеткому.

Легко показать, что это обычное множество таково, что его индикатор I равен

$$I_{(x_i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu_A(x_i) < 0,5 \\ 1 & \text{при } \mu_A(x_i) \geq 0,5 \end{cases}. \quad (85)$$

Приведем пример. Запишем нечеткое множество в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0,3	0,7	0,9	0,4	0,7	0,1	0,2	0,6

Тогда ближайшее обычное множество задается следующим индикатором

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	1	1	0	1	0	0	1

Для характеристики нечетких множеств можно вводить два индекса нечеткости: линейный индекс нечеткости, определяемый посредством обобщенного расстояния Хемминга, и квадратичный индекс нечеткости, определяемый посредством евклидова расстояния. Обозначим их $V(A)$ и $\eta(A)$ соответственно:

$$V(A) = \frac{2}{n} \cdot d(A, \bar{A}) \quad (86)$$

$$\eta(A) = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot e(A, \bar{A}) \quad (87)$$

Здесь \bar{A} - нечеткое подмножество, являющееся дополнением к A .

4.2. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Изложенные выше первичные понятия теории нечетных множеств позволяют получить представление о возможности оперировать, работать с нечетко определенными понятиями, объектами, системами.

Подобно аксиоматическому подходу Колмогорова, лежащему в основе теории вероятностей, теория нечетких множеств позволяет лишь установить взаимосвязь между нечетко заданными входными данными задачи и подлежащими определению выходными характеристиками, т.е. связать неопределенность в постановке задачи с неопределенностью ответа.

Некоторый произвол в задании вероятностной меры в аксиоматическом подходе Колмогорова компенсируется независимо вводимыми классическим и частотным определениями вероятностей событий, позволяющим получить входные числовые значения в конкретных вероятностных схемах.

Для завершенности решения нечеткой задачи необходимо задание функции принадлежности, что, вообще говоря, лежит вне рамок теории нечетких множеств, и поэтому адекватность используемой модели не может быть проверена средствами самой теории. Это является основной трудностью, мешающей интенсивному применению обсуждаемой теории при решении практических задач.

В множестве существующих методов построения функции принадлежности нечеткого множества по экспертным оценкам можно выделить две группы: пря-

мые и косвенные методы.

Прямые методы определяются тем, что эксперт непосредственно задает правила определения значений функции принадлежности μ_A , характеризующей понятие А. Эти значения согласуются с его предпочтениями на множестве объектов U следующим образом:

1) для любых $u_1, u_2 \in U$ $\mu_A(u_1) < \mu_A(u_2)$ тогда и только тогда, когда u_2 предпочтительнее u_1 , т.е. в большей степени характеризуется понятием А;

2) для любых $u_1, u_2 \in U$ $\mu_A(u_1) = \mu_A(u_2)$ тогда и только тогда, когда u_1 и u_2 в одинаковой степени характеризуются понятием А.

Как правило, прямые методы используются для описания понятий, которые характеризуются измеримыми свойствами, такими, как высота, рост, вес, объем. В этом случае удобно непосредственное задание значений степени принадлежности. К прямым методам можно отнести методы, основанные на вероятностной трактовке функции принадлежности $\mu_A(u) = P(A|u)$, т.е. вероятность того, что объект $u \in U$ будет отнесен к множеству, которое характеризуется понятием А.

Если задача такова, что эксперты могут работать как «надежные и правильные приборы», то их суждения о значениях функции принадлежности можно использовать непосредственно. Однако часто имеются искажения, обусловленные, например, субъективной тенденцией сдвигать оценки объектов в направлении концов оценочной шкалы. Следовательно, прямые измерения, основанные на непосредственном определении принадлежности, должны использоваться только в том случае, когда ошибки незначительны или маловероятны.

Косвенные методы основаны на более слабых предположениях о людях как «беспристрастных измерительных приборах». Рассмотрим, например, понятие «красота», которое, в отличие от понятий «длина» или «толщина» тяжело метризуется. Практически не существует универсальных элементарных измерений, определяющих красоту. В таком случае используются ранговые измерения при попарном сравнении объектов. Для косвенных методов целесообразно выполнение «условия безоговорочного экстремума», которое заключается в том, что при определении степени принадлежности множество исследуемых объектов должно содержать по крайней мере два объекта, одному из которых можно приписать $\mu = 0$, а другому $\mu = 1$. Косвенные методы более трудоемки, чем прямые, но их преимущество заключается в большей робастности, в большей устойчивости результатов по отношению к возможным вариациям мнений экспертов.

Итак, нами выделены две основные группы методов построения функции принадлежности: прямые и косвенные. Однако функция принадлежности может отражать как мнение одного эксперта, так и мнение группы экспертов. При этом методика построения также будет различаться. Таким образом, возможно выде-

лить четыре группы методов: прямые и косвенные для одного эксперта и прямые и косвенные для группы экспертов. Рассмотрим эти методы немного подробнее.

4.2.1. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОДНОГО ЭКСПЕРТА. МЕТОД СЕМАНТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Прямые методы для одного эксперта состоят в непосредственном назначении степени принадлежности для исследуемых объектов или непосредственном назначении функции, позволяющей вычислить эти значения. В начале этой темы нами был приведен пример функции принадлежности для обозначения нечеткого подмножества людей, относящихся к возрастной категории «старый». При этом предполагалось, что возраст человека может принимать любые значения из интервала $U = [0,100]$. Для людей моложе 50 лет $\mu = 0$. От значения $u = 50$ и далее функция принадлежности $\mu(u)$ плавно возрастает, стремясь к единице.

Отметим, что вид функции принадлежности для лингвистической переменной «старый» достаточно плавный. Это можно объяснить тем, что нет четкой конкретизации этого понятия: старый для чего, старый в каком смысле?

Метод семантических дифференциалов основан на идеи детализации недоопределенности. Практически для любого нечеткого понятия можно выделить множество непересекающихся свойств, оценка каждого из которых является нечеткой. Появляется множество шкал, характеризующих нечеткое понятие, а совокупность оценок по шкалам называется профилем понятия.

Алгоритм построения профиля понятия выглядит следующим образом:

- а) определяется список свойств, по которым оценивается понятие (объект);
- б) для каждого свойства формируется шкала, на краях которой расположены объекты с полярными проявлениями анализируемого свойства;
- в) в каждой выделенной шкале фиксируются «координаты» исследуемого объекта.

Рассмотрим в качестве примера задачу распознавания лиц.

Действуя в соответствии с указанным алгоритмом можно построить следующую таблицу

№	Наименование признака	Полярные края шкалы	Обозначение лингвистической переменной
1	высота лба	низкий (узкий) – широкий	x_1
2	профиль носа	горбатый – курносый	x_2
3	длина носа	короткий – длинный	x_3
4	разрез глаз	узкие – широкие	x_4
5	цвет глаз	темные – светлые	x_5

6	форма подбородка	остроконечный – квадратный	x_6
7	толщина губ	тонкие – толстые	x_7
8	цвет лица	темное (смуглое) – светлое (белое)	x_8
9	очертания лица	овальное - квадратное	x_9

Светлое, квадратное лицо, у которого чрезвычайно широкий лоб, курносый длинный нос, широкие светлые глаза и квадратный подбородок может быть определено как нечеткое множество $\{1|x_1, 1|x_2, \dots, 1|x_9\}$ или вектор $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Лицо, соответствующее вектору $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, полярно противоположно. Какое-либо конкретное лицо из полно множества может быть характеризовано набором $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0)$.

По существу здесь идет речь о рассмотрении нечеткого понятия как точки в n -мерном пространстве без определения в нем нормы. Размерность пространства – n задается числом выделенных непересекающихся свойств объекта исследования. Проблема нормировки такого пространства связана с оценкой «значимости» (каждого из выделенных признаков для формирования последующего понятия. Последнее можно учесть введением весовых коэффициентов, обозначающих «значимость» признака.

Проблемы возникают также и при выделении в n -мерном пространстве нечетких областей, характеризующихся интегральными признаками. В качестве упражнения читатель может рассмотреть, например, задачу о выделении подмножества «красивых лиц».

Другой способ, близкий к методу семантических дифференциалов, но более математически формализованный, заключается в следующем.

Пусть K есть некоторое покрытие дискретного множества U , т.е. K есть совокупность $\{A_i\}, i = \overline{1, k}$ подмножеств множества U таких, что $A_i \neq \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^k A_i = U$.

В частном случае, когда $\{A_i\}$ есть совокупность попарно не пересекающихся множеств, K есть разбиение U .

Рассмотрим некоторое обычное множество $B \subseteq U$. Его можно интерпретировать как нечеткое подмножество покрытия K с функцией принадлежности

$$\mu_B(A_i) = \frac{|A_i \cap B|}{|A_i \cup B|}, \text{ где } |A| \text{ - число элементов в } A.$$

Поясним сказанное примером. Пусть $U = \{1, 2, \dots, 9\}$, а

$$K = \{\{1,3,5\}, \{3,6,9\}, \{2,4,8\}, \{1,3,7\}, \{2,3,8\}\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}.$$

Множество B задается следующим образом: $B = \{2,3,5,9,8\}$.

Тогда $\mu_B(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \mu_B(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \dots, \mu_B(A_5) = \frac{3}{5}$, а само B как нечеткое подмножество K можно записать в виде

$$B = \left\{ \frac{1}{2} A_1, \frac{1}{3} A_2, \frac{1}{3} A_3, \frac{1}{7} A_4, \frac{3}{5} A_5 \right\}$$

или как набор значений частичной принадлежности

$$\mu_B = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{3}{5} \right\}$$

4.2.2. КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОДНОГО ЭКСПЕРТА

В практике часто имеют место случаи, когда трудно выделить элементарные признаки, являющиеся составляющими анализируемого понятия. Примерами могут служить такие лингвистические переменные как интеллектуальность, доброта, красота и т.д. Создание шкал для таких понятий – дело не благодарное. Однако, если универсальное множество на котором определяется нечеткое подмножество, соответствующее анализируемому понятию, конечно, то можно говорить об интенсивности принадлежности исходя из попарных сравнений элементов. Ясно, что для пары элементов можно ответить на вопрос: одинаково ли они красивы, либо один красивее другого.

Если бы значения степени принадлежности были бы известны, например, $\mu_s(u_i) = \omega_i, i = \overline{1, n}$, то попарные сравнения можно представить матрицей отношений $\hat{A} = \|\|a_{ij}\|\|$, где $\|\|a_{ij}\|\| = \omega_i / \omega_j$. Нетрудно видеть, что имеет место соотношение:

$$\hat{A}\vec{\omega} = n\vec{\omega}, \quad (88)$$

где $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$.

Таким образом, n – число элементов универсального множества, является также собственным значением матрицы \hat{A} . Доопределяя вектор $\vec{\omega}$ условием нормализации $\sum_i \omega_i = 1$, получаем возможность восстановления всех его компонент.

В реальной ситуации все компоненты матрицы \hat{A} получаются эмпирическим способом и поэтому неточны. Для улучшения согласованности оценок предполагается, что $\tilde{a}_{ij}\tilde{a}_{jk} = \tilde{a}_{ik}, \tilde{a}_{ik} = \frac{\tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}_k}$. Отсюда следует, что диагональные элементы тождественно равны единице, а симметричные относительно диагонали удовлетворяют соотношению $\tilde{a}_{ij} = 1/\tilde{a}_{ji}$.

Нормализованный вектор $\tilde{\omega}$ может быть найден как решение задачи на собственные значения, собственные векторы для матричного оператора \hat{A} :

$$\hat{A}\tilde{\omega} = \tilde{\lambda}\tilde{\omega} \quad (89)$$

Из спектра собственных значений $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i=1}^n$ задачи (89) следует выбрать максимальный элемент $\tilde{\lambda}^*$, что соответствует собственному значению $\lambda^* = n$ для задачи (88). Остальные собственные значения равны нулю. Это связано с тем, что

$$\hat{A} = \hat{T} \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \hat{T}^{-1}$$

$$Sp\hat{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = n$$

$$Sp\hat{A} = Sp\hat{T} \cdot Sp \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cdot Sp\hat{T}^{-1} = Sp \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

т.е. $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ и $\lambda^* = n$.

В общем случае в задаче (89) $\tilde{\lambda}^* \neq n$ и отклонение $\delta = |\tilde{\lambda}^* - n|$ рассматривается как мера правильности результата.

При формировании оценок попарных сравнений, обычно, эксперта просят отобразить свое ощущение или опыт следующим образом:

а) установить какой из пары предлагаемых элементов в большей степени удовлетворяет анализируемому понятию;

б) оценить восприятие интенсивности различия в виде ранга важности по определенной ранговой шкале.

4.2.3. ПРЯМЫЕ И КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ГРУППЫ ЭКСПЕРТОВ

Субъективизм в оценке функции принадлежности, определяемой одним экспертом, и порождаемые этим обстоятельством погрешности могут быть уменьшены при использовании группы экспертов.

Так при интерпретации степени принадлежности как вероятности предлагается получить функции принадлежности для нескольких классов понятий, S_j расчетным путем, используя равенство $\mu_{s_j}(u_i) = P(s_j | u_i)$, где условная вероятность определяется по формуле Байеса

$$P(s_j | u_i) = \frac{P_{u_i}(s_j)P(u_i | s_j)}{\sum_{j=1}^m P_{u_i}(s_j)P(u_i | s_j)},$$

причем $P_{u_i}(s_j) = \frac{(y_j)_{u=u_i}}{n}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$,

y_j - число случаев при значении параметра u_i , когда верной оказалась j -ая гипотеза.

Другим подходом к оценке функции принадлежности для группы экспертов может служить следующая методика. Первоначально определяется то максимальное количество классов, которое может быть описано данным набором параметров. Для каждого элемента и значение функции принадлежности класса s_1 дополняет до единицы значения функции принадлежности класса s_2 (в случае двух классов). Таким образом, система классов должна состоять из классов, представляющих противоположные события. Сумма значений принадлежности произвольного элемента u к системе таких классов будет равна единице. Если число классов и их состав четко не определены, то необходимо вводить условный класс, включающий те классы, которые не выявлены. Далее эксперты оценивают в процентах в данном состоянии u степень проявления каждого класса из названного перечня.

В некоторых случаях мнение эксперта трудно выразить в процентах, поэтому более приемлемым способом оценки функции принадлежности будет метод опроса, состоящий в следующем. Оцениваемое состояние предъявляется большому числу экспертов. Каждый эксперт имеет один голос. Он должен однозначно отдать предпочтение одному из классов заранее известного перечня. Значение функции принадлежности вычисляется в соответствии с формулой $\mu_s(u) = n_s/n$, где n – число экспертов, проголосовавших за класс S .

Из множества косвенных методов для группы экспертов приведем в качестве примера следующий.

Пусть E – универсальное множество, S – понятие, общее название группы элементов. Задача определения нечеткого подмножества E , описывающего понятие S , решается путем опроса экспертов. Каждый эксперт $\mathcal{E}_i (i = \overline{1, m})$ выделяет из E множество элементов Q^i по его мнению, соответствующих понятию S . Ранжируя все элементы множества $Q = \bigcup_{i=1}^m Q^i$ по предпочтению в смысле соответствия понятию S каждый эксперт упорядочивает Q , используя отношения порядка \succ , или \succsim , или \sim . Отношение \sim указывает на одинаковую степень предпочтения

между элементами $q_\alpha, q_\beta \in Q$. Предполагается, что эксперты могут поставить коэффициенты степени предпочтения γ перед элементами в упорядоченной последовательности, усиливая или ослабляя отношение предпочтения. Вводится расстояние между элементами указанной последовательности $q_\alpha^i, q_\beta^i \in Q$:

$$\rho(q_\alpha^i, q_\beta^i) = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=\alpha}^{(\beta-1)} \gamma_{j+1} \cdot \rho(q_j^i, q_{j+1}^i), \quad (90)$$

где

$$\rho(q_l, q_{l+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } q_l \succ q_{l+1} \\ 1/2, & \text{если } q_l \gtrsim q_{l+1} \\ 0, & \text{если } q_l \sim q_{l+1} \end{cases}$$

Здесь α и β - порядковые номера элементов в упорядочении, i - номер эксперта ($i = \overline{1, m}$).

Расстояние вычисляется через первый в упорядочении элемент:

$$\rho(q_\alpha^i, q_\beta^i) = \rho(q_1^i, q_\beta^i) - \rho(q_1^i, q_\alpha^i) = \rho_\beta^i - \rho_\alpha^i.$$

Эта разность показывает насколько Q_α^i предпочтительнее по сравнению с Q_β^i . При решении задачи взвешивания предпочтительности элементов множества Q предполагается, что разность между весами $\varphi(q_\beta^i) - \varphi(q_\alpha^i)$ пропорциональна разности $\rho_\beta^i - \rho_\alpha^i$.

$$\varphi(q_{\alpha+v}^i) - \varphi(q_\alpha^i) = C \cdot [\rho_{\alpha+v}^i - \rho_\alpha^i] \quad (91)$$

Когда $v = 1$ формула (4) превращается в рекуррентную, и задача сводится к определению веса последнего элемента. При использовании рекуррентных формул вес последнего элемента должен отличаться от нуля. Например, в качестве $\varphi(q_1^i)$ можно выбрать величину $\max_\alpha \rho_\alpha^i + \rho_0$. На основании всех $\varphi(q_\alpha^i)$ ($i = \overline{1, m}$)

для q_α определяется значение $\varphi(q_\alpha) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varphi(q_\alpha^i)$, что и принимается за степень

принадлежности элемента $q \in E$ нечетному множеству с общим названием S .

5. ВВЕДЕНИЕ В ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Как уже отмечалось ранее, бурный прогресс в области компьютерных технологий стимулировал активное проникновение идей математического моделирования в различные сферы интеллектуальной деятельности человека. Объединение новых информационных технологий, возникших на базе ЭВМ, с описанным выше

традиционным подходом математического моделирования значительно трансформировал представления о том, что следует понимать под имитационным программированием. Первоначально возникнув как способ вычисления интересующих исследователя усредненных параметров некоторого сложного случайного процесса с помощью набора его реализаций, имитируемых на ЭВМ, имитационное моделирование трактуется сейчас в расширенном смысле как решение задач прогноза на моделях, характеризующихся такими свойствами как сложность, наличие случайных факторов, включение экзогенных управлений (задаваемых человеком).

Весь процесс имитационного моделирования распадается на две части – построение имитационной модели и ее реализация на ЭВМ. Последняя предполагает наличие некой совокупности инструментов. Структура этой совокупности подразделяется на два класса. Первый – «hardware» - жесткие средства, т.е. ЭВМ и сопутствующая аппаратура. Ко второму классу относят «software» - средства программного обеспечения.

Структура этого последнего класса настоящий момент содержит четыре уровня. Самый нижний – программирование в кодах, автокоды, машинно-ориентированные языки, операционные системы.

Следующий уровень - алгоритмические языки высокого уровня и соответствующие системы программирования.

Третий уровень образуют алгоритмические языки моделирования.

К четвертому уровню относят интегрированные системы имитационного моделирования. Такие системы используются как инструменты при разработке проблемно-ориентированных имитационных систем, в рамках которых осуществляются имитационные эксперименты, связанные с изучением и прогнозированием поведения конкретных моделей.

Интегрированные инструментальные системы имитационного моделирования содержат язык имитационного моделирования, средства для организации банка данных и системы управления банками данных, средства для обработки и визуализации результатов моделирования.

Здесь мы ограничимся сказанным, лишь слегка очертив круг вопросов, включаемых в современное понятие *имитационные системы моделирования* (средства компьютерной реализации модели).

Первый этап имитационного моделирования – построение имитационной модели – лишь в нюансах выделяется внутри общей идеологии построения математических моделей. Для более полного понимания концепции современного имитационного моделирования полезно познакомиться с его истоками.

5.1. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО. НАЧАЛО ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Метод Монте-Карло получил свое название по имени города, известного своими игорными заведениями. Это *метод статистических испытаний* т.е. численный метод, основанный на моделировании случайных величин и построении статистических оценок для искомых величин. Принято считать, что метод возник в 1949 г., когда в связи с работами по созданию ядерных реакторов Дж. Нейман и С. Улам предложили использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ.

Моделирование случайных величин. Как правило, в основе такого моделирования лежит преобразование одного или нескольких независимых значений случайного числа α , равномерно распределенного на отрезке $[0,1]$. Моделирование последовательности «выборочных» значений α обычно реализуют на ЭВМ с помощью специальных алгоритмов, среди которых наибольшее распространение получил т.н. *метод вычетов*. Его можно представить, например, в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_0, U_n &= U_{n-1} \cdot 5^{2^{p+1}} \pmod{2^m} \\ \alpha_n &= U_n \cdot 2^{-m} \end{aligned} \quad (92)$$

Здесь m - число разрядов мантииссы ЭВМ, а

$$p = \max\{q : 5^{2^{q+1}} < 2^m\}$$

Числа такого типа называются псевдослучайными. Длина перехода для указанного варианта метода вычетов равна 2^{m-2} .

Обсудим теперь задачу формирования *случайных величин с заданным законом распределения*. К стандартным методам здесь следует отнести в первую очередь *метод обратных функций*. Его идея основывается на следующем утверждении, известном из курса теории вероятностей.

Если непрерывная случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей $f_\xi(\theta)$, то распределение случайной величины

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\xi} f_\xi(\theta) d\theta = F(\xi) \quad (93)$$

Является равномерным на интервале $[0,1]$.

На основе этой теоремы получаем следующее правило. Для того, чтобы найти возможное значение ξ : реализацию непрерывной случайной величины ξ , зная ее плотность вероятности $f_\xi(\theta)$, надо выбрать случайное число $\alpha_i \in [0,1]$ и решить относительно ξ_i уравнение

$$\alpha_i = \int_{-\infty}^{\xi_i} f_\xi(\theta) d\theta = F(\xi_i) \quad (93a)$$

Последнее возможно в том случае, если $F(\xi)$ - монотонно возрастающая функция. В этом случае решение (83а) можно записать в виде

$$\xi_i = F^{-1}(\alpha_i) \quad (94)$$

Необходимо реализовать на ЭВМ последовательность случайных чисел, являющихся реализацией случайной величины, распределенных по экспоненциальному закону.

$$f_{\xi}(\theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\theta} & \text{при } \theta \geq 0 \\ 0 & \text{при } \theta < 0 \end{cases}$$

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_{\xi}(\theta) d\theta = \int_0^{\xi} f_{\xi}(\theta) d\theta = 1 - e^{-\lambda\xi} \quad (95)$$

Здесь λ - параметр распределения ($\lambda > 0$).

Фактически здесь требуется найти формулу для моделирования случайной величины ξ с помощью равномерно распределенной случайной величины α .

Подставляя в (93а) явный вид $F(\xi)$ из (95), конкретизируем для нашего случая вид соотношения (94):

$$\xi_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \alpha_i) \quad (96)$$

Учитывая, что случайная величина $\beta = (1 - \alpha)$ имеет также как и α равномерный закон распределения на отрезке $[0,1]$, окончательно получаем

$$\xi_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \alpha_i \quad (96a)$$

Алгоритмы метода Монте-Карло можно использовать для оценки многократных интегралов. Пусть, например, необходимо оценить интеграл

$$Y = \int h(x) dx \quad (97)$$

в евклидовом s -мерном пространстве X ($x \in X$).

Рассмотри непрерывную многомерную случайную величину $\xi = \{\xi_i\}_1^s$, характеризуемую плотностью распределения $f_{\xi}(x)$, отличной от нуля в области интегрирования (87). Тогда оцениваемый интеграл можно переписать в виде

$$Y = \int f_{\xi}(x) \left[\frac{h(x)}{f_{\xi}(x)} \right] dx \quad (97a)$$

В такой записи Y можно рассматривать как среднее значение функции $\Phi = \frac{h}{f_{\xi}}$ случайной величины ξ . Моделируя ξ методом обратных функций можно получить N выборочных значений x_1, \dots, x_N . В смысле закона больших чисел можно записать

$$Y \approx Y_N = \frac{\sum_{k=1}^N \Phi(x_k)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h(x_k) / f(x_k) \quad (98)$$

Одновременно можно оценить среднеквадратичную погрешность Y_N , т.е. величину $\tau_N = (D[\Phi] / N)^{1/2}$, и приближенно построить подходящий доверительный интервал для Y .

Учитывая определенный произвол в выборе плотности распределения $f_{\xi}(x)$, можно поставить вопрос о получении оценки интеграла с возможно меньшей дисперсией. Например, если

$$0 < m_1 \leq h/f \leq m_2 < \infty,$$

то $D[\Phi] \leq (m_2 - m_1)^2 / 4$, в случае $f = h/Y$ имеем $D[\Phi] = 0$.

Метод Монте-Карло находит применение и в более сложных задачах, таких, как например, решение интегральных уравнений 2-го рода.

Пусть необходимо оценить линейный функционал $Y_h = (\varphi, h)$, где $\varphi = K \cdot \varphi + f$. Полагаем, что для интегрального оператора K с ядром $k(x', x)$ выполняется условие, обеспечивающее сходимость ряда Неймана: существует $n_0 \in N$ такое, что для любого $n > n_0$ выполняется $\|K^{n_0}\| < 1$.

Вводится последовательность Маркова $\{x_n\}$ с начальной плотностью распределения $\bar{\omega}(x)$ и одношаговой переходной плотностью вероятности $\pi(x, x') = P(x' \rightarrow x)$. Вероятность обрыва цепи в точке x' равна

$$g(x') = 1 - \int \pi(x, x') dx,$$

а N - случайный номер последнего состояния.

Далее определяется функционал от траектории цепи, математическое ожи-

дание которого равно Y_h . Чаще всего используются т.н. оценки по столкновениям

$$\xi = \sum_{n=0}^N Q_n \cdot h(x_n),$$

$$\text{где } Q_0 = \frac{f(x_0)}{\bar{w}(x_0)}, Q_n = Q_{n-1} \frac{k(x_{n-1}, x)}{\pi(x_n, x_{n-1})}.$$

Если $\pi(x, x') \neq 0$ при $k(x', x) \neq 0$ и $\bar{w}(x) \neq 0$ при $f(x) \neq 0$, то имеет место соотношение

$$M[\xi] = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f, h) = (\varphi, h) = \int \varphi(x) h(x) dx \quad (99)$$

Возможность достижения малой дисперсии в знакопостоянном случае следует из утверждения:

$$\text{Если } \bar{w}(x) = \frac{f(x) \cdot \varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)} \text{ и } \pi(x, x') = \frac{k(x', x) \varphi^*(x)}{[K^* \varphi^*](x')}, \text{ где } \varphi^* = K^* \varphi^* + h,$$

то $D[\xi] = 0$, а $M[\xi] = Y_h$.

Моделируя подходящую цепь Маркова на ЭВМ, получают статистические оценки линейных функционалов от решения интегрального уравнения 2-го рода. Это дает возможность и локальной оценки решения на основе представления:

$$\varphi(x) = (\varphi, h_x) + f(x), \quad (100)$$

$$\text{где } h_x(x') = k(x', x).$$

5.2 ЭВОЛЮЦИЯ СОДЕРЖАНИЯ ТЕРМИНОВ “ИМИТАЦИЯ”, “ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ” И ИХ СОВРЕМЕННОЕ ПОНИМАНИЕ

Термин «имитация» возник первоначально при исследовании стохастических моделей. Им было принято называть приближенный способ вычисления статистических характеристик сложных случайных процессов, основанный на наборе статистики путем многократного воспроизведения (имитации) соответствующих процессов на достаточно подробной математической модели с использованием ЭВМ.

Вскоре после начала использования методов прикладной математики в управлении экономикой, планировании, исследовании операций термины «имита-

ция, «имитационный эксперимент» приобрели в этих областях смысл, отличающийся от приведенного выше. Для специалистов в области управления, планирования, проектирования термин «имитация» несет смысловую нагрузку противопоставления термину «оптимизация», т.е. в этой сфере имитационной принято называть такую модель управляемого процесса, в рамках которой не предполагается ставить и решать задачи математического программирования (оптимизационные или игровые).

Напомним, что *математическое программирование* состоит в том, что разрабатывается математическая модель процесса, связывающая его внутренние (эндогенные) характеристики и влияющие на него «внешние» (экзогенные) факторы, в числе которых находится и управление, и ставится задача (задача математического программирования) на определение таких управлений процессом, которые доставляют экстремум некоторому функционалу, характеризующему качество управления.

Если исследуемый процесс таков, что на него могут влиять несколько лиц (игроков), то формулировка для каждого из них к постановке теоретико-игровой задачи.

Отметим, что вскоре выяснилась ограниченность оптимизационных моделей, поскольку в них невозможно учесть все, что необходимо учитывать при принятии практических решений. Другими словами у оптимизационных задач для реальных сложных систем возникают проблемы с адекватностью.

Сопоставление оптимизационных задач с реальным содержанием задач планирования, управления, проектирования приводило к попыткам улучшить модели, лежащие в основе оптимизационных задач, что влекло за собой их усложнение, появление вместо одного критерия оптимальности нескольких или же вообще отказ от оптимизации в рамках усложнившихся моделей и использование их в режиме вариантных расчетов с задаваемыми извне модели вариантами планов (управлений). Поскольку в этих усложненных моделях присутствовали, как правило, случайные факторы, то получение обоснованных результатов требовало вычисления статистических характеристик, т.е. имитации в том смысле, в котором ее понимают в теории вероятностей и математической статистике.

Таким образом, *имитационная модель* – это модель, обладающая качествами из следующего набора: «сложность» модели, наличие в ней случайных факторов, описание процесса, развивающегося во времени, невозможность получения результатов без ЭВМ, предназначенность модели для использования ее в режиме вариантных расчетов, т.е. для сравнения путем выполнения имитационных экспериментов, заданных заранее, «извне модели» вариантов планов, управлений, конструкций.

Ни одно из перечисленных качеств не является обязательным для того, чтобы именовать модель имитационной.

В западной научной литературе термин «имитация», «имитационное моделирование» соответствует слову «simulation». Этот термин Т Нейлор определяет как численный метод проведения на ЭВМ экспериментов с математическими моделями, описывающими поведение сложных систем в течение продолжительных периодов времени.

Р. Шеннон определил этот термин как процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью понять поведение системы либо оценить (в рамках ограничений, накладываемых некоторым критерием или совокупностью критериев) различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
1. Основные этапы технологии математического моделирования.....	5
1.1. Цель моделирования и построение содержательной модели.....	5
1.1.1. Формулировка задачи и конкретизация цели исследования.....	5
1.1.2. Анализ исследуемой системы и ее декомпозиция.....	6
1.1.3. Содержательные модели и их иерархия.....	8
1.2. Математическая формализация содержательной модели. Математическая модель.....	11
1.3. Исследование математической модели.....	12
1.4. Анализ полученных результатов и коррекция модели.....	15
2. Математическая модель.....	17
2.1. Определение понятия математической модели.....	17
2.2. Требования к математической модели.....	19
2.3. Понятие состояния системы.....	24
3. Классификация математических моделей.....	27
3.1. Различные подходы к классификации математических моделей.....	27
3.2. Функциональные и структурные модели.....	29
3.3. Дискретные и непрерывные модели.....	31
3.4. Динамические и статические модели. Квазистатическое приближение..	38

3.5. Детерминированные и стохастические модели.....	41
3.6. Линейные и нелинейные модели. Процедура линеаризации.....	48
3.6.1. Линейные модели. Коррекция декомпозиции.....	49
3.6.2. Нелинейные модели. Процедура линеаризации.....	54
4. Нечеткие модели.....	59
4.1. Нечеткие множества.....	60
4.1.1. Простейшие операции над нечеткими множествами.....	61
4.1.2. Метрика в пространстве нечетких множеств.....	62
4.2. Методы построения функции принадлежности.....	64
4.2.1. Прямые методы для одного эксперта. Метод семантических дифференциалов.....	66
4.2.2. Косвенные методы для одного эксперта.....	68
4.2.3. Прямые и косвенные методы для группы экспертов.....	70
5. Введение в имитационное моделирование.....	72
5.1. Метод Монте-Карло. Начало имитационного моделирования.....	73
5.2. Эволюция содержания терминов «имитация, «имитационная модель» и их современное понимание.....	77