МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКА АКАДЕМІЯ НАРОДНОГО ГОСПОДАРСТВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ПІДРУЧНИК

За редакцією Шинкарика М.І.

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Тернопіль 2003

ББК 22.11 К 517
В 41

Рецензенти: **Дмитро Ількович Боднар**, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри автоматизованих систем і програмування Тернопільської академії народного господарства,
Михайло Павлович Ленюк, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри диференціальних рівнянь математичного факультету Чернівецького національного університету.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист №1/11-1992 від 19.05.2003

В 41 Вища математика: Підручник / **Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І.** –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с. - ISBN 966-7946-15-0

Підручник "Вища математика" містить теоретичні відомості всіх розділів вищої математики, рекомендованих типовою навчальною програмою Міністерства освіти і науки України для економічних спеціальностей. Виклад теоретичного матеріалу послідовний і розкриває зміст кожного поняття, його прикладне значення. Представлено достатню кількість розв'язаних задач як математичного так і економічного змісту.

Підручник написаний для студентів економічних спеціальностей вузів, може бути корисний для аспірантів, викладачів, економістів-практиків.

ББК 22.11

ISBN 966-7946-15-0

З усіх мов світу найкраща мова штучна, вельми стисла мова, мова ***математики*** *”*

М. Лобачевський

Передмова

Даний підручник написаний колективом кафедри вищої математики Тернопільської академії народного господарства на основі багаторічного досвіду викладання вищої математики студентам економічних спеціальностей різних форм навчання.

В книзі викладені необхідні основи математичного апарату і приклади його використання в сучасній економічній науці: елементи лінійної алгебри, аналітична геометрія, математичний аналіз функцій однієї і багатьох змінних, теорія диференціальних і різницевих рівнянь, числових і степеневих рядів. Такий об’єм математичних знань і навичок актуальний для економістів і є фундаментальним для вивчення теорії імовірності і математичної статистики, економетрії, теорії оптимального управління, мікро- і макроекономіки. Велика кількість типових розв’язаних задач, в тому числі економічного характеру, в кожному розділі дає можливість краще засвоїти теоретичний матеріал. Автори багато уваги приділили розв’язуванню економічних задач, роз’ясненню і розумінню студентами основних економічних понять: еластичності попиту і пропозиції, середніх і маржинальних витрат, доходів і прибутків, швидкості зростання інвестованого капіталу і т. д..

Сучасна математика інтенсивно проникає у всі сфери діяльності людини, об’єктивно відображаючи універсальні закони оточуючого світу. Сьогодні інтелектуал, прагнучи мати доступ до світової науки, зробити особистий внесок в її розвиток, вдосконалити своє логічне і абстрактне мислення, творчо і розумно користуватись комп’ютерною технікою, навіть тоді, коли йдеться про пошук у галузі гуманітарних наук, повинен знати математичні дисципліни, володіти математичною культурою. Інколи математична культура ближча до науки, інколи до мистецтва; вона може бути і дотичною до них.

Економіка, як наука про об’єктивні причини функціонування і розвитку суспільства, характеризується різними кількісними співвідношеннями певних показників.

Сучасна економіка використовує широкий спектр математичних методів для знаходження аналітичних зв'язків між економічними процесами.

Математика – одна з найдревніших наук і розвивалася в атмосфері впливу геніїв світової науки: Декарта, Паскаля, Ферма, Гюйгенса, Ньютона, Лейбніца, Ейлера, Лежандра, Лобачевського, Чебишева, Колмогорова і інших. Їх математичний доробок накреслив неписаний план для роботи кількох наступних поколінь математиків.

Імена українських вчених займають гідне місце в історії розвитку математики: М.В.Остроградський (1801–1861), В.Й. Левицький (1872 – 1956), Г.Ф. Вороний (1868 – 1908), М.О. Зарицький (1889–1961), М.А.Чайковський (1887–1970), М.П.Кравчук (1892–1942), М.М.Боголюбов (1909–1992), В.М.Глушков (1923–1982) і інші. Кожний з них був яскравою зіркою на небосхилі математичної науки. Багато праць українських вчених математиків стосувалися прикладних проблем, розв'язуванню конкретних задач фізики, механіки, економіки.

Серед названої плеяди українських математиків, науковців з світовим іменем, варто назвати випускника фізико – математичного факультету Харківського університету, відомого в майбутньому економіста М.І.Туган-Барановського, відомого економіста, математика Є.Є.Слуцького. Саме вони математичними методами розв'язували фундаментальні задачі економіки.

Вивчення математичних дисциплін і їх застосування в економічній науці дозволить майбутньому спеціалістові не тільки одержати необхідні базові навички в економіці, але й творчо переосмисливши їх, сформувати своє бачення професійної діяльності.

Математика у свідомості студентів, магістрів, аспірантів та й самих викладачів, управлінських працівників повинна бути не просто стрункою системою знань, що відірвана від життєвих завдань суспільства, а повноправним методом дослідження, нерозривно зв'язаним із проблемами управління технічними і економічними процесами, проблемами найефективнішого використання природних та економічних ресурсів, могутньою зброєю пізнання навколишнього світу.

В Україні на вагу золота повинні цінуватися ті спеціалісти, які досконало оволоділи елементами прикладної математики і не є вузькими ремісниками, а творцями у своїй справі. Такому спеціалістові, поряд з математикою, потрібні й глибокі знання предметної галузі.

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§1. Поняття визначника. Визначники другого і третього порядків

Розв'язування багатьох економічних задач зводиться до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. В основі деяких методів розв'язування таких систем використовуються вирази, які називаються визначниками (або детермінантами).

Розглянемо квадратну таблицю з n^2 чисел, розміщених в n-горизонтальних і n-вертикальних рядах. За спеціальними правилами знаходиться число, яке називають **визначником n -го порядку** і позначають буквою $"\Delta"$ грецького алфавіту:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Числа $a_{ij}\,(i = 1,2,...,n,\ j = 1,2,...,n)$ - називають **елементами** визначника. Перший індекс вказує номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент. Елементи, в яких обидва індекси однакові (тобто елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$) утворюють **головну діагональ** визначника. Інша діагональ називається **неголовною (допоміжною)**. **Порядок** визначника визначає кількість його рядків (або стовпців).

При обчисленні визначників n-го порядку одержуємо число, яке дорівнює алгебраїчній сумі всіх можливих добутків його елементів, взятих по одному з кожного з n рядків і кожного із n стовпців. При цьому половина доданків мають свої знаки, а інша - протилежні.

Покажемо, як обчислюються визначники другого і третього порядків. Для уточнення поняття "визначник" розглянемо два лінійних рівняння з двома невідомими з буквеними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Для розв'язування цих рівнянь ми повинні помножити їх на відповідні коефіцієнти, при яких виключається одне з невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \left| \begin{matrix} a_{22}, -a_{21} \\ -a_{12}, a_{11} \end{matrix} \right.$$

В залежності від використаної пари множників (по вертикалі) виключаємо або x_1 або x_2 і отримаємо такі рівняння:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Звідси

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Ці вирази мають зміст тільки при умові, якщо знаменник не дорівнює нулю.

Якщо, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$ то система рівнянь або немає розв'язку , або має нескінченну множину розв'язків. Коефіцієнти при невідомих утворюють вирази, які називаються визначниками.

Розглядаючи ці коефіцієнти, ми бачимо, що вони однакові при обох невідомих; складаються з двох добутків,кожний з яких включає два елементи.

Визначники другого порядку символічно позначаються так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Визначником другого порядку називається число, яке дорівнює різниці добутків елементів головної і допоміжної діагоналей, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Це ілюструється схемою: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \bullet \\ \bullet & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & a_{12} \\ a_{21} & \bullet \end{vmatrix}.$

Приклад 1. Обчислити визначник другого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}.$

Розв'язування. За попередньою формулою знаходимо:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - (-3) \cdot 7 = 6 + 21 = 27.$$

Визначником третього порядку називається число, яке знаходиться за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Знаки, які стоять перед кожним із доданків, слід вибирати з такої схеми:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{22} & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & a_{12} & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{23} \\ a_{31} & \bullet & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{13} \\ a_{21} & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{32} & \bullet \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & a_{13} \\ \bullet & a_{22} & \bullet \\ a_{31} & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & a_{12} & \bullet \\ a_{21} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{23} \\ \bullet & a_{32} & \bullet \end{vmatrix}.$$

Це правило обчислення визначників 3-го порядку називається **правилом трикутників**. Тут доданки із знаком “+” є добутками елементів, які стоять на головній діагоналі визначника a_{11}, a_{22}, a_{33} і добутки елементів, які стоять у вершинах трикутників з основами паралельними головній діагоналі a_{12}, a_{23}, a_{31} і a_{13}, a_{21}, a_{32}. Із знаком “-” беруться доданки, які є добутками елементів неголовної діагоналі a_{13}, a_{22}, a_{31} і добутки елементів вершин трикутників із основами, паралельними цій діагоналі визначника: a_{12}, a_{21}, a_{33} і a_{11}, a_{23}, a_{32}.

Приклад 2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

Розв’язування. Користуючись правилом трикутників,

одержимо $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot(-4) + (-2)(-3)\cdot 5 + 1\cdot 2\cdot 0 - 0\cdot 4\cdot 5 -$

$$-(-2)\cdot 1\cdot(-4) - (-3)\cdot 2\cdot 3 = -48 + 30 + 0 - 0 - 8 + 18 = -8.$$

Правило трикутників легко запам’ятати, якщо дописати поряд з визначником перший, а потім другий його стовпці. Добутки елементів, які знаходяться на діагоналях, відмічених на схемі суцільними лініями, беруться із знаком “+”, а добутки елементів, які знаходяться на діагоналях, позначених на схемі пунктиром, із знаком “-”. Алгебраїчна сума цих шести добутків і дає значення визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}.$$

Такий спосіб обчислення визначника третього порядку називається **правилом Саррюса.**

Обчислимо попередній визначник 3-го порядку за правилом Саррюса.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{matrix} = 3\cdot 4\cdot(-4)+(-2)(-3)\cdot 5+0\cdot 1\cdot 2-0\cdot 4\cdot 5-$$

$$-3\cdot(-3)\cdot 2-(-2)\cdot 1\cdot(-4)=-48+30+0-0+18-8=-8.$$

При обчисленні визначників використовують їх властивості, які розглядаються в наступному параграфі.

Зауваження. Визначником першого порядку є число, яке дорівнює цьому елементу, тобто $|a_{11}| = a_{11}$. Тому не слід плутати позначення визначника з модулем самого числа.

§ 2. Властивості визначників

Визначники довільного порядку мають ряд властивостей.

Властивість 1. Якщо у визначнику поміняти місцями рядки на стовпці, то величина визначника не зміниться:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Для визначника другого порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Заміну у визначнику рядків на відповідні стовпці називають **транспонуванням** визначника.

Приклад 1. Перевіримо справедливість властивості на прикладі визначника третього порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -20-4+0+6-0-24=-42.$$

Поміняємо місцями рядки на стовпці:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -20-4+0+6-0-24=-42.$$

Отже, величина визначника не змінюється при його транспонуванні, тобто його рядки і стовпці рівноправні.

Властивість 2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (або стовпці), то він змінить тільки знак, не змінюючи абсолютної величини.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Поміняємо місцями рядки у визначнику другого порядку: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$

Приклад 2. Поміняємо місцями перший і третій рядки визначника третього порядку із прикладу 1.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6+24+0+20-0+4=42.$$

Отже, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix},$

тобто має місце властивість 2.

Властивість 3. Якщо у визначнику всі елементи довільного рядка (або стовпця) дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-ий рядок} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 .$$

Доведення. Доведення цієї властивості очевидне, оскільки при обчисленні визначника всі доданки містять нульові множники i -го рядка. Тому і сам визначник дорівнює нулю.

Властивість 4. Якщо у визначнику є два однакові рядки (або стовпці), то визначник дорівнює нулю.

Доведення. Для доведення цієї властивості поміняємо місцями i -ий і $k-$ий рядки. З однієї сторони величина визначника не зміниться (оскільки однакові рядки) , а з другої – зміниться знак на протилежний (згідно з властивістю 2). Якщо позначити величину визначника через Δ, то одержимо рівність $\Delta = -\Delta$, тобто $2\Delta = 0$, а значить $\Delta = 0.$

Приклад 3. Визначник третього порядку дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 15 - 12 + 15 - 10 = 0,$$

оскільки він має два однакові стовпці.

Властивість 5. Якщо всі елементи довільного рядка (або стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Нехай всі елементи i -го рядка визначника мають спільний множник λ. Оскільки визначник дорівнює сумі добутків елементів, в т.ч. з розглянутого i -го рядка, то λ можна винести з цієї суми за дужки. Якщо записати вираз в дужках у вигляді визначника, то одержимо попередню рівність.

Наслідок. Якщо довільний рядок (або стовпець) визначника помножити на число λ, то величина визначника зміниться в λ раз.

Зокрема, якщо елементи, наприклад, першого рядка визначника другого порядку мають спільний множник “λ”, то

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Приклад 4. У визначнику третього порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -12 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 144 - 48 + 24 - 128 - 72 = -48$$

елементи першого і другого рядків мають спільні множники “2” і “4”, тому їх можна винести за знак визначника

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 8 & 4 & -12 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 8(4 + 18 - 6 + 3 - 16 - 9) = -48$$

Властивість 6. Якщо у визначнику елементи одного рядка (або стовпця) пропорційні відповідним елементам іншого рядка (або стовпця), то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нехай елементи i -го і k -го рядків пропорційні. За властивістю 5 постійний множник пропорційності λ можна винести за знак визначника. При цьому одержимо добуток числа λ на визначник з двома однаковими рядками, який дорівнює нулю (за властивістю 4).

Приклад 5. Визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -30+36-0+0+30-36=0,$$

тому що перший і другий рядки пропорційні.

Властивість 7. Якщо у визначнику всі елементи довільного рядка (або стовпця) є сумою двох доданків, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників. При цьому елементи розглянутого рядка (або стовпця) в першому визначнику є першими доданками, а елементи відповідного рядка (або стовпця) другого визначника - другими доданками:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Доведемо справедливість цієї властивості на прикладі визначника другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11})a_{22} - (a_{12}+b_{12})a_{21} =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Приклад 6. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -30+4+0+0-16-9=-51.$$

Елементи, наприклад, другого рядка можна представити у вигляді суми двох доданків:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2-2 & 3+2 & 2+1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$=(-18+2+0+0-8-6)+(-12+2+0+0-8-3)=-30-21=-51.$$

Властивість 8. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів довільного рядка (або стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (або стовпця), помножені на одне і те ж число λ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & a_{i2}+\lambda a_{k2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Для доведення представимо визначник правої частини згідно з властивістю 7 у вигляді суми двох визначників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & a_{i1}+\lambda a_{k2} & \dots & a_{i1}+\lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \dots & \lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В другому визначнику правої частини елементи i-го рядка пропорційні відповідним елементам k-го рядка, тому за властивістю 6 такий визначник дорівнює нулю. Отже, має місце властивість 8.

Приклад 7. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3+1\cdot(-3) & -2+(-3)(-3) & 5+2(-3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

Тут ми до елементів третього рядка додали відповідні елементи першого рядка, помножені на число "-3".

Надалі, властивість 8 використовується для обчислення визначників вищих порядків. При цьому в довільному рядку (або стовпці) утворюємо всі нулі, крім одного елемента.

Нехай маємо визначник $n-$го порядку $(n>3)$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

<u>Означення 1.</u> Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника $n-$го порядку називається визначник $(n-1)-$го порядку, одержаний із попереднього після викреслювання $i-$го рядка і $j-$го стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

<u>Означення 2.</u> Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника $n-$го порядку називається мінор для цього елемента, взятий із знаком "+", якщо число $(i+j)$ - парне та із знаком "-", якщо воно непарне. Тобто $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Приклад 8. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів a_{13} та a_{32} визначника $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Алгебраїчні доповнення A_{13} і A_{32} знайдемо за попередньою формулою:

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=M_{13};\ A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

Згідно з означенням 1 маємо:

$$M_{13}=\begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ 6 & 0 & 3\\ 5 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix}=6\cdot 1-0\cdot 5=6,$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ 6 & 0 & 3\\ 5 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 6 & 3\end{vmatrix}=4\cdot 3-(-1)\cdot 6=12+6=18.$$

Шукані алгебраїчні доповнення будуть $A_{13}=6; A_{32}=-18.$

Властивість 9. **(Теорема Лапласа).**

Визначник дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (або стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,...,n);$$
$$\Delta=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+...+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,...,n). \qquad (1.1)$$

Ця теорема називається ще **теоремою розкладу.** При цьому перша формула є розкладом визначника за елементами його рядка, а друга - розкладом визначника за елементами його стовпця.

Доведення. Доведемо цю властивість для визначника третього порядку:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

Однак,

$$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=A_{11},$$

$$a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}=-(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=A_{12},$$

$$a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=A_{13}.$$

Таким чином, $\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$

Це формула розкладу визначника за елементами першого рядка. Аналогічно можна знайти розклад визначника за елементами іншого рядка або довільного стовпця.

З допомогою цієї властивості, обчислення визначника $n-$го порядку зводиться до обчислення визначників $(n-1)$- го порядку. Тому при обчисленні таких визначників найкраще вибирати для розкладу рядок або стовпець, в якому є нулі. При цьому будемо обчислювати не n визначників $(n-1)$- го порядку, а менше.

Приклад 9. Обчислити визначник 3-го порядку , розклавши його за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(-1)^2(0-24)+2\cdot(-1)^3(0-20)-3\cdot(-1)^4(18+5)=-24+40-69=-53.$$

Зауваження. Даний визначник простіше було б обчислювати, розклавши його за елементами третього рядка (або третього стовпця), оскільки один із доданків не потрібно обчислювати (елемент $a_{33}=0$).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3(18+5)-4(6-10)=$$

$$=-69+16=-53.$$

Наслідок 1 ***(Теорема заміщення).***

Нехай $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{in}$ - алгебраїчні доповнення елементів i -го рядка визначника $n-$го порядку $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Тоді **сума добутків алгебраїчних доповнень елементів i-го рядка на довільні числа $b_1, b_2, \dots, b_n$ дорівнює такому визначнику $n-$го порядку Δ', в якого елементами i -го рядка є числа b_1, $b_2, \dots, b_n$, а інші - співпадають з відповідними елементами визначника Δ.**

Доведення. За теоремою маємо, що $b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+...+b_nA_{in}=\Delta'$.

Тут $$\Delta'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}=b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+...+b_nA_{in},$$

де права частина одержалась після розкладу визначника $n-$го порядку за елементами i-го рядка. Це і доводить теорему.

Аналогічно, сума добутків алгебраїчних доповнень елементів $j-$го стовпця на довільні числа $b_1,b_2,...,b_n$, тобто $b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+...+b_nA_{nj}$, дорівнює визначнику Δ', елементами $j-$го стовпця якого є числа $b_1,b_2,...,b_n$, а інші елементи співпадають з відповідними елементами визначника Δ.

Наслідок 2 (***Теорема анулювання).***

Сума добутків елементів довільного рядка (або стовпця) на алгебраїчні доповнення паралельного іншого рядка (або стовпця) дорівнює нулю.

Доведення. У визначнику Δ виділимо два рядки i-ий і k-ий.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Знайдемо суму добутків елементів i-го рядка на алгебраїчні доповнення елементів k-го рядка:

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+...+a_{in}A_{kn}.$$

За теоремою заміщення цю суму можна замінити визначником з двома однаковими рядками

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+...+a_{in}A_{kn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Одержаний визначник має два однакові рядки, а тому дорівнює нулю.

Приклад 10. Користуючись властивостями визначників, обчислити
$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & -3 & -2\end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Додамо елементи першого і другого стовпців, а від елементів третього стовпця віднімемо подвоєні елементи першого. Одержимо:
$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & -5\\ 5 & 2 & -12\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}5 & -5\\ 2 & -12\end{vmatrix}=1\cdot 5\cdot 2\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=10(-6+1)=-50.$$

Приклад 11. Обчислити визначник, використавши його властивості:
$$\Delta=\begin{vmatrix}16 & 4 & 5\\ 56 & 21 & -28\\ 40 & 11 & 7\end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Винесемо за знак визначника спільний множник “8” першого стовпця і спільний множник “7” другого рядка
$$\Delta=8\cdot 7\cdot\begin{vmatrix}2 & 4 & 5\\ 1 & 3 & -4\\ 5 & 11 & 7\end{vmatrix}.$$

Віднімемо від елементів першого рядка подвоєні відповідні елементи другого рядка. До елементів третього рядка додамо відповідні елементи другого рядка, помножені на число “-5”
$$\Delta=8\cdot 7\cdot\begin{vmatrix}0 & -2 & 13\\ 1 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 27\end{vmatrix}.$$

Такий визначник легко обчислити, розклавши його за елементами першого стовпця:
$$\Delta=8\cdot 7\cdot 1\cdot(-1)^3\begin{vmatrix}-2 & 13\\ -4 & 27\end{vmatrix}=-56(-54+52)=112.$$

§ 3. Обчислення визначників довільного порядку

Визначником n-го порядку називається число, яке дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або стовпця, на відповідні алгебраїчні доповнення.

При цьому мають місце формули розкладу визначника за елементами його довільного рядка (або стовпця) (1.1).

Означення визначника n-го порядку взято за метод його обчислення.

Приклад 1. Обчислити визначник 4-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Розкладемо визначник за елементами другого рядка:

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Кожен із цих визначників обчислимо, ще раз використавши формулу Лапласа. Перший та третій визначники розкладемо за елементами другого рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{3}\cdot(-15-0) - 1\cdot(-1)^{4}\cdot(-10-8) +$$

$$+0 = -15 + 18 = 3;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3}\cdot(-10-8) - 1\cdot(-1)^{4}\cdot(-5-4) +$$

$$+0 = -3(-18) - 1(-9) = 63.$$

Четвертий визначник розкладемо за елементами третього рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^4\cdot(-2+3)+2(-1)^5\cdot(-1-9)+$$

$$+0=1-2\cdot(-10)=21.$$

Отже,

$$\Delta=1\cdot(-1)^3\cdot 3+1\cdot(-1)^5\cdot 63+2\cdot(-1)^6\cdot 21=-3-63+42=-24.$$

Як бачимо, обчислення визначника 4-го порядку зводиться до обчислення чотирьох визначників 3-го порядку, а обчислення визначника 5-го порядку - до обчислення п'яти визначників 4-го порядку або двадцяти визначників 3-го порядку. Тому доцільно спочатку перетворити визначник так, щоб в одному з рядків (або стовпців) всі елементи, крім одного, стали нульовими. Цього можна досягти, використавши властивості визначників.

Таким чином, обчислення визначника $n-$го порядку зводиться до обчислення лише одного визначника $(n-1)$-го порядку.

Приклад 2. Обчислити визначник, використавши його властивості:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -5\end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Від елементів третього стовпця віднімемо відповідні елементи першого стовпця, а до елементів четвертого стовпця додамо відповідні елементи першого стовпця, помножені на “-2”.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -1 & -4 & -6\\ 1 & 2 & -1 & -7\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ -1 & -4 & -6\\ 2 & -1 & -7\end{vmatrix}.$$

Одержаний визначник 3-го порядку можна обчислити, наприклад, за правилом Саррюса, або звести до визначника 2-го порядку, віднявши від елементів другого і третього стовпців відповідні елементи першого стовпця

$$\Delta=-\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & -3 & -5\\ 2 & -3 & -9\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}-3 & -5\\ -3 & -9\end{vmatrix}=-2\cdot((-3)\cdot(-9)-$$

$$-(-3)\cdot(-5))=-2\cdot 12=-24.$$

Одержали значно легшим шляхом той же результат визначника.

Приклад 3. Обчислити визначник 5-го порядку

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Додамо до елементів першого стовпця відповідні елементи третього стовпця, помножені на "-2", а від елементів четвертого стовпця віднімемо потроєні елементи третього і від п'ятого – віднімемо елементи третього. В результаті одержимо

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -5 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Додамо до елементів першого стовпця відповідні елементи четвертого стовпця, помножені на "5", від елементів другого стовпця віднімемо відповідні елементи четвертого стовпця, а до елементів третього стовпця додамо відповідні елементи четвертого стовпця, помножені на число "4".

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 26 & -1 & 19 & 5 \\ -9 & 2 & -12 & -1 \\ 13 & 0 & 14 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 26 & -1 & 19 \\ -9 & 2 & -12 \\ 13 & 0 & 14 \end{vmatrix}.$$

Додамо до елементів другого рядка подвоєні елементи першого рядка:

$$\begin{vmatrix} 26 & -1 & 19 \\ -9 & 2 & -12 \\ 13 & 0 & 14 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 26 & -1 & 19 \\ 43 & 0 & 26 \\ 13 & 0 & 14 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 43 & 26 \\ 13 & 14 \end{vmatrix}=$$

$$=602-338=264.$$

Отже, визначник $\Delta=-264.$

Визначник $n-$го порядку можна обчислити, звівши його до трикутного вигляду.

<u>Означення</u>. Визначником трикутного вигляду називається визначник, в якого нижче (або вище) головної діагоналі всі нульові елементи, тобто:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку діагональних елементів.

Доведення. Дійсно, оскільки визначник дорівнює алгебраїчній сумі добутків його елементів, узятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця, то єдиним відмінним від нуля доданком є добуток елементів, які стоять по головній діагоналі:

$$\Delta_1=\Delta_2=a_{11}.a_{22}\cdot a_{33}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

Довільний визначник можна звести до визначника трикутного вигляду, використавши його властивості.

Приклад 4. Обчислити визначник третього порядку, звівши його до трикутного вигляду:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Поміняємо місцями елементи першого та третього рядків, змінивши знак перед визначником на протилежний:

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Додамо до елементів другого та третього рядків відповідні елементи першого рядка, помножені відповідно на “-3” і “-2”:

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix}.$$

З третього рядка винесемо спільний множник “-3” за знак визначника і одночасно поміняємо місцями другий та третій рядки. При цьому перед визначником знак зміниться на протилежний:

$$\Delta=(-3)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{vmatrix}.$$

Додамо до елементів третього рядка відповідні елементи другого рядка, помножені на “6”.

$$\Delta = (-3)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Звідси одержимо $\Delta = -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -3.$

Приклад 5. Обчислити визначник п'ятого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язування. Поміняємо місцями два перші рядки, змінивши знак перед визначником на протилежний:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Додамо до елементів другого, третього та четвертого рядків відповідні елементи першого рядка, помножені відповідно на “-2”, “-4”,“-3”. Одержимо

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \end{vmatrix}.$$

Додамо до елементів третього та четвертого рядків відповідні елементи другого рядка, помножені на “–7” і “–2”. $\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{vmatrix}.$

Якщо додати елементи третього і четвертого рядків, то визначник матиме трикутний вигляд:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix},$$

який дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$\Delta = (-1)\cdot(-1)\cdot 4 \cdot 40 = 160.$$

§ 4. Поняття матриці

Матрицею називається прямокутна таблиця із $m \times n$ чисел, яка містить m рядків та n стовпців, взята в квадратні або круглі дужки.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Або коротко $[a_{ij}]$ $(i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n)$.

В цьому випадку вважають, що матриця має розмірність $m \times n$. Матриці позначають великими латинськими буквами $A, B, C, E,...$

Числа a_{ij} називаються **елементами** матриці, де перший індекс i означає номер рядка, а другий j - номер стовпця. Якщо кількість рядків не рівна кількості стовпців, тобто $m \neq n$, то матриця називається **прямокутною,** розмірності $m \times n$, а якщо $m = n$ - **квадратною.** В цьому випадку число $m = n$ називається **порядком** матриці. Елементи квадратної матриці, в яких $i = j$ утворюють **головну діагональ**.

Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо всі її елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, тобто

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тут окремі елементи головної діагоналі можуть бути нульовими.

Якщо в діагональній матриці всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, то її називають **одиничною матрицею.** Вона позначається буквою E і має вигляд

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Дві матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ називаються **рівними**, якщо вони мають рівну кількість рядків та стовпців і відповідні елементи яких співпадають.

Матриця, в якої всі елементи дорівнюють нулю, називається **нуль-матрицею** або **нульовою.** Її позначають буквою $\boldsymbol{O}$.

Якщо матриця складається тільки з одного рядка, то вона називається **матрицею-рядком.**

Матриця, яка складається з одного стовпця, називається **матрицею-стовпцем.**

Якщо в матриці $\boldsymbol{A}$ поміняти рядки на стовпці, а стовпці – на відповідні рядки, то одержану матрицю називають **транспонованою** і позначають $\boldsymbol{A^T}$.

Якщо визначник квадратної матриці дорівнює нулю $(|A|=0)$, то матриця $\boldsymbol{A}$ називається **виродженою** (або **особливою**) і при $|A|\neq 0$ **невиродженою** (або **неособливою**).

Матриця вигляду
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
називається **верхньою трикутною**,

а матриця
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
називається **нижньою трикутною.**

Матрицю
$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

називають матрицею **трапецеїдального** вигляду, якщо одночасно $a_{11}, a_{22}, ..., a_{jj}$ відмінні від нуля.

Приклад 1. Задано матриці :

1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 2) $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, 3) $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$,

4) $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, 5) $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, 6) $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Тут:

1) A – прямокутна матриця розмірності 2×3;
2) A^T – транспонована матриця до матриці A;
3) B – матриця-стовпець;
4) C – матриця-рядок;
5) D – діагональна матриця четвертого порядку;
6) O – нульова матриця другого порядку.

Приклад 2. Для виготовлення п'яти видів ялинкових прикрас на фабриці витрачається певна кількість матеріалу. Конкретні цифрові дані вказані в таблиці:

Матеріал	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Скло (кг)	2,5	3,0	2,8	4,0	1,8
Залізні прищіпки (к-ть)	180	192	185	410	156
Фарба (кг)	1,3	1,5	1,4	2,0	1,0

Охарактеризувати зміст рядків та стовпців цієї таблиці.

Розв'язування. Вказані 15 чисел можна записати у вигляді прямокутної матриці розмірності 3×5.

$$\begin{bmatrix} 2{,}5 & 3{,}0 & 2{,}8 & 4{,}0 & 1{,}8 \\ 180 & 192 & 185 & 410 & 156 \\ 1{,}3 & 1{,}5 & 1{,}4 & 2{,}0 & 1{,}0 \end{bmatrix}.$$

Кожен рядок і стовпець цієї матриці мають певний економічний зміст. Так, елементи першого рядка вказують кількість витраченого скла (в кг) на виготовлення кожного із п'яти видів ялинкових прикрас. Числа другого рядка вказують на потреби в кількості залізних прищіпок, які потрібні на виготовлення цих виробів. Елементи третього рядка характеризують потреби фарби (в кг) , яка використовується при виготовленні відповідного виду продукції.

Стовпці матриці вказують на конкретну кількість скла, залізних прищіпок та фарби, які потрібні на виготовлення кожного із п'яти видів ялинкових прикрас.

Так, наприклад, елементи третього стовпця означають, що на виготовлення прикрас третього виду потрібно 2,8 кг скла, 185 шт. залізних прищіпок і 1,4 кг фарби.

Приклад 3. Ціни на деякі види товару характеризуються у гривнях, доларах США(USD), євро(EUR), англійських фунтах(GBR) і рублях Росії(RUR).

Вид товару	Грн.	USD	EUD	GBR	RUR
Чоловіча куртка	1230	232,1	238,8	155,3	7318,5
Жіноча кофта	120	22,6	23,3	15,2	714
Спортивний костюм	320	60,4	62,1	40,4	1904
Чоботи	415	78,3	80,30,3	52,4	1592,8

Охарактеризувати зміст окремих елементів таблиці.

Розв'язування. Числові дані цієї таблиці можна записати у вигляді прямокутної матриці:

$$\begin{bmatrix} 1230 & 232{,}1 & 238{,}8 & 155{,}3 & 7318{,}5 \\ 120 & 22{,}6 & 23{,}3 & 15{,}2 & 714 \\ 320 & 60{,}4 & 62{,}1 & 40{,}4 & 1904 \\ 415 & 78{,}3 & 80{,}3 & 52{,}4 & 1592{,}8 \end{bmatrix}.$$

Кожний елемент має певний економічний зміст. Наприклад, елемент a_{21} означає, що жіноча кофта коштує 120 гр., елемент a_{32} означає, що спортивний костюм коштує 60,4 доларів США, а елемент a_{44} вказує на ціну чобіт в 52,4 англійських фунтів.

Елементи, наприклад, першого рядка визначають ціни чоловічої куртки в різних грошових одиницях: 1230 грн.;232,1 доларів США; 238,8 євро; 155,3 англійських фунтів; 7318,5 рублів Росії.

§ 5. Дії над матрицями

Нехай задано дві матриці однієї розмірності $m \times n$:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

<u>Означення.</u> Сумою (різницею) двох матриць A і B називається така матриця C розмірності $m\times n$, елементи якої c_{ij} дорівнюють алгебраїчній сумі (різниці) відповідних елементів a_{ij} і b_{ij} матриць A і B, тобто

$$C=A\pm B=\begin{bmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \dots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \dots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \dots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Із цього означення випливають властивості:

1. $A+B=B+A$ (комутативність);
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (асоціативність);
3. $A\pm 0=0\pm A=A$ (нейтральність);
4. $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$ (транспонованість).

Приклад 1. Знайти суму і різницю матриць.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування.

$$A+B=\begin{bmatrix} 3+2 & -1+1 & 2+(-4) \\ 4+(-3) & 1+5 & 0+6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 3-2 & -1-1 & 2-(-4) \\ 4-(-3) & 1-5 & 0-6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 7 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Приклад 2. Три магазини "Продтовари" продають продукти протягом робочого дня. Дані про торгівлю двох змін характеризуються таблицями:

І зміна

Вид продукції	1 магазин	2 магазин	3 магазин
Масло селянське (кг)	8	12	10
Ковбаса (кг)	26	20	18
Мінеральна вода (шт. пл.)	48	52	61
Горілка (шт. пл.)	21	25	35

II зміна

Вид продукції	1 магазин	2 магазин	3 магазин
Масло селянське (кг)	14	16	21
Ковбаса (кг)	31	33	42
Мінеральна вода (шт. пл.)	56	40	62
Горілка (шт. пл.)	23	28	34

Знайти дані про сукупний одноденний продаж товару кожним магазином.

Розв'язування. Зміст цих таблиць можна записати у вигляді двох прямокутних таблиць:

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 12 & 10 \\ 26 & 20 & 18 \\ 48 & 52 & 61 \\ 21 & 25 & 35 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 14 & 16 & 21 \\ 31 & 33 & 42 \\ 56 & 40 & 62 \\ 23 & 28 & 34 \end{bmatrix}.$$

Сума цих двох матриць характеризує дані про сукупний одноденний продаж кожного із видів продукції:

$$C=A+B=\begin{bmatrix} 8 & 12 & 10 \\ 26 & 20 & 18 \\ 48 & 52 & 61 \\ 21 & 25 & 35 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 14 & 16 & 21 \\ 31 & 33 & 42 \\ 56 & 40 & 62 \\ 23 & 28 & 34 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22 & 28 & 31 \\ 57 & 53 & 60 \\ 104 & 92 & 123 \\ 44 & 53 & 69 \end{bmatrix}.$$

<u>Означення.</u> Добутком матриці A на число k (або числа k на матрицю A) називається матриця , елементами якої є добутки елементів матриці A на число k :

$$A\cdot k = k\cdot A=k\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Із означення добутку матриці на число (або числа на матрицю) випливає, що

1. $k(mA)=(km)A;$
2. $(k+m)A=A(k+m)=kA+mA=Ak+Am;$
3. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B;$
4. $\lambda A=0,$ якщо $\lambda=0;$
5. $\lambda A=0,$ якщо $A=0.$

Приклад 3. Знайти матрицю $4A$, якщо матриця

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 0 & -1\\ 2 & -3 & 5\\ 6 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Згідно з означенням, одержимо:

$$4A=\begin{bmatrix}4\cdot 3 & 4\cdot 1 & 4\cdot(-2)\\ 4\cdot 4 & 4\cdot 0 & 4\cdot(-1)\\ 4\cdot 2 & 4\cdot(-3) & 4\cdot 5\\ 4\cdot 6 & 4\cdot 2 & 4\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 4 & -8\\ 16 & 0 & -4\\ 8 & -12 & 20\\ 24 & 8 & 0\end{bmatrix}.$$

Приклад 4. Обчислити матрицю $C=2A-4B$, якщо

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\\ 2 & 6\end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Використавши формулу множення матриці на число і формулу віднімання матриць, одержимо:

$$2A=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 10 & -2\\ 8 & 0\end{bmatrix},\ 4B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -8 & 16\\ 8 & 24\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 10 & -2\\ 8 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0\\ -8 & 16\\ 8 & 24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 18 & -18\\ 0 & -24\end{bmatrix}.$$

Приклад 5. Підприємство виробляє три види продукції A, B, C.

Норми витрат ресурсів на одиницю продукції задані в таблиці:

Ресурси	A	B	C
Сировина X (шт.)	3	4	1
Сировина Y (кг)	2	1,5	1,4
Сировина Z (кг)	5	6	2,3

Знайти витрати ресурсів на виготовлення 6 комплектів продукції.

Розв'язування. Витрати ресурсів на виробництво одиниці виробів можна представити у вигляді матриці:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1{,}5 & 1{,}4 \\ 5 & 6 & 2{,}3 \end{bmatrix}.$$

Кожен елемент матриці має певний економічний зміст. Наприклад, $a_{21} = 2$ означає, що на виготовлення одиниці виду продукції A витрачається 2 кг сировини Y; елемент $a_{12} = 4$ означає, що для виготовлення одиниці виду продукції B потрібно витратити 4 шт. одиниць сировини X.

Очевидно, що для знаходження витрат на виготовлення 6 комплектів продукції, потрібно обчислити матрицю $6A$, тобто

$$6A = 6\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1{,}5 & 1{,}4 \\ 5 & 6 & 2{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 24 & 6 \\ 12 & 9 & 8{,}4 \\ 30 & 36 & 13{,}8 \end{bmatrix}.$$

Зауваження. Множення матриці на число відрізняється від множення визначника на число. Матрицю множать на число k, помноживши всі її елементи на це число. Якщо визначник множать на число k, то множать на нього всі елементи одного якогось рядка (або стовпця).

Нехай матриця A містить m рядків і p стовпців, а матриця B має p рядків і n стовпців.

<u>Означення.</u> Добутком матриць A і B називається матриця C, елементи c_{ij} якої дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, **тобто** $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip}b_{pj}$ $(i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n)$.

Добуток матриці A на матрицю B позначають AB ($A \times B$). Множення матриці A на матрицю B виконується за такою схемою:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ip} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . & b_{1j} & . \\ . & b_{2j} & . \\ . & . & . \\ . & b_{pj} & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & c_{ij} & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Тут елемент c_{ij} знаходять як скалярний добуток елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

Добуток матриць характеризується властивостями:

1. $AE = EA = A;$
2. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0;$
3. $AB \neq BA$ (некомутативність);
4. $(AB)C = A(BC)$ (асоціативність);
5. $\begin{matrix}(A+B)C = AC + BC, \\ C(A+B) = CA + CB\end{matrix}$ (дистрибутивність);
6. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Ця властивість має місце для довільного числа множників

$(A_1 \cdot A_2 \dots A_{n-1} \cdot A_n)^T = A_n{}^T \cdot A_{n-1}{}^T \dots A_2{}^T \cdot A_1{}^T$.

7. Визначник добутку двох квадратних матриць рівний добутку їх визначників.

Приклад 6. Знайти добутки AB і BA, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

і переконатись, що $AB \neq BA$.

Розв'язування.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (-2)(-1) & 1\cdot 0 + (-2)\cdot 5 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 3\cdot 0 + 4\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 3 & 2\cdot(-2) + 0\cdot 4 \\ (-1)\cdot 1 + 5\cdot 3 & (-1)\cdot(-2) + 5\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 14 & 22 \end{bmatrix}.$$

Звідси випливає, що $AB \neq BA$.

Приклад 7. Знайти добуток AB, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування.

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot(-3) + 2\cdot 1 + (-1)\cdot 6 & 1\cdot(-2) + 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-4) & 1\cdot 5 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 7 \\ 0\cdot(-3) + 3\cdot 1 + 4\cdot 6 & 0\cdot(-2) + 3\cdot 0 + 4\cdot(-4) & 0\cdot 5 + 3\cdot 2 + 4\cdot 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 2 & 2 \\ 27 & -16 & 34 \end{bmatrix}.$$

(Тут добуток BA невизначений, оскільки кількість стовпців першої матриці не дорівнює кількості рядків другої матриці).

Приклад 8. Знайти добуток AE, якщо $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$.

Розв'язування.

$$AE=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+(-3)\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot1+(-3)\cdot0 & 1\cdot0+2\cdot0+(-3)\cdot1 \\ 0\cdot1+(-2)\cdot0+4\cdot0 & 0\cdot0+(-2)\cdot1+4\cdot0 & 0\cdot0+(-2)\cdot0+4\cdot1 \\ (-1)\cdot1+5\cdot0+(-4)\cdot0 & (-1)\cdot0+5\cdot1+(-4)\cdot0 & (-1)\cdot0+5\cdot0+(-4)\cdot1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

(Легко переконатись, що має місце і рівність $EA=A$).

Приклад 9. Знайти добуток AB, якщо

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Добуток цих матриць можливий, оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Одержимо

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot5+3\cdot(-3)+(-1)\cdot(-4) \\ 4\cdot5+(-2)(-3)+1\cdot(-4) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Приклад 10. Задано матрицю $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Знайти A^2.

Розв'язування.

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 9-2-12 & -3+0-8 & 12-1+20 \\ 6+0-3 & -2+0-2 & 8+0+5 \\ -9-4-15 & 3+0-10 & -12-2+25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -11 & 31 \\ 3 & -4 & 13 \\ -28 & -7 & 11 \end{bmatrix}.$$

Зауваження 1. Добуток двох матриць може бути нульовою матрицею і тоді, коли кожна із матриць співмножників не є нульовою.

Приклад 11. Знайти добуток матриць:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot0+0\cdot4+0\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot5+0\cdot(-2) & 2\cdot0+0\cdot(-1)+0\cdot6 \\ (-3)\cdot0+0\cdot4+0\cdot1 & (-3)\cdot0+0\cdot5+0\cdot(-2) & (-3)\cdot0+0\cdot(-1)+0\cdot6 \\ 3\cdot0+0\cdot4+0\cdot1 & 3\cdot0+0\cdot5+0\cdot(-2) & (-3)\cdot0+0\cdot(-1)+0\cdot6 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Зауваження 2 . Добуток двох діагональних матриць одного і того ж порядку є діагональна матриця того ж порядку.

Приклад 12. Знайти добуток діагональних матриць:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді $A\cdot B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$

Для таких двох матриць добуток комутативний:

$$A\cdot B=B\cdot A.$$

Приклад 13. Торговельно-будівельна компанія уклала договір на будівництво 6 житлових будинків, 3 офісних будинків і 4 будинків відпочинку. Ціни на окремі види матеріалів такі:цегла – 32 у.о./тис. шт., цемент – 300у.о./т., ліс круглий - 44у.о./ $м^3$, оцинковане залізо - 6 у.о./ $м^2$, скло - 5 у.о./ $м^2$.

Інформація про кількість матеріалів на кожний вид будівництва представлена в таблиці:

Вид будови	Цегла (тис. шт.)	Цемент (*т*)	Ліс круглий (*м*^{2})	Оцинковане залізо (*м*^{2})	Скло (*м*^{2})
Житловий будинок	78	9	41	210	120
Офісний будинок	84	10	40	200	140
Будинок Відпочинку	60	8	35	180	160

Портібно знайти:

1)загальну кількість матеріалів;

2)ціну матеріалів для кожного виду будови;

3)загальну вартість матеріалів.

Розв'язування. 1) Запишемо у вигляді матриці A дані, які характеризують кількість матеріалів на кожний вид будови, а дані про ціни їх у вигляді матриці-стовпця C.

$$A=\begin{bmatrix} 78 & 9 & 41 & 210 & 120 \\ 84 & 10 & 40 & 200 & 140 \\ 60 & 8 & 35 & 180 & 160 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 32 \\ 300 \\ 44 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Позначимо дані про договір, укладений на будівництво споруд через $B=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Щоб знайти загальну кількість матеріалів для будівництва, потрібно перемножити матриці B і A і знайти добуток BA, тобто

$$BA=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 78 & 9 & 41 & 210 & 120 \\ 84 & 10 & 40 & 200 & 140 \\ 60 & 8 & 35 & 180 & 160 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 960 & 116 & 506 & 2580 & 1780 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, для виконання договору на будівництво 6 житлових, 3 офісних і 4 будинків відпочинку компанія повинна придбати: 960 тис. шт. цегли;116 т цементу; 506 $м^3$ круглого лісу; 2580 $м^2$ оцинкованого заліза і 1780 $м^2$скла.

2) Щоб знайти загальну вартість матеріалів для кожного виду будівництва, потрібно перемножити матрицю A на матрицю-стовпець C, складену із чисел, які характеризують ціни на відповідні матеріали :

$$AC=\begin{bmatrix} 78 & 9 & 41 & 210 & 120 \\ 84 & 10 & 40 & 200 & 140 \\ 60 & 8 & 35 & 180 & 160 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ 300 \\ 44 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 78\cdot 32+9\cdot 300+41\cdot 44+210\cdot 6+120\cdot 5 \\ 84\cdot 32+10\cdot 300+40\cdot 44+200\cdot 6+140\cdot 5 \\ 60\cdot 32+8\cdot 300+35\cdot 44+180\cdot 6+160\cdot 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8860 \\ 9348 \\ 7740 \end{bmatrix}.$$

Вартість матеріалів для будівництва житлового будинку становить 8860 у.о., для будівництва офісу – 9348 у.о. і для будівництва будинку відпочинку - 7740 у.о.

3) Для того, щоб знайти загальну вартість будівництва згідно договору 6 житлових, 3 офісних і 4 будинків відпочинку потрібно знайти добуток матриць

$$BAC=(BA)\cdot C=\begin{bmatrix} 960 & 116 & 506 & 2580 & 1780 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 32 \\ 300 \\ 44 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}=112164.$$

Це саме число можна одержати ще так:

$$BAC=B(AC)=\begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 8860 \\ 9348 \\ 7740 \end{bmatrix}=112164.$$

Таким чином, загальна вартість всієї будови становить 112164 у.о.

§ 6. Обернена матриця

<u>Означення 1.</u> Квадратна матриця A $n-$го порядку називається невиродженою (або неособливою), якщо її визначник ($|A|=\Delta$) не дорівнює нулю.

<u>Означення 2.</u>Квадратна матриця A $n-$го порядку називається виродженою (або особливою), якщо її визначник $|A|$ дорівнює нулю.

<u>Означення 3.</u> Матриця A^{-1} називається оберненою матрицею для квадратної невиродженої матриці A, якщо виконуються рівності $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

ТЕОРЕМА. Якщо матриця A $n-$го порядку невироджена, то для неї існує обернена матриця A^{-1}.

Доведення. Нехай задано квадратну невироджену матрицю A, тобто її визначник $|A| \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Розглянемо іншу матрицю

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Знайдемо добуток AB:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = C.$$

Кожен елемент c_{ij} матриці С дорівнює

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}.$$

Якщо $i \neq j$, то маємо вираз, який є сумою добутків елементів i-го рядка на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка визначника матриці A. За теоремою анулювання ця сума дорівнює нулю.

Якщо $i = j$, то вираз $c_{ii} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ представляє собою суму добутків елементів довільного рядка на відповідні алгебраїчні доповнення цього рядка визначника матриці A. За теоремою Лапласа така величина дорівнює визначнику матриці A ($|A|$).

Тобто матриця С має вигляд:

$$C=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}.$$

Якщо кожен елемент цієї матриці С розділити на $|A|$ (тобто помножити її на $\frac{1}{|A|}$), то одержимо одиничну матрицю E , тобто

$$E=\frac{1}{|A|}C=\frac{1}{|A|}\cdot A\cdot B=A\cdot\frac{1}{|A|}\cdot B=A\cdot A^{-1}.$$

Це доводить теорему.

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Дамо **схему знаходження оберненої матриці** для заданої квадратної невиродженої матриці.

1. Обчислимо визначник матриці $A(|A|)$.

2. Транспонуємо матрицю A , тобто одержуємо матрицю:

$$A^{T}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

3. Знаходимо алгебраїчні доповнення кожного елемента транспонованої матриці A^{T} і запишемо їх у вигляді матриці $A^{П}$:

$$A^{П}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Поділимо кожен елемент матриці $A^{П}$ на визначник матриці A , тобто помножимо число $\frac{1}{|A|}$ на матрицю $A^{П}$. Одержана матриця

буде оберненою:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{\Pi}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{bmatrix}.$$

Матриця A^{Π}, яка складена із алгебраїчних доповнень елементів транспонованої матриці, називається **приєднаною** (або **союзною)** до матриці A.

Зауваження 1. Приєднана матриця матиме такий же вигляд A^{Π}, якщо транспонувати матрицю, складену із алгебраїчних доповнень елементів матриці A.

Приклад 1. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

і показати, що $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Розв'язування. Визначник цієї матриці

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=4+24+9-4-18-12=3.$$

Транспонована матриця A^{T} має вигляд

$$A^{T}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 2\end{bmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення кожного елемента цієї матриці

$$A_{11}=(-1)^{2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-2-(-6)=4;$$

$$A_{12}=(-1)^{3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-(6-3)=-3;$$

$$A_{13}=(-1)^{4}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6-1=5;$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-(6-8)=2;$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-4+4=0;$$

$$A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(-4-(-3))=1;$$

$$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-9-(-4)=-5;$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-(6-12)=6;$$

$$A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2-9=-7.$$

Приєднана матриця буде такою:

$$A^{П}=\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ -3 & 0 & 6\\ 5 & 1 & -7\end{bmatrix}.$$

Обернена матриця A^{-1} для заданої матриці A має вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ -3 & 0 & 6\\ 5 & 1 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3}\\ -1 & 0 & 2\\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3}\end{bmatrix}.$$

Легко перевірити,що

$$A^{-1}A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4 & 2 & -5\\ -3 & 0 & 6\\ 5 & 1 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3}\\ -1 & 0 & 2\\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Приклад 2 . Знайти обернену матрицю для матриці

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Обчислимо визначник цієї матриці:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}=-16+12-2-12+16+2=0.$$

Оскільки $|A|=0$, тобто матриця A вироджена, то оберненої для неї не існує.

Зауваження 2. Квадратна невироджена матриця другого порядку $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ має обернену A^{-1} і вона знаходиться за формулою : $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$

Приклад 3. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування. Задана квадратна матриця другого порядку невироджена, оскільки її визначник

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-4\cdot 1=15-4=11\neq 0,$$

тому обернена до матриці A існує і її можна знайти за попередньою формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

§7. Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю розмірності $m\times n$ (1.2).

<u>Означення.</u> Рангом матриці називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів. Його позначають через r ***(або*** $rang(A)$***).***

Із означення випливають такі властивості рангу матриці.

1. Ранг матриці рівний нулю тільки тоді, якщо матриця нульова. В інших випадках ранг матриці рівний деякому додатному числу.

2. Ранг прямокутної матриці не перевищує меншого із двох чисел m і n, тобто $0 \le r \le min(m, n)$.

3. Для квадратної матриці n-*го* порядку $r = n$ тільки тоді, якщо матриця невироджена.

4. Якщо $r < n$ то визначник матриці дорівнює нулю.

Розглянемо два методи знаходження рангу матриці.

Перший метод – **метод окантування** – полягає у наступному. Якщо всі мінори І-го порядку, тобто елементи матриці, рівні нулю, то $r = 0$.

Якщо хоч один із мінорів І-го порядку не дорівнює нулю, а всі мінори 2-го порядку дорівнюють нулю, то $r = 1$. Аналогічно, якщо мінор 2-го порядку відмінний від нуля, то досліджуємо мінори 3-го порядку. Таким способом знаходять мінор k-го порядку і перевіряють, чи не дорівнюють нулю мінори $(k+1)$ -го порядку. Якщо всі мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці A дорівнює числу k. Такі мінори $(k+1)$-го порядку, як правило, знаходять шляхом “окантування ” мінора k -го порядку.

Приклад 1. Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Розв’язування. Всі мінори 2-го порядку

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \; M_2 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \; M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

дорівнюють нулю. Значить, ранг матриці A дорівнює одиниці: $r(A) = 1.$

Приклад 2. Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 8 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

Розв’язування. Оскільки в матриці A є мінори І-го порядку, відмінні від нуля, то ранг її може бути рівний одиниці. Мінор 2-го порядку

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

але, наприклад, мінор

$$M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 21$$

відмінний від нуля. Окантовуючи мінор M_2, одержимо мінор 3-го порядку (в матриці A показано пунктиром)

$$M_3 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -6 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розглянемо мінори 4-го порядку, які окантовують даний мінор M_3

$$M_4 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 5 & 2 \\ -6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 10 & 4 \end{vmatrix}; \; M_5 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 10 & 4 \end{vmatrix};$$

$$M_7 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 8 & 4 \end{vmatrix}; \; M_8 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 8 & 10 \end{vmatrix}.$$

Всі вони дорівнюють нулю, тому, що перший і четвертий рядки пропорційні. Значить ранг матриці A дорівнює 3 $(r = 3)$.

Розглянутий спосіб знаходження рангу матриці не завжди зручний, оскільки потрібно обчислювати велику кількість мінорів.

Другий метод визначення рангу матриці полягає в застосуванні елементарних перетворень матриці при зведенні її до діагонального вигляду.

Елементарними перетвореннями матриці називаються такі операції:

1) перестановка місцями довільних двох рядків(або стовпців);

2) множення кожного елемента довільного рядка(або стовпця) на відмінне від нуля число;

3) викреслювання рядка (або стовпця) , який містить всі нульові елементи;

4) додавання до елементів довільного рядка (або стовпця) відповідних елементів іншого рядка (або стовпця) , помножених на одне і теж відмінне від нуля число.

При таких елементарних перетвореннях ранг матриці не змінюється.

Дві матриці називаються **еквівалентними,** якщо одна із них одержується з другої за допомогою скінченого числа елементарних перетворень. Еквівалентні матриці не рівні між собою, зате вони мають однакові ранги.

Якщо матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ еквівалентні, то це записують так: $\Leftrightarrow$.

З допомогою елементарних перетворень матрицю можна звести до діагонального вигляду. Ранг такої матриці дорівнює кількості відмінних від нуля діагональних елементів.

Приклад 3. Знайти ранг матриці

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування.

1-й крок. В заданій матриці переставимо перший і другий рядки. На місці елемента $\boldsymbol{a_{11}}$ маємо елемент рівний 1.

2-й крок. Додамо до елементів другого і третього рядків відповідні елементи першого рядка, помножені на “–3”, а до елементів четвертого рядка – відповідні елементи першого, помножені на “–5”.

3-й крок. В першому рядку можна автоматично записати всі нулі, крім першого елемента “1”. Цього можна добитись, якщо до елементів 2-го, 3-го, 4-го і 5-го стовпців додати відповідні елементи першого стовпця, помножені відповідно на числа: “–3”,“–3”,“–2”,“–5”.

4-й крок. Додамо до елементів третього і четвертого рядків відповідні елементи другого рядка, помножені на число “–2”.

5-й крок. В другому рядку на місці елементів “–7”,“–3”,“–11” запишемо нулі (аналогічно як на третьому кроці).

Розглянуті кроки зведення матриці $\boldsymbol{A}$ до діагонального вигляду покажемо схематично так:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \overset{\boxed{1}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\boxed{2}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{bmatrix} \overset{\boxed{3}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\boxed{4}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \overset{\boxed{5}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

В останній матриці викреслимо третій рядок і третій та четвертий стовпці, які містять всі нульові елементи:

$$\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ранг цієї матриці дорівнює трьом, а значить і ранг матриці $\boldsymbol{A}$ теж дорівнює 3, тобто $\boldsymbol{r=3}$.

Приклад 4. Знайти ранг матриці:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Розв’язування.

1-й крок.Від елементів другого рядка віднімемо відповідні елементи першого і поміняємо їх місцями.

2-й крок.До елементів другого і третього рядків додамо відповідні елементи першого, помножені відповідно на “–3” і “–5”.

3-й крок.Запишемо в першому рядку всі нулі, крім першого елемента “1”.

4-й крок. Віднімемо відповідні елементи другого і третього рядків.

5-й крок. Аналогічно, як на 3-му кроці, одержимо в другому рядку нулі на місці елементів “9” і “–7”. Покажемо розглянуті кроки схематично.

$$A=\begin{bmatrix}2&3&5&-3&-2\\3&4&3&-1&-3\\5&6&-1&3&-5\end{bmatrix}\overset{\boxed{1}}{\Leftrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&-2&2&-1\\2&3&5&-3&-2\\5&6&-1&3&-5\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\overset{\boxed{2}}{\Leftrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&-2&2&-1\\0&1&9&-7&0\\0&1&9&-7&0\end{bmatrix}\overset{\boxed{3}}{\Leftrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&9&-7&0\\0&1&9&-7&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\overset{\boxed{4}}{\Leftrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&9&-7&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{\boxed{5}}{\Leftrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ранг останньої матриці дорівнює двом, а значить і ранг матриці A дорівнює 2, тобто $r=2.$

§ 8. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Рівняння називається **лінійним**, якщо воно містить невідомі величини $x_1, x_2, ..., x_n$ тільки в першому степені і не містить їх добутки. Це рівняння такого вигляду:
$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$, де $a_1, a_2, ..., a_n, b$ - довільні дійсні числа.

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\qquad(1.3)$$

Тут числа $a_{ij}(i=1,2,...,m;\, j=1,2,...,n)$ називаються коефіцієнтами біля невідомих $x_j(j=1,2,...,n)$, а $b_i(i=1,2,...,m)$ - вільними членами.

Перший індекс “ i ” біля коефіцієнтів вказує, в якому рівнянні знаходиться коефіцієнт, а другий “ j ” при якому із невідомих він знаходиться.

<u>Означення.</u> Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.3) називається така впорядкована сукупність n чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$***, яка при*** $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2, ..., x_n=\alpha_n$ ***перетворює кожне з рівнянь системи в правильну рівність.***

Якщо праві частини всіх рівнянь системи дорівнюють нулю, то систему рівнянь називають **однорідною** і **неоднорідною**, якщо $b_j \neq 0(j = 1,2...,m)$.

Якщо система лінійних алгебраїчних рівнянь має хоч один розв'язок, то вона називається **сумісною**, в іншому випадку – **несумісною.**

Якщо розв'язок системи єдиний, то система лінійних рівнянь називається **визначеною.** У випадку, коли розв'язок сумісної системи не єдиний, систему рівнянь називають **невизначеною.**

Дві системи лінійних рівнянь називаються **еквівалентними (**або **рівносильними),** якщо всі розв'язки однієї системи є розв'язками другої, і навпаки.

Еквівалентні (або рівносильні) системи отримуємо з допомогою **еквівалентних перетворень**. До еквівалентних перетворень системи відносяться:

1) переставлення місцями рівнянь;

2) множення (або ділення) рівнянь на відмінне від нуля число;

3) додавання до деякого рівняння іншого рівняння, помноженого на довільне, відмінне від нуля число.

§ 9. Метод Крамера

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.4)$$

<u>Означення.</u> Визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.5)$$

називається визначником системи (або головним визначником).

ТЕОРЕМА КРАМЕРА. Якщо визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими відмінний від нуля $(\Delta \neq 0)$, то ця система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (1.6)$$

Тут Δ_j - визначник, утворений із визначника Δ заміною j-го стовпця, стовпцем із вільних членів.

Доведення. Нехай $A_{11}, A_{21}, ..., A_{n1}$ - алгебраїчні доповнення елементів першого стовпця визначника системи. Помножимо перше рівняння системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими на A_{11}, друге – на A_{21},…, n- не - на A_{n1} і додамо. Одержимо

$$(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1})x_1 + (\sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1})x_2 + ... + (\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1})x_n = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1} \quad (1.7)$$

Тут $\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + ... + a_{n1}A_{n1} = \Delta$ (за теоремою Лапласа).

За теоремою анулювання

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1} = a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + ... + a_{n2}A_{n1} = 0,$$

....

$$\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1} = a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + ... + a_{nn}A_{n1} = 0.$$

За теоремою заміщення

$$\sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1} = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + ... + b_n A_{n1} = \Delta_1.$$

Тут $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Рівність (1.7) запишеться так: $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$.

Оскільки $\Delta \neq 0$, то $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Так само можна показати, що мають місце інші формули із (1.6).

Приклад 1. Користуючись теоремою Крамера, розв’язати систему рівнянь :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв’язування. Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 27 - 3 + 6 + 6 = 41.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то задана система рівнянь сумісна і має єдиний розв’язок. Обчислимо визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -8 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 16 - 9 + 1 - 24 + 6 = -41,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 - 2 - 9 + 24 - 2 - 3 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 72 - 3 - 6 + 16 = 82.$$

Значить, за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-41}{41} = -1; \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{41} = 0; \;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{82}{41} = 2.$$

Таким чином, $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$ -єдиний розв’язок системи.

*Зауваження.*1.Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0 (j = 1,2,...,n)$, то система лінійних рівнянь має безліч розв’язків.

Зауваження 2. Якщо $\Delta = 0$ і хоч один з визначників $\Delta_j (j = 1,2,...,n)$ не дорівнює нулю, то система лінійних рівнянь не має розв’язків.

При розв’язуванні n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими за правилом Крамера потрібно обчислювати $(n+1)$ визначники n-го порядку. Тому при $n \geq 4$ знаходження визначників приводить до громіздких обчислень, а значить, користуватись формулами Крамера незручно.

Зауваження 3. Формули Крамера найкраще використовувати тоді, коли визначник системи $\Delta \neq 0$, тобто коли розв’язок єдиний. Якщо кількість лінійних алгебраїчних рівнянь більша кількості невідомих, то ефективніше використовувати інші методи (методи послідовного або повного виключення невідомих), які будуть розглянуті пізніше.

§ 10. Матричний метод

Нехай задана система n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (1.4).

Позначимо через A матрицю, складену із коефіцієнтів при невідомих (так звану основну матрицю системи); X – матрицю-стовпець із невідомих; B - матрицю-стовпець із вільних членів, тобто

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь (1.4) можна переписати у вигляді матричного рівняння: $AX = B.$

Якщо квадратна матриця A має не нульовий визначник Δ, то для неї існує обернена A^{-1}. Помноживши зліва в цьому рівнянні на A^{-1}, одержимо $A^{-1}AX = A^{-1}B$ або $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$. Враховуючи, що $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, одержимо матричний розв’язок системи $X = A^{-1}B.$

Знаходження матричного розв’язку називається **матричним способом** розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Приклад 1. Записати і розв’язати в матричній формі систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14. \end{cases}$$

Розв'язування. Позначимо через

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Система лінійних рівнянь запишеться у матричній формі $AX = B.$ Матричний розв'язок системи буде $X = A^{-1}B.$

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} обчислимо визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 24 + 27 - 36 - 15 - 24 = -4.$$

Оскільки $|A| \neq 0$, то для матриці A існує обернена A^{-1}, а значить можна знайти єдиний розв'язок вихідної системи.

Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів заданої матриці:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 24 = -4;$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 27) = 12;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 36 = -12;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 8) = 3;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 9 = -4;$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 9) = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1;$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Складемо матрицю з цих алгебраїчних доповнень $\begin{bmatrix} -4 & 12 & -12 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Транспонуючи її, запишемо приєднану матрицю

$$A^{П} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця має вигляд $A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Знайдемо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 12 & -4 & 0 \\ -12 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-4)\cdot 3 + 3\cdot 10 + (-1)\cdot 14 \\ 12\cdot 3 + (-4)\cdot 10 + 0\cdot 14 \\ (-12)\cdot 3 + 1\cdot 10 + 1\cdot 14 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь такий:

$x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = 3.$

§11. Метод Гаусса

Задана система n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (1.4).

Вважаємо, що коефіцієнт $a_{11} \neq 0$. В іншому випадку, переставим місцями такі довільні два рівняння, щоб в першому із них був коефіцієнт біля x_1, що не дорівнює нулю.

Метод Гаусса розв'язування системи n лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в **послідовному** виключенні невідомих. Покажемо суть цього методу.

Поділимо перше рівняння на коефіцієнт a_{11} і позначимо

$$a_{1j}^{(1)}=\frac{a_{1j}}{a_{11}}(j=1,2,3,...,n),\ \ b_1^{(1)}=\frac{b_1}{a_{11}}.$$

Далі від другого рівняння віднімемо перше рівняння, помножене на a_{21}; від третього рівняння віднімемо перше, помножене на a_{31} і т.д. В результаті одержимо нову систему лінійних алгебраїчних рівнянь, в якій x_1 виключено з усіх рівнянь, починаючи з другого:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+a_{13}^{(1)}x_3+...+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)}, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+...+a_{2n}^{(1)}x_n=b_2^{(1)}, \\ \quad a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3+...+a_{3n}^{(1)}x_n=b_3^{(1)}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad a_{n2}^{(1)}x_2+a_{n3}^{(1)}x_3+...+a_{nn}^{(1)}x_n=b_n^{(1)}. \end{cases}$$

Тут
$a_{22}^{(1)},a_{23}^{(1)},...,a_{2n}^{(1)},a_{32}^{(1)},a_{33}^{(1)}...,a_{3n}^{(1)},...,a_{n2}^{(1)},a_{n3}^{(1)},...a_{nn}^{(1)},b_2^{(1)},b_3^{(1)},...,b_n^{(1)}$ - нові коефіцієнти і вільні члени, які одержались після перетворень за формулами:

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-a_{1j}^{(1)}\cdot a_{1j},$$

$$b_j^{(1)}=b_j-b_1^{(1)}\cdot a_{1j}\quad (i=2,3,...,n;\ j=2,3,...,n).$$

Далі, виключимо x_2 з усіх рівнянь, починаючи з третього. Поділимо друге рівняння на $a_{22}^{(1)}$. Якщо цей коефіцієнт $a_{22}^{(1)}=0$, то переставимо місцями довільні рівняння так, щоб коефіцієнт біля x_2 був не нульовим.Позначимо

$$a_{2j}^{(2)}=\frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}(j=2,3,...,n),\ \ b_2^{(2)}=\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Від третього рівняння віднімемо друге рівняння, помножене на $a_{32}^{(1)}$, від четвертого рівняння віднімемо друге, помножене на $a_{42}^{(1)}$ і т.д. Одержимо нову систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка еквівалентна попередній:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}. \end{cases}$$

Такий процес будемо продовжувати до того часу, поки система не набуде трикутного вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)}, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)}. \end{cases}$$

Тут і в попередній системі коефіцієнти біля $x_2, x_3 \ldots, x_n$,а також вільні члени одержуються в результаті перетворень:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(2)} a_{2j}^{(1)},\ b_j^{(2)} = b_j^{(1)} - b_2^{(2)} a_{2j}^{(1)} \quad (i = 3,4,\ldots,n,\ j = 3,4,\ldots,n),$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{3j}^{(3)} a_{3j}^{(2)},\ b_j^{(3)} = b_j^{(2)} - b_3^{(3)} a_{3j}^{(2)} \ (i = 4,5,\ldots,n,\ j = 4,5,\ldots,n).$$

При цьому коефіцієнти $a_{ii}^{(i)} = 1 \ \ (i = 1,2,\ldots,n).$

Остання система містить n лінійних рівнянь і n невідомих і має єдиний розв’язок. Перехід від першої системи рівнянь до останньої називається **прямим ходом методу Гаусса**. **Обернений хід методу Гаусса** починається з останньої системи рівнянь. Її розв’язують , знайшовши з останнього рівняння x_n. Підставивши це значення в передостаннє – знайдемо x_{n-1} і т.д. З першого рівняння знаходять x_1.

Зауваження 1. Якщо в результаті перетворень зустрінеться хоч одне рівняння вигляду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$, то одержимо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)}, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}^{(k)}x_n + \ldots + a_{kn}^{(k)} = b_k^{(k)}. \end{cases}$$

Тут $k < n,\ a_{kk}^{(k)} \neq 0.$

Залишаємо в лівих частинах рівнянь доданки, які містять k змінних, а інші доданки перенесемо в праву сторону.

Змінним величинам, які знаходяться в правій стороні надаємо довільних значень. Одержимо систему k лінійних рівнянь, які мають k невідомих і трикутний вигляд.

Таким чином, кожній комбінації змінних $x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n$ відповідає один розв'язок останньої системи. В цьому випадку вихідна система рівнянь має безліч розв'язків.

*Зауваження 2.*Якщо в результаті перетворень зустрінеться хоч одне рівняння вигляду $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = b$, то вихідна система лінійних алгебраїчних рівнянь несумісна.

Приклад 1. Користуючись методом Гаусса, розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язування. Першим рівнянням краще вибирати те, в якому коефіцієнт при невідомому x_1 рівний одиниці. Для цього ліву і праву частини першого рівняння можна поділити на “2”. Однак в даному прикладі зручніше поміняти місцями перше та друге рівняння:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Виключимо невідоме x_1 в другому та третьому рівняннях системи.Для цього перше рівняння помножимо на “-2”, “-4” і додамо відповідно до другого та третього рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - 5x_3 = -3, \\ -6x_2 - x_3 = -13. \end{cases}$$

Для виключення невідомого x_2 в третьому рівнянні додамо до нього друге, помножене на “6”:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 - 5x_3 = -3, \\ -31x_3 = -31. \end{cases}$$

Із останнього рівняння знаходимо $x_3 = \frac{-31}{-31} = 1.$ Підставивши значення $x_3=1$ в друге рівняння, одержимо $x_2= -3+5\,x_3=-3+5=2.$

Із першого рівняння $x_1=2-x_2-x_3=2-2-1= -1.$

Таким чином, числа $-1;2;1$ є розв'язком вихідної системи лінійних рівнянь.

Часто на практиці замість перетворень над системою виконують відповідні перетворення над матрицею, складеною з коефіцієнтів при невідомих і стовпця з вільних членів, який для зручності виділимо вертикальною лінією. Таку матрицю $\tilde{A}$ називають **розширеною** матрицею системи.

Приклад 2. Користуючись методом Гаусса, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Розв'язування. Заданій системі лінійних рівнянь відповідає розширена матриця $\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right].$

Зведемо її до трикутного вигляду з допомогою елементарних перетворень.

1-й крок. Поміняємо місцями перший та другий рядки.

2-й крок. Додамо до елементів другого, третього і четвертого рядків елементи першого рядка, помножені відповідно на ***“−2”,“−2”,“−1”***.

3-й крок. Додамо відповідні елементи другого і третього рядків.

4-й крок. Поділимо всі елементи четвертого рядка на “-2” і поміняємо місцями з третім рядком.

5-й крок. Додамо до елементів четвертого рядка відповідні елементи третього рядка, помножені на “6”.

6-й крок. Поділимо всі елементи четвертого рядка на “-7”.

Розглянуті кроки зобразимо у вигляді схеми.

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3\end{array}\right] \overset{\boxed{1}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3\\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3\end{array}\right] \overset{\boxed{2}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4\end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\overset{\boxed{3}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4\end{array}\right] \overset{\boxed{4}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5\end{array}\right] \overset{\boxed{5}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7\end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\overset{\boxed{6}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right].$$

Останній розширеній матриці відповідає система рівнянь

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ x_4 = -1, \end{cases}$$

розв’язок якої буде розв’язком вихідної системи. Оскільки $x_4 = -1,$ то з третього рівняння $x_3 = 2 + x_4 = 2 + (-1) = 1.$

Підставивши знайдені значення $x_3 = 1, x_4 = -1$ в друге рівняння, знайдемо $x_2 = -x_3 - x_4 = -1 - (-1) = -1 + 1 = 0.$

Із першого рівняння одержимо

$$x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 0 - 5\cdot 1 - 2(-1) = 1 - 5 + 2 = -2.$$

Розв’язком системи будуть такі числа:

$$x_1 = -2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1;\ x_4 = -1.$$

Приклад 3. Користуючись методом Гаусса, розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язування. Виключимо невідому величину x_1 із другого і третього рівнянь. Для цього перше рівняння помножимо на “-3” і додамо до другого і третього рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ \quad - x_2 - 2x_3 = -5, \\ -2x_2 - 4x_3 = -10. \end{cases}$$

Для виключення величини x_2 віднімемо із третього рівняння подвоєне друге рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ \quad - x_2 - 2x_3 = -5, \\ 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0. \end{cases}$$

Ця система лінійних рівнянь має безліч розв’язків. Перенесемо невідому величину x_3 в праву сторону

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 + x_3, \\ - x_2 = -5 + 2x_3. \end{cases}$$

Звідси $x_2 = 5 - 2x_3$, а із першого рівняння $x_1 = -1 + 3x_3$.

Це загальний розв’язок вихідної системи рівнянь. Для отримання одного із часткових розв’язків, надамо змінній x_3 довільного значення. Наприклад, якщо $x_3 = 0$, то $x_2 = 5,\ \ x_1 = -1.$ Детальніше про розв’язування рівнянь такого типу буде показано в §13 цього розділу.

Приклад 4. Користуючись методом Гаусса, розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв’язування. Помножимо перше рівняння на “-3”і “-1” і додамо відповідно до другого і третього рівнянь. Цим самим виключимо невідому величину x_1 із другого і третього рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ \quad -7x_2 + 5x_3 = 4, \\ \quad\ 7x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$$

Для виключення невідомої величини із третього рівняння, додамо до нього друге:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ \quad -7x_2 + 5x_3 = 4, \\ \quad 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 5. \end{cases}$$

Згідно з зауваженням 2, така система лінійних алгебраїчних рівнянь несумісна.

§12. Метод Жордана-Гаусса

При дослідженні економічних об'єктів виникає потреба в розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь з багатьма невідомими. Більш зручним для цього є модифікований метод Жордана-Гаусса. Він полягає в **повному виключенні невідомих**.

Дамо коротку схему цього методу.

За перше рівняння візьмемо таке рівняння, в якому коефіцієнт (його назвемо **ключовим елементом**) біля x_1 відмінний від нуля і розділимо на нього все рівняння. З допомогою цього рівняння виключимо невідоме x_1 в усіх рівняннях, крім першого. Аналогічно невідоме x_2 виключимо в усіх рівняннях, крім другого і т.д. При цьому можливі три випадки.

1. Ліва частина i-го рівняння системи перетворилась в нуль, а права частина рівна деякому числу, відмінному від нуля. Це значить, що система лінійних рівнянь немає розв'язків.
2. Ліва і права частини i-го рівняння системи перетворились в нуль. В цьому випадку i-те рівняння можна відкинути.
3. У випадку використання всіх рівнянь, в процесі виключеня невідомих, одержуємо розв'язок даної системи.

Зауваження. Якщо в першому рівнянні вихідної системи коефіцієнт біля x_1 рівний нулю, то можна взяти інше рівняння, в якому за ключовий елемент візьмемо відмінний від нуля коефіцієнт при x_1.

Приклад 1. Розв'язати методом Жордана-Гаусса систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язування. За ключовий елемент виберемо коефіцієнт "2" біля x_1 в першому рівнянні, оскільки він відмінний від нуля. Розділимо перше рівняння на це число "2":

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Виключимо невідоме x_1 в другому і третьому рівняннях. Для цього додамо до другого рівняння перше, помножене на "-3", а до третього – перше, помножене на "4".

Тобто перший крок є такий самий, як в методі Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1, \\ \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = -3, \\ -5x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Серед двох рівнянь (друге і третє) виберемо за ключовий елемент відмінний від нуля коефіцієнт, який стоїть біля x_2,

Наприклад, число "$\frac{5}{2}$". Розділимо на це число друге рівняння:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1, \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 = -\frac{6}{5}, \\ -5x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

В цих рівняннях, крім другого, виключимо невідоме x_2. Для цього додамо до першого і третього рівнянь друге, помножене на "0,5" і "5":

$$\begin{cases} x_1 \quad - \quad \frac{2}{5}x_3 = \frac{1}{5}, \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 = -\frac{6}{5}, \\ 0 = 1. \end{cases}$$

Це означає, що третьому рівнянню не можуть задовольняти жодні значення невідомих. Тобто вихідна система рівнянь розв'язків немає.

Особливо зручно користуватись методом Жордана-Гаусса в матричній формі, яка представлена таблицею. При цьому її перетворення здійснюється з допомогою певних кроків.

1. Вибираємо ключовий елемент $a_{ij} \neq 0$. Ключовий рядок на кожному етапі вибирається інший так, щоб йому відповідала тільки одна невідома.

2. Елементи i -го рядка (ключового) ділимо на a_{ij} і записуємо в i -ий рядок наступної розрахункової таблиці.

3. Елементи ключового стовпця (крім ключового елемента, який рівний 1) записуємо нульовими.

4. Інші елементи наступної розрахункової таблиці (в тому числі і контрольного стовпця) обчислюємо за формулою

$$a_{kl}{}' = a_{kl} - \frac{a_{il}}{a_{ij}} a_{kl} \quad (k = 1,2,...,n; l = 1,2,...,n; k \neq i; k \neq l).$$

5. Порівнюємо суму елементів рядка розрахункової таблиці з відповідним елементом контрольного стовпця (Σ).

Перехід від однієї матриці-таблиці до іншої за методом Жордана-Гаусса називається **симплексним перетворенням** матриць-таблиць.

Приклад 2. Розв'язати методом Жордана-Гаусса систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Розв'язування. Запишемо задану систему в табличній формі. За ключовий елемент тут взято коефіцієнт "2" при x_1 в першому рівнянні і взято в рамки. Стовпець $\sum$ є контрольним, а елементи його дорівнюють сумі інших чисел цього рядка, тобто сумі коефіцієнтів біля невідомих і вільного члена відповідного рівняння.

Таблиця 1. За ключовий елемент взято число "2". Поділивши на нього елементи першого рядка, одержимо відповідні елементи першого рядка таблиці 2(на це вказує число "$\frac{1}{2}$" в першому рядку поза таблицею).

Таблиця 2. Напроти першого рядка записано число “-4” і направлена стрілка до другого рядка табл.1. Це означає, що елементи першого рядка множаться на “-4” і додаються до відповідних елементів другого рядка табл.1. Число “-3” і стрілка, направлена до третьої стрічки означає,що на це число “-3” множаться всі елементи першого рядка табл.2 і додаються до відповідних елементів третього рядка табл.1. Цим самим в табл. 2 в першому стовпці під числом “1” отримали нульові елементи. За ключовий елемент цієї таблиці вибираємо число “1” в другому рядку (взято в рамку). Запис “$-\frac{1}{2}$” із стрілкою до першого рядка означає, що елементи ключового рядка другої таблиці потрібно помножити на “$-\frac{1}{2}$” і додати до відповідних елементів першого рядка. Цим самим отримаємо елементи таблиці 3.

Аналогічно - “$\frac{5}{2}$” і стрілка до третього рядка означає множення елементів ключового рядка цієї таблиці на “$\frac{5}{2}$” і додавання до відповідних чисел третього рядка для запису в третьому рядку таблиці 3.

Результатом виконання дій цієї таблиці є виключення невідомої $\boldsymbol{x_1}$ із другого і третього рівнянь системи.

Таблиця 3. За ключовий елемент цієї таблиці взято “$\frac{59}{2}$” із третього рядка і третього стовпця (взято в рамку). Запис “$\frac{2}{59}$” в цій стрічці поза таблицею означає, що всі її елементи треба помножити на це число, тобто робимо ключовий елемент одиницею. Результат множення записуємо третім рядком табл. 4. Підсумком виконання цих дій табл. 3 є виключення невідомої x_2 з першого і третього рівнянь.

Таблиця 4. Числа “-9” і “$\frac{13}{2}$”, які записані справа від таблиці із стрілками до другого і першого рядків табл. 3 означають: елементи третього рядка табл.4 множимо на “-9” і “$\frac{13}{2}$” і додаємо до відповідних елементів другого і першого рядків табл.3.

Ключовий стовпець

Ключовий рядок

Ключовий елемент

№ таблиці	x_1	x_2	x_3	b_i	$\sum$	
1	$\boxed{2}$	1	-4	-1	-2	×(½)
	4	3	1	6	14	
	3	-1	1	8	11	
2	1	½	-2	–½	-1	×(-4), (-3)
	0	$\boxed{1}$	9	8	18	
	0	$-\frac{5}{2}$	7	$\frac{19}{2}$	14	
3	1	0	$-\frac{13}{2}$	$-\frac{9}{2}$	-10	
	0	1	9	8	18	×(-½) $\left(\frac{5}{2}\right)$
	0	0	$\boxed{\frac{59}{2}}$	$\frac{59}{2}$	59	$\times\left(\frac{2}{59}\right)$
4	1	0	0	2	3	
	0	1	0	-1	0	
	0	0	1	1	2	×(-9), $\left(\frac{13}{2}\right)$

Останній таблиці 4 відповідає така система рівнянь:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 1, \end{cases}$$

тобто $x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = 1$ є розв’язком вихідної системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Зауваження 1. Ключовий елемент вибирається тільки один раз у відповідному рядку або стовпці.

Зауваження 2. Ключовий елемент не вибирається серед вільних членів, тобто серед елементів b_i.

Зауваження 3. Для спрощення обчислень в якості ключового елемента доцільно вибирати найменший і не обов'язково a_{11}.

Приклад 3. Розв’язати методом Жордана-Гаусса систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язування. Складемо таблицю із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих і вільних членів. Стовпець **Σ** є контрольним.

№ таблиці	x_1	x_2	x_3	b_i	Σ	
1	2	-1	3	5	9	
	$\boxed{1}$	-4	2	-3	-4	×(-2), (-3)
	3	2	1	4	10	
2	0	7	$\boxed{-1}$	11	17	×(-1)
	1	-4	2	-3	-4	
	0	14	-5	13	22	
3	0	-7	1	-11	-17	×(-2), (5)
	1	10	0	19	30	
	0	$\boxed{-21}$	0	-42	-63	$\times(-\frac{1}{21})$
4	0	0	1	3	4	
	1	0	0	-1	0	
	0	1	0	2	3	×(-10), (7)

Рядки цих таблиць заповнювались в такій послідовності.

Таблиця 1. За ключовий елемент вибрано коефіцієнт біля x_1 другого рівняння, тобто число "1".

Таблиця 2.

1 рядок: елементи другого рядка табл.1 множимо на "-2" і додаємо до відповідних елементів першого рядка;

2 рядок : перенесено без зміни з таблиці 1.

3 рядок: елементи другого рядка табл. 1 множимо на "-3" і додаємо до відповідних елементів третього рядка.

За ключовий елемент в табл.2 вибираємо число "-1", яке знаходиться в першому рядку.

Таблиця 3.

1 рядок: елементи першого рядка табл.2 множимо на "-1".

2 рядок: елементи першого рядка табл.3 множимо на "-2" і додаємо до відповідних елементів другого рядка табл.2.

3 рядок: елементи першого рядка табл. 3 множимо на "5" і додаємо до відповідних елементів третього рядка табл.2.

За ключовий елемент цієї таблиці вибираємо число “-21”.

Таблиця 4.

3 рядок: елементи третього рядка табл.3 ділимо на “-21”.

1 рядок: елементи третього рядка табл.4 множимо на “7” і додаємо до відповідних елементів першого рядка табл.3.

2 рядок:елементи третього рядка табл. 4 множимо на “-10” і додаємо до відповідних елементів другого рядка табл.3.

Із останньої таблиці 4 випливає, що $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

§13. Довільні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими (1.3).

Складемо основну (A) і розширену ($\tilde{A}$) матриці цієї системи:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \ \tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

ТЕОРЕМА Кронекера-Капеллі. Система m лінійних рівнянь з n невідомими має розв’язок, тобто сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці ($r(A)$) дорівнює рангу розширеної матриці ($r(\tilde{A})$).

Відмітимо, що $r(A)$ і $r(\tilde{A})$ не можуть перевищувати кількість невідомих, тобто $r(A) \le n$, $r(\tilde{A}) \le n$.

Розглянемо три випадки.

1. Якщо $r(A) \ne r(\tilde{A})$, то система лінійних рівнянь не сумісна.

2. Якщо $r(A) = r(\tilde{A}) = n$, то система лінійних рівнянь сумісна і має розв’язок, який знаходиться за одним із методів, розглянутих в попередніх параграфах.

3. Якщо $r(A) = r(\tilde{A}) = r$ і $r < n$, то система лінійних рівнянь сумісна і має безліч розв’язків.

Базисним мінором матриці називається відмінний від нуля мінор, порядок якого рівний рангу матриці. Допустимо, що $r(A) = r(\tilde{A}) = r$. Для знаходження розв’язків системи візьмемо r

рівнянь, в яких коефіцієнти при невідомих утворюють базисний мінор. Інші рівняння відкидаємо. Невідомі, коефіцієнти при яких утворюють базисний мінор, називають **основними** (або **базисними**) і залишають зліва. Інші $(n-r)$ невідомі називають **вільними** і переносять в праві частини рівнянь. Надаючи довільних числових значень вільним невідомим, знаходимо відповідні значення основних невідомих.

Приклад 1. Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5=2, \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4-x_5=6, \\ 2x_1+x_2+2x_3-2x_4-3x_5=8. \end{cases}$$

Розв'язування. Знайдемо ранги основної і розширеної матриць системи. В розширеній матриці

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right]$$

до вертикальної лінії розміщені елементи основної матриці. Тому всі елементарні перетворення, які будемо виконувати над матрицею $\tilde{A}$, мають місце і для матриці A:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right] \begin{matrix} \times(-3)\times(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 4 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 4 \end{array}\right] \times(-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

Звідси видно, що $\tilde{A} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Значить, ранг розширеної матриці $\tilde{A}$ рівний 3, а ранг основної матриці $\boldsymbol{A}$ - 2. За теоремою Кронекера-Капеллі система лінійних рівнянь несумісна.

Приклад 2. Дослідити на сумісність систему лінійних рівнянь і розв'язати її, якщо вона сумісна:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язування. Складемо розширену матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення.

×(-1) (-2) (-1) (-3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -7 & -23 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

×(-4) (-1) (-1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & -1 & -7 & -23 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] + \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Значить $\boldsymbol{r(A)=r(\tilde{A})=3}$, оскільки найвищий порядок мінора як матриці $\boldsymbol{A}$ так і матриці $\boldsymbol{\tilde{A}}$, дорівнює 3. За теоремою Кронекера-Капеллі вихідна система лінійних рівнянь має розв'язок, причому єдиний, так як кількість невідомих теж дорівнює 3.

Це означає, що два рівняння системи можна відкинути. Запишемо ті три рівняння, визначник із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих, відмінний від нуля, наприклад

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Тобто розглянемо систему рівнянь: $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=10, \\ x_1+x_2+x_3=6, \\ x_1+x_2=3. \end{cases}$

Знайдемо розв’язок цієї системи за одним із методів, наприклад, за методом Крамера. Для цього обчислимо $\Delta_j (j=1,2,3)$, які одержуються з визначника системи Δ, шляхом заміни стовпців із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих $x_1, x_2, x_3,$ стовпцем із вільних членів:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-(4-3)=-1,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-(6-4)=-2,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3(-1)^5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3(3-2)=-3.$$

Розв’язок вихідної системи такий:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-1}{-1}=1, \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-2}{-1}=2, \quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-3}{-1}=3.$$

Приклад 3. Дослідити на сумісність і розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1, \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1. \end{cases}$$

Розв’язування. З допомогою елементарних перетворень зведемо до діагонального вигляду матрицю

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \times(-2)\ (-5) \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \times(-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -11 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\\ 0 & -11 & 0\end{array}\right].$$

Як бачимо ***r(A)=r(Ã)=2.*** Це означає, що система лінійних рівнянь сумісна і має безліч розв'язків (оскільки ранг менший, ніж кількість невідомих).За базисний мінор візьмемо мінор 2-го порядку ($r = 2$), наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -1 - 10 = -11,$ який не дорівнює нулю.

В даному випадку за основні невідомі приймемо x_1, x_2. Невідомі x_3 та x_4 будуть вільними.

Задана система еквівалентна такій:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1,\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\end{cases} \text{або} \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4,\\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4.\end{cases}$$

За формулами Крамера знаходимо

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5\\ -2x_3 + x_4 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}} = \frac{-1 + 4x_3 + 3x_4 + 10x_3 - 5x_4}{-11} = -\frac{14}{11}x_3 +$$

$$+\frac{2}{11}x_4 + \frac{1}{11};$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4\\ 2 & -2x_3 + x_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}} = \frac{-2x_3 + x_4 - 2 + 8x_3 + 6x_4}{-11} = -\frac{6}{11}x_3 -$$

$$-\frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Отже, загальний розв'язок вихідної системи такий:

$$x_1 = -\frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 + \frac{1}{11};\; x_2 = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Надаючи вільним невідомим x_3, x_4 довільних значень, одержимо відповідні значення базисних невідомих x_1, x_2.

Наприклад, один із часткових розв'язків розглянутої системи рівнянь буде $x_1 = \frac{17}{11},\; x_2 = \frac{1}{11},\; x_3 = -1,\; x_4 = 1.$

Зауваження. При знаходженні рангів ***r(A)*** і ***r(Ã)*** зручно користуватись методом окантування мінора. При цьому одночасно знаходимо і базисний мінор.

Системи ***m*** лінійних рівнянь з ***n*** невідомими можна розв'язувати методом Жордана-Гаусса.

Приклад 4. Дослідити на сумісність і розв'язати методом Жордана-Гаусса систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Розв'язування. Запишемо цю систему в табличній формі:

№ таблиці	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	$\sum$	
1	3	$\boxed{1}$	2	-1	1	2	8	
	-1	-2	1	3	-1	-1	-1	
	2	3	5	1	2	3	16	
2	3	1	2	-1	1	2	8	×(2),(-3)
	5	0	5	1	1	3	15	
	-7	0	$\boxed{-1}$	4	-1	-3	-8	×(-1)
3	-11	1	0	7	-1	-4	-8	
	$\boxed{-30}$	0	0	21	-4	-12	-25	×(-1/30)
	7	0	1	-4	1	3	8	×(-2),(-5)
4	0	1	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{6}$	
	1	0	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{6}$	×(-7),(11)
	0	0	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{6}$	

Дамо коротке пояснення до таблиць.

Таблиця 1. За ключовий елемент взято число "1" – коефіцієнт біля невідомої x_2. Помножимо всі елементи ключового рядка на "2" і додамо до відповідних елементів другого рядка. Помножимо всі елементи цього ж ключового рядка на "-3 " і додамо до відповідних елементів третього рядка. При цьому отримали таблицю 2 (тут елементи першого рядка залишимо без зміни).

Таблиця 2. За ключовий елемент взято число "-1" (окреслено рамкою). Поділимо елементи ключового рядка на "-1" і утворимо нулі в третьому стовпці (на місці елементів "2" і "5").

Таблиця 3. Помножимо елементи третього рядка на “-5” і “-2” і додамо до відповідних елементів другого і першого рядків табл.2. За ключовий елемент візьмемо число “-30” і поділимо на нього всі елементи другого рядка і запишемо другим рядком таблиці 4.

Таблиця 4. Інші клітинки заповнимо аналогічно. Помножимо елементи другого рядка на “-7” і “11” і додамо до відповідних елементів третього і перших рядків таблиці 3.

Такі перетворення показано справа біля кожної з таблиць (числа вказують, що даний рядок на нього треба перемножити, а стрілки – до якого рядка потрібно додати відповідні елементи).

Якщо перші два рядки табл.4 поміняти місцями, то по головній діагоналі одержаної матриці-таблиці є три ненульові елементи:

1	0	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{6}$
0	1	0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{6}$
0	0	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{6}$

Це означає, що ранги основної і розширеної матриць однакові і дорівнюють 3. Тобто вихідна система 3 лінійних рівнянь з 5 невідомими сумісна і має безліч розв’язків (ранг менший за кількість невідомих).

Запишемо отриману **систему базисних рівнянь**, виходячи із таблиці 4.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{7}{10}x_4 + \frac{2}{15}x_5 = \frac{2}{5}, \\ x_2 - \frac{7}{10}x_4 + \frac{7}{15}x_5 = \frac{2}{5}, \\ x_3 + \frac{9}{10}x_4 + \frac{1}{15}x_5 = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Маємо три базисні невідомі **(*x_1, x_2, x_3*)** і дві вільні (***x_4, x_5***). Друга таблиця виділяє базисну невідому ***x_2*** третя таблиця - ***x_3*** і четверта таблиця - ***x_1***.

Звідси загальний розв’язок вихідної системи запишеться так:

$$x_1 = \frac{2}{5} + \frac{7}{10}x_4 - \frac{2}{15}x_5,\ x_2 = \frac{2}{5} + \frac{7}{10}x_4 - \frac{7}{15}x_5,\ x_3 = \frac{1}{5} - \frac{9}{10}x_4 - \frac{1}{15}x_5 .$$

Для перевірки правильності знайдених розв'язків, достатньо підставити ці значення x_1, x_2, x_3 у задану систему лінійних рівнянь і отримати тотожності.

Для одержання частинних розв'язків системи, надамо вільним невідомим x_4, x_5 довільних значень. Наприклад, якщо $x_4=0$, $x_5=0$,

то: $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{1}{5}, x_4 = 0, x_5 = 0.$

Якщо $x_4=1$, $x_5=-1$, то розв'язок буде такий:

$x_1 = \frac{37}{30},\ \ x_2 = \frac{47}{30},\ \ x_3 = -\frac{29}{30},\ \ x_4 = 1,\ \ x_5 = -1$, і т.д.

Таких частинних розв'язків можна знайти безліч.

§14. Системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими називається однорідною, якщо вона має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Вона одержується із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.3), якщо $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0.$ Розширена матриця $\tilde{A}$ цієї системи одержується із основної матриці A, якщо приєднати нульовий стовпець. Значить ранг матриці A рівний рангу розширеної матриці $\tilde{A}$. При цьому за теоремою Кронекера-Капеллі вихідна система завжди сумісна.

Якщо ранг матриці A системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює кількості невідомих $(r = n)$, то система має єдиний нульовий (тривіальний) розв'язок: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$ Це випливає з теореми Крамера, оскільки всі визначники Δ_j одержуються із визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.9}$$

заміною j-го стовпця стовпцем із вільних членів $b_1 = 0, b_2 = 0, \ldots,$ $b_n = 0$, а тому $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{0}{\Delta} = 0.$

Значить, система n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має нульові розв'язки тільки тоді, коли визначник системи , складеної із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих відмінний від нуля.

Система n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має ненульові розв'язки тільки тоді, коли визначник системи, складеної із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих дорівнює нулю $(\Delta = 0)$. Тобто , система має ненульові розв'язки тільки тоді, коли $r < n$, де r - ранг матриці A, а n - число невідомих.

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Так як кількість рівнянь $(m = 3)$ співпадає з кількістю невідомих $(n = 3)$, а визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 6 - 9 - 4 - 2 = -16$$

системи відмінний від нуля, то задана система лінійних однорідних рівнянь має тільки нульовий розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

Приклад 2. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \ , \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \quad , \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Знайдемо ранг матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих. Для цього зведемо її до діагонального вигляду з допомогою елементарних перетворень:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-1&4&1\\1&3&-1&1&1\\2&6&-2&1&0\\3&9&-3&1&1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&3&-1&4&-1\\0&0&0&-3&2\\0&0&0&-7&2\\0&0&0&-11&4\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&-3&2\\0&0&0&-7&2\\0&0&0&-11&2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&1&-7\\0&1&-11\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&-4\\0&0&-7\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-4\\0&0&-7\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-4\\0&0&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-4\end{bmatrix}.$$

Ранг останньої матриці, а значить, і еквівалентної їй матриці A дорівнює 3 $(r=3)$ і менший, ніж число невідомих, а тому вихідна система має ненульові розв'язки. Візьмемо ті рівняння заданої системи, в яких коефіцієнти при невідомих утворюють базисний мінор, наприклад:

$$M=\begin{vmatrix}1&4&-1\\1&1&1\\2&1&0\end{vmatrix}=-1+8+2-1=8,$$

який відмінний від нуля.

Задана система лінійних рівнянь еквівалентна такій:

$$\begin{cases}x_1+4x_4-x_5=-3x_2+x_3,\\x_1+x_4+x_5=-3x_2+x_3,\\2x_1+x_4=-6x_2+2x_3.\end{cases}$$

Розв'яжемо її, відносно невідомих x_1, x_4, x_5, методом Гаусса. Виключимо x_1 в другому і третьому рівняннях

$$\begin{cases}x_1+4x_4-x_5=-3x_2+x_3,\\3x_4+2x_5=0,\\-7x_4+2x_5=0.\end{cases}$$

Виключимо x_4 в третьому рівнянні

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 - x_5 = -3x_2 + x_3, \\ 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ -\frac{8}{3}x_5 = 0. \end{cases}$$

Із останнього рівняння знаходимо, що $x_5 = 0$, а значить, і $x_4 = 0$ (із другого рівняння). З першого рівняння одержимо

$$x_1 = -3x_2 + x_3.$$

Таким чином, $x_1 = -3x_2 + x_3;\ x_4 = x_5 = 0.$

При довільних значеннях вільних невідомих x_2 та x_3 одержимо відповідні значення базисних невідомих. Наприклад, один із часткових розв'язків такий:

$$x_1 = -2; x_2 = 1; x_3 = 1; x_4 = 0; x_5 = 0.$$

ТЕОРЕМА. Якщо визначник Δ (1.9) системи n лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь з n невідомими дорівнює нулю, а серед алгебраїчних доповнень A_{ij} $(i = 1,2,...,n;\ \ j = 1,2,...,n)$ елементів i – го рядка є ненульові, то ця система має ненульовий розв'язок: $x_j = A_{ij} \cdot t$. (1.10)

Тут t- деякий параметр.

Доведення. Підставивши розв'язок (1.10) в систему рівнянь (1.8) при $m = n$, одержимо:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = (a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + ... + a_{kn}A_{in})t = 0 \cdot t = 0,$$

при $k \neq i$ (за теоремою анулювання);

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = (a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in})t = \Delta \cdot t = 0,$$

при $k = i$ (за умовою теореми).

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 12 + 5 - 6 - 9 - 20 = 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів, наприклад, першого рядка:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}6 & 5\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-2,\ A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-4,\ A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 4\end{vmatrix}=6.$$

Задана система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь має розв'язок

$x_1=-2t;\ x_2=-4t;\ x_3=6t,$ який залежить від параметра t.

§15. Деякі економічні задачі

◙ **Задача міжгалузевого балансу**

В деяких задачах макроекономіки ставиться питання про ефективне ведення багатогалузевого господарства. Тут кожна галузь є і виробником , і споживачем деякої продукції (як своєї, так і продукції, виробленої іншими галузями).

Однак, з економічної точки зору, міжгалузевий баланс є більш ефективним у вартісному виразі. При цьому об'єднання окремих галузей у підгрупи полегшує складання балансів продукції.

Введемо такі позначення:

x_i - загальна вартість продукції, виробленої в i-ій галузі (план валового випуску продукції) $(i=1,2,\ldots,n)$;

x_{ij} - вартість продукції $i-$ої галузі, необхідної для випуску продукції $j-$го підрозділу ($j=1,2,...,n$);

y_i - вартість продукції $i-$ої галузі, призначеної для реалізації (кінцевий продукт).

Прямі витрати одиниць $i-$ої галузі, які використовуються для випуску одиниці виробу продукції $j-$ої галузі, а також кінцевий продукт задані таблицею:

Вартість продукції	Прямі витрати				Кінцевий продукт
	1	**2**	**…**	n	
x_1	x_{11}	x_{12}	…	X_{1n}	y_1
x_2	x_{21}	x_{22}	…	X_{2n}	y_2
…	…	…	…	…	…
x_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	y_n

Зв'язок між цими величинами запишемо у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + y_1, \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + y_n. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи називаються **балансовими.**

Позначимо a_{ij} - вартість продукції $i-$ої галузі , необхідної для випуску одиниці продукції $j-$ої галузі:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Матриця, складена із величин a_{ij}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{array}{c}\text{називається} \\ \textbf{матрицею прямих} \\ \textbf{витрат,}\end{array}}$$

а її елементи – **коефіцієнтами прямих витрат**.

Враховуючи, що $x_{ij} = a_{ij} x_j$, вихідна система запишеться так:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = y_1, \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) = y_n. \end{cases}$$

Позначимо через

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ і назвемо **вектор-планом** X, а $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$ і назвемо **вектором кінцевих продуктів** Y .

Попередня система запишеться у вигляді матричного рівняння $\boldsymbol{X - AX = Y}$, або $\boldsymbol{EX - AX = Y}$, звідси $\boldsymbol{(E - A)X = Y}$,

де $\boldsymbol{E}$ - одинична матриця.

Позначимо $\boldsymbol{E - A = B}$, тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь запишеться так $\boldsymbol{BX = Y}$.

Помножимо з лівого боку обидві частини рівняння на $\boldsymbol{B^{-1}}$: $\boldsymbol{B^{-1}BX = B^{-1}Y}$. Звідси $\boldsymbol{X = B^{-1}Y}$.

Тобто вектор-план $\boldsymbol{X}$ можна знайти, помноживши $\boldsymbol{B^{-1}}$ на вектор кінцевих продуктів.

Матриця $\boldsymbol{B^{-1}}$ називається **матрицею повних витрат**. Елементи цієї матриці включають прямі і непрямі витрати.

Задача 1. Прямі витрати трьох галузей виробництва, а також обсяги кінцевих продуктів (у грошових одиницях) задані у таблиці:

Продукція цехів	Прямі витрати			Кінцевий продукт
	1	**2**	**3**	
1	0,2	0,3	0,1	50
2	0,4	0,2	0,5	80
3	0,1	0,3	0,6	100

Потрібно знайти:

1) матрицю повних витрат;
2) план кожної галузі;
3) виробничу програму галузей;
4) коефіцієнти непрямих витрат.

Розв'язування. Із таблиці видно, що матриця прямих витрат буде:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}}.$$

Позначимо через $\boldsymbol{X}$ - вектор - план галузей виробництва, $\boldsymbol{Y}$ - вектор кінцевих продуктів:

$$\boldsymbol{X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \; Y = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix}}.$$

Зв'язок між величинами, записаних в таблиці представимо у вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1-(0{,}2x_1+0{,}3x_2+0{,}1x_3)=50, \\ x_2-(0{,}4x_1+0{,}2x_2+0{,}5x_3)=80, \\ x_3-(0{,}1x_1+0{,}3x_2+0{,}6x_3)=100. \end{cases}$$

В матричній формі маємо : $\boldsymbol{X-AX=Y}$, або $\boldsymbol{(E-A)X=Y}$.

Позначимо $\boldsymbol{E-A=B}$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь запишеться в матричній формі:$\boldsymbol{BX=Y}$. Звідси $\boldsymbol{X=B^{-1}Y}$.

В нашій задачі

$$E-A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & 0{,}4 \end{bmatrix}=B.$$

Для знаходження оберненої $\boldsymbol{B^{-1}}$до матриці $\boldsymbol{B}$, обчислимо визначник:

$$|B|=\begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}8 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{vmatrix}=0{,}256-0{,}015-0{,}012-0{,}008-$$

$$-0{,}048-0{,}12=0{,}053.$$

Тому для матриці $\boldsymbol{B}$ існує обернена $\boldsymbol{B^{-1}}$. Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці $\boldsymbol{B}$:

$$b_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 \\ -0{,}3 & 0{,}4 \end{vmatrix}=0{,}32-0{,}15=0{,}17;$$

$$b_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} -0{,}4 & -0{,}5 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{vmatrix}=-(-0{,}16-0{,}05)=0{,}11;$$

$$b_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} -0{,}4 & 0{,}8 \\ -0{,}1 & -0{,}3 \end{vmatrix}=0{,}12+0{,}08=0{,}2;$$

$$b_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} -0{,}3 & -0{,}1 \\ -0{,}3 & 0{,}4 \end{vmatrix}=-(-0{,}12-0{,}03)=0{,}15;$$

$$b_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}4 \end{vmatrix}=0{,}32-0{,}01=0{,}31;$$

$$b_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}3 \end{vmatrix}=-(-0{,}24-0{,}03)=0{,}27;$$

$$b_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-0,3 & -0,1\\ 0,8 & -0,5\end{vmatrix}=0,15+0,08=0,23;$$

$$b_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}0,8 & -0,1\\ -0,4 & -0,5\end{vmatrix}=-(-0,4-0,04)=0,44;$$

$$b_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}0,8 & -0,3\\ -0,4 & 0,8\end{vmatrix}=0,64-0,12=0,52.$$

Матриця з цих алгебраїчних доповнень буде:

$$\begin{bmatrix}0,17 & 0,11 & 0,2\\ 0,15 & 0,31 & 0,27\\ 0,23 & 0,44 & 0,52\end{bmatrix},$$

а приєднана
$$B^{П}=\begin{bmatrix}0,17 & 0,15 & 0,23\\ 0,11 & 0,31 & 0,44\\ 0,2 & 0,27 & 0,52\end{bmatrix}.$$

Обернена матриця має вигляд :

$$B^{-1}=\frac{1}{0,053}\begin{bmatrix}0,17 & 0,15 & 0,23\\ 0,11 & 0,31 & 0,44\\ 0,2 & 0,27 & 0,52\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}3,21 & 2,83 & 4,34\\ 2,08 & 5,85 & 8,3\\ 3,77 & 5,09 & 9,81\end{bmatrix}.$$

Елементи цієї матриці B^{-1} - це коефіцієнти повних витрат, а сама матриця є матрицею коефіцієнтів повних витрат.

2) Для знаходження плану кожної галузі, помножимо B^{-1} на вектор кінцевих продуктів Y :

$$X=B^{-1}Y=\begin{bmatrix}3,21 & 2,83 & 4,34\\ 2,08 & 5,85 & 8,3\\ 3,77 & 5,09 & 9,81\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\ 80\\ 100\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}821\\ 1402\\ 1577\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.$$

Значить: $x_1=821; x_2=1402; x_3=1577.$

Отже, якщо відомо обсяг кінцевої продукції (у грошових одиницях) $y_1=50; y_2=80; y_3=100,$ то потрібно запланувати такі обсяги виробництва для першої галузі - 821, для другої - 1402 і для третьої - 1577.

3) Для знаходження виробничої програми кожної галузі, знайдемо добуток коефіцієнтів прямих витрат і валового випуску продукції:

$$x_{11}=a_{11}x_1=0,2\cdot 821=164,2;\ x_{12}=a_{12}x_2=0,3\cdot 1402=420,6;$$

$$x_{13} = a_{13}x_3 = 0{,}1 \cdot 1577 = 157{,}7; \; x_{21} = a_{21}x_1 = 0{,}1 \cdot 821 = 82{,}1;$$
$$x_{22} = a_{22}x_2 = 0{,}2 \cdot 1402 = 280{,}4; \; x_{23} = a_{23}x_3 = 0{,}5 \cdot 1577 = 788{,}5;$$
$$x_{31} = a_{31}x_1 = 0{,}1 \cdot 821 = 82{,}1; \; x_{32} = a_{32}x_2 = 0{,}3 \cdot 1402 = 420{,}6;$$
$$x_{33} = a_{33}x_3 = 0{,}6 \cdot 1577 = 946{,}2.$$

Різниця між матрицею повних витрат B^{-1} і матрицею прямих витрат A визначає матрицю непрямих (посередницьких) витрат C:

$$C = B^{-1} - A = \begin{bmatrix} 3{,}21 & 2{,}83 & 4{,}34 \\ 2{,}08 & 5{,}85 & 8{,}3 \\ 3{,}77 & 5{,}09 & 9{,}81 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 3{,}01 & 2{,}53 & 4{,}24 \\ 1{,}68 & 5{,}65 & 7{,}8 \\ 3{,}67 & 4{,}79 & 9{,}21 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, елементи c_{ij} матриці C і є коефіцієнтами непрямих (посередницьких) витрат.

Задача 2. (**задача знаходження витрат сировини, палива та трудових ресурсів**.) Використовуючи вихідні дані і результати обчислень попередньої задачі 1, потрібно знайти:

1. Сумарні витрати сировини, палива і трудових ресурсів для виконання програми виробництва.
2. Коефіцієнти прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожної галузі.
3. Повні витрати сировини, палива і праці окремими галузями і господарством в цілому.
4. Внутрівиробничі витрати галузей.
5. Внутрівиробничі витрати на кожну одиницю товарної продукції.

При цьому відомі витратні норми сировини і палива на виробництво одиниці продукції кожної галузі, трудомісткість в людино-годинах на одиницю продукції, їх вартість і представлені таблицею:

Показники	Норми витрат цехів			Вартість
	1	**2**	**3**	
Сировина	0,8	1	1,2	6
Паливо	3	1,5	2	4
Трудомісткість	8	5	5	1,5

Розв'язування. Запишемо матрицю D, складену із норм витрат сировини, палива та праці, а також матрицю-рядок P вартостей цих показників. $D = \begin{bmatrix} 0,8 & 1 & 1,2 \\ 3 & 1,5 & 2 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, $P = [6 \quad 4 \quad 1,5]$.

Запишемо також результати обчислень попередньої задачі:

$$X = \begin{bmatrix} 821 \\ 1402 \\ 1577 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3,21 & 2,83 & 4,34 \\ 2,08 & 5,85 & 8,3 \\ 3,77 & 5,09 & 9,81 \end{bmatrix},$$

де X - матриця-стовпець плану валового випуску продукції;
B^{-1} - матриця коефіцієнтів повних витрат.

1) Перемноживши матрицю D норм витрат сировини, палива та праці і матрицю-стовпець плану валового випуску продукції X, одержимо матрицю-стовпець сумарних витрат сировини, палива і трудових ресурсів:

$$D \cdot X = \begin{bmatrix} 0,8 & 1 & 1,2 \\ 3 & 1,5 & 2 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 821 \\ 1402 \\ 1577 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 \cdot 821 + 1 \cdot 1402 + 1,2 \cdot 1577 \\ 3 \cdot 821 + 1,5 \cdot 1402 + 2 \cdot 1577 \\ 8 \cdot 821 + 5 \cdot 1402 + 5 \cdot 1577 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 3951 \\ 7720 \\ 21463 \end{bmatrix}.$$

Отже, для виконання програми виробництва потрібно витратити 3951 одиниць сировини, 7720 одиниць палива і 21463 робочих людино-годин.

2) Добуток матриці D норм витрат сировини, палива та праці і матриці коефіцієнтів повних витрат B^{-1} визначає матрицю коефіцієнтів прямих витрат сировини, палива та праці на одиницю продукції кожної галузі:

$$V = D \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8 & 1 & 1,2 \\ 3 & 1,5 & 2 \\ 8 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,21 & 2,83 & 4,34 \\ 2,08 & 5,85 & 8,3 \\ 3,77 & 5,09 & 9,81 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} 9{,}17 & 14{,}22 & 23{,}54 \\ 20{,}29 & 27{,}45 & 45{,}09 \\ 54{,}93 & 77{,}34 & 125{,}27 \end{bmatrix}.$$

Тут елементи першого стовпця означають кількість витрат сировини, другого – палива і третього – робочих людино-годин, які потрібні для виготовлення одиниці продукції 1-ї, 2-ї і 3-ї галузей.

3) Добутки матриць-стовпців норм витрат сировини, палива та праці і планового випуску продукції виражають витрати сировини, палива та праці кожного із трьох галузей:

$$\boldsymbol{\Pi_1} = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot 821 = \begin{bmatrix} 656{,}8 \\ 2463 \\ 6568 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{\Pi_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot 1402 = \begin{bmatrix} 1402 \\ 2103 \\ 7010 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\Pi_3} = \begin{bmatrix} 1{,}2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot 1577 = \begin{bmatrix} 1892{,}4 \\ 3154 \\ 7885 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, матриця повних витрат сировини, палива та праці по трьох галузях має вигляд:

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} 656{,}8 & 1402 & 1892{,}4 \\ 2463 & 2103 & 3154 \\ 6568 & 7010 & 7885 \end{bmatrix}.$$

4) Перемноживши матрицю-рядок вартостей сировини, палива та праці на матрицю повних витрат цих показників одержимо матрицю-рядок вартостей витрат кожної із трьох галузей:

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\Pi} = [6 \quad 4 \quad 1{,}5] \cdot \begin{bmatrix} 656{,}8 & 1402 & 1892{,}4 \\ 2463 & 2103 & 3154 \\ 6568 & 7010 & 7885 \end{bmatrix} = [14778 \quad 27339 \quad 35797{,}9].$$

Це означає, що вартість витрат першої галузі становить 14778 одиниць, другої – 27339 і третьої – 35797,9.

5) Добуток матриці-рядка вартостей $\boldsymbol{P}$ на матрицю прямих витрат $\boldsymbol{V}$ сировини, палива та праці дає внутрівиробничі витрати на кожну одиницю товарної продукції:

$$\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{V} = [6 \quad 4 \quad 1{,}5] \cdot \begin{bmatrix} 9{,}17 & 14{,}22 & 23{,}54 \\ 20{,}29 & 27{,}45 & 45{,}09 \\ 54{,}93 & 77{,}34 & 125{,}27 \end{bmatrix} = [218{,}58 \quad 311{,}13 \quad 509{,}51].$$

Задача 3. Для виготовлення дитячих іграшок використовуються відходи полотняних матеріалів (M_1, M_2, M_3) різних розмірів. Обчислити кількість матеріалу, який витрачається при розкрої трьома способами, якщо кількість заготовок одержаних з кожного матеріалу, а також кількість необхідних заготовок представлена таблицею:

Вид заготовки	Спосіб розкрою			Кількість заготовок
	1	**2**	**3**	
M_1	1	2	3	126
M_2	2	3	3	134
M_3	4	3	3	189

Розв'язування. Якщо x_1, x_2, x_3 - кількість вихідного матеріалу (M_1, M_2, M_3), який використовується для розкрою відповідно першим, другим і третім способами, то для виконання поставленої мети, потрібно розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 126, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 134, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 189. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса. Виключимо невідому величину x_1 із другого і третього рівнянь. Для цього помножимо перше рівняння на "-2", "-4" і додамо відповідно до другого і третього рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 126, \\ x_2 + 4x_3 = 118, \\ -5x_2 - 9x_3 = -315. \end{cases}$$

Виключимо невідому x_2 із третього рівняння. При цьому помножимо друге рівняння на "5" і додамо до третього рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 126, \\ x_2 + 4x_3 = 118, \\ 11x_3 = 275. \end{cases}$$

Звідси, розв'язок системи лінійних рівнянь буде $x_1=15; x_2=18; x_3=25.$ Отже, при певних методах розкрою матеріалу, потрібно мати 15 шт. матеріалу M_1, 18 шт. матеріалу M_2 і 25 шт. матеріалу M_3

Задача 4. Для виготовлення чотирьох видів продукції $\boldsymbol{P_1, P_2, P_3, P_4}$ використовуються три види сировини $\boldsymbol{S_1, S_2, S_3}$. Норми витрат і запаси сировини наведені в таблиці:

Сировина	Витрати сировини на одиницю продукції				Запаси сировини
	$\boldsymbol{P_1}$	$\boldsymbol{P_2}$	$\boldsymbol{P_3}$	$\boldsymbol{P_4}$	
S_1	3	2	2	1	14
S_2	2	5	2	3	15
S_3	1	2	2	3	10

Визначити кількість продукції $\boldsymbol{P_1, P_2, P_3, P_4}$, якщо ресурси повністю вичерпані.

Розв'язування. Позначимо через $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_4}$ кількість одиниць продукції $\boldsymbol{P_1, P_2, P_3, P_4}$. Умову нашої задачі можна записати у вигляді системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 14, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Жордана-Гаусса в табличній формі. В якості першої таблиці запишемо коефіцієнти, які стоять біля невідомих і стовпчик з вільних членів. Стовпець ($\boldsymbol{\Sigma}$) є контрольним, який представляє суму чисел відповідного рядка.

Таблиця	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$\sum$	
1	3	2	2	1	14	22	
	2	5	2	3	15	27	
	$\boxed{1}$	2	2	3	10	18	×(-2),(-3)
2	0	-4	-4	-8	-16	-32	
	0	$\boxed{1}$	-2	-3	-5	-9	×(-2),(4)
	1	2	2	3	10	18	
3	0	0	$\boxed{-12}$	-20	-36	-68	×(-1/12)
	0	1	-2	-3	-5	-9	
	1	0	6	9	20	36	
4	0	0	1	$\boldsymbol{\frac{5}{3}}$	3	$\boldsymbol{\frac{17}{3}}$	×(-6),(2)
	0	1	0	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	1	$\boldsymbol{\frac{7}{3}}$	
	1	0	0	-1	2	2	

Таблиця 1. За ключовий елемент взято число “1” в третьому рядку і першому стовпці. Для утворення нулів в ключовому стовпці на місці чисел “2”, “3”, помножимо елементи ключового рядка на “-2” і “-3”, і додамо відповідно до елементів другого і першого рядків. Цим виключимо невідому x_1 в першому і другому рівняннях.

Таблиця 2. В якості ключового елемента візьмемо число “1” (другий рядок і другий стовпець). Помножимо елементи другого рядка на числа “4” і“-2” і додамо до елементів першого і третього рядків. При цьому відбувся процес виключення невідомої x_2 в першому і третьому рівняннях.

Таблиця 3. За ключовий елемент візьмемо число “-12”. Поділимо на нього всі елементи першого рядка. Запишемо одержані числа елементами першого рядка наступної таблиці.

Таблиця 4. Помножимо елементи першого рядка на “-6” і “2”і додамо до елементів третього і другого рядків таблиці 3.

Результати обчислень запишемо другим і третім рядком цієї таблиці. Одержані нулі третього стовпця виражають виключення невідомої x_3 із другого і третього рівнянь.

Останній таблиці відповідає система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_3 + \frac{5}{3}x_4 = 3, \\ x_2 + \frac{1}{3}x_4 = 1, \\ x_1 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Вона сумісна за теоремою Кронекера-Капеллі, оскільки ранг основної і розширеної матриць рівні 3. Так як це число (3) менше, ніж кількість невідомих (4), то система лінійних рівнянь має безліч розв’язків. Невідомі x_1, x_2, x_3 є базисними, оскільки визначник складений із коефіцієнтів, які стоять біля невідомих, відмінний від нуля.

Тому
$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_4, \\ x_2 = 1 - \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 = 3 - \frac{5}{3}x_4. \end{cases}$$

Оскільки x_1, x_2, x_3 виражають кількість реалізованої продукції, тому $x_i \geq 0.$ Значить

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_4 \geq 0, \\ x_2 = 1 - \frac{1}{3}x_4 \geq 0, \\ x_3 = 3 - \frac{5}{3}x_4 \geq 0, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x_4 \geq -2, \\ -\frac{1}{3}x_4 \geq -1, x_4 \leq 3, \\ -\frac{5}{3}x_4 \geq -3, -5x_4 \geq -3, x_4 \leq \frac{9}{5}. \end{cases}$$

Із останньої системи випливає, що $-2 \leq x_4 \leq \frac{9}{5}$.

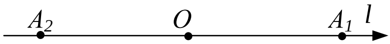
Отже, довільному значенню $x_4 \in \left[-2; \frac{9}{5}\right]$ відповідає невід’ємний розв’язок , який задовольняє умову задачі. Наприклад, для $x_4 = 0, x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3.$

Розділ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ І ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Аналітична геометрія є розділ математики, яка вивчає властивості геометричних фігур алгебраїчними методами. Уже в середній школі до геометрії застосовують алгебру при розв’язуванні багатьох питань. Ще в ***XYII*** ст. французький математик Рене Декарт розробив метод координат, який є апаратом аналітичної геометрії. Цей метод дає можливість визначити положення точки на прямій, на площині, на поверхні, а форму ліній і поверхонь задати за допомогою рівнянь, які пов’язують координати їх точок.

§1. Метод координат на прямій та його застосування

Розглянемо горизонтальну пряму лінію ***l*** на площині (мал.1). На цій прямій ***l*** візьмемо нерухому точку ***O***, що називається початком відліку. Ця точка розбила пряму на два взаємно протилежні напрямки: додатній – вправо і від’ємний – вліво. Взявши деяку одиницю масштабу, вправо від точки ***O***відкладаємо додатні числа, а вліво – від’ємні числа. Ці числа відповідають деяким точкам на прямій ***l*** і навпаки, отже між точками прямої ***l*** та дійсними числами існує взаємно однозначна відповідність. Таку пряму ***l*** будемо називати числовою віссю ***Ox***. Точці ***O***, що вважається початком відліку , відповідає число нуль.



Мал.1

Таким чином, ми побудували систему координат на прямій. Візьмемо деяку точку ***A*** на числовій осі. Цій точці відповідає деяке число ***x***, яке називається координатою точки ***A***. Це записується ***A(x)***.

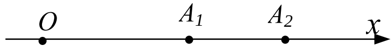
Будемо вважати відрізок $\overline{OA_1}$, що відкладений праворуч від точки ***O*** за додатній, а відрізок $\overline{OA_2}$ відкладений ліворуч від точки ***O***- за від’ємний (мал.1).

Відрізок, у якого ***A*** початок, а ***B*** кінець, позначають $\overline{AB}$ і називають напрямленим відрізком. Величину відрізка $\overline{AB}$ будемо позначати символом ***AB***.

<u>Означення.</u> Відрізки, які характеризуються не тільки своєю довжиною, але й напрямом називаються напрямленими відрізками.

Величина напрямленого відрізка є його довжина, взята з певним знаком.

Візьмемо на осі x -ів дві точки A_1 і A_2 відповідно з координатами x_1 і x_2, тоді і відрізкам $\overline{OA_1}$ і $\overline{OA_2}$ будуть відповідати числа x_1 і x_2 (мал.2).



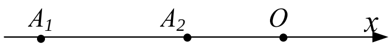
Мал.2

Покажемо, що при будь-якому розташуванні точок A_1 і A_2 відносно точки O величина відрізка A_1A_2 буде дорівнювати $x_2 - x_1$, тобто

$$A_1A_2 = x_2 - x_1 \tag{2.1}$$

Дійсно, нехай точки A_1 і A_2 розташовані так як на мал.2. Тоді $A_1A_2 = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1$.

Коли точки A_1 і A_2 розташовані так, як на мал.3,



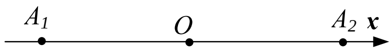
Мал.3

то $A_1A_2 = A_1O - A_2O;$ але $A_1O = -OA_1$ і $A_2O = -OA_2$

Одержимо

$A_1A_2 = -OA_1 - (-OA_2) = x_2 - x_1$.

Нехай A_1 і A_2 розташовані по різні сторони відносно точки O (мал.4).



Мал.4

Значить $A_1A_2 = A_1O + OA_2 = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1$.

Якщо $x_1 = 3$, а $x_2 = -5$, то величина відрізка буде $A_1A_2 = -5 - 3 = -8.$

Довжина відрізка A_1A_2 позначається через $|A_1A_2|$ і дорівнює

$$|A_1A_2| = |x_2 - x_1| \tag{2.2}$$

Висновок. Якщо на прямій в деякій системі координат задано дві точки $A_1(x_1)$ і $A_2(x_2)$, тоді величина відрізка A_1A_2 знаходиться із рівності (2.1), а віддаль (довжина) між цими точками за формулою (2.2).

Приклад 1. Задано точки $A(2), B(-7), C(-3)$.

Знайти величину відрізків AB, CB.

Розв'язування. За формулою (2.1) одержуємо: $AB = -7 - 2 = -9$. $CB = -7 - (-3) = -7 + 3 = -4.$

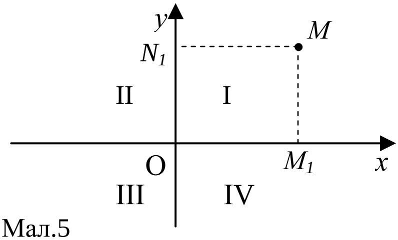
Приклад 2. Знайти віддаль між точками $A(3),\ B(7).$

Розв'язування. За формулою (2.2) одержимо $d = |AB| = |7 - 3| = 4.$

§2. Прямокутна система координат на площині та її застосування

Положення точки на прямій, як ми бачили, визначається одним числом – її координатою, а положення точки на площині, як ми побачимо, визначається упорядкованою парою чисел (тобто вказано яке із чисел є першим, а яке другим).

Візьмемо на площині дві взаємно перпендикулярні осі і назвемо їх осями координат (мал.5).



Мал.5

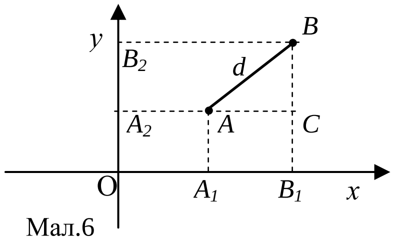
Точка перетину осей координат O називається початком координат. Осі координат (Ox - вісь абсцис, горизонтальна, Oy – вісь ординат, вертикальна). Осі координат Ox і Oy ділять площину на чотири частини, які називаються квадрантами (або координатними кутами). Частина площини, що міститься між додатними осями Ox і Oy називається першим квадрантом. Нумерація квадрантів іде проти годинникової стрілки.

Нехай точка M - довільна точка площини. Опустимо з цієї точки перпендикуляри на вісь Ox і Oy, основи цих перпендикулярів позначимо відповідно через M_1 і N_1, тобто M_1 і N_1 є проекціями точки M на координатні осі. Позначимо координату точки M_1 на осі Ox через x, а координату точки N_1 на осі Oy через y. Числа (x, y) назвемо координатами точки M на площині (x – абсциса, y - ордината) . Це позначимо $M\ (x, y)$.

Таким чином, система координат на площині встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною всіх точок площини і множиною всіх упорядкованих пар дійсних чисел.

◙ ***Найпростіші задачі на застосування методу координат.***

а) Віддаль між двома точками на площині.



Мал.6

Нехай задані дві точки з своїми координатами: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$. Треба знайти віддаль між цими точками. Зробимо малюнок (мал.6).

Точки A і B спроектуємо на координатні осі. Їх проекції на вісь Ox позначимо відповідно через A_1 і B_1, а на вісь Oy - відповідно через A_2 і B_2.

Тоді $OA_1 = x_1,\ OB_1 = x_2,\ OA_2 = y_1,\ OB_2 = y_2$.

Через точку A проведемо пряму, паралельну осі абсцис до перетину з прямою BB_1 в точці C. З одержаного прямокутного трикутника ABC за теоремою Піфагора знаходимо

$$d^2 = |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2.$$

На основі формули (2.2) дану рівність перепишемо так:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2, \text{ або } d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2.3)$$

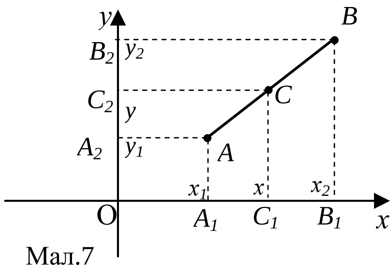
Знак перед коренем у формулі (2.3) береться (+) тому, що віддаль – величина додатна.

Зауваження. Різниця координат у формулі (2.3) підноситься до квадрату і тому немає значення, яку точку вважати першою, а яку другою.

Приклад . Знайти віддаль між точками $A(4;5)$ і $B(9;-7)$.

Розв'язування. За формулою (2.3) знаходимо

$$d = \sqrt{(9-4)^2 + (-7-5)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$$



Мал.7

б) Поділ відрізка в заданому відношенні.

Нехай на площині задано дві довільні точки $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$ Вважаємо $A(x_1,y_1)$ першою точкою, а $B(x_2,y_2)$ другою точкою. Проведемо через ці точки пряму(мал.7).

Нехай точка $C(x,y)$ лежить

на відрізку AB і ділить його на два відрізки AC і CB, причому відношення їх дорівнює λ, тобто $\lambda = \frac{AC}{CB}$ (число λ відоме). Випадок, коли точка C співпадає з точкою B виключаємо, бо знаменник перетворюється в нуль. Наша задача полягає в тому, щоб знайти координати точки $C(x, y)$ через координати точок $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. та число λ.

Спроектуємо точки A, C та B на координатну вісь Ox (мал.7) і позначимо їх проекції через A_1, C_1 та B_1. Використовуючи теорему про пропорційні відрізки, що містяться між паралельними прямими, одержимо $\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{AC}{CB} = \lambda.$ Відомо, що $A_1C_1 = x - x_1$, $C_1B_1 = x_2 - x$, тоді $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$ Розв'язуючи цю рівність відносно x, знаходимо $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$

Аналогічно, спроектувавши точки A, C та B на координатну вісь Oy (мал.7) і зробивши необхідні викладки, як вище, знаходимо ординату точки C: $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$

Отже, координати точки $C(x, y)$, яка ділить відрізок AB
у відношенні λ (рахуючи від A до B), обчислюються за формулами

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Якщо точка C є серединою відрізка AB, то $\lambda = 1$ і тоді

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Зауваження. При одержанні формул (2.4) ми допускали, що відрізок $\overline{AB}$ не паралельний ні одній з осей координат. Однак одержані формули (2.4) справедливі і тоді , коли відрізок $\overline{AB}$ паралельний вісі $Ox\,(y = y_1 = y_2)$, або осі $Oy\,(x = x_1 = x_2)$.

Крім цього, все викладене вище справедливе й тоді, коли точка $C(x, y)$ знаходиться зовні $\overline{AB}$, тобто на його продовженні.

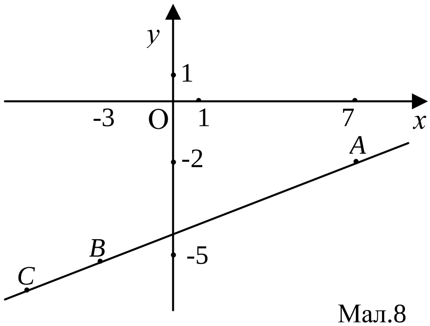
Приклад 1. Дано дві точки $A(7;-2)$ і $B(-3;-5)$. На продовженні прямої $\overline{AB}$ знайти точку $C(x,y)$, віддаль від якої до точки A в п'ять раз більша за віддаль до точки B. Знайти довжину $|AC|$.

Розв'язування. Зробимо малюнок.

За умовою задачі (мал.8) $\lambda = \dfrac{AC}{CB} = -5.$ Тепер за формулою (2.4) знаходимо

$$x = \frac{7+(-5)(-3)}{1+(-5)} = \frac{22}{-4} = -\frac{11}{2},$$

$$y = \frac{-2+(-5)(-5)}{1+(-5)} = \frac{23}{-4} = -\frac{23}{4}.$$



Мал.8

Значить, точка $C(-\frac{11}{2};-\frac{23}{4})$.

Довжину $|AC|$ знаходимо за формулою (2.3)

$$|AC| = \sqrt{(7+\frac{11}{2})^2 + (-2+\frac{23}{4})^2} = \frac{5\sqrt{19}}{4}.$$

Приклад 2. Знаючи координати вершин трикутника $A(2;3), B(-4;5)$ і $C(-2;-5)$, знайти точку M перетину медіан трикутника.

Розв'язування. Координати точки D (середина сторони BC) буде $x_D = \dfrac{-4-2}{2} = -3$, $y_D = \dfrac{5-5}{2} = 0$, тобто $D(-3;0)$.

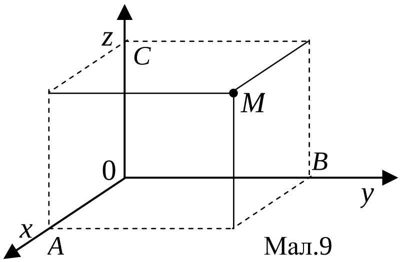
Шукана точка M ділить кожну медіану у відношенні $\lambda = 2:1$, рахуючи від вершини. Тепер підставляючи у формули (2.4) $\lambda = 2$ та координати точок A і D, знайдемо координати шуканої точки M.

$$x_M = \frac{2+(-3)\cdot 2}{1+2} = \frac{2-6}{3} = -\frac{4}{3}; \quad y_M = \frac{3+0\cdot 2}{1+2} = \frac{3}{3} = 1.$$

Отже, $$M\left(-\frac{4}{3};1\right).$$

§3. Декартова прямокутна система координат в просторі

Положення точки в просторі будемо визначати відносно прямокутної системи координат в просторі. Дана система $Oxyz$ складається із трьох взаємно перпендикулярних осей Ox, Oy та Oz, які перетинаються в одній точці O, яка називається початком координат. Вісь Ox називається віссю абсцис, вісь Oy - віссю ординат і вісь Oz - віссю аплікат.



Мал.9

Нехай точка M є довільною точкою простору (мал.9).

Знайдемо проекції точки M на координатні осі. Для цього через точку M проведемо три площини, які будуть перпендикулярні до координатних осей Ox, Oy та Oz. Нехай ці площини перетинають вісі Ox, Oy і Oz відповідно в точках A, B і C. Тоді координата x точки A на осі Ox називається абсцисою точки M, координата y точки B на числовій вісі Oy називається ординатою точки M, а координата z точки C на числовій вісі Oz називається аплікатою точки M. Значить, величини направлених відрізків OA, OB та OC, тобто числа x,y,z є координатами точки M.

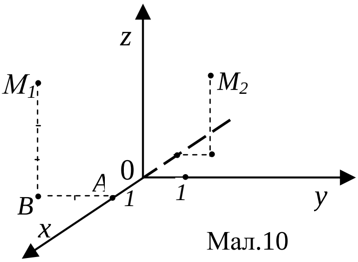
Таким чином, в даній системі координат кожній точці M простору відповідає єдина упорядкована трійка чисел $(x;y;z)$. В цьому записі x означає перше число, y - друге, z - третє. І навпаки, кожній упорядкованій трійці чисел $(x;y;z)$ відповідає тільки одна точка простору M. Отже, прямокутна система координат в просторі встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною всіх точок простору і множиною упорядкованих трійок чисел.

Площини Oxy, Oyz, і Oxz називаються координатними площинами і поділяють весь простір на вісім частин.

Приклад 1. Побудувати точки $M_1(1;-2;3)$, $M_2(-1;1;2)$.

Розв'язування. На вісі $\boldsymbol{Ox}$ відкладаємо відрізок $\boldsymbol{OA=1}$. Через точку $\boldsymbol{A}$ проводимо пряму, паралельну вісі $\boldsymbol{Oy}$ і на ній відкладаємо відрізок $\boldsymbol{AB= -2}$. Через точку $\boldsymbol{B}$ проводимо пряму, паралельну вісі $\boldsymbol{Oz}$ і відкладаємо відрізок $\boldsymbol{BM_1}=3$

Кінець цього відрізка дає шукану точку $\boldsymbol{M_1}$ (мал.10). Точка $\boldsymbol{M_2(-1;1;2)}$ будується аналогічно.



Мал.10

§ 4. Скалярні і векторні величини

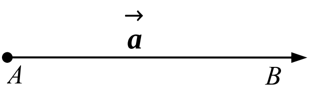
У фізиці, математиці, економіці і інших науках зустрічаються величини двох видів: одні з них характеризуються тільки числом, а інші – числом і напрямом в просторі.

Величини називаються скалярними або скалярами, якщо кожна із них визначається своїм числовим значенням у вибраній системі одиниць, наприклад, довжина, площа, об'єм, час, температура.

Величини називаються векторними або векторами, якщо кожна із них визначається числовим значенням і напрямом. Наприклад, сила, швидкість, прискорення.

***Означення*. Напрямлений відрізок прямої називається вектором.**

Вектор будемо позначати символом $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$. Перша буква означає початок вектора, а друга – його кінець. Вектор також будемо позначати однією малою буквою з стрілкою на верху, наприклад $\vec{\boldsymbol{a}}$ (мал.11).



Мал.11

Якщо початок і кінець вектора співпадають, то вектор називається нульовим і позначається $\vec{\boldsymbol{0}}$ або просто $\boldsymbol{0}$.Віддаль між початком і кінцем вектора називається його довжиною , або модулем і позначається $|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|$ або $|\vec{\boldsymbol{a}}|$.

Ми будемо вивчати вільні вектори. Такий вектор можна переносити по його лінії дії або паралельно самому собі.

***Означення.* Вектори, які знаходяться на паралельних прямих, або на одній і тій же прямій, називаються колінеарними.**

<u>Означення.</u> Вектори, які знаходяться на паралельних площинах або на одній і тій же площині, називаються компланарними.

Відповідно, компланарні вектори, які приведені до одного і того ж початку, будуть знаходитися на одній площині.

<u>Означення.</u> Два вектори рівні, якщо вони однаково напрямлені і модулі їх рівні .

<u>Означення</u>. Два вектори, в яких модулі рівні, а напрямки протилежні, називаються протилежними $\vec{a}$ і $(-\vec{a})$.

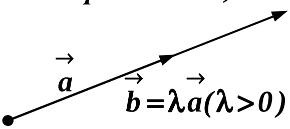
Одиничний вектор (орт) вектора $\vec{a}$ дорівнює $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ і позначається так:

$$\vec{a}^{\circ} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

§5.Дії над векторами

а) Добуток вектора на число.

<u>Означення 1.</u> Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, який має довжину $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$ і напрям його співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$ і протилежний йому, якщо $\lambda < 0$ (мал.12).



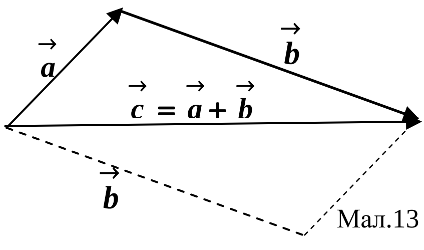
Мал.12

Умова $$\vec{b} = \lambda\vec{a} \qquad (2.6)$$

є умовою колінеарності двох векторів.

б) Додавання векторів.

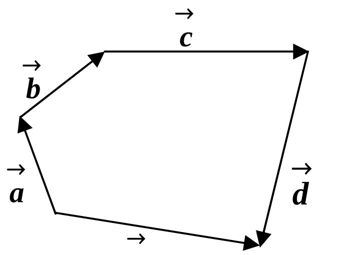
<u>Означення 2.</u> Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, а кінець співпадає з кінцем вектора $\vec{b}$, при умові що початок вектора $\vec{b}$ співпадає з кінцем вектора $\vec{a}$ (правило трикутника) (мал.13).



Мал.13

Зрозуміло, що вектор $\vec{c}$ в цьому випадку є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (правило паралелограма) (мал.13).

Для векторної суми справедливий переставний закон $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

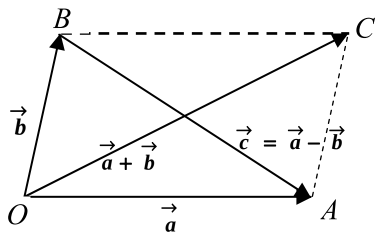


Мал.14

Легко переконатися, що для векторної суми має місце сполучний закон. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Виходячи з означення 2, легко знаходимо суму, наприклад, чотирьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$. (мал.14).

Вектор $\vec{e}$ сполучає початок першого вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{d}$ *(правило многокутника)*.



Мал.15

в) Віднімання векторів.

Дію віднімання векторів можна розглядати як обернену дію щодо додавання векторів.

Означення. ***Різницею*** $\vec{a}-\vec{b}$ ***називається вектор*** $\vec{c}$***, який в сумі з вектором*** $\vec{b}$ ***дає вектор*** $\vec{a}$ (мал.15)***, тобто*** $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$.

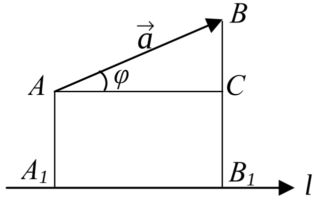
Як видно з мал.15, що одна діагональ $\vec{OC}$ є сумою $\vec{a}+\vec{b}$, а друга діагональ $\vec{BA}$ є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Дамо ще одне означення різниці векторів.

Означення. Різницею двох векторів $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$***, які мають спільний початок, називається вектор*** $\vec{c}$***, який сполучає кінці цих векторів і напрямлений в сторону зменшуваного.***

§6. Проекція вектора на вісь

Нехай маємо довільну вісь $\boldsymbol{l}$ на площині і деякий вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \vec{\boldsymbol{a}}$ (мал.16).



Мал.16.

Опустимо із початку $\boldsymbol{A}$ вектора і з кінця $\boldsymbol{B}$ перпендикуляри на вісь $\boldsymbol{l}$. Основами перпендикулярів будуть точки $\boldsymbol{A_1}$ і $\boldsymbol{B_1}$, які називаються проекціями точок $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$.

Величина $\boldsymbol{A_1B_1}$ називається проекцією вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ на вісь $\boldsymbol{l}$ і позначається $\boldsymbol{Пр_l}\,\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, тобто

$\boldsymbol{A_1B_1 = Пр_l\,\overrightarrow{AB}}$.

<u>Означення 1.</u> Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l називається величина відрізка A_1B_1 взята із знаком плюс, якщо напрям відрізка A_1B_1 співпадає з напрямом вісі l, і з знаком мінус, якщо напрями протилежні.

З точки $\boldsymbol{A}$ проведемо пряму, паралельну осі $\boldsymbol{l}$, яка перетне відрізок $\boldsymbol{BB_1}$ в точці $\boldsymbol{C}$. Вектор $\vec{\boldsymbol{a}}$ утворює з віссю $\boldsymbol{l}$ кут φ. Величина відрізка $\boldsymbol{AC}$ дорівнює величині відрізка $\boldsymbol{A_1B_1}$, а тоді з $\Delta\boldsymbol{ABC}$ знаходимо

$$\boldsymbol{Пр_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi} \text{ або } \boldsymbol{Пр_l\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cos\varphi} \qquad (2.7)$$

<u>Означення 2.</u> Проекція вектора на будь-яку вісь дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута між віссю і вектором.

Якщо кут φ гострий, то проекція $\boldsymbol{Пр_l\,\vec{a}}$ додатне число, а якщо кут φ тупий, то проекція $\boldsymbol{Пр_l\,\vec{a}}$ - від'ємне число.

◙ ***Властивості проекцій.***

1. Якщо вектори $\vec{\boldsymbol{a}}$ і $\vec{\boldsymbol{b}}$ рівні, то величини їх проекцій на одну й ту ж вісь $\boldsymbol{l}$ також рівні, тобто $\boldsymbol{Пр_l\,\vec{a} = Пр_l\,\vec{b}}$.

2. Проекція суми векторів на будь-яку вісь дорівнює сумі проекцій доданків на ту ж вісь, тобто

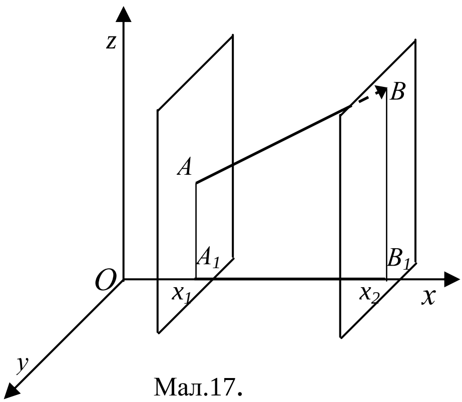
$$Пр_l(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=Пр_l\,\vec{a}+Пр_l\,\vec{b}+Пр_l\,\vec{c}\,.$$

3. Проекція різниці двох векторів на вісь l дорівнює різниці величин проекцій на ту ж вісь, тобто

$$Пр_l(\vec{a}-\vec{b})=Пр_l\,\vec{a}-Пр_l\,\vec{b}\,.$$

4. Якщо вектор $\vec{a}$ помножений на будь-яке число λ, то величина проекції вектора $\vec{a}$ на вісь l також помножиться на число λ, тобто $$Пр_l(\lambda\vec{a})=\lambda Пр_l\,\vec{a}\,.$$

§ 70. Проекції вектора на осі координат



Мал.17.

Розглядається прямокутна система координат $Oxyz$ в просторі і довільний вектор $\vec{AB}$. Нехай $Пр_x\,\vec{AB}=x,$

$$Пр_y\,\vec{AB}=y,\ Пр_z\,\vec{AB}=z.$$

Проекції x,y,z вектора $\vec{AB}$ на координатні осі називають координатами вектора і записують $\vec{AB}=(x,y,z)$.

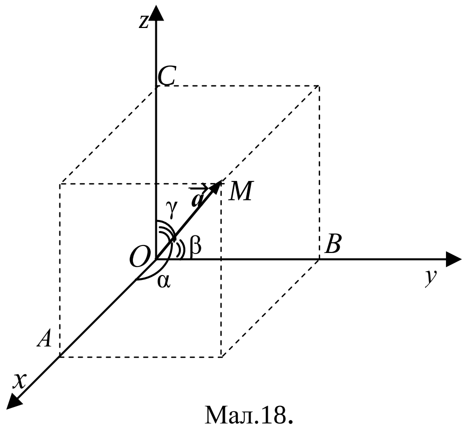
Якщо задані дві точки $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$, то координати вектора $\vec{AB}$ знаходяться за формулами

$$x=x_2-x_1,\ y=y_2-y_1,\ z=z_2-z_1.$$

Дійсно, проведемо через точки A і B площини, перпендикулярні до осі Ox і позначимо точки їх перетину відповідно A_1 і B_1 (мал.17). Точки A_1 і B_1 мають на осі Ox координати x_1 і x_2, але $A_1B_1=x_2-x_1$ на основі формули (2.1) , а тому $x=x_2-x_1$. Аналогічно доводиться, що $y=y_2-y_1,\ z=z_2-z_1$.

§8. Напрямні косинуси вектора

Нехай маємо вектор $\vec{a}(x_1; y_1; z_1) = \vec{OM}$ і будемо вважати, що він виходить з початку координат і не знаходиться ні в одній координатній площині. Через точку M проведемо площини, перпендикулярні до осей координат і разом з координатними площинами вони утворять паралелепіпед, діагональ якого відрізок OM (мал.18). Через α, β, γ позначимо кути, які утворює вектор $\vec{a} = \vec{OM}$ з осями координат.



Мал.18.

Величини $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$. Координати вектора $x_1 = OA,\ y_1 = OB,\ z_1 = OC.$

Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів довжин трьох його вимірів.

Тому

$$|OM|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 \text{ або } \left|\vec{a}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \qquad (2.8)$$

Формула (2.8) виражає довжину вектора через його координати. Тоді на основі формул (2.7) і (2.8) будемо мати

$$x_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cos\alpha;$$

$$y_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cos\beta;$$

$$z_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cos\gamma.$$

Звідси для напрямних косинусів одержуємо

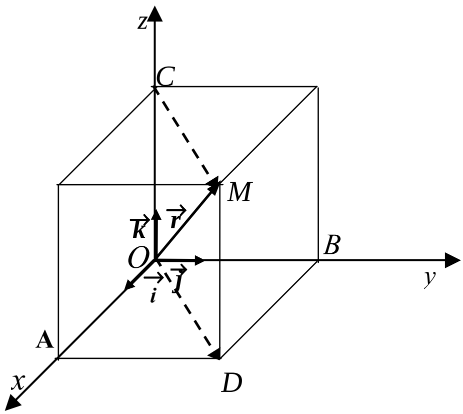
$$\boxed{\begin{aligned}&\cos\alpha=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}};\ \cos\beta=\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}};\\&\cos\gamma=\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.\end{aligned}} \qquad (2.9)$$

Для напрямних косинусів справедлива рівність $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.(Це випливає з (2.9))

§9. Розклад вектора по ортам

Розглянемо прямокутну систему координат в просторі і вектор, початок якого в точці O (мал.19).Позначимо орти осей координат Ox, Oy, Oz відповідно через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, причому $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1.$

Спроектуємо вектор $\vec{OM}$ на координатні осі (через точку M проведемо площини, перпендикулярні до координатних осей). Проекціями точки M на координатні осі будуть відповідно точки A,B,C (мал.19).



Мал.19.

З прямокутника $ODMC$ видно, що вектор $\vec{OM}=\vec{OD}+\vec{OC}$, але з прямокутника $AOBD$ одержуємо, що вектор $\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{OB}$. Тоді

$$\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} \qquad (2.10)$$

Вектор $\vec{OM}$, який сполучає точку O з точкою $M(x,y,z)$ називається радіусом-вектором цієї точки.

Вектори $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ називаються складовими або компонентами вектора $\overrightarrow{OM}$, а їх величини $OA = x, OB = y, OC = z$ координатами цього вектора. Компоненти вектора $\overrightarrow{OM}$ виразимо через його координати і одиничні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а саме $\overrightarrow{OA} = x\,\vec{i}\,,\ \overrightarrow{OB} = y\,\vec{j}\,,\quad \overrightarrow{OC} = z\,\vec{k}\,.$

Підставляючи ці значення в рівність (2.10), враховуючи, що $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, одержимо

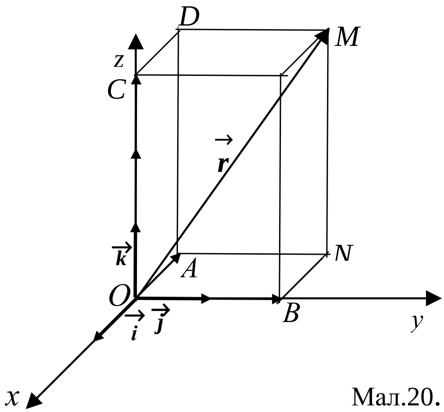
$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \qquad (2.11)$$

Доданки $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ є складовими або компонентами вектора $\vec{r}$.

Трійка векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називається координатним базисом, а розклад (2.11) називається розкладом вектора по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Це основна формула векторної алгебри.

Приклад 1. Побудувати вектор $\vec{r} = (-1;2;3)$.

Розв'язування. Компоненти вектора $\vec{r}$ є $\overrightarrow{OA} = -\vec{i}, \overrightarrow{OB} = 2\vec{j}$ і $\overrightarrow{OC} = 3\vec{k}$ і їм відповідає прямокутний паралелепіпед, діагональ якого є шуканий вектор (мал.20).



Мал.20.

§10. Дії над векторами, заданими в координатній формі

Якщо вектори задані в координатній формі, то дії додавання, віднімання, множення вектора на число можна замінити простими арифметичними операціями над координатами цих векторів за такими правилами.

Правило 1. При додаванні векторів їх однойменні координати додаються.

Нехай маємо вектори $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$.

Знайдемо $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Запишемо розклади векторів $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ по ортах. Тоді $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Додавши ці рівності, одержимо $\vec{c}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$.

Отже, координати вектора $\vec{c}$ будуть

$$\vec{c}=(x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2).$$

Правило 2. Щоб відняти від вектора $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ вектор $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ потрібно відняти від координат вектора $\vec{a}$ відповідні координати вектора $\vec{b}$, тобто

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;y_1+y_2;z_1+z_2).$$

Правило 3. Щоб помножити вектор $\vec{a}$ на число λ, потрібно кожну з його координат помножити на це число. Тобто , якщо

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}, \text{ то } \lambda\vec{a}=\lambda x_1\vec{i}+\lambda y_1\vec{j}+\lambda z_1\vec{k}.$$

Приклад 1. Знайти вектор $\vec{c}=3(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(1;2;5)$, $\vec{b}(2;-3;4)$.

Розв'язування. Виконаємо дії послідовно і знайдемо $\vec{a}+\vec{b}=(1;2;5)+(2;-3;4)=(3;-1;9)$.

$3(\vec{a}+\vec{b})=3(3;-1;9)=(9;-3;27)$, $2\vec{b}=2(2;-3;4)=(4;-6;8)$

Значить, $\vec{c}=3(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{b}=(9;-3;27)-(4;-6;8)=(5;3;19)$.

§11. Скалярний добуток двох векторів

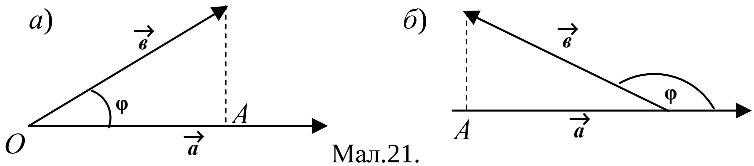
<u>Означення.</u> Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добутку їх довжин (модулів) на косинус кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ позначається символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$. За означенням

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \qquad (2.12)$$

де φ - кут між векторами $\vec{a}\ i\ \vec{b}$ (мал.21), причому $0\le\varphi\le\pi$

На основі формули (2.7) формулу (2.12) можна записати так:



Мал.21.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,Пр_{\vec{a}}\,\vec{b} \qquad (2.13)$$

або аналогічно

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,Пр_{\vec{b}}\,\vec{a} \qquad (2.14)$$

Отже, скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля одного з них на проекцію другого вектора на напрям першого.

Поняття скалярного добутку випливає із задач механіки. Відомо, що робота A сили F при прямолінійному переміщенні матеріальної точки на шляху l знаходять за формулою

$$A=F\cdot l\cos(\widehat{F,l}) \qquad (2.15)$$

Розглянемо деякі властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ **- переставний закон.**

Доведення. За означенням скалярного добутку

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ і $\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi$, але $|\vec{a}|\,|\vec{b}|=|\vec{b}|\,|\vec{a}|$ як добуток чисел, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2) $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}$ - сполучний закон.

Доведення. На основі формули (2.14) маємо, що $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,Пр_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})$, Згідно з властивостями проекцій §6 $Пр_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda Пр_{\vec{b}}\vec{a}$.

Таким чином,

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,Пр_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = |\vec{b}|\lambda Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \lambda|\vec{b}|\,Пр_{\vec{b}}\vec{a}.$$

З другого боку, на основі формули (2.14), маємо $|\vec{b}|Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}$.

Отже, $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(|\vec{b}|Пр_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

3) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ **- розподільний закон.**

Доведення. На основі формули (2.14) маємо

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\,Пр_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}),$$

Згідно з властивостями проекцій $Пр_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = Пр_{\vec{a}}\vec{b}+Пр_{\vec{a}}\vec{c}$

Таким чином,

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|Пр_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|(Пр_{\vec{a}}\vec{b}+Пр_{\vec{a}}\vec{c}) = |\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{c}.$$

На основі формули (2.14) маємо, що $|\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b}$ і $|\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}$

Значить $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|Пр_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Доведення. За означенням скалярного добутку

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$, якщо $\vec{a} \neq 0$.

Якщо $\vec{a} = 0$, то добуток $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$, але тут $|\vec{a}| = 0$ і рівність

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$ також правильна.

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$, тобто $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ і звідси $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$**,** якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$ і навпаки, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Доведення. За означенням скалярного добутку $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Якщо $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, то вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ перпендикулярні, $\cos\varphi=0$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.Якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, але $|\vec{a}||\vec{b}|\neq 0$, то $\cos\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні.

◙ ***Скалярний добуток векторів в координатній формі.***

Тому що одиничні вектори (орти) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ осей Ox,Oy,Oz прямокутної системи координат взаємно перпендикулярні, то на основі п’ятої властивості скалярного добутку, маємо

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0. \tag{2.16}$$

Крім цього, за четвертою властивістю скалярного добутку

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1. \tag{2.17}$$

Нехай задано два вектори з своїми координатами

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),\ \ \vec{b}=(x_2;y_2;z_2).$$

Запишемо розклади цих векторів по ортам (формули 2.11)

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}.$$

Знайдемо скалярний добуток цих векторів

$$\vec{a}\,\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}).$$

Використовуючи формули (2.16), (2.17) знаходимо

$$\vec{a}\,\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \tag{2.18}$$

Таким чином, скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат цих векторів.

Якщо $\vec{a}=\vec{b}$, то $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$. При цьому отримаємо на основі рівності (2.18), що

$$|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\ \text{або}\ |\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \tag{2.19}$$

Довжина вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат.

Із формули (2.12) знаходимо кут між двома векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad (2.20)$$

Формулу (2.20) на основі формул (2.18) і (2.19) запишемо у вигляді

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (2.21)$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є колінеарні, то вони задовольняють умові (2.6) , а саме

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} \qquad (2.22)$$

де скалярний множник $\lambda > 0$, коли вектори $\vec{b}$ і $\vec{a}$ мають однаковий напрям, і $\lambda<0$ якщо протилежні напрями. Рівність (2.22) в координатній формі запишеться так:

$$x_2 = \lambda x_1,\ y_2 = \lambda y_1,\ z_2 = \lambda z_1 \text{ або } \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \lambda \qquad (2.23)$$

Умова (2.23) є умовою паралельності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.Отже, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то їх однойменні координати пропорціональні і навпаки.

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність $\vec{a}\,\vec{b} = 0$ або в координатній формі

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \qquad (2.24)$$

Умова (2.24) є умовою перпендикулярності двох векторів.

Приклад 1.Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (4;4;2)$ на напрям вектора $\vec{b} = (2;1;2)$.

Розв'язування. Із формули (2.14) одержимо

$$Пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{4\cdot 2 + 4\cdot 1 + 2\cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{16}{3}.$$

Приклад 2. Виразити через орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ орт $\vec{a}^{\circ}$ вектора $\vec{a} = (3;-2;6)$.

Розв'язування. Одиничний вектор

$$\vec{a}^{\circ}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{3}{7}\vec{i}-\frac{2}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}.$$

Приклад 3. Підприємство випускає продукцію чотирьо видів в кількості 210, 160, 172 і 300 штук. Ціни в одних і тих же грошових одиницях задані в такому порядку: 4,3;1,2;7;2,1. Обчислити сумарну ціну всієї продукції.

Розв'язування. Запишимо дані про випуск продукції у вигляді векторів $\vec{a}=(210;160;172;300)$, а також ціни одиниці кожної із виду продукції $\vec{b}=(4,3;1,2;7,0;2,1)$.Тепер сумарна ціна Π всієї продукції запишеться на основі формули 2.18.

$$\Pi=\vec{a}\,\vec{b}=210\cdot 4,3+160\cdot 1,2+172\cdot 7,0+300\cdot 2,1=2929\ .$$

§12. *n*-мірний вектор і векторний простір

Множина всіх векторів, які ми розглядали на площині або в просторі і для яких визначені операції додавання векторів, множення вектора на число є простими прикладами векторного простору.

Означення 1. ***Упорядкована множина n дійсних чисел, записаних у вигляді*** $(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$ ***називається n- мірним вектором. Числа*** $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ ***називаються координатами вектора*** $\vec{a}$***, тобто*** $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$.

Поняття n-мірного вектора широко використовується в економіці, наприклад, деякий набір товарів можна охарактеризувати вектором $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$, а відповідно ціни вектором $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3,...,b_n)$.

Якщо в n-мірного вектора одна координата дорівнює одиниці, а всі решту рівні нулю, то такий вектор називається одиничним. Очевидно, що існує n різних одиничних векторів

$$\vec{e}_1=(1,0,0,...,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0,...,0),...\ \vec{e}_n=(0,0,0,...,1),$$

які виходять із початку координат точки O. Всі означення і дії для двомірних і тримірних векторів, заданих в координатній формі, розповсюджуються і на n-мірні вектори $(n \geq 4)$.

Два n-мірні вектори рівні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні компоненти рівні.

Вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ і вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ рівні, коли $a_i = b_i$ $(i = 1,2,3,...,n)$.

Сумою двох n-мірних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є третій n-мірний вектор $\vec{c}$, координати якого дорівнюють сумі відповідних одноименних координат векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $c_i = a_i + b_i$ $(i = 1,2,3,...,n)$.

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ називається вектор $\vec{d} = \lambda \vec{a}$, координати якого d_i дорівнюють добутку числа λ на відповідні координати вектора $\vec{a}$, тобто $d_i = \lambda a_i$ $(i = 1,2,3,...,n)$.

Вектор, у якого всі координати дорівнюють нулю, називається **нульовим вектором** і позначається $\vec{0} = (0,0,...,0)$.

Операції над довільними векторами задовольняють властивостям:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - переставний закон;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – сполучний закон;
3. $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ - сполучний закон, відносно числового множника;
4. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ - розподільчий закон відносно суми векторів;
5. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - розподільчий закон відносно суми числових множників.
6. Існує нульовий вектор $\vec{0} = (0,0,...,0)$, такий,що $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для довільного вектора $\vec{a}$;

7. Для довільного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор ($-\vec{a}$), такий, що $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$

8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, для довільного вектора $\vec{a}$ (особлива роль числового множника 1).

Означення. ***Множина векторів з дійсними координатами, в якій визначено операції додавання векторів і множення вектора на число, які задовольняють вище приведеним восьми властивостям називається векторним простором.***

Зауваження. Якщо під векторами $\vec{a}, \vec{b}$ *і* $\vec{c}$ можна розглядати елементи довільної природи, то відповідна множина елементів називається лінійним простором.

Лінійним простором є, наприклад, множина всіх алгебраїчних многочленів степені яких не перевищують натурального числа n. Якщо множина всіх многочленів точно дорівнює натуральному числу n, то не буде лінійним простором тому, що сума двох многочленів може виявитися многочленом, степінь якого менше n.

§13. Базис. Розклад вектора по даному базису

Введемо поняття лінійної комбінації, лінійної залежності, а також базису і розклад вектора по базису.

Означення 1. ***Вектор*** $\vec{b}$ ***називається лінійною комбінацією векторів*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ ***векторного простору*** R^m***, якщо він дорівнює сумі добутків цих векторів на довільні дійсні числа***

$$b = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_m\vec{a}_m \qquad (2.25)$$

де $k_1, k_2, ..., k_m$ ***- дійсні числа.***

Означення 2. **Вектори** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ **називаються лінійно залежними, якщо існують такі числа** $k_1, k_2, ..., k_m$ **, які не дорівнюють одночасно нулю, що**

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + ... + k_m\vec{a}_m = 0 \qquad (2.26)$$

<u>Означення 3.</u> Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ називаються лінійно незалежними, якщо для них виконується умова (2.26) тільки тоді, коли одночасно $k_1, k_2, ..., k_m$ дорівнюють нулю.

Розглянемо деякі властивості векторів лінійного простору.

Властивість 1. Якщо система векторів складається із одного ненульового вектора $\vec{a}$, то така система лінійно незалежна.

Дійсно, рівність $k\vec{a} = \vec{0}$ можлива тоді і тільки тоді, коли $k = 0.$

Зауваження. Якщо система векторів складається із одного нульового вектора $\vec{a}$, то ця система лінійно залежна.

Дійсно, рівність $k\vec{a} = \vec{0}$ має місце коли $k \neq 0.$

Властивість 2 .Для того, щоб вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ були лінійно залежними необхідно і достатньо, щоб хоч один із них був лінійною комбінацією решти векторів.

Доведення. Необхідність.

Нехай вектори лінійно залежні. Тоді для них виконується умова (2.26), де хоч одне із чисел $k_1, k_2, ..., k_m$ не дорівнює нулю.

Для прикладу, нехай це буде число $k_m \neq 0$. Тоді

$$\vec{a}_m = -\frac{k_1}{k_m}\vec{a}_1 - \frac{k_2}{k_m}\vec{a}_2 - ... - \frac{k_{m-1}}{k_m}\vec{a}_{m-1} \qquad (2.27)$$

Необхідна умова доведена.

*Достатність.*Нехай виконується умова (2.27), яку перепишемо так $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1} - \vec{a}_m = 0$, де $\alpha_i = -\frac{k_i}{k_m} (i = 1,2,...,m-1)$

Ми одержали рівність вигляду (2.26), в якій одне число $\alpha_m = -1 \neq 0.$ Значить вектори є лінійно залежні.

Властивість 3. Якщо серед векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ є нульовий вектор, то ці вектори є лінійно залежні.

Дійсно, нехай $\vec{a}_1 = 0$, то тоді маємо рівність (2.26)

$$k_1\vec{a}_1+0\vec{a}_2+...+0\vec{a}_m=0,$$ коли $k_1=1,\ k_2=k_3=...=k_m=0$.

Властивість 4. Для того, щоб два вектори були лінійно залежними необхідно і достатньо, щоб вони були колінеарні.

Доведення.Необхідність. Нехай два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є лінійно залежними, тоді виконується рівність $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=0,$
де хоч би одне із чисел k_1 або k_2 не дорівнює нулю.

Нехай $k_1\neq 0$, тоді $\vec{a}=-\dfrac{k_2}{k_1}\vec{b},$ тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є колінеарними.

Достатність. Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, тобто

$$\vec{a}=\lambda\vec{b} \text{ або } \vec{a}+(-\lambda)\vec{b}=0.$$

Значить вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є лінійно залежні.

Властивість 5. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ n-мірного простору лінійно незалежні, якщо визначник складений із координат цих векторів, відмінний від нуля.

Доведення. Нехай вектори задані своїми координатами

$\vec{a}_1=(a_{11},a_{12},...,a_{1n})$, $\vec{a}_2=(a_{21},a_{22},...,a_{2n})$,.... $\vec{a}_n=(a_{n1},a_{n2},...,a_{nn})$

Для цих векторів запишемо рівність

$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+...+k_n\vec{a}_n=0,$ або

$k_1(a_{11},...,a_{1n})+k_2(a_{21},...a_{2n})+...+k_n(a_{n1},...a_{nn})=(0,0,...,0).$

З цієї рівності одержуємо однорідну систему рівнянь для знаходження $k_1,k_2,...,k_n$:
$$\begin{cases} k_1a_{11}+k_2a_{21}+...+k_na_{n1}=0\\ k_1a_{12}+k_2a_{22}+...+k_na_{n2}=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ k_1a_{1n}+k_2a_{2n}+...+k_na_{nn}=0\end{cases}$$

Тому що за умовою визначник , складений із коефіцієнтів цієї однорідної системи відмінний від нуля, то ця система має єдиний нульовий розв'язок, тобто $k_1=0,k_2=0,...,k_n=0.$ А це значить, що вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ лінійно незалежні.

Наслідок 1. Якщо вектори лінійно залежні, то визначник, складений із координат цих векторів, дорівнює нулю.

Наслідок 2. Одиничні вектори (орти) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ n-мірного простору лінійно незалежні.

<u>Означення 4.</u> Лінійний простір R^n називається n-мірним, якщо в ньому є n лінійно незалежних векторів, а довільні $(n+1)$ вектори є уже лінійно залежні.

Іншими словами розмірність простору – це максимальне число лінійно незалежних векторів цього простору.

<u>Означення 5.</u> Сукупність n лінійно незалежних векторів n-мірного простору R^n називається базисом.

ТЕОРЕМА. Довільний вектор $\vec{b}$ лінійного простору R^n можна представити єдиним способом у вигляді лінійної комбінації векторів базису.

Доведення. Нехай базисом є система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ n-мірного простору R^n. За означенням 4 довільні $(n+1)$ вектори n-мірного простору R^n лінійно залежні, а тому будуть лінійно залежними, зокрема, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ і з вектором $\vec{b}$. Тобто

$$k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + ... + k_n \vec{a}_n + k\vec{b} = 0 \qquad (2.28)$$

Тут $k \neq 0$, бо якби $k = 0$, то одне із чисел $k_1, k_2, ..., k_n$ було б відмінним від нуля, а це означало б, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ є лінійно залежними, що суперечить умові теореми.

Тому що $k \neq 0$, то із рівності (2.28) маємо

$$\vec{b} = -\frac{k_1}{k}\vec{a}_1 - \frac{k_2}{k}\vec{a}_2 - ... - \frac{k_n}{k}\vec{a}_n \qquad (2.29)$$

Позначимо $\alpha_i = -\frac{k_i}{k}\ (i = 1,2,...,n)$. Тоді рівність (2.29) перепишемо так

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_n \vec{a}_n \qquad (2.30)$$

Значить вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів базису.

Покажемо, що розклад (2.30) вектора $\vec{b}$ є єдиний.

Припустимо, що існує інша лінійна комбінація, відмінна від (2.30), наприклад ,

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_n \vec{a}_n \qquad (2.31)$$

Віднімаючи від рівності (2.30) рівність (2.31), одержимо

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{a}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{a}_n .$$

З цієї рівності і із лінійної незалежності векорів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ випливає, що $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots \alpha_n - \beta_n = 0$ або

$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots \alpha_n = \beta_n .$

Отже, розклад (2.28) є єдиний.

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називаються координатами вектора $\vec{b}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Нехай в просторі R^n маємо два базиси , а саме старий $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ і новий $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$.

Нехай кожний вектор $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ нового базису має в старому базисі координати $b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni}$, тобто

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= b_{11}\vec{a}_1 + b_{21}\vec{a}_2 + \ldots + b_{n1}\vec{a}_n \\ \vec{b}_2 &= b_{12}\vec{a}_1 + b_{22}\vec{a}_2 + \ldots + b_{n2}\vec{a}_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{b}_n &= b_{1n}\vec{a}_1 + b_{2n}\vec{a}_2 + \ldots + b_{nn}\vec{a}_n \end{aligned} \qquad (2.32)$$

Матриця, виписана із коефіцієнтів системи (2.32) $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ $(i, j = 1,2,\ldots,n)$ називається матрицею переходу від старого базису до нового.

Матриця B - неособлива. Зворотній перехід від нового базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ до старого $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ здійснюється з допомогою оберненої матриці B^{-1}.

Знайдемо залежність між координатами вектора в різних базисах. Нехай вектор $\vec{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ заданий в старому базисі, а в новому базисі $\vec{X^*}=(y_1,y_2,...,y_n)$, тобто

$$\vec{x}=x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+...+x_n\vec{a}_n=y_1\vec{b}_1+y_2\vec{b}_2+...+y_n\vec{b}_n . \qquad (2.33)$$

Так як вектор $\vec{X}$ і $\vec{X^*}$ один і той же вектор, то маємо

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{a}_i=\sum_{j=1}^{n} y_j\vec{b}_j . \qquad (2.34)$$

Підставляючи в цю рівність розклад векторів $\vec{b}_1,\vec{b}_2,...,\vec{b}_n$ по векторах $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$, а саме (2.32), то одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{a}_i=\sum_{j=1}^{n} y_j\sum_{i=1}^{n}\vec{b}_{ij}\vec{a}_j=\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j .$$

З цієї рівності випливає зв'язок між координатами вектора $\vec{X}$ в старому і новому базисах

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}y_j \quad i=1,2,...,n . \qquad (2.35)$$

Якщо позначити $\vec{X}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{X^*}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n \end{pmatrix}$, то (2.35) запишеться так

$$\vec{X}=B\vec{X^*} .$$

Таким чином, вектор в старих координатах дорівнює матриці переходу, помноженій на вектор в нових координатах.

Якщо матриця B невироджена, то $\vec{X^*}=B^{-1}\vec{X}$, тобто одержимо вектор в новому базисі через обернену матрицю переходу і координати вектора в старому базисі.

Приклад 1. Показати, що вектори $\vec{a}_1=(3;0;2)$, $\vec{a}_2=(1;-2;3)$, $\vec{a}_3=(1;4;5)$ є лінійно незалежні.

Розв'язування. Складемо рівняння типу (2.26)

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+k_3\vec{a}_3=0 .$$

Цю рівність перепишемо у вигляді $\boldsymbol{k_1(3;0;2)+k_2(1;-2;3)+k_3(1;4;5)=0.}$

Із даної рівності одержуємо систему лінійних рівнянь для знаходження k_1,k_2,k_3:

$$\begin{cases} 3k_1+k_2+k_3=0, \\ -2k_2+4k_3=0, \\ 2k_1+3k_2+5k_3=0. \end{cases}$$

Визначник цієї однорідної системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-30+8+4-36=-54\neq 0 .$$

Якщо $\Delta=-54\neq 0,$ то однорідна система має єдиний нульовий розв'язок $k_1=0,\ k_2=0,\ k_3=0.$ Таким чином, дана система векторів лінійно незалежна.

Приклад 2. Задано вектори

$\vec{a}_1=(4;5;2),\ \vec{a}_2=(3;0;1),\ \vec{a}_3=(-1;4;2)$ і $\vec{d}=(5;7;8)$ в базисі $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$. Показати, що вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

Розв'язування. Покажемо, що вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ утворюють базис. Для цього складемо визначник із координат цих векторів.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=24-5-6-30=-27\neq 0.$$

Так як $\Delta\neq 0$, то вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ утворюють базис. Виразимо зв'язок між базисами

$$\begin{aligned} \vec{a}_1&=4\vec{b}_1+5\vec{b}_2+2\vec{b}_3 \\ \vec{a}_2&=3\vec{b}_1+\phantom{5\vec{b}_2+{}}\vec{b}_3 . \\ \vec{a}_3&=-\vec{b}_1+4\vec{b}_2+2\vec{b}_3 \end{aligned}$$

Матриця переходу від базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ до базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ має вигляд $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Знаходимо обернену матрицю B^{-1} до матриці B.

$B^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B^П = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}$.

Тепер $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 12 \\ -2 & 10 & -21 \\ 5 & 2 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 \\ -108 \\ -81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Нові координати вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ є –1;4;3. Вектор $\vec{d}$ можна записати у вигляді $\vec{d} = -\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$.

Примітка. Дану задачу можна розв'язати другим способом.

Для знаходження координат вектора $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ складемо систему $\begin{cases} 4x + 3y - z = 5, \\ 5x + 4z = 7, \\ 2x + y + 2z = 8. \end{cases}$

Для знаходження розв'язків даної системи застосуємо правило Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 + 96 - 20 - 42 = 27 \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{27}{-27} = -1.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 56 - 40 + 40 + 14 - 50 - 128 = -108, \; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-108}{-27} = 4.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 25 + 42 - 28 - 120 = -71,\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-71}{-27} = 3.$$

Значить вектор $\vec{d}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ має координати $\vec{d} = (-1;4;3)$.

§14. Власні числа та власні вектори матриці

<u>Означення.</u> Вектор $\vec{x} \neq 0$ називається власним вектором матриці A, якщо знайдеться таке число λ, що

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \tag{2.36}$$

де число λ називається власним значенням матриці A, яке відповідає вектору $\vec{x}$.

Запишемо рівність (2.36) в матричній формі:

$$AX = \lambda X, \tag{2.37}$$

де X – матриця-стовпчик із координат вектора $\vec{x}$.

Рівняння (2.37) розпишемо в координатній формі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \tag{2.38}$$

Перепишемо рівняння системи (2.38) так, щоб в правих частинах були нулі:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

Щоб перейти до розгляду системи (2.39) доведемо таку теорему.

ТЕОРЕМА. Однорідна система (n рівнянь з n невідомими)

$$AX = 0 \tag{2.40}$$

має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли $|A| = 0$, тобто коли матриця A є виродженою.

Доведення. Нехай система (2.40) має ненульовий розв'язок. Покажемо, що $|A| = 0$. Дійсно, якщо б це було не так, тобто $|A| \neq 0$, то розв'язуючи систему за правилом Крамера, ми б одержали єдиний нульовий розв'язок $x = 0$, а це протирічить умові.

Нехай $|A| = 0$, покажемо, що існує ненульовий розв'язок системи. Для зручності розглянемо систему двох рівнянь.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases} \tag{2.41}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тому що $|A| = 0$, то і $|A^T| = 0$, тобто матриця $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ є виродженою.Значить стрічки матриці A є лінійно залежними, а це означає, що і стовпчики матриці A^T є лінійно залежні. Вказані стовпчики позначимо через $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. При цьому існують такі числа k_1 і k_2, які не дорівнюють одночасно нулю, що виконується рівність $k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 = 0$ або в координатній формі $\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 = 0 \end{cases}$.

Отже, це значить, що система (2.41) має ненульовий розв'язок. Теорема доведена.

Тепер повернемось до системи (2.39). На основі вище приведеної теореми, система (2.39) має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю, тобто

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{2.42}$$

Визначник (2.42) є многочленом n-го степеня відносно λ. Цей многочлен називається характеристичним многочленом матриці A, а рівняння (2.42) називається характеристичним рівнянням матриці A

Приклад 1. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування. Запишемо систему типу (2.39) для знаходження власних чисел і власних векторів, а саме

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+2x_2=0,\\ -x_1+(4-\lambda)x_2=0.\end{cases} \qquad (2.43)$$

Як нам уже відомо, для того, щоб ця система мала ненульові розв’язки, потрібно , щоб визначник цієї системи дорівнював нулю, тобто $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$ або $\lambda^2-5\lambda+6=0.$ Корені цього квадратного рівняння є $\lambda_1=2,\lambda_2=3.$ Таким чином ми знайшли власні (характеристичні) числа.

Тепер знайдемо власні вектори, які відповідають знайденим власним числам.

Щоб знайти координати власного вектора, що відповідає власному числу $\lambda_1=2,$ то $\lambda_1=2$ підставляємо в систему (2.43).

Одержимо $\begin{cases}-x_1+2x_2=0\\ -x_1+2x_2=0\end{cases}$, звідси $x_1=2t$, $x_2=t$ при довільному $t\neq 0$, є розв’язком цієї системи. Отже, вектор $\begin{pmatrix}2t\\ t\end{pmatrix}, t\neq 0$ є власним вектором-стовпчиком матриці $A.$

Для знаходження координат власного вектора матриці $A,$ що відповідає власному числу $\lambda_2=3$ поступаємо аналогічно. Число $\lambda_2=3$ підставляємо в систему (2.43) і одержимо

$$\begin{cases}-2x_1+2x_2=0\\ -x_1+x_2=0\end{cases}, \text{ звідси } x_1=x_2.$$

Значить, $x_1=t,\ x_2=t, t\neq 0$, а вектор-стовпчик $\begin{pmatrix}t\\ t\end{pmatrix}$ є власним вектором, що відповідає власному числу $\lambda_2=3$.

14.1. Лінійна модель торгівлі.

Одним із прикладів економічних процесів, які приводять до поняття власного числа і власного вектора матриці, є процес взаємних закупок товарів. Ми будемо розглядати лінійну модель обміну, або як її називають другими словами, модель міжнародної торгівлі.

Нехай є n держав, $S_1, S_2, ...S_n$ національний дохід яких дорівнює відповідно $x_1, x_2, ... x_n$. Долю національного доходу, яку держава S_j витрачає на покупку товарів у держави S_i позначимо коефіцієнтами a_{ij}. Будемо вважати, що весь національний дохід витрачається на закупку товарів або всередині держави, або на імпорт із інших держав, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1,2,...,n).$$

Розглянемо матрицю коофіцієнтів a_{ij}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A, з властивістю, що сума елементів її довільного стовпчика дорівнює 1, називається **структурною матрицею торгівлі.**

Для будь-якої держави S_i $(i = 1,2,...,n)$ загальна виручка від зовнішньої і внутрішньої торгівлі складає

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n.$$

Для збалансованості торгівлі необхідно бездефіцитність торгівлі кожної держави, тобто виручка від торгівлі кожної держави не повинна бути меншою від її національного доходу, тобто $p_i \geq x_i$ $(i = 1,2,...,n)$ або $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq x_i$ $(i = 1,2,...,n)$. В цій умові не може бути знака нерівності. Дійсно, додавши всі ці нерівності, коли i міняється від 1 до n і згрупувавши, одержимо

$$x_1(a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + ... + a_{n2}) + ... +$$
$$+ x_n(a_{1n} + a_{2n} + ... + a_{nn}) \geq x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Тому що в дужках є суми елементів матриці A по стовпчиках, які дорівнюють 1, ми отримали суперечливу нерівність. Отже, можливий тільки знак рівності.

Введемо вектор національних доходів

$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ держав, одержимо матричне рівняння $AX = X$ або $(A-E)X=0$, де X - матриця-стовпчик із координат вектора $\vec{x}$.

Значить задача звелася до знаходження власного вектора матриці $\boldsymbol{A}$, який відповідає власному значенню $\boldsymbol{\lambda=1}$.

Приклад 1.Структурна матриця торгівлі трьох країн $\boldsymbol{S_1, S_2, S_3}$ має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн, при якому буде торгівля збалансована.

Розв'язування. Знаходимо власний вектор $\vec{x}$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1,$ розв'язавши рівняння $(A-E)X=0$ або систему рівнянь
$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо національні доходи відповідно $x_1, x_2, x_3.$ Тоді будемо шукати власний вектор $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)^T$, який відповідає власному значенню $\boldsymbol{\lambda=1}$ розв'язавши рівняння $\boldsymbol{(A\text{-}E)X=0}$.

Тому що ранг даної системи дорівнює 2, то одна із змінних, наприклад $x_3=C$ є вільною невідомою. Решту невідомих виразимо через неї. Розв'язуючи дану систему, знаходимо, що

$x_1=\frac{2}{5}C,\ x_2=\frac{9}{10}C,\ \ x_3=C,$ тобто $\vec{x}=(\frac{2}{5}C, \frac{9}{10}C, C).$

Одержаний результат означає, що збалансованість торгівлі трьох країн досягається при векторі національного доходу $\vec{x}=(\frac{2}{5}C, \frac{9}{10}C, C),$ тобто при співвідношенні доходів $\frac{2}{5} : \frac{9}{10} : 1$ або $4 : 9 : 10.$

§15. Квадратичні форми.

<u>Означення.</u> Квадратичною формою $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***від*** n ***змінних називається сума, кожен член якої є або квадратом однієї із змінних, або добутком двох різних змінних, взятих з деяким коефіцієнтом, тобто***

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j . \tag{2.44}$$

Допускаємо, що в квадратичної форми (2.44) a_{ij} - дійсні числа.

Розпишемо квадратичну форму (2.44), розбивши доданки, що містять добутки змінних на дві рівні частини

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^{\,2} + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^{\,2} + ... +$$
$$+ a_{2n}x_2x_n + ... + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2 .$$

Матриця

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

або $A = \{a_{ij}\}\,(i, j = 1,2,...,n)$ є симетричною, так як $a_{ij} = a_{ji}$, називається матрицею квадратичної форми (2.44).

Рангом квадратичної форми називається ранг її матриці. Квадратична форма називається невиродженою, якщо її матриця невироджена.

Якщо $X^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$, то квадратичну форму можна переписати в матричному вигляді $L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$.

Вираз $X^T AX$ представляє собою квадратичну форму в матричному вигляді.

Приклад 1. Записати в матричному вигляді квадратичну форму $L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3$.

Розв'язування. Матриця даної квадратичної форми має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значить $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 x_3)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

Квадратична форма називається канонічною (або другими словами має канонічний вигляд), якщо всі $a_{ij} = 0,$ коли $i \neq j$. Тоді квадратична форма буде мати вигляд

$$L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x^n = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 .$$

Розглянемо таку теорему.

ТЕОРЕМА 1. Довільна квадратична форма приводиться до канонічного вигляду.

Доведення. Нехай задана квадратична форма (2.44) з матрицею (2.45) в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Так як A симетрична матриця, то існує ортогональна матриця B така, що $C = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$

Матриця B є матрицею переходу від базису

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n, \tag{2.46}$$

до деякого базису

$$\vec{e}_1^{\,*}, \vec{e}_2^{\,*}, ..., \vec{e}_n^{\,*}. \tag{2.47}$$

Примітка. Дійсна квадратна матриця називається ортогональною, якщо сума квадратів елементів кожного стовпчика дорівнює одиниці і сума добутків відповідних елементів із двох різних стовпчиків дорівнює нулю. Необхідна і достатня умова ортогональності матриці B є умова $B^T \cdot B = E.$

Нехай X і Y є вектори- стовпчики із координат вектора $\vec{x}$ відповідно в базисах (2.46) і (2.47). Тоді $X = BY$ і

$$X^T AX = (BY)^T A(BY) = Y^T B^T ABY = Y^T B^{-1} ABY = Y^T CY$$

або

$$X^T AX = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2. \tag{2.48}$$

Примітка. При доведенні даної теореми використали транспонування добутку матриць за формулою $(CY)^T = Y^T \cdot C^T$.

Зауважимо, що в канонічній формі (2.48) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ є власними числами матриці A.

Приклад 2. Привести квадратичну форму $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ до канонічного вигляду з допомогою ортогональної матриці і знайти її.

Розв'язування. Матриця даної квадратичної форми має вигляд $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Запишемо систему типу (2.39) для знаходження власних чисел і власних векторів

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 0. \end{cases} \tag{2.49}$$

Характеристичне рівняння даної системи має вигляд

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або $(2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = 0.$

Розв'язавши дане рівняння знаходимо $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1.$

Значить канонічний вигляд даної квадратичної форми є $6y_1^2 + y_2^2$.

Знайдемо ортогональну матрицю.

Стовпчиками ортогональної матриці, яка приводить квадратичну форму до канонічного вигляду є ортонормовані власні вектор-стовпчики матриці $A.$

Спочатку знайдемо нормований власний вектор-стовпчик матриці A з власним значенням $\lambda_1 = 6.$ Для цього із системи (2.49) маємо систему для знаходження координат вектора $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

Із даної системи знаходимо $x_2 = 2x_1$ або $u_2 = 2u_1$.

Значить при довільному u_1, відмінному від нуля, стовпчик $\begin{pmatrix} u_1 \\ 2u_1 \end{pmatrix}$ є власним вектором-стовпчиком матриці $A,$ а стовпець $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ є нормованим власним вектором-стовпчиком матриці $A.$ (Тут використано, що $\vec{a}^{\circ} = \dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$. Аналогічно знаходимо вектор-стовпчик

матриці A з власним значенням $\lambda_2 = 1$, а саме із системи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо $x_1 = -2x_2$ або при довільному s, яке відмінне від нуля, стовпчик $\begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix}$ є власним вектором матриці A. Стовпчик $\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ є нормованим власним вектором матриці A. Значить шукана матриця має вигляд $B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Зауваження. Легко перевірити, що $C = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для даного приклада 2.

Розглянемо на прикладі ще один метод приведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Метод Лагранжа приведення квадратичної форми до канонічного вигляду заключається в послідовному виділенні повних квадратів.

Приклад 3. Привести до канонічного вигляду квадратичну форму $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$ методом Лагранжа. Спочатку виділимо повний квадрат при змінній x_1, коефіцієнт при якій відмінний від нуля.

$$L = \left[x_1^2 - 2x_1(3x_2 - 2x_3) + (3x_2 - 2x_3)^2\right] + 2x_2x_3 + x_3^2 -$$
$$-(3x_2 - 2x_3)^2 = (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 + 2x_2x_3 - 9x_2^2 + 12x_2x_3 - 3x_3^3 =$$
$$= (x_1 - 3x_2 + 2x_3)^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 9x_2^2 + 12x_2x_3 - 4x_3^2 = (x_1 - 3x_2 +$$

$$+2x_3)^2-9(x_2^2-\frac{2\cdot 7}{9}x_2x_3+\frac{49}{81}x_3^2)+(\frac{49}{9}x_3^2-3x_3^2)=$$

$$=(x_1-3x_2+2x_3)^2-9(x_2-\frac{7}{9}x_3)^2+\frac{22}{9}x_3^2.$$

І так, невироджене лінійне перетворення

$$y_1=x_1-3x_2+2x_3,\ \ y_2=x_2-\frac{7}{9}x_3,\ y_3=x_3$$

приводить дану канонічну форму до канонічного вигляду

$$L_1(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-9y_2^2+\frac{22}{9}y_3^2.$$

Канонічний вигляд квадратичної форми не є однозначним, так як одна й та ж квадратична форма може бути приведена до канонічного вигляду багатьма способами. Однак одержані різними способами квадратичні форми мають ряд спільних властивостей.

Сформулюємо одну із цих властивостей, яка виражає закон інерції квадратичних форм, що заключається в наступному: всі канонічні форми, до яких приводиться дана квадратична форма, мають:

1) одне й те ж число нульових коефіцієнтів;
2) одне й те ж число додатніх коефіцієнів;
3) одне й те ж число від'ємних коефіцієнтів.

<u>Означення1.</u>Квадратична форма $L(x_1,x_2,...,x_n)$ ***називається додатньо визначеною, якщо для всіх дійсних значень*** $x_1,x_2,...,x_n$ ***використовується нерівність*** $L(x_1,x_2,...,x_n)>0$.

<u>Означення 2</u>. Якщо $L(x_1,x_2,...,x_n)$ ***є додатньо визначеною формою, то квадратична форма*** $L(x_1,x_2,...,x_n)<0$ ***називається від'ємно визначеною.***

Необхідні та достатні умови додатньої (від'ємної) визначеності квадратичної форми дає наступна теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для того, щоб квадратична форма $L=X^TAX$ **була додатньо (від'ємно) визначеною, необхідно й досить, щоб всі власні значення** $\lambda_i\ (i=1,2,...,n)$ **матриці** A **були додатніми(від'ємними).**

Дану теорему приводимо без доведення.

В багатьох випадках для встановлення знаковизначеності квадратичної форми зручно застосовувати критерії Сільвестра.

ТЕОРЕМА 3.Для того,щоб квадратична форма була додатньо визначеною, необхідно і досить, щоб всі головні мінори матриці цієї форми були додатніми, тобто

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0 \text{, де } \Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Слід зауважити, що для від'ємно визначених квадратичних форм знаки головних мінорів чергуються, починаючи з знаку "мінус" для мінора першого порядку.

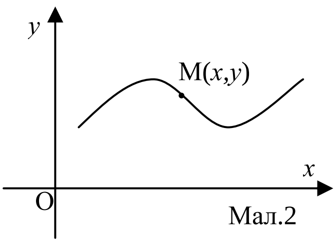
Наприклад, квадратична форма L в прикладі 2 є додатньо визначеною на основі теореми 2, так як корені характеристичного рівняння $\lambda_1=6$ і $\lambda_2=1$ є додатніми.

Другий спосіб. Так як головні мінори матриці A.

$|a_{11}| = 2,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$ є додатніми, то за критерієм Сільвестра дана квадратична форма є додатньо визначеною.

§16. Пряма лінія на площині

Рівняння лінії є важливим поняттям аналітичної геометрії. Нехай на площині ми маємо деяку лінію (криву) (мал.22).



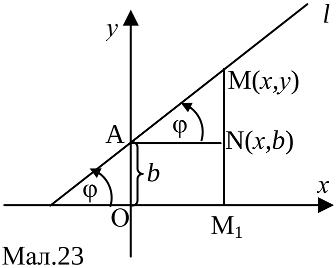
Мал.2

<u>Означення.</u> Рівнянням лінії (кривої) на площині Оху називається рівняння, якому задовольняють координати х і у кожної точки, що знаходиться на цій лінії і не задовольняють координати іншої точки, що не знаходиться на цій лінії.

В загальному випадку рівняння лінії будемо записувати у вигляді $F(x,y)=0$ або $y=f(x)$ Якщо точка $M(x,y)$ рухається по лінії, то її координати змінюються і тому ці координати називаються біжучими.

16.1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Нехай пряма $\boldsymbol{l}$ (мал.23) перетинає вісь ординат в точці $\boldsymbol{A(0,b)}$ і утворює з додатнім напрямом вісі $\boldsymbol{Ox}$ кут φ $\boldsymbol{(0<\varphi<\frac{\pi}{2})}$.



Мал.23

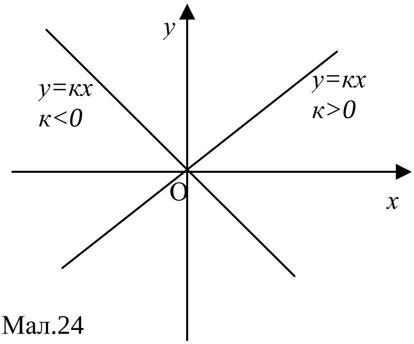
Візьмемо на прямій $\boldsymbol{l}$ довільну точку $\boldsymbol{M(x,y)}$. З точки $\boldsymbol{A}$ проведемо пряму паралельну $\boldsymbol{Ox}$ до перетину з відрізком $\boldsymbol{MN}$. Позначимо через $\boldsymbol{k=tg\varphi}$ -кутовий коефіцієнт. Таким чином, величини $\boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{b}$ повністю визначають положення прямої на площині. Знайдемо рівняння прямої $\boldsymbol{l}$ за заданими параметрами $\boldsymbol{k}$ і $\boldsymbol{b}$. Іншими словами покажемо, яким рівнянням пов’язані координати довільної точки $\boldsymbol{M(x,y)}$ прямої. З прямокутного трикутника $\boldsymbol{AMN}$ знаходимо

$$\boldsymbol{tg\varphi=\frac{MN}{AN}=\frac{y-b}{x}}. \qquad (2.50)$$

З рівності (2.50), вважаючи $\boldsymbol{tg\varphi=k}$, одержимо

$$\boldsymbol{y=kx+b}. \qquad (2.51)$$

Рівняння (2.51) називається рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.



Мал.24

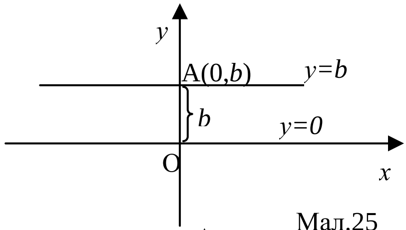
Можна легко довести, що формула (2.51) також справедлива для випадку, коли $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi}$.

Значить, координати довільної точки прямої задовольняють рівнянню (2.51).

Розглянемо частинні випадки рівняння .

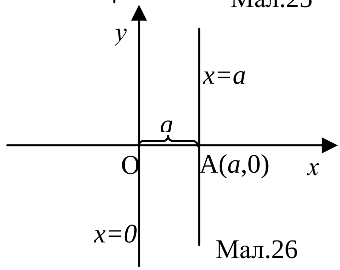
а) Якщо $\boldsymbol{b=0}$, то одержимо $\boldsymbol{y=kx}$ -рівняння прямої , що проходить через початок координат (мал.24). Коли $\boldsymbol{k=tg\varphi>0}$, то кут $\boldsymbol{\varphi}$ - гострий, а коли $\boldsymbol{k=tg\varphi<0}$, то кут $\boldsymbol{\varphi}$ тупий.

б) Якщо $\varphi = 0,\ k = tg\varphi = 0$ і рівняння прямої, паралельної вісі Ox, має вигляд $y = b$, а рівняння вісі Ox буде $y = 0$ (мал.25).



Мал.25

в) Якщо $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то $tg\dfrac{\pi}{2}$ не існує і пряма перпендикулярна вісі Ox, тобто вертикальна пряма не має кутового коефіцієнта. Нехай ця пряма відсікає на вісі Ox відрізок, що дорівнює a (мал.26). Тоді рівняння її буде $x = a$, а рівняння вісі Oy буде $x = 0$.

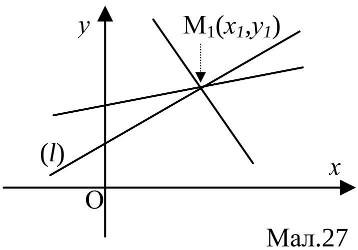


Мал.26

16.2.Рівняння прямої, що проходить через задану точку в даному напрямку

Нехай задана точка $M_1(x_1, y_1)$ і потрібно написати ріванняння прямої лінії, що проходить через цю точку.

Нехай пряма l, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, утворює з віссю Ox кут $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$ (мал.27).



Мал.27

Тому що точка $M_1(x_1, y_1)$ знаходиться на прямій, то її координати задовольняють рівнянню (2.51), тобто

$$y_1 = kx_1 + b. \tag{2.52}$$

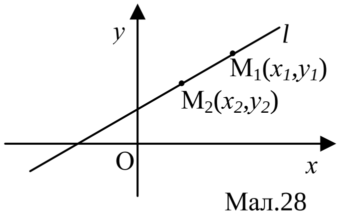
Віднімаючи рівняння (2.52) від (2.51), одержимо рівняння шуканої прямої

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2.53}$$

Рівняння (2.53) звуть в'язкою прямих, де k - довільне число. Через точку $M_1(x_1, y_1)$ проходить безліч прямих, крім прямої, паралельної вісі Oy.

16.3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай задано дві точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$.



Мал.28

Для одержання рівняння прямої M_1M_2 (мал.28) запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1,y_1)$, а саме $y-y_1=k(x-x_1)$.

Оскільки точка $M_2(x_2,y_2)$ знаходиться на прямій l, то підставивши координати цієї точки в рівняння в'язки прямих(2.53), одержимо $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$. З цієї рівності знайдемо кутовий коефіцієнт прямої

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (2.54)$$

Тепер підставивши вираз для k, тобто (2.54) в рівняння (2.53) і одержимо шукане рівняння прямої

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (2.55)$$

Примітка. Якщо точки M_1 і M_2 лежать на прямій , яка паралельна осі Oy, тобто $x_1=x_2$, то рівняння прямої буде $x=x_1$. Коли згадані точки лежать на прямій, яка паралельна вісі Ox, тоді $y_1=y_2$ і рівняння прямої буде $y=y_1$.

Приклад 1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(-3;4)$ і $B(5;-1)$.

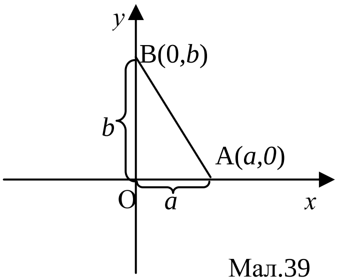
Розв'язування. Використовуючи формулу (2.55), запишемо

$$\frac{y-4}{-1-4}=\frac{x+3}{5-(-3)} \text{ або } \frac{y-4}{-5}=\frac{x+3}{8}.$$

Розкривши пропорцію, маємо $8(y-4)=-5(x+3)$. Спростивши, одержимо $y=-\frac{5}{8}x+\frac{17}{8}$.

16.4. Рівняння прямої у відрізках

Нехай пряма відсікає від початку координат на осі Ox відрізок $a\neq 0$, а на осі Oy відрізок $b\neq 0$, тоді пряма проходить через дві точки $A(a;0)$ і $B(0;b)$.



Мал.39

Використавши формулу (2.55) для точок $A(a;0)$ і $B(0;b)$, одержимо $\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$ і після спрощення маємо

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (2.56)$$

Рівняння (2.56) називається рівнянням прямої у відрізках.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку A(1;2), яка відтинає на додатній осі Oy відрізок у два рази більший як на додатній осі Ox.

Розв'язування. У рівності (2.56) за умовою $b=2a(a>0)$. Підставляючи координати точки A(1;2) і $b=2a$ у рівняння (2.56), одержимо $\frac{1}{a}+\frac{2}{2a}=1$, або $\frac{2}{a}=1$ і $a=2$.

Тоді рівняння шуканої прямої буде $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$.

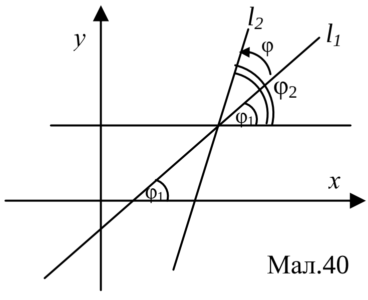
16.5. Кут між двома прямими

Нехай задано дві прямі l_1 і l_2:

$$y=k_1x+b_1, \quad l_1$$

$$y=k_2x+b_2, \quad l_2$$

і потрібно знайти кут φ між ними (мал.40).



Мал.40

Із мал.40 видно, що $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$, причому $k_1=tg\varphi_1$, $k_2=tg\varphi_2$, $\varphi_1\neq\frac{\pi}{2}, \varphi_2\neq\frac{\pi}{2}$.

Тоді

$$tg\varphi=tg(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{tg\varphi_2-tg\varphi_1}{1+tg\varphi_1 tg\varphi_2} \quad \text{або} \quad tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (2.57)$$

де стрілка на мал. 40 означає, що кут φ береться проти годинникової стрілки від l_1 до l_2.

Формула (2.57) є формула для знаходження кута між двома прямими.

Якщо $l_1 || l_2$ то $\varphi = 0$ і $tg\varphi = 0$. Тоді із формули (2.57) маємо, що

$$k_1 = k_2 \tag{2.58}$$

Умова (2.58) є необхідною і достатньою умовою паралельності двох прямих.

Якщо $l_1 \perp l_2$, то тоді $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $tg\varphi$ не існує. Перейдемо до $ctg\varphi = \frac{1}{tg\varphi}$.

Тепер формула (2.57) запишеться так

$ctg\varphi = \frac{1}{tg\varphi} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}$ і коли $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $ctg(\frac{\pi}{2}) = 0$. Одержимо умову перпендикулярності двох прямих:

$$k_1 k_2 = -1 \tag{2.59}$$

Висновок. Прямі l_1 і l_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли їх кутові коефіцієнти рівні і ці прямі перпендикулярні, коли добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює “–1”.

Приклад 3. Знайти кут між прямими $y = 3x + 4$ і $y = \frac{1}{2}x - 1.$

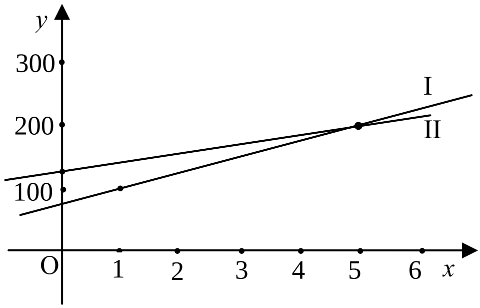
Розв’язування. Знаходимо $k_1 = \frac{1}{2}$ і $k_2 = 3$. Підставивши значення цих кутових коефіцієнтів у формулу (2.57), одержимо

$$tg\varphi = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot 3} = 1.$$

Звідси знаходимо $\varphi = 45^\circ$.

Приклад 4. Затрати перевезень двома засобами транспорту виражаються функціями $y = 75 + 25x$ і $y = 125 + 15x$, де x - віддаль перевезень в сотнях кілометрів, а y - транспортні витрати. Починаючи з якої віддалі , найбільш економічним є другий засіб транспорту?

Розв’язування. Намалюємо графіки заданих функцій і побачимо, що вони перетинаються в точці **(5;200).** Щоб перевірити даний результат, розв’яжемо систему рівнянь



$$\begin{cases} y = 75 + 25x \\ y = 125 + 15x \end{cases},$$

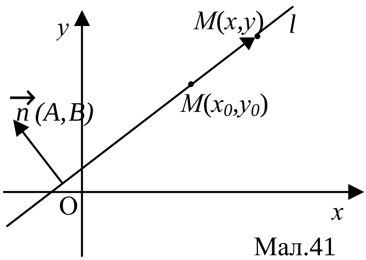
$75 + 25x = 125 + 15x$

або $10x = 50$, $x = 5$, $y = 200$.

З даного малюнка видно, що при віддалі, яка перевищує **500** км найбільш економічним є другий засіб транспорту.

16.6. Загальне рівняння прямої та його дослідження.

Нехай задана точка $M_0(x_0; y_0)$ через яку проходить пряма l і вектор $\vec{n}(A,B)$, який перепендикулярний до прямої l (мал.41). На прямій l беремо довільну точку $M(x;y)$. Тому що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ є перепендикулярним до вектора $\vec{n}(A,B)$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто



Мал.41

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0\,. \qquad (2.60)$$

Рівняння (2.60) є векторне рівняння прямої l. Розпишемо це рівняння в координатній формі. Оскільки $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$, то рівняння (2.60) перепишеться у вигляді $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Розкривши дужки, одержимо

$$Ax + By + C = 0\,, \qquad (2.61)$$

де $C = -Ax_0 - By_0$.

Рівняння (2.61) називається загальним рівнянням прямої. Дослідимо як розміщена пряма, що задана рівнянням (2.61), якщо деякі коефіцієнти A, B і C будуть рівні нулю.

1) Якщо $C=0, A\neq 0, B\neq 0$, то рівняння (2.61) має вигляд $Ax+By=0$ або $y=-\frac{A}{B}x=kx$, де $k=-\frac{A}{B}$.

Значить, якщо вільний член , а саме $C=0$, то пряма проходить через початок координат.

2) Якщо $A=0, B\neq 0, C\neq 0$, то рівняння прийме вигляд $By+C=0$ або $y=-\frac{C}{B}=b$, тобто пряма паралельна осі Ox.

3) Якщо $B=0, A\neq 0, C\neq 0$, то рівняння (2.61) має вигляд $Ax+C=0$ або $x=-\frac{C}{A}=a$ є рівнянням прямої, паралельної осі ординат.

4) Якщо $A=0, B\neq 0, C=0$, то рівняння прийме вигляд $By=0$, звідси $y=0.$ Це і є рівняння осі Ox.

5) Якщо $A\neq 0, B=0, C=0$, то рівняння (2.61) буде мати вигляд $Ax=0$ або $x=0$. Це рівняння осі Oy.

Якщо задані дві прямі l_1 і l_2 загальними рівняннями

$A_1x+B_1y+C_1=0$, l_1 ,

$A_2x+B_2y+C_2=0$, l_2 .

то щоб знайти координати точки перетину цих прямих, які повинні задовольняти рівняння кожної прямої, то потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases}$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то їх кутові коефіцієнти $k_1=-\frac{A_1}{B_2}$ і $k_2=-\frac{A_2}{B_2}$ рівні. Отже, $k_1=k_2$ або $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$.

Значить, умова паралельності прямих, які задані загальними рівняннями, є пропорціональність коефіцієнтів при невідомих.

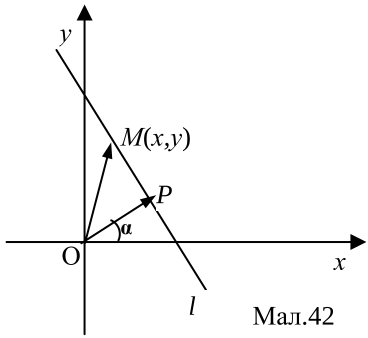
Умова перпендикулярності прямих $k_1k_2=-1$ в цьому випадку має вигляд $(-\frac{A_1}{B_1})(-\frac{A_2}{B_2})=-1$ або $A_1A_2+B_1B_2=0$.

Отже, для прямих $l_1 \perp l_2$, які задані загальними рівняннями, умовою перпендикулярності є рівність нулю суми добутків коефіцієнтів при змінних x і y.

16.7. Нормальне рівняння прямої

Нехай положення прямої на площині визначається двома величинами (параметрами прямої) : довжиною і напрямком перпендикуляра OP, опущеного із початку координат на пряму і величиною кута α, який утворює даний перпендикуляр з віссю Ox (мал.42).

На прямій l візьмемо довільну точку $M(x, y)$. Позначимо довжину перпендикуляра через p, а орт нормалі через $\vec{n}^\circ$. Проекція радіус-вектора $\vec{r} = \vec{OM}$ на нормаль буде завжди рівною p.



Мал.42

Таким чином, пряма l визначається як геометричне місце точок площини, проекції радіус-векторів яких на нормаль дорівнює сталій величині p.

На основі скалярного добутку маємо

$$Пр_{\vec{n}^\circ} \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{n}^\circ,$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n}^\circ = p. \qquad (2.62)$$

Рівняння (2.62) є нормальним рівнянням прямої у векторній формі.

Тому що $|\vec{n}^\circ| = 1$, координати $\vec{n}^\circ = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, вектор $\vec{OM} = (x, y)$, то в координатній формі рівняння (2.62) буде мати вигляд

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (2.63)$$

Якщо пряма лінія задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то це рівняння можна звести до нормального рівняння прямої (2.63).Помножимо загальне рівняння прямої на деякий множник μ

$$\mu Ax+\mu By+\mu C=0, \qquad (2.64)$$

Одержане рівняння і загальне рівняння прямої рівносильні. Щоб рівняння (2.64) було нормальним, тобто мало вигляд (2.63) потрібно, щоб виконувалися рівності

$$\begin{cases} \mu A=\cos\alpha, \\ \mu B=\sin\alpha, \\ \mu C=-p. \end{cases} \qquad (2.65)$$

Перші дві рівності в (2.65) піднесемо до квадрату і додамо. Тоді одержимо, що

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} , \qquad (2.66)$$

μ називається нормувальним множником.

Третя рівність (2.65) встановлює знак множника μ, а саме знак μ є протилежним знакові вільного члена C.

Приклад 4. Привести до нормального вигляду рівняння $4x-3y-7=0.$

Розв'язування. Знаходимо нормувальний множник

$$\mu=\frac{1}{+\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{1}{5}.$$

(вибираємо знак плюс, так як $C=-7<0$).

Помноживши на $\frac{1}{5}$ дане рівняння, одержимо

$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-\frac{7}{5}=0.$$

Одержане рівняння і є нормальним рівнянням прямої. В цьому рівнянні $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $p=\frac{7}{5}$.

16.8. Віддаль від точки до прямої

Нехай маємо пряму l, задану рівнянням $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ і точку M_0 (x_0,y_0) Потрібно знайти віддаль від цієї точки до прямої l. Через точку $M_0(x_0;y_0)$ проведемо пряму l_1 паралельну прямій l

Шукану віддаль від точки M до прямої l позначимо через $d = M_0 D.$ Тому що $OP = p,$ а $OP_1 = p_1$, то $d = p_1 - p.$

Якщо б точка M_0 знаходилася на тій же віддалі від прямої l, але з другого боку, то тоді $d = -(p_1 - p).$

Таким чином, шукана віддаль визначається рівністю
$d = \pm(p_1 - p)$ або $d = |p_1 - p|$.

Нормальне рівняння прямої l_1 паралельної l має вигляд

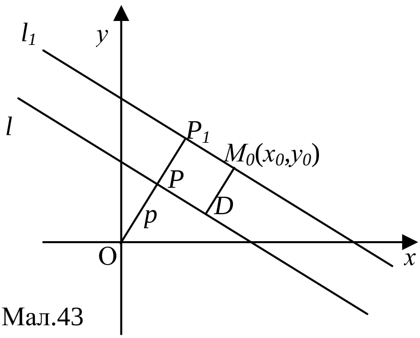
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0\,. \tag{2.67}$$

Тому що точка $M_0(x_0;y_0)$ знаходиться на прямій l_1, то її координати задовольняють рівнянню (2.67), тобто

$$x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p_1 = 0$$

і звідси $p_1 = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha$. Підставляючи значення p_1 в рівність $d = |p_1 - p|$, одержимо

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p| \tag{2.68}$$



Мал.43

Формула (2.68) є формулою віддалі від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої, заданої нормальним рівнянням.

Якщо ж пряма задана загальним рівнянням, то віддаль від точки $M_0(x_0;y_0)$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,. \tag{2.69}$$

Приклад. Знайти віддаль від точки $M_0(3;4)$ до прямої

$$4x - 3y + 10 = 0.$$

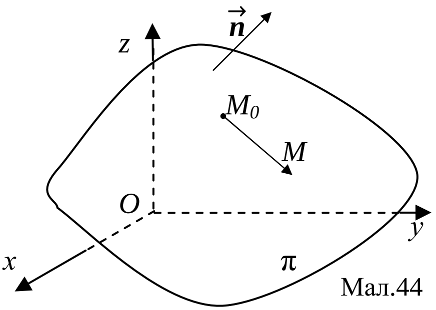
Розв'язування. Тепер підставляємо замість x_0 і y_0 координати точки M_0, тобто $x_0 = 3,\ y_0 = 4$ в формулу (2.69) і знаходимо шукану віддаль

$$d = \frac{|4\cdot 3 - 3\cdot 4 + 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

§17. Площина та її рівняння

Нехай в системі координат $0xyz$ задана довільна площина π.

Візьмемо на цій площині яку-небудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Виберемо вектор $\vec{n}(A,B,C)$ перпендикулярний до площини π і назвемо його нормальним вектором, або просто нормаллю. Цими двома величинами (точкою через яку проходить площина і вектором перпендикулярним до площини) площина визначається однозначно. На площині π візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ (мал.44). Тому що точка $M(x, y, z)$ знаходиться на площині, то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до вектора $\vec{n}$, а це значить, що їх скалярний добуток дорівнює нулю,



Мал.44

тобто $$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \qquad (2.70).$$

Рівняння (2.70) є векторним рівнянням площини. Розпишемо рівняння (2.70) в координатній формі , знаючи, що

$\vec{n}(A,B,C)$. $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Одержимо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2.71).$$

Рівняння (2.71) є рівнянням площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярна до заданого вектора $\vec{n}(A,B,C)$. Рівняння (2.71) задовольняють координати довільної точки, яка знаходиться на цій площині π і не задовольняють координати довільної точки, яка не знаходиться на цій площині.

Розкривши дужки в рівнянні (2.71), одержимо

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2.72)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Рівняння (2.72) називається загальним рівнянням площини. Кожна площина в декартових прямокутних координатах визначається рівнянням першого степеня відносно біжучих координат $x, y.z.$ Вірно і обернене твердження: кожне рівняння першого степеня відносно біжучих координат x, y, z визначає площину.

Дійсно, нехай x_0, y_0, z_0 - який –небудь розв'язок рівняння (2.72), тобто

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \,. \qquad (2.73).$$

Віднімаючи почленно із рівняння (2.72) рівність (2.73), одержимо рівняння $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$ яке і є рівнянням площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}(A, B, C)$.

17.1. Дослідження загального рівняння площини

Під дослідженням загального рівняння площини розуміється те, яке положення займає площина, коли деякі із коефіцієнтів A, B, C і D перетворюються в нуль.

1) $D = 0, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0$, то рівняння площини має вигляд $Ax + By + Cz = 0,$ тобто площина проходить через початок координат;

2) $C = 0, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad D \neq 0,$ то рівняння (2.72) буде мати вигляд $Ax + By + D = 0$.

В площині $0xy$ це рівняння визначає пряму лінію, а в просторі це буде рівняння площини паралельної вісі $0z.$

3) $B = 0, \quad A \neq 0, \quad C \neq 0, D \neq 0$, то рівняння (2.72) буде мати вигляд $Ax + Cz + D = 0$.
і є рівнянням площини, паралельної вісі $Oy.$

4) $A = 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0, \quad D \neq 0,$ то рівняння (2.72) має вигляд $By + Cz + D = 0$ і є рівнянням площини , яка паралельна вісі $0x$. Отже, якщо в рівнянні площини (2.72) відсутня одна із координат x, y або z то площина паралельна вісі $0x, \quad 0y$ або $0z$.

5) Якщо $D = C = 0$, $A \neq 0, \quad B \neq 0,$ то рівнянню $Ax + By = 0$ відповідає площина, яка проходить через початок координат і паралельна вісі $0z$, тобто ця площина проходить через вісь $0z$;

6) Аналогічно, коли $D = B = 0$, $A \neq 0, \quad C \neq 0$, то рівнянню $Ax + Cz = 0$ відповідає площина , що проходить через вісь $0y$.

7) Коли $D = A = 0, \quad C \neq 0, \quad B \neq 0$, то рівнянню $By + Cz = 0$ відповідає площина, що проходить через вісь $0x$.

8) Якщо $A = B = 0, \quad C \neq 0, \quad D \neq 0$, то рівняння $Cz + D = 0$ визначає площину , яка паралельна вісі $0x$ і вісі $0y$, тобто площина паралельна координатній площині $0xy$. Ця площина відтинає на осі $0z$ відрізок $z = -\dfrac{D}{C}$.

9) Аналогічно, коли $A = C = 0, B \neq 0, D \neq 0$, то рівняння $By + D = 0$ визначає площину , яка паралельна координатній площині $0xz$ і відтинає на вісі $0y$ відрізок $y = -\dfrac{D}{B}$.

10) Коли $B = C = 0,\ A \neq 0$, $D \neq 0$, то рівняння $Ax + D = 0$ визначає площину, яка паралельна координатній площині $0yz$ і відтинає на вісі $0x$ відрізок $x = -\dfrac{D}{A}$.

11) Якщо $B = C = D = 0, \quad A \neq 0,$ то рівняння $Ax = 0$ рівносильне $x = 0$, а це і є рівняння координатної площини $0yz$.

12) Аналогічно, коли $A = 0, C = 0, D = 0, B \neq 0$, то рівняння $By = 0,$ ($y = 0$) представляє відповідно координатну площину $0zx.$

13) Якщо $A = B = D = 0, C \neq 0,$ то рівняння $C = 0$ (або $z = 0)$ є відповідно рівнянням координатної площини Oxy.

17.2. Рівняння площини у відрізках

Нехай в рівнянні (2.72) кожний із коефіцієнтів A, B, C, D не дорівнює нулю, тобто площина перетинає всі осі координат і не проходить через початок координат. Перетворимо рівняння (2.72) таким чином:

$$Ax + By + Cz = -D,$$

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1,$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Для скорочення запису позначимо

$-\frac{D}{A}=a, \quad -\frac{D}{B}=b, \quad -\frac{D}{C}=c,$ тоді рівняння площини буде мати вигляд

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\,. \qquad (2.73)$$

Рівняння (2.73) називають рівнянням площини у відрізках, де числа a,b,c є величини відрізків, які відтинає площина на осях координат.

17.3. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності площин.

Нехай задано дві площини

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\,, \qquad (2.74)$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\,. \qquad (2.75)$$

Якщо ці площини перетинаються, то кутом між ними назвемо будь-який суміжний двогранний кут. Один із них дорівнює куту φ між векторами $\vec{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2,B_2,C_2)$, а другий - $\varphi_1=180^0-\varphi$.

Значить, шуканий кут φ можна знайти за формулою (2.21) §11

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\,. \qquad (2.76)$$

Якщо $\varphi=\frac{\pi}{2},$ то із формули (2.76) одержуємо, що

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\,. \qquad (2.77)$$

Умова (2.77) одержується із умови перпендикулярності векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$. Рівність (2.77) називається умовою перпендикулярності двох площин.

Якщо площини (2.74) і (2.75) паралельні, то нормалі цих площин $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ будуть колінеарні і тоді за формулою (2.23) одержимо

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (2.78)$$

Умова (2.78) виражає умову паралельності двох площин.

Приклад 1. Записати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(8;-3;1)$ і $M_2(4;7;2)$ і перпендикулярна до площини $3x+5y-72+21=0$.

Розв'язування. Тому що площина проходить через точку $M_1(8;-3;1)$, то її координати задовольняють рівняння (2.71), тобто

$$A(x-8)+B(y+3)+C(z-1)=0. \qquad (2.79)$$

Аналогічно, площина проходить і через точку $M_2(4;7;2)$, то її координати задовольняють рівнянню (2.79), тобто

$$A(4-8)+B(7+3)+C(2-1)=0. \qquad (2.80)$$

Використаємо умову перпендикулярності (2.77) для площини (2.79) і заданої площини $3x+5y-7z+21=0$, тобто $3A+5B-7C=0$. Для знаходження A,B,C маємо систему двох рівнянь з трьома невідомими, а саме

$$\begin{cases}-4A+10B+C=0,\\ 3A+5B-7C=0.\end{cases}$$

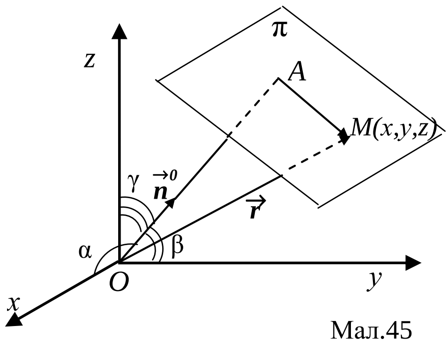
З даної системи знаходимо A і B через C, тобто $A=\frac{3}{2}C$, $B=\frac{1}{2}C$ і підставляємо одержані значення в рівняння (2.79):

$$\frac{3}{2}C(x-8)+\frac{1}{2}(y+3)+C(z-1)=0.$$

Зробивши спрощення в останньому рівнянні , одержуємо шукане рівняння площини $3x+y+2z-23=0$.

17.4. Нормальне рівняння площини

Положення площини π в просторі можна визначити через нормальний вектор $\vec{n}=\vec{OA}$, початок якого співпадає з початком координат, а кінець знаходиться на площині π. Нехай довжина цього вектора дорівнює p, тобто $p=|\vec{OA}|$, а кути нахилу цього вектора з осями координат є α,β,γ (мал.45). Значить p є віддаль площини до початку координат. Якщо через $\vec{n}^{0}$ позначимо одиничний вектор нормалі $\vec{n} = \vec{OA}$, то координати $\vec{n}^{0}$ будуть ($cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$). На основі §8 їх називають направляючими косинусами нормального вектора. Візьмемо довільну точку $M(x,y,z)$ на площині π і позначимо радіус - вектор $\vec{OM}$ через $\vec{r}$.



Мал.45

Тоді $Пр_{\vec{n}^{0}} \vec{r} = p$. Тепер на основі формули (2.15) маємо

$$Пр_{\vec{n}^{0}} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}^{0}}{|\vec{n}^{0}|} = \vec{r} \cdot \vec{n}^{0},$$

бо $|\vec{n}^{0}| = 1.$ Значить, ми одержимо, що $\vec{r} \cdot \vec{n}^{0} = p$ або

$$\vec{r} \cdot \vec{n}^{0} - p = 0 . \qquad (2.81)$$

Рівняння (2.81) називається нормальним рівнянням площини у векторній формі. Розпишемо рівняння (2.81) у координатній формі, одержимо $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$. (2.82).

В цьому рівнянні p віддаль від площини до початку координат і

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 . \qquad (2.83)$$

Щоб загальне рівняння площини привести до нормального вигляду, потрібно загальне рівняння площини помножити на сталий множник μ. Одержимо $\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$, де $\mu A = cos\alpha$, $\mu B = cos\beta$, $\mu C = cos\gamma$, $\mu D = -p$.

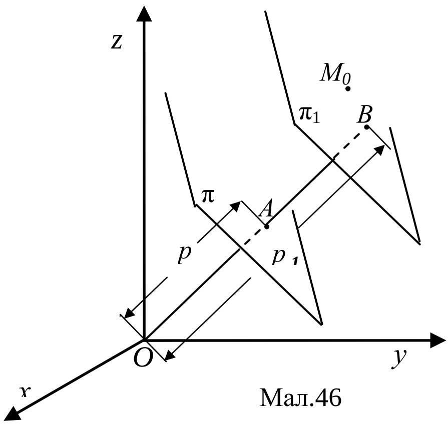
Піднісши перші три рівності до квадрату і додавши їх, враховуючи (2.83), одержимо

$$\mu^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1, \quad \text{або} \quad \mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} . \qquad (2.84)$$

В формулі (2.84) необхідно брати знак протилежний знаку вільного члена в загальному рівнянні площини, так як $\mu D = -p$, де p - завжди додатне як віддаль.

Отже, щоб рівняння (2.72) привести до нормального вигляду , треба помножити його на нормувальний множник (2.84).

17.5. Віддаль від точки до площини



Мал.46

Нехай задано нормальне рівняння площини π:
$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$
і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поза площиною. Потрібно обчислити віддаль від точки M_0 до площини π . (мал. 2.46).

Розв'язування. Проведемо через точку M_0 площину π_1 паралельну до площини π (мал. 46). Нормальне рівняння площини π_1 запишемо так
$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_1 = 0$ де p_1 віддаль площини π_1 від початку координат. Шукана віддаль дорівнює $AB = p_1 - p$. Тому що точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ знаходиться на площині π_1, то
$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p_1 = 0$ і значить
$d = p_1 - p = x_0\cos\alpha + y_0\cos b + z_0\cos\gamma - p$. Взагалі

$$d = \left| x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \right| \qquad (2.85)$$

$$\text{або } d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2.86)$$

§18. Пряма в просторі

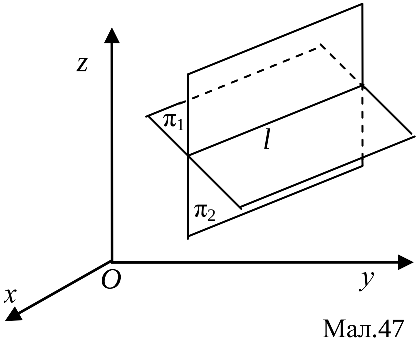
В просторі, так як і на площині, одну і ту ж пряму можна задати різними по формі рівняннями.

18.1. Загальне рівняння прямої

Пряму $\boldsymbol{l}$ в просторі можна розглядати як лінію перетину двох площин $\boldsymbol{\pi_1}$ і $\boldsymbol{\pi_2}$ (мал.47). Тому загальним рівнянням прямої $\boldsymbol{l}$ є система двох рівнянь першого степеня , а саме

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (2.87)$$

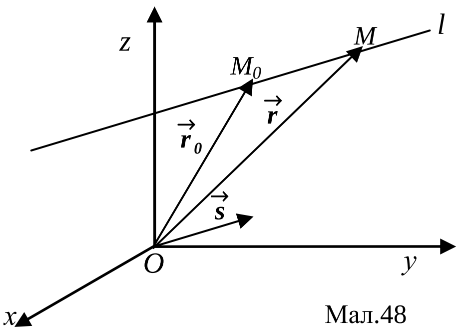
Координати прямої $\boldsymbol{l}$ будуть задовольняти обом рівнянням системи (2.87). Система (2.87) визначає пряму лінію $\boldsymbol{l}$ при умові, що нормальні вектори $\vec{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ неколінеарні, бо тільки в цьому випадку площини перетинаються.



Мал.47

18.2. Канонічне рівняння прямої

Положення прямої лінії в просторі визначається однозначно, якщо відома точка $M_0(x_0\, y_0\, z_0)$,через яку вона проходить , і відомо напрямний вектор $\vec{s}(m;n;p)$, якому пряма $\boldsymbol{l}$ паралельна (мал.48). Візьмемо на прямій $\boldsymbol{l}$ довільну точку $M(x;y;z)$ і позначимо $\vec{OM}$ через $\vec{r}$, а вектор $\vec{OM_0}$ через $\vec{r_0}$. З малюнка (48) видно , що



Мал.48

$$\vec{OM}=\vec{OM_0}+\vec{M_0M},$$

або
$$\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{M_0M}. \qquad (2.88)$$

Вектор $\vec{M_0M}$ колінеарний із направляючим вектором $\vec{s}$, тому

$$\vec{M_0M}=t\cdot\vec{s}, \qquad (2.89)$$

де $\boldsymbol{t}$ - числовий параметр.

Тоді (2.88) запишемо у вигляді
$$\vec{r}=\vec{r_0}+t\cdot\vec{s}. \qquad (2.90)$$

Рівняння (2.90) називається векторним рівнянням прямої в просторі. Розпишемо рівняння (2.90) в координатній формі

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt\,. \tag{2.91}$$

Рівняння (2.91) називаються параметричними рівняннями прямої. Якщо параметр t змінюється, то точка $M(x;y;z)$ рухається по прямій l.

Виключивши параметр t із рівнянь (2.91) , одержимо

$t = \frac{x - x_0}{m}$, $\quad t = \frac{y - y_0}{n}$, $\quad t = \frac{z - z_0}{p}$. Звідси

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}\,. \tag{2.92}$$

Рівняння (2.92) називаються канонічними рівняннями прямої в просторі, а координати m, n і p вектора $\vec{s}$ - направляючими коефіцієнтами прямої.

В канонічних рівняннях (2.92) величини m, n і p не можуть одночасно перетворюватися в нуль, так як $|\vec{s}| \neq 0$, але деякі із них можуть дорівнювати нулю.

Нехай, наприклад, $m = 0$, то із рівнянь (2.91) одержимо таку систему

$$\left.\begin{aligned} x = x_0 \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{aligned}\right\} \tag{2.93}$$

Кожне із цих двох рівнянь визначає площину, а система рівнянь (2.92) визначає пряму. В цьому випадку рівняння (2.92) можна записати умовно так:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}\,. \tag{2.94}$$

Система рівнянь (2.93) або (2.94) визначає пряму, яка перпендикулярна до вісі $0x$, так як $m = 0$. Якщо які-небудь два направляючих коефіцієнти рівні нулю, наприклад, $m=0, n=0, p\neq 0$, то із рівняння (2.91) одержимо, що

$$\left.\begin{aligned} x = x_0 \\ y = y_0 \end{aligned}\right\} \tag{2.95}$$

Рівняння (2.92) умовно запишеться так:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{2.96}$$

Пряма, яка визначається системою (2.95), або (2.96) паралельна осі $0z$ і перпендикулярна до осей $0x$ і $0y$.

Канонічні рівняння прямої (2.92) можна представити як сукупність двох рівнянь, наприклад

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p} \text{ і } \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{2.97}$$

Кожне із цих рівнянь представляє площину. Перша площина паралельна вісі $0y$, так як в рівнянні відсутня координата y, а друга паралельна осі $0x$.

Таким чином, пряму можна розглядати як перетин двох площин, тобто канонічні рівняння прямої (2.92) записали у загальному вигляді прямої (2.97).

18.3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$. В цьому випадку за направляючий вектор прямої $\vec{s}$ можна взяти вектор $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. Тоді $m=x_2-x_1, \quad n=y_2-y_1, \quad p=z_2-z_1$ і взявши за

$x_0=x_1, \quad y_0=y_1, \quad z_0=z_1,$ одержимо

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{2.98}$$

Рівняння (2.98) є рівнянням прямої в просторі , що проходить через дві задані точки.

Загальне рівняння прямої можна привести до канонічних рівнянь (2.92). Для цього в системі (2.87), наприклад, z надаємо значення z_0 і система (2.87) буде системою двох рівнянь з двома невідомими x і y, які із неї знаходимо, тобто $x=x_0$ і $x=x_0$. Таким чином, одержали координати (x_0,y_0,z_0) однієї точки M_0 в просторі. Аналогічно, із системи (2.87) надаючи $z=z_1$, знаходимо

$x = x_1, \quad y = y_1,$ тобто координати (x_1, y_1, z_1) другої точки M_1.

Тепер можна записати рівняння прямої, що проходить через дві точки в просторі на основі (2.98) і одержимо рівняння (2.92).

18.4. Кут між двома прямими

Нехай задано дві прямі l_1 і l_2:

$$l_1 \Rightarrow \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \tag{2.99}$$

$$l_2 \Rightarrow \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \tag{2.100}$$

<u>Означення.</u> Кутом між двома прямими l_1 і l_2 називається кут між їх направляючими векторами $\vec{s_1}(m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s_2}(m_2, n_2, p_2)$.

Кут між двома прямими l_1 і l_2 буде визначатися за формулою (2.21) , тобто

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{2.101}$$

Очевидно, що $0 \le \varphi \le 180^0$.

Якщо прямі (2.99) і (2.100) паралельні, то їх направляючі вектори $\vec{s_1}$ і $\vec{s_2}$ колінеарні, то ми одержуємо умову паралельності прямих l_1 і l_2 у вигляді

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{2.102}$$

Умова (2.102) є умовою паралельності прямих l_1 і l_2. Якщо прямі l_1 і l_2 взаємно-перпендикулярні , то направляючі вектори $\vec{s_1}(m_1, n_1, p_1)$ і $\vec{s_2}(m_2, n_2, p_2)$ також перпендикулярні , тобто їх скалярний добуток $\vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = 0$. Звідси

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \tag{2.103}$$

Умова (2.103) є умовою перпендикулярності двох прямих l_1 і l_2 у просторі.

18.5. Взаємне розміщення прямої і площини

Нехай задана пряма l

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{2.104}$$

і площина

$$Ax+By+Cz+D=0\,. \tag{2.105}$$

Пряма l паралельна до площини π тоді і тільки тоді, коли її направляючий вектор $\vec{s}(m,n,p)$ перпендикулярний до нормального вектора $\vec{n}(A,B,C)$ площини. Тоді їх скалярний добуток дорівнює нулю

$$Am+Bn+Cp=0\,. \tag{2.106}$$

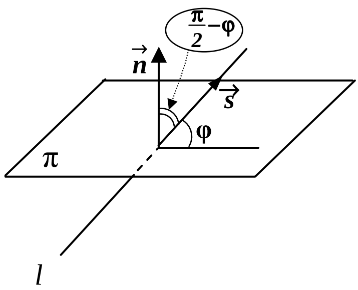
Умова (2.106) є умовою паралельності прямої і площини.

Якщо пряма l перпендикулярна до площини π, то направляючий вектор прямої $\vec{s}(m,n,p)$ і нормальний вектор площини $\vec{n}(A,B,C)$ паралельні, тобто

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}\,. \tag{2.107}$$

Умова (2.107) є умовою перпендикулярності прямої і площини.

Кутом між прямою l і площиною π називається кут $\varphi(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$, який утворений прямою l з її проекцією на площину (мал.49). З малюнка 49 видно, що кут між нормальним вектором $\vec{n}(A,B,C)$ площини і направляючим вектором $\vec{s}(m,n,p)$ прямої дорівнює $\frac{\pi}{2}-\varphi$, а якщо век-



Мал.49

тор $\vec{s}$ має напрям протилежний як показано на малюнку , то кут між векторами $\vec{n}$ і $\vec{s}$ буде дорівнювати $\frac{\pi}{2}+\varphi$. В обох цих випадках $\sin\varphi \geq 0$, тому

$$\sin\varphi = |\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)| = |\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi)| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}.$$ Значить

$$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (2.108)$$

Формула (2.108) є формулою для знаходження кута між прямою (2.104) і площиною (2.105).

Приклад 1. Знайти кут між площиною $3x-2y+z+4=0$ і прямою $\begin{cases} 3x-z+1=0, \\ 2x-y-3=0. \end{cases}$

Розв'язування. Рівняння прямої приведено до канонічного вигляду. Із першого рівняння знаходимо $x=\frac{z-1}{3}$, а з другого рівняння $x=\frac{y+3}{2}$, значить канонічний вид рівняння прямої буде

$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{3}$. Таким чином, направляючий вектор прямої $\vec{s}(1;2;3)$, а нормальний вектор площини $\vec{n}(3;-2;1)$. Тепер за формулою (2.108) знаходимо

$$\sin\varphi = \frac{3\cdot1+(-2)\cdot2+3\cdot1}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{9+4+1}} = \frac{2}{14} \approx 0{,}1428, \ \varphi \approx 8^0 15'.$$

§19. Криві другого порядку

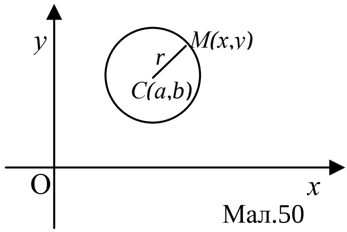
Кривими другого порядку називаються лінії, рівняння яких є рівняння другого степеня відносно біжучих координат. Загальний вигляд рівняння кривої другого порядку

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (2.109)$$

До кривих другого порядку відносяться коло, еліпс, гіпербола і парабола.

19.1. Коло і його рівняння

<u>Означення 1.</u> Колом називається множина точок площини рівновіддалених від заданої точки, яка називається центром кола.



Мал.50

Нехай центр кола знаходиться в довільній точці $C(a,b)$ (мал.50). Виходячи з означення 1, віддаль довільної точки $M(x,y)$ площини до центра $C(a,b)$ є величина стала і дорівнює r. За формулою (2.3) маємо $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Підносячи обидві частини цієї рівності до квадрату одержимо рівняння, яке називається нормальним рівнянням кола

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (2.110)$$

Виясними умови, при яких загальне рівняння другого степеня з двома змінними (2.109) є рівнянням кола. В цьому рівнянні A,B і C не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Коли в рівнянні (2.110) розкрити дужки, то одержимо

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0. \qquad (2.111)$$

Щоб рівняння (2.109) і (2.111) представляли одну і ту ж лінію потрібно, щоб коефіцієнт $B=0$, а всі решту пропорційні, зокрема $\frac{A}{1}=\frac{C}{1}$, звідси $A=C\neq 0$. Тепер рівняння (2.109) має вигляд

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (2.112)$$

Рівняння (2.112) **називається загальним рівнянням кола.**

Обидві частини рівняння (2.112) поділимо на $A\neq 0$ і доповнимо члени,які містять x і y до повних квадратів. Одержимо

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{F}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}. \qquad (2.113)$$

Порівнюючи (2.113) з рівнянням кола (2.110) можна зробити висновок, що рівняння (2.109) є рівнянням кола при таких трьох умовах

$$1)A=C, \quad 2)B=0, \quad 3)D^2+E^2-4AE>0.$$

При виконанні цих умов для кола (2.113) центр знаходиться в точці $C\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2A}\right)$, а радіус $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AP}}{2A}$.

Приклад 1. Привести загальне рівняння кола $x^2+y^2-6x+4y-3=0$ до нормального вигляду.

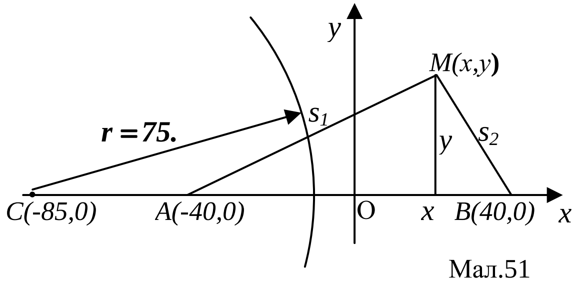
Розв'язування. Згрупуємо члени з x та y і доповнимо їх до повного квадрату, то одержимо

$(x^2-6x+9)-9+(y^2+4y+4)-4-3=0$, або

$(x-3)^2+(y+2)^2=16.$ Координати центра кола $a=3, b=-2,$ а радіус кола $r=4.$

Приклад 2 (економічного характеру). Два підприємства, відстань між якими 80 км, виробляють деяку продукцію, причому фабрично-заводська ціна продукції на обидвох підприємствах однакова і дорівнює $p.$ Нехай транспортні витрати на перевезення одиниці продукції від підприємства A до споживача складає 10грн/км, а від підприємства B складає 6грн/км. Як буде розміщений ринок збуту, якщо витрати споживачів повинні бути однаковими?

Розв'язування. Осі координат проведемо через середину відрі-



Мал.51

зка AB. Припустимо, що споживач знаходиться в точці $M(x,y);$ введемо позначення $AM=s_1, \quad BM=s_2$ (мал.51). Витрати споживача на покупку одиниці виробу з підприємства A складають $p+s_1\cdot 10$, а у підприємства B $p+s_2\cdot 6$. Витрати споживачів однакові, якщо $p+10s_1=p+6s_2$, або $10s_1=6s_2, \quad 5s_1=3s_2$.

З мал.51 видно, що $s_1^2=(40+x)^2+y^2,$ або $s_1=\sqrt{(40+x)^2+y^2}.$

Аналогічно $s_2^2=(40-x)^2+y^2,$ або $s_2=\sqrt{(40-x)^2+y^2}$.

Для споживача витрати на покупку продукції однакові, якщо $5\sqrt{(40+x)^2+y^2}=3\sqrt{(40-x)^2+y^2}$. Піднесемо обидві частини до квадрату і згрупуємо. Одержимо $x^2+y^2+170x+1600=0$ і, виділивши повний квадрат відносно x, маємо $(x+85)^2+y^2=5625$. Це нормальне рівняння кола, центр якого знаходиться на осі абсцис з абсцисою “-85”, а радіус кола $r=75$.

Для споживачів, які знаходяться на цьому колі, витрати на покупку виробу однакові. Для споживачів, які знаходяться поза колом , витрати на покупку продукції менші на підприємстві B, а для споживачів, які знаходяться всередині кола – на підприємстві A. Значить ринок буде розподілений так:

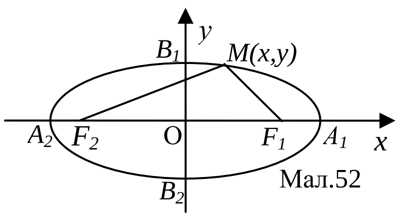
а) споживачі, які знаходяться всередині кола, будуть закупляти дані вироби на підприємстві A;

б) для споживачів, які знаходяться на колі, однаково на якому підприємстві будуть проводитися закупки;

в) споживачі, які знаходяться поза колом, будуть закупляти вироби на підприємстві В.

19.2. Еліпс і його рівняння

<u>Означення 2.</u> Еліпсом називається множина точок площини, сума віддалей від яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала.



Мал.52

Виходячи із означення 2, виведемо рівняння еліпса. Нехай задані дві точки, які називаються фокусами, F_1 і F_2, віддаль між якими позначимо через $2c$ (фокальна віддаль) (мал.52). Через фокуси проведемо пряму, яку візьмемо за вісь абсцис, а за вісь ординат візьмемо пряму перпендикулярну до вісі OX, яка проходить через середину відрізка F_1F_2 (точка 0). Оскільки віддаль між фокусами прийняли за $2c$, то координати фокусів будуть відповідно $F_1(c,0)$ і $F_2(-c,0)$.

Нехай $M(x,y)$ довільна точка еліпса. Відрізки F_1M і F_2M, які з’єднують точку еліпса з його фокусами називають фокальними радіус-векторами цієї точки і позначають r_1 і r_2. Тоді r_1+r_2 є величина стала за означенням, позначимо її через ***2a:***

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad (2.114)$$

(***2a>2c***, тому, що в трикутнику F_1MF_2 сума двох сторін більша за третю). Покажемо, якому рівнянню задовольняють координати точки ***M(x,y).***

Знайдемо r_1 і r_2:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ , \qquad (2.115)$$

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ . \qquad (2.116)$$

Підносячи обидві частини (2.115) і (2.116) до квадрату і віднімаючи, одержимо

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx\ . \qquad (2.117)$$

Розписавши різницю квадратів в (2.117) і враховуючи (2.114), одержимо

$$r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x\ . \qquad (2.118)$$

Розглянемо систему з рівнянь (2.114) і (2.118):

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a, \\ r_2 - r_1 = 2\dfrac{c}{a}x. \end{cases} \qquad (2.119)$$

З цієї системи знаходимо

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x\ , \qquad (2.120)$$

$$r_2 = a + \frac{c}{a}x\ . \qquad (2.121)$$

Підставимо (2.121) в (2.116), одержимо $a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$, або

$$a^2 - c^2 = x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2\ . \qquad (2.122)$$

Позначимо $a^2 - c^2 = b^2$ (2.123)

і тоді (2.122) перепишемо після простих перетворень у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \qquad (2.124)$$

Рівняння (2.124) є канонічним рівнянням еліпса.

Це рівняння другого степеня, значить, еліпс крива другого порядку. Рівняння (2.124) містить x і y в парних степенях, значить крива, яка визначається цим рівнянням симетрична відносно осей $0x$ і $0y$. Осі симетрії еліпса називають його осями. Точку 0 називають центром еліпса. Із рівняння (2.124) знайдемо y:

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} . \qquad (2.125)$$

Так як y, який знаходиться в першому квадранті є додатній, то

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} . \qquad (2.126)$$

З рівності (2.126) видно, якщо $x = 0,$ то $y = b$ і при зростанні x від нуля до a , y спадає від b до нуля.

В першому квадранті частина еліпса це дуга A_1B_1. Якщо провести дзеркальне відображення цієї дуги відносно осей координат, то ми одержимо весь еліпс (мал.52).

Якщо в рівнянні (2.124) $y = 0,$ то $x = \pm a,$ а якщо $x = 0,$ то $y = \pm b.$ Значить вершинами еліпса є точки $A_1(a,0), A_2(-a,0),$ $B_1(0,b), B_2(0,-b).$ Відрізок $A_2A_1 = 2a$, а відрізок $B_2B_1 = 2b.$ Ці відрізки відповідно називаються великою і малою осями еліпса. Відповідно a і b - велика і мала піввісь еліпса.

<u>Означення 3</u>. Ексцентриситетом еліпса називається відношення віддалі між фокусами до довжини великої осі.

Позначимо ексцентриситет через ε , то тоді

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} < 1 . \qquad (2.127)$$

Якщо $a = b \quad (\varepsilon = 0)$, то еліпс перетворюється в коло. Підставимо (2.127) в (2.120) і (2.121), то одержимо

$$r_1 = a - \varepsilon x , \qquad (2.128)$$

$$r_2 = a + \varepsilon x . \qquad (2.129)$$

Ці формули використовуються при розв’язуванні задач.

Приклад 3. Скласти канонічне рівняння еліпса, знаючи, що велика вісь $2a = 10,$ а ексцентриситет $\varepsilon = 0,8.$

Розв'язування. З рівняння (2.127) знайдемо c. Знаючи, що $a=5, \quad c=a\cdot\varepsilon=5\cdot 0{,}8=4.$ А тепер знайдемо b з рівності (2.123)

$$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=25-16=9, \quad b=3.$$

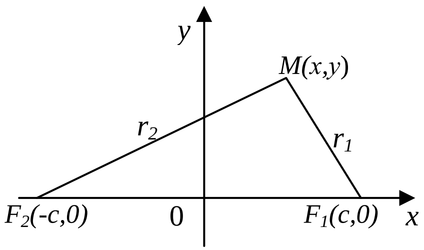
Підставляючи $a=5, b=3$ в рівняння (2.124), одержимо

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

19.3. Гіпербола та її рівняння

<u>Означення 4.</u> Гіперболою називається множина точок площини, абсолютне значення різниці віддалей яких від двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала.

Ґрунтуючись на означенні 4 виведемо канонічне рівняння гіперболи. Нехай задані дві точки F_1 і F_2 є фокусами гіперболи, позначимо віддаль між ними через $2c$, а абсолютну величину різниці віддалей точки гіперболи від точок F_1 і F_2 позначимо через $2a(a>0)$. За вісь абсцис візьмемо пряму, яка проходить через фокуси, а за вісь ординат візьмемо пряму перпендикулярну до вісі абсцис, яка проходить через середину відрізка F_2F_1 (мал.58), тобто через точку 0. Тому що $F_2F_1=2c$, то координати фокусів будуть відповідно $F_1(c,0)$ і $F_2(-c,0)$, а фокальні радіуси відповідно $r_1=F_1M, \quad r_2=F_2M, \quad |r_2-r_1|=2a,$ де $M(x,y)$ довільна точка гіперболи.



Мал.58

Користуючись формулою віддалл1 між двома точками і означенням 4, маємо рівняння гіперболи

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a. \qquad (2.130)$$

Запишемо це рівняння в такому вигляді

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \quad \text{або}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(y-c)^2+y^2}\pm 2a. \qquad (2.131)$$

Підносячи до квадрату обидві частини цього рівняння, одержимо,

$$x^2+2cx+c^2+y^2=x^2-2cx+c^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2,$$

або після спрощення $xc-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Знову підносячи обидві частини одержаного рівняння до квадрату, одержимо після спрощень

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \qquad (2.132)$$

Розділивши обидві частини рівняння (2.132) на $a^2(c^2-a^2)$, одержимо

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1. \qquad (2.133)$$

Покажемо, що $c^2-a^2>0 \quad (c>a)$. Тому що в будь-якому трикутнику різниця двох сторін менша третьої, то $|F_2M-F_1M|<F_2F_1$, або $2a<2c$, або $a<c$.Тоді c^2-a^2 величина додатна і її позначимо через b^2 . Тобто

$$c^2-a^2=b^2. \qquad (2.134)$$

Підставляючи (2.134) в (2.133), одержимо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2.135)$$

Рівняння (2.135) є рівняння другого степеня, значить гіпербола є крива другого порядку. Дослідимо форму гіперболи за її рівнянням (2.135). Оскільки рівняння містить x і y тільки в парних степенях, то гіпербола симетрична відносно обох осей координат.

Знайшовши y та x із рівняння (2.135), одержимо

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad (2.136)$$

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}. \qquad (2.137)$$

Із рівняння (2.136) можна зробити такі висновки:

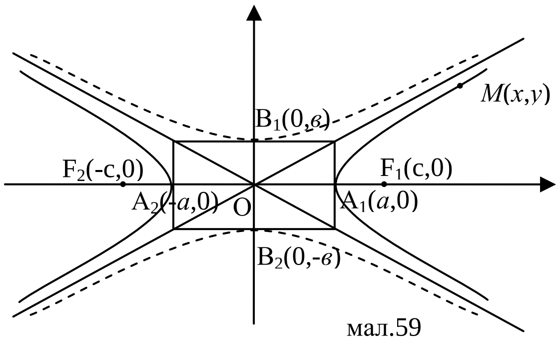
а) значення y уявні, якщо $|x|<a$ значить гіпербола не перетинає вісі Oy і не має точок, що знаходяться в полосі, обмеженій прямими $x=\pm a$.

б) коли $x=\pm a, \quad y=0,$ значить гіпербола перетинає вісь абсцис у двох точках $A_1(a,0)$ і $A_2(-a,0)$, які називаються вершинами гіперболи.

в) для кожного $|x|>a,$ ордината y має два значення, які відрізняються тільки знаком, звідси випливає, що гіпербола симетрична відносно осі $0x.$

Рівняння (2.137) показує, що гіпербола симетрична і відносно вісі $0y.$

При необмеженому зростанні абсциси x ордината також необмежено зростає. Так як гіпербола знаходиться поза полосою, обмеженою прямими $x=\pm a$, то гіпербола складається Із двох окремих віток (мал.59).



мал.59

Відрізок A_2A_1 називається дійсною віссю гіперболи, а точки $A_1(a,0)$ і $A_2(-a,0)$ вершинами гіперболи. Відрізок B_1B_2 , що з'єднує точки $B_1(0,b)$ і $B_2(0,-b)$ називається уявною віссю гіперболи. Точки $F_1(c,0)$ і $F_2(-c,0)$ називаються фокусами гіперболи.

Гіпербола, яка визначається рівнянням $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ має дійсну вісь $B_2B_1=2b,$ а уявну вісь $A_2A_1=2a$ (показано на мал.59 пунктиром) називається спряженою по відношенню до гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Якщо дійсна і уявна осі рівні, то гіпербола називається рівносторонньою, а її рівняння буде $x^2-y^2=a^2$.

Степінь стискування гіперболи характеризується її ексцентриситетом.

<u>Означення 5.</u> Ексцентриситетом гіперболи називається відношення віддалі між фокусами $2c$ до довжини її дійсної вісі $2a$, тобто

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \tag{2.138}$$

Так як для гіперболи $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Примітка. Для гіперболи легко показати як пов'язані r_1 і r_2 з ε, а саме

$$r_1 = -a + \varepsilon x \quad (x > 0),$$

$$r_2 = a + \varepsilon x \quad (x > 0); \tag{2.139}$$

$$r_1 = a - \varepsilon x \quad (x < 0),$$

$$r_2 = -a - \varepsilon x \quad (x < 0). \tag{2.140}$$

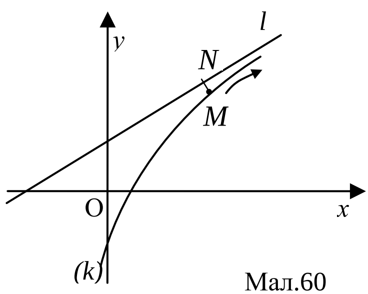
Формули (2.139) і (2.140) одержуються аналогічно як і для еліпса.

Представляємо читачеві самостійно переконатися в справедливості формул (2.139) і (2.140).

19.4. Асимптоти гіперболи

<u>Означення 6.</u> Пряма l називається асимптотою кривої (k), якщо віддаль $d = MN$ від точки M кривої до точки N прямої l прямує до нуля при необмеженому віддалені точки M від початку координат вздовж кривої (k) в тому чи іншому напрямі (мал.60).

Покажемо, що пряма $Y = \frac{b}{a}x$ (2.141) є асимптотою гіперболи (2.135). Для цього розглянемо пряму MN, яка паралельна осі Oy (мал.59). Абсциса точки M і точки N одна і та ж, тобто x, а ордината точки M є y, а точки $N \in Y$.



Мал.60

Знайдемо різницю між ординатами $(Y-y)$ -точок N і M, які мають одну і ту ж абсцису

$$Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2}).$$

Тепер помножимо і розділимо праву частину цієї рівності на $x+\sqrt{x^2+a^2}$ і після спрощень одержимо $Y-y=\dfrac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$. Звідси видно, що при необмеженому збільшенні абсциси x різниця Y-y необмежено зменшується . Таким чином, точка гіперболи необмежено віддаляючись по вітці гіперболи, необмежено наближається до асимптоти $Y=\dfrac{b}{a}x$, але ніколи її не досягає. Значить, гіпербола (2.135) має дві асимптоти $Y=\dfrac{b}{a}x$ і $Y=-\dfrac{b}{a}x$, які співпадають з діагоналями прямокутника і проходять через початок координат.

Приклад 4. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо, що вона проходить через точку $M_1(10;5)$ і має асимптоти $y=\dfrac{4}{5}x$ та $y=-\dfrac{4}{5}x$.

Розв'язування. З умови задачі одержуємо, що $\dfrac{4}{5}=\dfrac{b}{a}$ та координати точки M_1 задовольняють рівнянню гіперболи, тобто $\dfrac{10^2}{a^2}-\dfrac{5^2}{b^2}=1.$ Таким чином, одержали систему двох рівнянь з двома невідомими: $\begin{cases} 4a=5b, \\ \dfrac{100}{a^2}-\dfrac{25}{b^2}=1. \end{cases}$

З першого рівняння знаходимо $b=\dfrac{4}{5}a$ і підставляємо в друге рівняння $\dfrac{100}{a^2}-\dfrac{25\cdot 25}{16a^2}=1,$ або $a^2=\dfrac{975}{16}.$

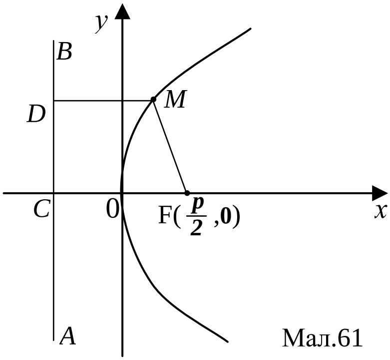
Звідси $a=\dfrac{\sqrt{975}}{4}=\dfrac{5}{4}\sqrt{39}$. Далі знаходимо $b=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{4}\sqrt{39}=\sqrt{39}.$

Отже, шукане рівняння гіперболи буде $\dfrac{x^2}{\frac{975}{16}}-\dfrac{y^2}{39}=1.$

19.5. Парабола та її рівняння

<u>Означення 7.</u> Параболою називається множина точок площини, однаково віддалених від заданої точки, що називається фокусом і від заданої прямої, що називається директрисою.

Виходячи з означення 7, виведемо рівняння параболи. Нехай пряма ***AB*** є директрисою параболи, а точка ***F*** є її фокусом (мал.61). Проведемо через точку ***F*** пряму перпендикулярну до директриси ***AB*** і візьмемо цю пряму за вісь абсцис, а за вісь ординат вієьмемо пряму перпендикулярну до вісі абсцис і яка проходить через точку ***O***, середину відрізка ***CF***. Довжину відрізка ***CF*** позначимо через ***p*** ***(p>0)***. Координати фокуса будуть $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а рівняння директриси ***AB*** є $x = -\frac{p}{2}$. Нехай точка ***M(x,y)*** є довільною точкою параболи. Опустимо із точки ***M*** перпендикуляр на директрису ***AB*** в точці ***D*** і сполучимо точку ***M*** з фокусом ***F***. Тоді за означенням 7 маємо, що ***DM=MF*** Точка ***D*** має координати $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$. За формулою віддалі між двома точками знаходимо



Мал.61

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}.$$

Це і буде рівняння параболи відносно вибраної системи координат. Підносячи обидві частини даного рівняння до квадрату, і спростивши, одержимо

$$y^2 = 2px. \tag{2.142}$$

Рівняння (2.142) і є канонічним рівнянням параболи. Як видно з рівняння (2.142) парабола є лінія другого порядку і всі її точки розташовані праворуч від осі $0y$. Парабола проходить через початок координат. Розв'язавши рівняння (2.142) відносно y, одержимо

$$y = \pm\sqrt{2px}. \tag{2.143}$$

Так як $p > 0$, то y буде дійсною величиною тільки тоді, коли x додатні, а коли $p < 0$, то парабола визначена для $x \le 0$.

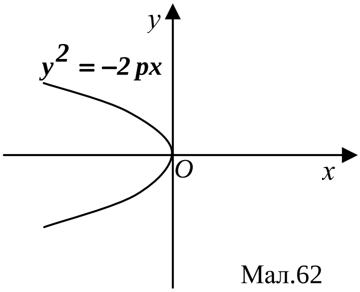
Із (2.143) видно, що кожному значенню x відповідає два значення y, які рівні за абсолютною величиною, але протилежні за знаком.

Значить вісь $0x$ є віссю симетрії для параболи.

Точку $O(0,0)$ називають вершиною параболи.

Якщо x необмежено зростає, то і y необмежено зростає. Величина p називається параметром параболи і при збільшенні p парабола розширюється, тобто її точки будуть віддалятися від осі Ox.

Якщо рівняння параболи має вигляд $y^2=-2px$ то вершина параболи знаходиться в початку координат, вісь симетрії є вісь абсцис, але парабола розміщена зліва від осі Oy (мал.62), а директриса такої параболи буде розміщена праворуч від осі ординат, а фокус $F(-\frac{p}{2},0)$ буде ліворуч від початку координат.

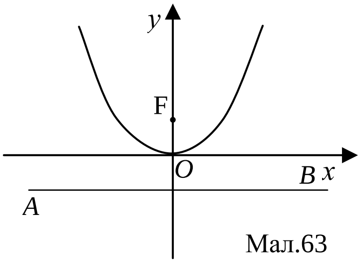


Мал.62

Якщо директриса параболи паралельна вісі абсцис , а фокус знаходиться на вісі ординат, то рівняння параболи має вигляд

$$x^2=\pm 2py. \qquad (2.144)$$

Парабола (2.144) зображена на мал.63. Це парабола симетрична відносно осі Oy і розміщена над віссю абсцис, якщо в рівнянні взяти знак (+) і під віссю абсцис, якщо взяти знак (-).



Мал.63

Якщо в рівнянні (2.144) позначити $\pm\frac{1}{2p}=a$, то одержимо рівняння параболи $y=ax^2$, яку вивчають в середній школі.

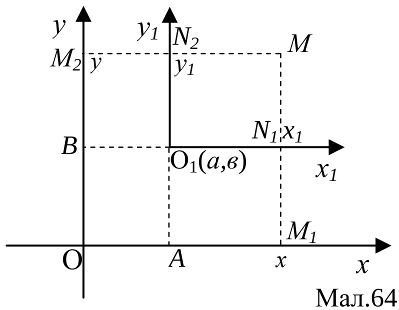
Приклад 5. Ферми, які підтримують залізнодорожний міст довжиною 112 м, мають вигляд параболи, яка задається рівнянням $y=ax^2$. Знайти рівняння відповідної параболи, якщо найбільша висота мостової арки складає 44м.

Розв'язування. Візьмемо за початок координат вершину ферми. Тоді симетричні точки в основі ферми будуть мати координати (-56,-44) і (56,-44). Підставляючи будь-яку пару координат в рівняння $y=ax^2$, одержимо $-44=a\cdot 3136$. Звідси $a=-\frac{44}{3136}=-\frac{11}{787}$.

Таким чином, мостова ферма має вигляд параболи $y=-\frac{11}{784}x^2$.

§20. Перетворення прямокутних координат

Виводячи рівняння еліпса, гіперболи та параболи, ми певним чином вибирали систему координат для кожної із цих ліній. Виникає питання, як впливає на форму рівняння інше розміщення координатних осей? При переході від однієї системи координат до другої системи координат змінюються як координати точок так і рівняння кривих .



Мал.64

Тепер розглянемо перехід від однієї прямокутної системи координат до такої ж шляхом паралельного зсуву осей, коли змінюється початок координат, а напрям осей залишається той же.

20.1. Перенесення початку координат

Нехай точка M площини має координати (x,y) в прямокутній системі координат Oxy. Перенесемо початок координат в точку $0_1(a,b)$, де a і b є координатами точки 0_1 в старій системі координат $0xy$. Осі 0_1x_1 та 0_1y_1 нової системи координат залишаються паралельними осям $0x$ і $0y$ старої системи координат (не змінюється напрям осей(мал.64).

Позначимо координати точки M в новій системі координат через $(x_1;y_1)$. Виведемо формули, які показують зв'язок між старими і новими координатами точки M. Для цього опустимо перпендикуляри MM_1 на вісь $0x$, MM_2 на вісь $0y$, а також перпендикуляри MN_1 на 0_1x_1, MN_2 на вісь 0_1y_1. Для відрізків $0A$, $0M_1$ справедлива рівність $0A+AM_1=0M_1$. Оскільки $OA=a$, $OM_1=x$,

$AM_1=O_1N_1=x_1$, то $x=a+x_1$. Аналогічно, знайдемо рівність $y=b+y_1$.

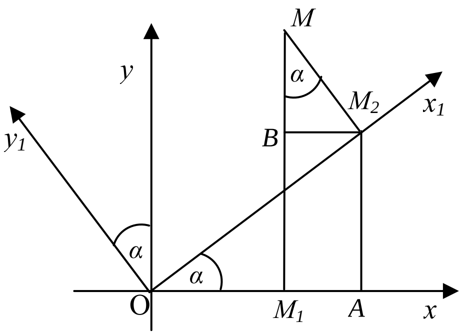
Формули

$$\left.\begin{aligned} x=a+x_1 \\ y=b+y_1 \end{aligned}\right\} \qquad (2.145)$$

і вказують на зв'язок між старими і новими координатами точки при паралельному перенесенні початку координат.

20.2. Поворот осей координат

Розглянемо тепер випадок, коли нова система координат $0_1x_1y_1$ одержується із старої системи координат шляхом повороту її навколо початку координат 0 на кут α (мал.65).



Мал.65

Нехай координати довільної точки M в старій системі координат $0xy$ є (x,y), а в новій системі координат $0x_1y_1$ є (x_1,y_1). Відлік кута α повороту проводиться в напрямі, протилежному рухові годинникової стрілки.

Із малюнка 65 видно, що $OM_1=x$, $MM_1=y$, $OM_2=x_1$, $MM_2=y_1$, Для відрізків $0A$, $0M_1$, M_1A, а також для відрізків MM_1, M_1B, MB справедливі рівності

$$\begin{cases} 0M_1=0A-M_1A=0A-BM_2, \\ M_1M=M_1B+BM=AM_2+BM. \end{cases} \qquad (2.146)$$

Із прямокутних трикутників $0M_2A$ і BMM_2 одержуємо

$$0A=0M_2\cos\alpha=x_1\cos\alpha,$$

$$AM_2=0M_2\sin\alpha=x_1\sin\alpha,$$

$$BM=MM_2\cos\alpha=y_1\cos\alpha,$$

$$BM_2=MM_2\sin\alpha=y_1\sin\alpha.$$

Підставимо знайдені значення $0A, AM_2, BM, BM_2$ в рівності (2.146), і одержимо формули переходу від старих координат до нових при повороті осей на кут α:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases} \qquad (2.147)$$

Тепер, щоб виразити нові координати x_1 і y_1 точки *М* через старі координати x, y можна із системи (2.147) двох рівнянь з двома невідомими знайти x_1 та y_1.

Оскільки, формули для нових координат можна одержати по другому: так як нова система координат одержалася із старої системи поворотом на кут α, то стара система одержиться поворотом осей на кут (-α). Значить в рівняннях (2.147) можна поміняти місцями старі і нові координати, замінивши однозначно α на (-α), то одержимо

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y_1 = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \qquad (2.148)$$

Приклад 1. Який вигляд буде мати крива $x^2 + 2x - y^2 - 4y - 7 = 0,$ якщо за нові осі координат взяти прямі, які проходять через точку $0_1(-1,-2)$ і паралельні старим осям координат.

Розв'язування. За формулами (2.145) маємо , що $\begin{cases} x = x_1 - 1 \\ y = y_1 - 2 \end{cases}$.

Підставивши x та y в рівняння кривої, одержимо $(x_1 - 1)^2 + 2(x_1 - 1) - (y_1 - 2)^2 - 4(y_1 - 2) - 7 = 0.$ Після спрощення одержимо $x_1^2 - y_1^2 = 4$ або $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{4} = 1.$

Нове рівняння лінії є рівностороння гіпербола.

Приклад 2. Який вигляд прийме рівняння гіперболи $x^2 - y^2 = 4$, якщо осі координат повернути на кут (-45^0)?

Розв'язування. Оскільки гіпербола $x^2 - y^2 = 4$ є рівносторонньою, то $y = x$ і $y = -x$ є асимптотами цієї гіперболи. Приймемо асимптоти гіперболи за нові осі координат, оскільки вони взаємоперпендикулярні, бо добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює (-1).

Замінимо x та y за формулами (2.147) , де $\alpha = -45^0$, маємо

$$x = x_1 \cos(-45^0) - y_1 \sin(-45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1),$$

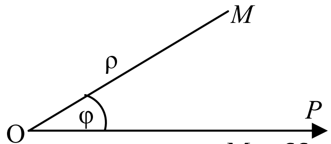
$$y = x_1 \sin(-45^0) + y_1 \cos(-45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1 - x_1).$$

Заміняючи x та y в рівнянні гіперболи, одержимо

$\frac{1}{2}(x_1 + y_1)^2 - \frac{1}{2}(y_1 - x_1) = 4$, або після спрощень маємо $x_1 y_1 = 2;$ тобто $y_1 = \frac{2}{x_1}.$

Це є гіпербола, яку вивчають у шкільному курсі математики, і яка задає обернено пропорційну залежність.

§21. Полярна система координат



Мал.66

Найбільш важливою після прямокутної системи координат є полярна система координат. До цього положення точки на площині ми визначали двома числами (координатами) в прямокутній системі координат, але це можна однозначно визначити за допомогою полярної системи координат. Вона складається із деякої точки 0, яка називається полюсом і променя $0P$, який виходить із цієї точки, який називається полярною віссю (мал. 66). Крім цього задається одиниця масштабу.

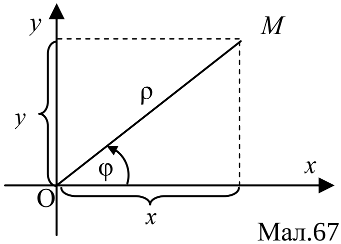
Нехай точка M довільна точка площини, а ρ віддаль цієї точки від точки 0, а φ це кут, на який потрібно повернути полярну вісь для суміщення з променем $0M$.

Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ. Число ρ вважається першою координатою і називається полярним радіусом, а число φ - другою координатою і називається полярним кутом. Точка M з полярними координатами позначається так $M(\rho, \varphi)$.

Полярний радіус може змінюватися в межах: $0 \le \rho < +\infty$, а полярний кут в межах: $0 \le \varphi < 2\pi;$ при цьому відлік полярного кута проводиться від полярної осі проти годинникової стрілки.

Між координатами точки у полярній системі координат та її координати в декартовій системі існує простий зв'язок.

Візьмемо вісь $0x$ декартової системи координат за полярну вісі полярної системи, а початок декартової системи приймемо за полюс полярної системи координат. Нехай точка M має прямокутні координати x та y і полярні координати ρ та φ (мал.67). Як видно з мал.67, маємо



Мал.67

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (2.149)$$

Формули (2.149) виражають прямокутні координати через полярні.

Якщо піднести до квадрату обидві частини рівностей (2.149) і додати, то одержимо $x^2 + y^2 = \rho^2$, або $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Якщо ж поділити другу рівність на першу в (2.149), то дістанемо $tg\varphi = \frac{y}{x}$.

Формули

$$\left.\begin{aligned} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (2.150)$$

визначають полярні координати через декартові. При визначенні полярного кута слід враховувати знаки x та y, користуючись формулами (2.149).

Приклад 1. Дано прямокутні координати точки (1;1). Знайти її полярні координати, вважаючи, що полюс суміщений з початком додатної півосі абсцис.

Розв'язування. За формулами (2.150) маємо $\rho = \sqrt{2}, \quad tg\varphi = 1.$

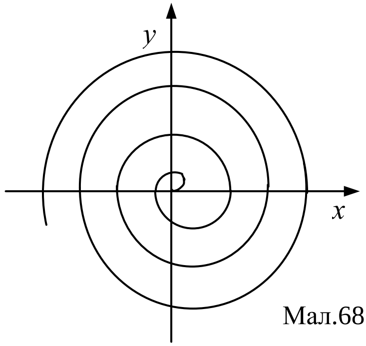
Згідно другої рівності $\varphi = \frac{\pi}{4}$, так $\sin x = 1 > 0$ і $y = 1 > 0.$

Розглянемо деякі криві в полярній системі координат.

1) Спіраль Архімеда.

Ця крива визначається рівнянням $r = a\varphi$

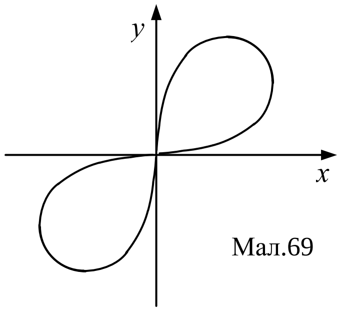
Вигляд спіралі Архімеда має пружина в годиннику(мал.68).



Мал.68

2) Лемніската Бернуллі.

Рівняння цієї кривої в полярній системі координат є $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$. Графік цієї кривої зображений на мал. 69.



Мал.69

Розділ 3. ВСТУП У МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

§ 1. Множини дійсних чисел

1.1. Сталі і змінні величини

Коли ми вивчаємо деякі питання з області математики, фізики, механіки, економіки і т.д., то зустрічаємося з величинами, які зберігають стале числове значення і називаються сталими, а інші можуть приймати різні числові значення і називаються змінними.

Наприклад, до сталих величин можна віднести число π, яке рівне відношенню довжини кола до діаметра.

До змінних величин можна віднести температуру зовнішнього середовища, яка протягом дня змінюється; загальну суму грошей, яку отримує магазин від продажу продукції протягом дня і т.д.

1.2. Множини дійсних чисел

У курсі вищої математики найбільший інтерес становлять числові множини, тобто множини, елементами (величинами) яких є числа. Серед числових множин будемо розглядати такі:

1) Множина всіх натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$;
2) Множина всіх цілих чисел $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}$;
3) Множина всіх раціональних чисел $Q = \left\{\frac{p}{g}\right\}$, $p -$ ціле, $g -$ натуральне число.
4) Множина всіх дійсних чисел R.

Множина всіх дійсних чисел складається з усіх раціональних і ірраціональних чисел. Ірраціональними числами називаються нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Наприклад, $\sqrt{2}$, $\lg 3$, $\sin 20^\circ$ і т.д.

Зауважимо, що пряма лінія, на якій вказані початок відліку, масштаб і напрямок, називається числовою віссю.

Між множиною точок числової осі і множиною всіх дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність. Це означає, що кожна точка числової осі відображає одне дійсне число, і навпаки, кожне число являється координатою конкретної однієї точки числової осі.

<u>Означення 1.</u> Інтервалом називається множина всіх чисел (точок), які знаходяться між двома якими-небудь числами (точками), що називаються кінцями інтервалу.

Інтервал з кінцями $x = a$ і $x = b$, де $a < b$, можна задати нерівностями $a < x < b$ або записати (a, b).

Якщо разом з множиною точок інтервалу розглядати і його кінці, то одержимо замкнений інтервал або відрізок . Замкнений інтервал з кінцями $x = a$ і $x = b$ задається нерівностями $a \le x \le b$; його позначають так: $[a, b]$. Інтервал (a, b) називається відкритим, а інтервали $[a, b), (a, b]$ піввідкритими.

Множину дійсних чисел, що задовольняє нерівність $x > a$ позначають $(a, +\infty)$, а множину чисел, що задовольняють нерівність $x \ge a$ позначають символом $[a, +\infty)$.

Ми будемо розглядати також числові інтервали $(-\infty, a)$, тобто множину чисел таких, що $x < a$ і $(-\infty, a]$, якщо $x \le a$.

Множину всіх дійсних чисел R будемо називати числовим інтервалом $(-\infty, +\infty)$, якщо $-\infty < x < +\infty$.

Зауважимо, що більшість понять у математиці вводиться за допомогою означень. Наприклад, квадрат можна означити як прямокутник, у якого всі сторони рівні між собою. Тут більш вузьке поняття - квадрат означається через посередництво іншого більш широкого поняття - прямокутника. Зрозуміло, що дати строге означення всіх понять, які є в математиці, неможливо. Деякі найбільш загальні поняття (первісні) слід засвоїти не за допомогою означень, а іншим шляхом. До таких понять належить поняття множини. Це поняття засвоюємо, розглядаючи приклади. Так можна говорити про множину всіх міст певної конкретної країни, про множину всіх студентів деякого факультету, про множину чисел, які наведені вище у даному пункті. Множини позначають великими буквами: A, B, C та ін. Кожна множина складається з елементів, які позначають малими буквами: a, b, c, x, y та ін. Наприклад, число 21 є елемент множини всіх натуральних чисел. Те, що елемент x належить множині X записують так: $x \in X$. Якщо елементи x не належать множині X , то записують $x \notin X$.

Нехай дано дві множини A і B. Якщо кожний елемент множини A є одночасно й елементом множини B, то кажуть, що множина A є підмножиною B, і записують $A \subset B$ або $B \supset A$.

Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то кажуть, що множини A і B рівні і записують $A = B$.

У математиці розглядають і так звану порожню множину, яка не містить жодного елемента. Її позначають знаком Ø. Наприклад, множина всіх дійсних коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$ є порожня множина (рівняння $x^2 + 1 = 0$ немає дійсних коренів).

1.3. Абсолютна величина дійсного числа

<u>Означення 2.</u> Абсолютною величиною (або модулем) дійсного числа a називається саме число a, якщо a додатне і число $-a$, якщо a від'ємне. **Абсолютна величина $a = o$ приймається рівною 0 і позначають** $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$

Наприклад, $|3| = 3,\ |-3| = 3\ \ |0| = 0$.

◙ Властивості абсолютної величини

1. Абсолютна величина алгебраїчної суми не більша суми абсолютних величин , тобто $|a + b - c| \leq |a| + |b| + |c|$.

2. Абсолютна величина добутку дорівнює добутку абсолютних величин множників : $|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c|$.

3. Абсолютна величина частки дорівнює частці від ділення абсолютних величин діленого і дільника : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, якщо $b \neq 0$.

4. Для будь-якого a правильні співвідношення:

$|a| \geq 0;\ \ |a| = |-a|;\ \ a \leq |a|;\ \ -a \leq |a|.$

1.4. Властивості абсолютної величини, зв'язаної з нерівностями величин. Окіл точки

1. Нехай $\alpha > 0$. Нерівність $|x| < \alpha$ рівносильна нерівностям $-\alpha < x < \alpha$.

2. Нехай $\alpha > 0$. Нерівність $|x - a| < \alpha$ рівносильна нерівностям $a - \alpha < x < a + \alpha$.

<u>Означення 3.</u> Околом точки a називається кожен інтервал вигляду $(a - \alpha, a + \alpha)$, де $\alpha > 0$.

Таким чином, запис $|x-a|<\alpha$, $\alpha>0$, означає множину чисел x, що знаходяться в околі точки a.

1.5. Верхня і нижня грані дійсних чисел

Нехай дано непорожню множину X дійсних чисел $(X \subset R)$. Множина X називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує дійсне число α таке, що для всіх $x \in X$ правильна нерівність $x \le \alpha (x \ge \alpha)$.

Число α при цьому називається верхньою (нижньою) межею множини X. Зрозуміло, що коли α-верхня (нижня) межа множини X, то будь-яке число $\beta>\alpha$ $(\beta<\alpha)$ також буде верхньою (нижньою) межею.

<u>Означення 4.</u> Найменша верхня межа непорожньої обмеженої зверху множини X дійсних чисел називається точною верхньою межею або верхньою гранню цієї множини і позначається $sup\{X\}$.

<u>Означення 5.</u> Найбільша нижня межа непорожньої обмеженої знизу множини дійсних чисел X називається точною нижньою межею або нижньою гранню цієї множини і позначається $inf\{X\}$.

Наприклад, якщо $X_1=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$, то $sup\{X_1\}=1$, $inf\{X_1\}=0$.

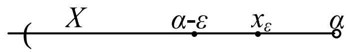
Тут верхня грань, яка дорівнює 1, належить множині X_1, а нижня грань, яка дорівнює 0, множині X_1 не належить. Коли у множині X є найбільше (найменше) число x_0, тобто таке число $x_0 \in X$, що будь-яке число $x \in X$ задовольняє нерівність $x \le x_0$ $(x \ge x_0)$, то це число x_0 й буде верхньою (нижньою) гранню множини X. Однак не в усякій непорожній обмеженій зверху (знизу) множині дійсних чисел є найбільше (найменше) число. Наприклад, у розглянутій вище множині $X_1=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$ є найбільше число, але немає найменшого, а у множині $X_2 = (a,b)$ немає ні найменшого, ні найбільшого числа.

Сформулюємо без доведення наступне твердження.

ТЕОРЕМА 1. У будь-якої непорожньої обмеженої зверху (знизу) множини X дійсних чисел існує верхня (нижня) грань.

Надалі нам доведеться часто користуватися наступними двома властивостями $\boldsymbol{sup\{X\}}$ і $\boldsymbol{inf\{X\}}$.

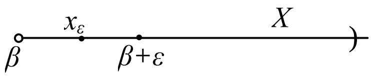
Властивість 1°. Якщо X - непорожня обмежена зверху множина дійсних чисел і $\alpha = sup\{X\}$, то для будь-якого $x \in X$ правильна нерівність $x \le \alpha$ і для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $x_\varepsilon \in X$ таке, що $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.



Властивість 2°. Якщо X - непорожня обмежена знизу множина дійсних чисел і $\beta = inf\{X\}$, то

1) для будь-якого $x \in X$ правильна нерівність $x \ge \beta$;

2) для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $x_\varepsilon \in X$ таке, що $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.



Зазначимо, що коли множина дійсних чисел необмежена зверху (знизу), то за означенням $sup\{X\} = +\infty$ $(inf\{X\} = -\infty)$.

§2. Класифікація функцій

2.1. Поняття функції. Способи задання функції

<u>Означення 1.</u> ***Нехай D і Y - дві числові множини. Якщо кожному значенню $x \in D$ за деяким правилом (законом) f поставимо у відповідність одне дійсне число $y \in Y$, то будемо говорити, що на множині D задано функцію f.***

Множина $D = D(f)$ називається областю визначення функції, а множина $E = f(D) = \{f(x), x \in D\}$ - називається областю значень функції, x – називається аргументом функції.

Функції позначаються малими буквами латинського алфавіту f, q, h, u, v і т.д.

Але для простоти вивчення курсу вищої математики надалі ми будемо використовувати такі формулювання і позначення функцій: нехай задано функції $y = y(x), u = u(x), v = v(x)$ і т.д.

Основними способами задання функції є такі: аналітичний, табличний, графічний, словесний.

Функція, задана аналітично, якщо вона задана за допомогою однієї або кількох формул. Табличний спосіб полягає в тому, що функцію задають за допомогою таблиці, яка містить ряд окремих значень аргументу x і відповідні їм значення функції.

Графічний спосіб задання функції полягає в тому, що її подають на малюнку у вигляді певної кривої, що задає множину точок $\{x, f(x)\}$, яку називають графіком функції.

Якщо функцію не можна задати першими трьома способами, то її описують за допомогою висловлень (опису). В цьому полягає словесний спосіб задання функції.

2.2. Класифікація функцій

а) Обмежені функції:

<u>Означення 2.</u> Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині D називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує число M таке, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$).

Якщо функція $y = f(x)$, обмежена на множині D і зверху і знизу, то вона називається обмеженою на всій множині D.

Наприклад, функція $y = \sin x$ обмежена на всій числовій осі, $|\sin x| \le 1$ для $x \in (-\infty, \infty)$.

б) Монотонні функції:

<u>Означення 3.</u> Функція $y = f(x)$, яка визначена на множині D називається: а) зростаючою; б) спадною; в) незростаючою; г) неспадною на цій множині, якщо для будь-яких x_1 і x_2, які належать множині D і при $x_1 < x_2$ мають місце відповідні нерівності : а) $f(x_1) < f(x_2)$; б) $f(x_1) > f(x_2)$; в) $f(x_1) \ge f(x_2)$; г) $f(x_1) \le f(x_2)$.

Функції, які задовольняють даному означенню, називають монотонними.

в) Парні і непарні функції:

***Означення 4.** Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо для будь-яких $x \in D = \{-a < x < a\}$ виконується умова $f(-x) = f(x)$ і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$.*

Наприклад, $y = x^2$ - парна функція, $y = x^3$ - непарна функція. Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а графік непарної функції - симетричний відносно початку координат.

г) Періодичні функції:

***Означення 5.** Функція $y = f(x)$, яка визначена на всій числовій осі називається періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, яке називається періодом, що має місце нерівність $f(x+T) = f(x)$ для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$.*

Наприклад, $\cos(x + 2\pi) = \cos x, T = 2\pi.$

Функція $y = \cos x$ є періодична з періодом 2π.

д) Складні функції:

***Означення 6.** Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині U, а функція $u = \varphi(x)$ визначена на множині D і всі її значення $u \in U$. Тоді змінна y через проміжну змінну u є функцією x: $y = f(\varphi(x))$. В цьому випадку y є складною функцією або функцією від функції.*

Наприклад, $y = u^2$, $u = \cos x$. Тоді $y = \cos^2 x$ є складною функцією x .

е) Обернені функції:

Нехай функція $y = f(x)$ задана на множині D, а множина значень (область зміни функції) є E. Якщо кожному значенню $y \in E$ відповідає одне значення $x \in D$, для якого $y = f(x)$, то на множині E можна визначити функцію $x = f^{-1}(y)$ так, що кожному значенню $y \in E$ буде відповідати одне значення $x \in D$, для якого $f(x) = y$.

Функція $x = f^{-1}(y)$ називається оберненою відносно функції $y = f(x)$, яка задовольняє для всіх $y \in E$ умові $x = f(f^{-1}(y))$.

Приклад. Нехай задана функція $y = x^2$, $x \in [0,+\infty) = D$ $y \in [0,+\infty)$. Оберненою для даної функції буде функція $x = \sqrt{y}.$ $f^{-1}(y) = \sqrt{y},$ $y \in E = [0,+\infty)$.

є) Неявна функція від однієї змінної.

Якщо функція задана не рівнянням вигляду $y = f(x)$, а рівнянням вигляду $F(x,y) = 0$, то у припущенні, що на деякій множині рівняння $F(x,y) = 0$ має єдиний розв'язок $y = y(x)$, тоді рівність $F(x,y) = 0$ називають неявним заданням функції.

Наприклад, $y = x^2$, $y = \cos x$ - явні функції, а рівняння $x + 5y - 1 = 0$ визначає неявну функцію y від x.

ж) Елементарні функції.

Степенева функція $y = x^{\alpha}$, показникова $y = a^x$, логарифмічна $y = \log_a x$, тригонометричні $y = \sin x,$ $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, обернені тригонометричні $y = \arcsin x,$ $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ і стала $y = C$ називаються основними елементарними функціями.

<u>Означення 7.</u> Основні елементарні функції, а також функції, знайдені за допомогою формул, що містять лише скінчене число арифметичних дій (+,-,×,:) і суперпозицій основних елементарних функцій, називаються елементарними функціями.

Наприклад, $$y = \sin^2(x^2 + x - 5) + \frac{2\cos\frac{1}{x} - tgx}{\sqrt{x} + \sqrt{\sin x}} + \arcsin 2x + 3$$

- елементарна функція.

Елементарні функції поділяються на такі класи:

1)Цілі раціональні функції:

Цілі раціональні функції – це функції вигляду $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$, де $a_k (k = 0,1,2,...,n) -$ сталі дійсні числа. Такі функції називаються ще многочленами, а числа a_k - коефіцієнтами многочлена; якщо $a_0 \neq 0$, то число n називають степенем многочлена.

2) Раціональні функції:

Раціональні функції – це функції вигляду

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m},$$ тобто це частка двох цілих раціональних функцій (многочленів).

Якщо $m\neq 0$, $b_0\neq 0$, то раціональна функція називається дробово-раціональною.

3)Ірраціональні функції:

Ірраціональні функції - це функції, які задані за допомогою суперпозицій раціональних функцій, степеневих функцій з раціональними показниками і чотирьох арифметичних дій, застосованих скінчене число раз. Наприклад, $y=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x^5+\sqrt{x}}}$ - ірраціональна функція .

4) Алгебраїчні функції:

Функція y від x ($y=y(x)$) називається алгебраїчною, якщо вона задовольняє рівняння

$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+...+P_{n-1}y+P_n(x)=0,$ де $P_k(x),(k=0,1,2,...,n)$ - алгебраїчні многочлени від x .

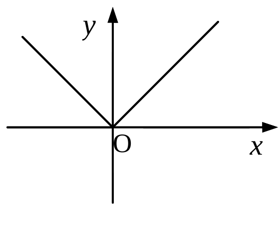
Всяка раціональна функція є алгебраїчною, оскільки $P_0(x)y+P_1(x)=0$, де $P_0(x)=b_0x^m+...+b_m$, $P_1(x)=-(a_0x^n+...+a_n)$.

5)Трансцендентні функції:

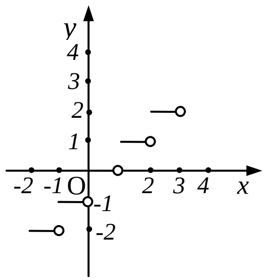
Елементарні функції, які не є алгебраїчними, називаються трансцендентними елементарними функціями. Можна показати, що тригонометричні, обернено тригонометричні, показникова і логарифмічна функції є трансцендентними елементарними функціями.

6*) Деякі неелементарні функції:*

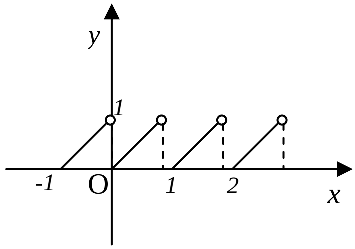
1. $y=|x|$ - абсолютне значення, або модуль,числа



2. $y=[x]$ – ціла частина числа

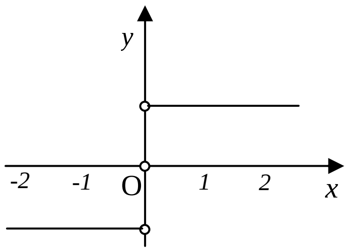


3. $y=\{x\}$ – дробова частина числа



4. $y = sign\ \ x = \begin{cases} 1, x>0, \\ -1, x<0, \\ 0, x=0 \end{cases}$

- знак числа



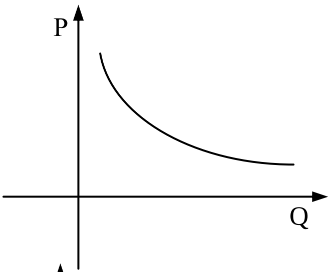
2.3. Криві попиту і пропозиції. Точка рівноваги

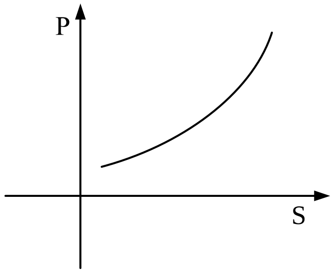
Розглядаючи попит Q і пропозицію S в залежності від ціни P на вироблений товар, зрозуміло, що чим менша ціна на товар, то більший попит при певній купівельній спроможності населення , і навпаки, якщо ціна на товар зростає, то пропозиція зростає.

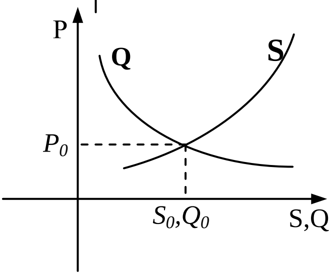
Як правило, залежність попиту Q від ціни P має вигляд: $Q=P^{\alpha}+c$, $\alpha<0,\ \ c=const$, а залежність пропозиції S від ціни P має вигляд: $S=P^{\alpha}+d$, $\alpha\geq 1,\ \ d=const$.

Константи c і d називаються екзогенними величинами і залежать від зовнішніх причин (благополуччя населення, політичної ситуації, пори року і т.д.).

Графіки даних функцій мають вигляд:







При розв'язуванні економічних задач цікаво знати умову рівноваги попиту і пропозиції $(Q(P)=S(P)$, тобто рівноважну ціну $P_0)$.

§ 3. Границя числової послідовності

3.1. Числова послідовність

<u>Означення 1</u>. Кожна функція f визначена на множині натуральних чисел $N=\{1,2,3,...,n,...\}$ називається числовою послідовністю.

Запишемо значення функції f :

$$f(1), f(2), f(3),..., f(n),... \tag{3.1}$$

Введемо позначення

$$x_n = f(n), n \in N. \tag{3.2}$$

Отже, числову послідовність (3.1) можна записати так : $x_1, x_2, x_3,..., x_n,...,$ або скорочено

$$(x_n), n \in N, \tag{3.3}$$

де $x_1, x_2,...$ називають членами послідовності, а x_n - "енним " або загальним членом числової послідовності.

Якщо задана послідовність у такому вигляді

$$x_n, n \in N, \tag{3.4}$$

то задано закон утворення її членів, тобто надаючи номеру n значень $1,2,3,...$ можна однозначно визначити всі її члени

$x_1, x_2, \ldots$ і навпаки, якщо задано послідовність її першими членами, то можна завжди записати її загальний член. Наприклад, нехай

1) $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$.

Маємо $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3}, \ldots\ldots, x_n = \frac{1}{n}, \ldots$

2) $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{3}{4}, \ldots$

Звідси випливає, що $x_n = \frac{n}{n+1}, n \in N$.

Як вже зазначалося вище, для задання послідовності необхідно знати правило, за яким кожному значенню n ставиться у відповідність дійсне число $x_n = f(n)$. Таке правило може бути задане за допомогою формули, як це зроблено у наведених вище прикладах. Проте є інші способи задання послідовностей. Наприклад, візьмемо за (x_n) n-ну цифру розкладу числа π у нескінчений десятковий дріб. Матимемо послідовність $3,1,4,1,\ldots$

Тут правило відповідності задано словесно.

Іноді при заданні послідовності задається її перший член і правило утворення n-го члена за допомогою попередніх членів. Такий спосіб називається рекурентним. Наприклад, нехай перший член послідовності дорівнює 2, а кожний наступний дорівнює попередньому, помноженому на 10. Тоді $x_{n+1} = 10x_n$, $x_1 = 2, n \in N$.

Серед числових послідовностей в окремий клас виділяють так звані монотонні послідовності, що об'єднують в собі зростаючі, спадні, неспадні, незростаючі послідовності.

<u>Означення 2.</u> Послідовність (x_n) називається зростаючою, якщо кожний її наступний член більший від попереднього, тобто $x_{n+1} > x_n$ для кожного n.

Наприклад, послідовність, $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$ є зростаюча.

<u>Означення 3.</u> Послідовність (x_n) називається неспадною, якщо $x_{n+1} \geq x_n$ для кожного n.

Наприклад, послідовність $1,1,1,2,2,\ldots$ є неспадна.

<u>Означення 4.</u> Послідовність (x_n) називається спадною, якщо $x_{n+1} < x_n$ для кожного n.

Наприклад, послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ є спадна.

<u>Означення 5.</u> Послідовність (x_n) називається незростаючою, якщо $x_{n+1} \le x_n$ для кожного n.

Для дальшого вивчення числових послідовностей необхідно ввести в розгляд такі арифметичні операції над числовими послідовностями: додавання, віднімання, множення та ділення.

Нехай маємо дві послідовності

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

$$y_1, y_2, ..., y_n, ...$$

Тоді додавання, віднімання та множення двох послідовностей виконуються додаванням, відніманням та множенням відповідних членів цих послідовностей.

Якщо всі $y_n \neq 0, n \in N$, то частка від ділення послідовності (x_n) на послідовність (y_n) визначається як послідовність

$z_1, z_2, ..., z_n, ...$ члени якої $z_n = \dfrac{x_n}{y_n}, n \in N$.

Символічно ці дії позначаються так:

$$(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n);$$

$$(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n);$$

$$\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right).$$

<u>Означення 6.</u> Числова послідовність (x_n) називається обмеженою, якщо існують дійсні числа m і M такі, що для всіх $n \in N$ **виконуються нерівності** $m \le x_n \le M$.

У протилежному випадку послідовність називається необмеженою.

Часто користуються еквівалентним означенням обмеженості послідовності.

<u>Означення 7.</u> Числова послідовність (x_n) називається обмеженою, якщо існує дійсне число C таке, що для всіх $n \in N$ виконується нерівність $|x_n| \le C$.

Частинними випадками послідовності є арифметична та геометрична прогресія.

<u>Означення 8</u>. Арифметична прогресія - це числова послідовність, кожен член якої, починаючи з другого , дорівнює поперед-

ньому, збільшеному на число d, яке називається різницею прогресії. $a_{n+1} = a_n + d\ ,\ n \in N$.

Наприклад, для послідовності ***12,+2,-8,-18,…,*** a_1***=12*** і $d = -10$.

Загальний член арифметичної прогресії знаходиться за формулою: $a_i = a_1 + (i-1)d$.

Сума n членів скінченої арифметичної прогресії

дорівнює: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$ або $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Ці поняття і формули застосовуються при нарахуванні простих відсотків.

Так, якщо сума капіталу ***P*** вкладена під ***R*** відсотків річних,то після першого року буде одержано прибуток величиною

$$d = P\frac{R}{100\%} .$$

Якщо вкладення капіталу здійснюється під простий річний відсоток, то прибуток зростає на однакову величину з кожним роком: ***P, P+d, P+2d,…,.*** Ці значення утворюють арифметичну прогресію. Отже, величина капіталу ***P***, що вкладений під простий річний відсоток ***R*** , через ***n*** років буде

$$a_n = P + nd = P + n\frac{PR}{100\%} = P(1 + \frac{nR}{100\%}) .$$

Наприклад, вкладається 50000 гр. під простий річний відсоток 25%. Тоді через два роки вкладник матиме

$$a_2 = 50000(1 + \frac{2 \cdot 25\%}{100\%}) = 50000(1 + \frac{1}{2}) = 75000 .$$

Часто $\dfrac{R}{100} = i$ - називають питомою відсотковою ставкою (або нормою відсотка). Отже, $P_n = a_n = P(1 + ni)$.

<u>Означення 9.</u> Геометричною прогресією називається послідовність, кожний наступний член якої дорівнює попередньому, помноженому на одне і те саме число q***, яке називається знаменником геометричної прогресії.***

Якщо $|q| < 1$ - прогресія спадна, $|q| > 1$ – прогресія зростаюча.

За означенням $b_{n+1} = b_n q$ або $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Сума n членів скінченої геометричної прогресії знаходиться за формулою $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Сума членів нескінченої спадної геометричної прогресії знаходиться за формулою: $S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Припустимо, що вкладник дає банку 50000 грн. з умовою щорічного зростання на 25% складних відсотків , тобто щороку величина капіталу, що знаходиться на рахунку вкладника в банку повинна зростати на 25%. Після 1-го року матимемо:

$$50000 + \frac{25}{100} \cdot 50000 = 62500 = 50000\ (1+\frac{1}{4}) = 62500 .$$

Після другого року:

$$62500 + \frac{25}{100} \cdot 62500 = 62500(1+\frac{1}{4}) = 50000(1+\frac{1}{4})^2 = 78125 .$$

Зрозуміло,що після m -го року матимемо $50000(1+\frac{1}{4})^m$, тому величина капіталу P, що зростає щороку на R складних відсотків, через n – років прийме значення: $P_n = P(1+0{,}01R)^n$.

Найпростішим типовим рахунком накопичення є такий рахунок фізичної або юридичної особи, на який регулярно нараховується відсоткова ставка і зараховується новий вклад.

Задача. Кожного місяця працівник (студент) вносить 100 гривень на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку величиною 2% щомісячно. Обчислимо величину його накопичень:

а) після здійснення 24 внеску;

б) після здійснення n внеску.

Кожний внесок за місяць зростає в $1{,}02$. Тому перший внесок за 23 місяці перебування на рахунку прийме значення $100(1{,}02)^{23}$. Другий внесок знаходився на рахунку 23 місяці $(100(1{,}02)^{22})$ і т.д.

Загальна сума накопиченого рахунку студента прийме значення:

$$S = 100\left(1{,}02^{23}\right) + 100(1{,}02)^{22} + \ldots + 100.\ \ b_1 = 100; q = 1{,}02 .$$

Отже, $S = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{100(1-(1{,}02)^{24})}{1-1{,}02} = \frac{100((1{,}02)^{24}-1)}{0{,}02} =$

$$5000((1{,}02)^{24}-1)=100\cdot 30{,}421852=3042{,}1852.$$

$S=P\cdot S_{n_i}$ - формула накопичення.

◙ ***Розрахунки ренти***

Багато людей в країнах з ринковою економікою живуть за рахунок ренти, тобто регулярно на протязі певного терміну одержують обумовлену суму коштів з відповідного рахунку в банку або страховій компанії. Скільки треба поставити на рахунок ренти, щоб одержувати відповідні кошти?

Нехай A – величина внеску на рентний рахунок. З цього рахунку здійснюються виплати P щорічно на протязі n років і величина внеску щорічно зростає на R відсотків.

A_1 - кошти, які вкладені на рахунок ренти і дадуть через один рік виплату P.

Отже, $A_1(1+i)=P, i=\dfrac{R}{100}, A_1=P(1+i)^{-1}$.

A_2 - кошти, які вкладені на рахунок ренти і через два роки дадуть виплату P.

$A_2(1+i)=P; A_2=P(1+i)^{-2}$ і т.д.

$A_n=P(1+i)^{-n}$.

Таким чином на рахунок ренти треба покласти суму:

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=P(1+i)^{-1}+P(1+i)^{-2}+\ldots+P(1+i)^{-n}.$$

Це сума n –членів геометричної прогресії:

$b_1=P(1+i)^{-1}$ і $q=(1+i)^{-1}$.

$$A\equiv S=\frac{P(1+i)^{-1}(1-(1+i)^{-n})}{1-(1+i)^{-1}}=Pa_{n/i};$$ де

$$a_{n/i}=i^{-1}(1-(1+i)^{-n}).$$

◙ ***Погашення боргу***

Процес повернення боргу регулярно, певними частинами, в певний термін і протягом домовленого часу з виплатою певного відсотку називається погашенням боргу.

З математичної точки зору погашення боргу – це задача про ренту.

Страхова компанія взяла в борг суму A і виплачує борг: $A = P \cdot a_{n/i}$; $P = \dfrac{A}{a_{n/i}}$.

Задача. На час навчання студент академії народного господарства отримав з фонду навчання в борг 17000 грн. Цей кредит йому надано із 8% щорічного зростання і умовою повернення (щорічно) в кінці кожного року після закінчення академії протягом 15 років. Скільки коштів повинен повертати студент кожного року?

$$A = 17000,\ n = 15,\ R = 8,\ i = \frac{8}{100} = 0{,}08,$$

$$P = \frac{A}{a_{15/0{,}08}} = \frac{1700}{8{,}559479} = 1986\,грн.$$

3.2. Границя числової послідовності

Розглянемо такі числові послідовності:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$ де $x_n = \frac{1}{n}$;

2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots,$ де $x_n = \frac{n}{n+1}$;

3) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots,$ де $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$;

4) $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots,$ де $x_n = (-1)^{n-1}$.

Аналізуючи наведені приклади, можна стверджувати, що змінна x_n при зростанні n ($n \to \infty$ - “ен” прямує до нескінченості) в прикладі 1)наближається до нуля (залишаючись більшою від нуля); в прикладі 2) змінна зростає, наближаючись до одиниці (залишаючись меншою за одиницю); в прикладі 3) відбувається процес наближення змінної до нуля, але її значення коливається в околі нуля; в прикладі 4) не можна визначити до якого числа наближається змінна $x_n = (-1)^{n-1}, n \in N$. Оскільки в прикладах 1)–3) є те, що змінна x_n при зростанні n наближається до сталої величини, то в таких випадках говорять, що змінна x_n має границю при $n \to \infty$.

<u>Означення.</u> Число a називається границею числової послідовності (x_n), якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно

малого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, починаючи з якого виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon, \tag{3.5}$$

як тільки $n \geq N$.

Той факт, що a є границею послідовності (x_n), символічно записують так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a \text{ (при } n \to \infty\text{)}. \tag{3.6}$$

Ми будемо користуватися першим позначенням ($\lim$ - від латинського слова $\lim es$, що означає “границя”).

Отже, в розглянутих нами прикладах 1)–3) границі вказаних послідовностей відповідно дорівнюють

1) $a = 0;$ 2) $a = 1;$ 3) $a = 0,$ а для прикладу 4) відповідь така: границя не існує.

Враховуючи нерівність (3.5), стверджуємо, якщо послідовність (x_n) має границею число a, то , починаючи з деякого номера N всі її члени знаходяться в околі $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ точки a.

Примітка. Якщо $x_n = C$, $C = const$ (C - стала величина), то зрозуміло , що $|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$ для всіх $n = 1,2,3,...$ Тому справедливе таке твердження: Границя сталої величини дорівнює цій сталій величині, тобто, $\lim\limits_{n\to\infty} C = C.$

Послідовність, яка має скінчену границю, називається збіжною, у протилежному випадку - розбіжною.

3.3. Основні теореми про границі числових послідовностей

ТЕОРЕМА 1. Послідовність може мати тільки одну границю.

Доведення. Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, при чому $a \neq b$.

Виберемо $\varepsilon = \frac{1}{3}|a - b|.$ Згідно з означенням границі послідовності виконуються нерівності

$|x_n - a| < \frac{1}{3}|a - b|$ для $n > N_1,$

$$\left| x_n - b \right| < \frac{1}{3}\left| a - b \right| \text{ для } n > N_2 .$$

Візьмемо тепер натуральне число N, більше за N_1 і N_2.

Отже, для $n>N$ одночасно будуть виконуватися обидві вище написані нерівності, на основі яких одержуємо

$$\left| a - b \right| = \left| (a - x_n) + (x_n - b) \right| \le \left| a - x_n \right| + \left| x_n - b \right| = \left| x_n - a \right| +$$

$$+ \left| x_n - b \right| < \frac{2}{3}\left| a - b \right|.$$

Звідси знаходимо, що $\left| a - b \right| < \frac{2}{3}\left| a - b \right|$, а це неможливо, якщо $a \ne b$. Таким чином, наше припущення, що послідовність може мати різні границі, привело до протиріччя. Збіжна послідовність може мати тільки одну границю. Теорема 1 доведена.

ТЕОРЕМА 2. Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають відповідно границі a і b Тоді сума (x_n+y_n) (різниця (x_n- y_n)) має границю, яка дорівнює $a+b$ $(a-b)$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b. \qquad (3.7)$$

ТЕОРЕМА 3. Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають відповідно границі a і b. Тоді і їх добуток $(x_n \cdot y_n)$ має границю, яка дорівнює $a \cdot b$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b. \qquad (3.8)$$

З теореми 3 випливають такі наслідки .

1. *Сталий множник можна винести за знак границі.*

Справді, нехай $x_n = C$, а y_n має границю. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = C \lim_{n\to\infty} y_n . \qquad (3.9)$$

2. *Якщо* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ і k - *натуральне число, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = (\lim_{n\to\infty} x_n)^k = a^k .$$

ТЕОРЕМА 4. Нехай послідовності (x_n) і (y_n) мають скінчені границі, які відповідно дорівнюють $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ причому $b \ne 0$. Тоді і їх відношення

$(\frac{x_n}{y_n})$ **має скінчену границю, яка дорівнює** $\frac{a}{b}$ **, тобто**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}=\frac{a}{b}. \tag{3.10}$$

ТЕОРЕМА 5. Послідовність (x_n)**, яка має границю, є обмежена.**

ТЕОРЕМА 6. Нехай члени послідовностей $(x_n),(y_n),(z_n)$ **при всіх значеннях** $n=1,2,...$ **задовольняють нерівності** $x_n \le y_n \le z_n$ **і** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$**. Тоді** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$**.**

Доведення. Оскільки число a є границею послідовності (x_n), то згідно означення границі послідовності для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке число, наприклад N_1, що для всіх $n\ge N_1$ виконується $|x_n-a|<\varepsilon$ або $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$, $n\ge N_1$.

Аналогічно існує таке число, наприклад, N_2, що при $n\ge N_2$ $a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$, $n\ge N_2$.

Тоді, взявши число N більше за N_1 і N_2 і використавши умову теореми 6 та попередні нерівності, дістанемо $a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$ при $n\ge N$, що рівносильно $|y_n-a|<\varepsilon$ при $n\ge N$.

Остання нерівність й доводить теорему 6.

<u>Означення.</u> Нехай (x_n) задана послідовність і (n_k) - довільна зростаюча послідовність натуральних чисел, то послідовність (x_{n_k}) ***називається підпослідовністю послідовності (x_n).***

З означення границі послідовності випливає правильність твердження.

ТЕОРЕМА 7. Якщо послідовність (x_n) **має границю** a**, то й будь-яка її послідовність має ту саму границю** a**.**

Справді, якщо число a є границею послідовності (x_n), то для будь-якого числа $\varepsilon>0$ в ε- окіл $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ точки a потрапляють всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера N. Проте, тоді в цей окіл потрапляють і всі члени послідовності (x_{n_k}) як тільки $n_k>N$. А це означає, що число a є границею послідовності (x_{n_k}), тобто $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

Примітка 1. Враховуючи (3.8) і (3.9), маємо таке твердження: сталий множник виноситься за знак границі, тобто

$$\lim_{n\to\infty} Cx_n = C\lim_{n\to\infty} x_n. \qquad (3.11)$$

Примітка 2 У вищій математиці, якщо у граничному переході вигляду (3.10) одержується дія $\frac{a}{\infty}$, то кажуть, що дія допустима і в результаті одержуємо нуль. Наприклад, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = (\frac{1}{\infty}) = 0.$

З другої сторони будемо вважати , якщо у граничному переході вигляду (3.10) одержується дія $(\frac{a}{0})$, $a \neq 0$, то результатом такого граничного переходу є відповідь нескінченість. Наприклад,

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = (\frac{1}{0}) = \infty.$$

Примітка 3. Якщо при граничних переходах (3.8)-(3.10) одержуються вирази такого вигляду: $\infty - \infty; \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0\cdot\infty,$ то такі вирази будемо називати невизначеними.

3.4. Деякі правила розкриття невизначеностей $(\frac{\infty}{\infty})$

Наприклад, нехай потрібно знайти границі :

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3}{n^3+n};$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5+n^4+n}{n^2+n};$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^7+n+1}{n^7+n^2}$.

Розділивши чисельник і знаменник на найвищий степінь n у даних прикладах, одержуємо:

1) $\frac{n^2-3}{n^3+n} = \frac{\frac{1}{n}-\frac{3}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}};$ 2) $\frac{n^5+n^4+n}{n^2+n} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}};$

3) $\dfrac{n^7+n+1}{n^7+n^2}=\dfrac{1+\dfrac{1}{n^6}+\dfrac{1}{n^7}}{1+\dfrac{1}{n^5}}$.

Далі, використовуючи основні теореми про границі, і здійснюючи граничний перехід при $n\to\infty$, одержуємо такі

відповіді: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3}{n^3+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{0-0}{1+0};=\dfrac{0}{1}=0;$

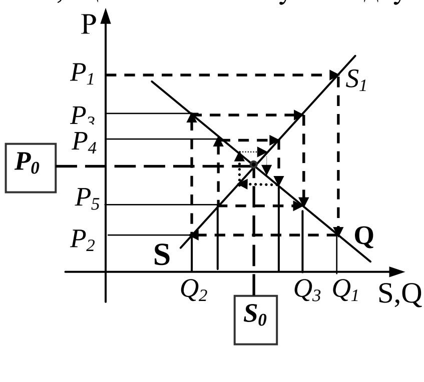
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5+n^4+n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^4}}{\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=\infty;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^7+n+1}{n^7+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n^6}+\dfrac{1}{n^7}}{1+\dfrac{1}{n^5}}=\dfrac{1+0+0}{1+0}=1.$

3.5. Павутинна модель ринку

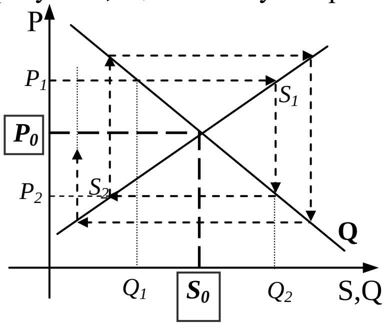
Розглянемо найпростішу модель ринку одного товару і процес пошуку ("нащупування") рівноважної ціни. Це є одна з основних проблем ринку, яка означає фактично торг між виробником (продавцем) і покупцем.

Ми уже розглядали функції попиту і пропозиції від ціни на товар, а також їх графіки. Зрозуміло, що в загальному випадку ці залежності нелінійні. Для спрощення ситуації, графіки цих функцій можна замінити прямими (графіками дотичних до цих кривих в заданих точках). Нехай спочатку виробник (продавець) визначає ціну P_1 на товар. Зрозуміло, що ця ціна P_1 є вищою за рівноважну (кожний виробник хоче мати найбі-



льший прибуток від виробництва товарів). Покупець оцінює попит $\boldsymbol{Q_1}$ при цій ціні і визначає свою ціну $\boldsymbol{P_2}$, при якій цей попит $\boldsymbol{Q_1}$ рівний пропозиції $\boldsymbol{S_1}$. Ціна $\boldsymbol{P_2}$ нижча рівноважної (кожний покупець хоче купити дешевше товар). В свою чергу продавець оцінює попит $\boldsymbol{Q_2}$, що відповідає ціні $\boldsymbol{P_2}$, і визначає свою ціну $\boldsymbol{P_3}$ і т.д. Процес торгу продовжується і в кінцевому випадку приведе до рівноважної ціни $\boldsymbol{P_0}$ (павутина закручується). Якщо розглянути послідовність чисел $\boldsymbol{p_1, p_2, p_3, ...,}$ то ця послідовність має границю $\boldsymbol{P_0 = \lim_{n\to\infty} P_n}$.

Ми розглянули збіжну модель. Зрозуміло, що може бути і розбіжна модель, тобто рівноважну ціну знайти не можливо.



Розглянемо малюнок.

В даній ситуації, нехай виробник (продавець) визначає ціну $\boldsymbol{P_1}$ на товар. Очевидно, що ця ціна є вищою за рівноважну. Покупець оцінює попит $\boldsymbol{Q_1}$ при цій ціні і визначає свою ціну $\boldsymbol{P_2}$, при якій цей попит $\boldsymbol{Q_1}$ рівний пропозиції $\boldsymbol{S_1}$. Ціна $\boldsymbol{P_2}$ нижче рівноважної і т.д.

Процес торгу продовжується і павутина розкручується. Якщо розглянути послідовність чисел $\boldsymbol{p_1, p_2, p_3, ...,}$ то ця послідовність розбігається: $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = \infty}$.

3.6. Існування границі монотонної числової послідовності

ТЕОРЕМА. Якщо послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ є монотонно зростаючою (спадною) і обмежена зверху (знизу), то вона збіжна.

Доведення. Нехай послідовність $\boldsymbol{(x_n)}$ є спадною, тобто $\boldsymbol{x_1 > x_2, > ... > x_n > ...}$, і нехай вона обмежена знизу, тобто існує таке число $\boldsymbol{m}$, що $\boldsymbol{x_n \geq m,\ n = 1,2,...}$

Тоді множина значень послідовності $\boldsymbol{(x_n)}$ має нижню грань, яку позначимо через $\boldsymbol{a = inf(x_n)}$. Покажемо, що $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = a}$. Оскільки $\boldsymbol{a}$ є нижня грань множини значень послідовності $\boldsymbol{(x_n)}$, то для всіх її значень виконується нерівність $\boldsymbol{x_n > a}$.

Проте, згідно з властивістю нижньої грані, яке б ми не взяли як завгодно мале додатне число $\varepsilon>0$ знайдеться таке натуральне число N, що $x_N < a+\varepsilon$. Тоді, беручи до уваги те, що послідовність спадна, дістаємо нерівність $a < x_n < a+\varepsilon$ як тільки $n \geq N$ або $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ як тільки $n \geq N$. Отже, $|x_n - a| < \varepsilon$ як тільки $n \geq N$, що доводить теорему.

Примітка 1. Слід зауважити, що ця теорема дає ознаку, за якою можна встановити тільки існування границі числової послідовності, але не можна знайти числове значення границі.

Примітка 2. Умова монотонності в розглянутій теоремі є обов'язковою. Не всяка обмежена числова послідовність (x_n) має границю. Так послідовність $x_n = (-1)^{n-1}$, $n \in N$ є обмежена $(|x_n| \leq 1)$, але границі немає.

Приклад 1. Довести, що послідовність

$x_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \ldots + \frac{1}{1+2^n}$ збігається, тобто, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Розв'язування. Доведемо, що числова послідовність (x_n) є зростаючою. Справді,

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \ldots + \frac{1}{1+2^n} + \frac{1}{1+2^{n+1}} > x_n,$$

оскільки $\frac{1}{1+2^{n+1}} > 0$. З другого боку, використовуючи формулу $S_n = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q}$ (суми n- перших членів геометричної прогресії $b_1, b_1 q_1, \ldots, b_1 q_1^{n-1} \ldots$) маємо

$$x_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Звідси випливає, що послідовність x_n є обмеженою.

Отже, за попередньою теоремою робимо висновок, що задана послідовність має границю.

Примітка 3. Зауважимо, що добуток n послідовних натуральних чисел $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$ скорочено позначають $n!$, тобто $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$ і називають “ен факторіал”.

Приклад 2. Показати, що числова послідовність

$x_n = \dfrac{c^n}{n!}$, $c > 0$, $n \in N$ має границю, яка дорівнює нулю.

Розв’язування. Послідовність (x_n), починаючи з певного значення n і для всіх його наступних значень, є спадною, оскільки

$$x_{n+1} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c^n}{n!}\cdot\frac{c}{n+1} = x_n \cdot \frac{c}{n+1}, \text{ або } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{c}{n+1}.$$

Звідси бачимо, що як тільки $n+1 > c$, тобто $n > c-1$, то $x_{n+1} < x_n$.

Крім того, послідовність (x_n) є обмеженою знизу, бо члени цієї послідовності більші, наприклад, за нуль.

Отже, існує границя розглядуваної послідовності, причому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!} = 0 \quad (c > 0).$$

Справді, нехай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1} = a$.

Перейшовши в рівності $x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{c}{n+1}$ до границі, дістанемо

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c}{n+1}$ або $a = a\cdot 0$.

Остання рівність можлива при $a=0$, що треба було довести.

3.7. Нескінчено малі величини та їх властивості

<u>Означення 1.</u> Якщо числова послідовність (α_n) має своєю границею нуль ($\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$), то така послідовність називається нескінчено малою.

Наприклад, $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ є нескінчено мала величина, тому що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Нескінчено малі величини будемо позначати $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

Виходячи з означення границі числової послідовності можна сформулювати еквівалентне означення нескінчено малої величини з означенням 1.

<u>Означення 2.</u> Числова послідовність (α_n) називається нескінчено малою величиною, якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, починаючи з якого виконується нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$, як тільки $n \geq N$.

Примітка. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$ На основі означення границі числової послідовності можемо записати

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ як тільки } n \geq N. \tag{3.12}$$

Якщо різницю $x_n - a$ позначити через α_n, тобто $x_n - a = \alpha_n$, то ця різниця на основі означення 2 і (3.12) буде нескінчено малою, бо $|x_n - a| = |\alpha_n| < \varepsilon$, коли $n \geq N$.

І навпаки, якщо $\alpha_n = x_n - a$ є нескінчено малою величиною, тобто $|\alpha_n| < \varepsilon$, коли $n \geq N$, то x_n буде мати границею число a, бо тоді $|x_n - a| < \varepsilon$, коли $n \geq N$.

Висновок. Якщо послідовність (x_n) має границю число a, то її загальний член можна подати у вигляді $x_n = a + \alpha_n$, де α_n – нескінчено мала величина ($\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$).

◙ ***Властивості нескінчено малих величин.***

1. Алгебраїчна сума декількох нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

2. Добуток нескінченно малої величини на величину обмежену є величина нескінченно мала.

3. Добуток сталої величини на нескінченно малу величину є нескінченно мала величина.

4. Добуток двох нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

§ 4. Границя функції

4.1. Означення границі функції

В багатьох прикладних задачах потрібно знайти значення функції $f(x)$ при прямуванні неперервного аргументу x до деякої точки x_0, в якій функція може бути і невизначена. Така поведінка функції в деякій точці x_0 називається границею функції в точці x_0. Оскільки x_0 може бути як скінченим числом, та і дорівнювати $\pm\infty$, то приведемо декілька означень границі функції.

<u>Означення 1.</u> Число A називається границею функції $y = g(x)$, коли $x \to \infty$ і позначається $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = A$, якщо для довільного як завгодно малого додатного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке додатне число M, що з нерівності $x > M$ випливає нерівність $|g(x) - A| < \varepsilon$.

Коли $x \to -\infty$, то означення границі функції аналогічне і використовують ***позначення*** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = A$.

<u>Означення 2.</u> Число A називається границею функції $f(x)$ при x, що прямує до x_0, якщо для будь-якої послідовності значень аргументу $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ збігається до A.

<u>Означення 3.</u> Число A називається границею функції $f(x)$ при x, що прямує до x_0 $(x \neq x_0)$, якщо для будь-якого малого наперед заданого додатного ε можна вказати таке додатне число δ, що із нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Коротко це означення записують так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Слід відмітити, що теореми про границю суми, різниці, добутку і частки для числових послідовностей (функцій цілочисельного аргументу $x_n = f(n)$, $n \in N$ є справедливими і для функцій неперервного аргументу, а саме:

ТЕОРЕМА. Нехай на множині X задані функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, x_0 – гранична точка множини X і в точці x_0 обидві функції мають скінчені границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b$. Тоді

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a \pm b;$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a\cdot b;$

3) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b\neq 0,$ **то** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\dfrac{a}{b}.$

При знаходженні границь функції будемо користуватися тим, що для основних елементарних функцій в будь-якій точці із області визначення має місце рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x),$ тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$

Наприклад, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x^2+4x)=x_0{}^2+4x_0.$

Розглянемо декілька способів обчислення границь.

Приклад 1. $(\dfrac{\infty}{\infty})$. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+\sqrt{1+4x^2}}{5x+8}$.

Розв'язування. Розділивши чисельник і знаменник на x, одержимо $\dfrac{5x+\sqrt{1+4x^2}}{5x+8}=\dfrac{5+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}}{5+\dfrac{8}{x}}.$

Тепер, використовуючи основні теореми про границі та домовленість, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x^n}=0$, $n\in N$, $a\neq 0$, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+\sqrt{1+4x^2}}{5x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}}{5+\dfrac{8}{x}}=\frac{5+\sqrt{0+4}}{5+0}=\frac{5+2}{5}=\frac{7}{5}.$$

Приклад 2. $(\dfrac{0}{0})$. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}.$

Розв'язування. В результаті безпосередньої підстановки $x=3$ у даний дріб маємо невизначеність $(\dfrac{0}{0})$. Тому, використовуючи формули розкладу, зробимо такі перетворення:

$$\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x+3}{x-2}, \quad x\neq 3.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=\frac{6}{1}=6.$

Приклад 3. $(\frac{0}{0})$. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-5x}}{x}$.

Розв'язування. Аналогічно, як у прикладі 2, підстановка нуля замість x у заданий вираз дає невизначеність $(\frac{0}{0})$. Перетворимо дріб таким чином: помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до чисельника, а потім скоротимо дріб. В результаті одержимо

$$\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-5x}}{x}=\frac{(\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-5x})(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1-5x})}{x(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1-5x})}=$$

$$=\frac{1+5x-1+5x}{x(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1-5x})}=\frac{10}{\sqrt{1+5x}+\sqrt{1-5x}}.$$

На основі одержаного результату маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-5x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{10}{\sqrt{1+5x}+\sqrt{1-5x}}=\frac{10}{1+1}=5.$$

4.2. Односторонні границі.

Нехай x_0 – точка числової осі. Зрозуміло, що запису $x\to x_0$ можна дати таке тлумачення: точки x наближаються до точки x_0 зліва, коли $x<x_0$ і справа, коли $x>x_0$. Отже, на числовій осі наближення точок x до точки x_0 може бути двостороннім. Якщо при знаходженні границі функції $f(x)$ при умові, що $x\to x_0$ і x приймає тільки значення менші від x_0 (більші від x_0) і якщо така границя існує, то її називають лівосторонньою (правосторонньою) границею функції $f(x)$. Лівосторонні і правосторонні границі позначають символом:

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0) \qquad (\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)).$$

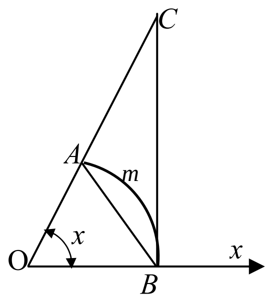
ТЕОРЕМА 1. Функція $f(x)$ в точці x_0 має границю тоді і тільки тоді, коли в цій точці функція $f(x)$ має праву і ліву ($f(x_0+0)$ і ($f(x_0-0)$) границі і права границя дорівнює лівій границі ($f(x_0+0)=f(x_0-0)$).

4.3. Перша визначна границя

Для розкриття невизначеностей вигляду $(\frac{0}{0})$ у тригонометричних виразах користуються таким твердженням.

ТЕОРЕМА 2. Функція $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ має границю, що дорівнює 1, тобто $\lim\limits_{x\to 0}=\frac{\sin x}{x}=1$ - перша визначна границя.

Доведення. Якщо x є кут, виміряний у радіанах, $0<x<\frac{\pi}{2}$, то (див. мал.) для площ трикутника OAB, сектора $OAmB$ трикутника OCB правильні нерівності $(OA=OB=R)$.



$$S_{\Delta OAB}<S_{сект.OAmB}<S_{\Delta OCB}$$ або

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\,tgx\,.$$

Після скорочення на число $\frac{1}{2}R^2$ дістанемо $\sin x<x<tgx$.

Поділивши почленно на $\sin x$, знайдемо

$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, звідси $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$

Помноживши останню нерівність на (-1) і додавши (+1) до кожної частини знайдених нерівностей, маємо

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x.$$

Використовуючи нерівність $\sin x<x\quad(0<x<\frac{\pi}{2})$ і перетворюючи вираз $1-\cos x$, знаходимо

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\frac{x}{2}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x^2 .$$

Тому $0 < 1-\frac{\sin x}{x} < \frac{1}{2}x^2$. (А)

Покажемо правильність нерівностей (А) і для $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Візьмемо допоміжну змінну $y = -x$. Оскільки $0 < y < \frac{\pi}{2}$, то за доведеним вище $0 < 1-\frac{\sin y}{y} < \frac{1}{2}y^2$.

Підставивши замість y число $(-x)$, дістанемо

$$0 < 1-\frac{\sin(-x)}{-x} < \frac{1}{2}(-x)^2$$

і, зважаючи на непарність функції $\sin x$, знайдемо

$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < \frac{1}{2}x^2$, тобто нерівність (А) правильна для всіх $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ x \neq 0$.

Для наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ візьмемо таким, що дорівнює $\sqrt{2\varepsilon}$. Тоді з нерівностей

$0 < |x-0| = |x| < \delta = \sqrt{2\varepsilon}$ випливатиме нерівність

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right| = 1-\frac{\sin x}{x} < \frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon})^2 = \varepsilon .$$

А це означає, згідно означення 3, що границя функції $\frac{\sin x}{x}$ в точці $x=0$ дорівнює одиниці. Теорему доведено .

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{y}{a}} = a\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = a.$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5}{2}x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5}{2}x}{x} = 2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{25}{2}.$$

4.4. Допоміжні твердження

ТЕОРЕМА 3. Якщо $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$, де $x_i > 0$, $i = 1,2,...,n$, то $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$, причому рівність має місце тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.

ТЕОРЕМА 4. Середнє геометричне n додатніх чисел x_i, $i = 1,2,...,n$, менше або дорівнює їх середньому арифметичному, тобто $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 ... x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, причому рівність справджується тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Доведення. Позначивши через $q = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 .. \cdot x_n}$ **за** теоремою 3 з рівності $\dfrac{x_1}{q} \cdot \dfrac{x_2}{q} ... \dfrac{x_n}{q} = 1$ випливає нерівність

$\dfrac{x_1}{q} + \dfrac{x_2}{q} ... + \dfrac{x_n}{q} \geq n$ або $q \leq \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$, причому рівність має місце тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Теорема доведена.

4.5. Число e. Друга визначна границя

Для розкриття невизначеності (1^{∞}) використовують таке твердження:

ТЕОРЕМА 5. Послідовність $y_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$, $n \in N$ має границю.

Доведення. Використовуючи твердження теореми 4, маємо

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot (1 + \frac{1}{n})^n} < \frac{1 + (1 + \frac{1}{n}) \cdot n}{n + 1} = 1 + \frac{1}{n + 1}.$$

Звідси

$$(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n + 1})^{n+1},$$

тобто послідовність $y_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$, $n \in N$, монотонно зростає.

Аналогічно для послідовності $z_n = (1-\frac{1}{n})^n$, $n \in N$, маємо

$$\sqrt[n+1]{1\cdot(1-\frac{1}{n})^n} < \frac{1+(1-\frac{1}{n})\cdot n}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Звідси $(1-\frac{1}{n})^n < (1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$.

Таким чином, послідовність $z_n = (1-\frac{1}{n})^n$, $n \in N$, також монотонно зростає.

Оскільки

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1} = (\frac{n+1}{n})^{n+1} = (\frac{n}{n+1})^{-(n+1)} = (1-\frac{1}{n+1})^{-n+1} = \frac{1}{z_{n+1}},$$

то послідовність $x_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}, n \in N$, спадає.

Тому $y_n = (1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \le x_1 = 4, n \in N$.

Тобто (y_n)- обмежена послідовність і вище було показано , що вона зростає.

Отже, послідовність $y_n = (1+\frac{1}{n})^n$ має границю. Цю границю в математиці позначають буквою e, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

Таку границю називають другою визначеною границею для послідовностей. Доведено, що число e – ірраціональне число і його розклад в десятковий дріб з деякою точністю має вигляд e =**2,718281828459045…**

Логарифм числа $x>0$ за основою e називається натуральним логарифмом і позначається символом $\ln x$. Оскільки за означенням логарифма правильна рівність $x = e^{\ln x}$, то прологарифмувавши її за основою 10, маємо $\lg x = M\cdot\ln x,$ де $M = \lg e = 0{,}434294....$ Число M називають модулем переходу від натурального логарифма до логарифма десяткового.

Далі доведемо існування границі функції $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ в точці $x=0$. Цю границю називають другою визначною границею для власної функції.

ТЕОРЕМА 6. Правильна рівність $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Доведення. Спочатку доведемо рівність $\lim\limits_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Можемо вважати $0<x\le 1$. Для кожного $x\in\left(0,1\right]$ існує натуральне число $n=n(x)$ таке, що $\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$.

Звідси $1+\frac{1}{n+1}<1+x\le 1+\frac{1}{n}$.

Оскільки $n+1>\frac{1}{x}\ge n$, то

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n}\le(1+\frac{1}{n+1})^{\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}\le(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{x}}<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

або $$\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}<(1+\frac{1}{n})^{n}\cdot(1+\frac{1}{n}).$$

Якщо $x\to 0+0$, то $n\to\infty$. Крайні частини останніх нерівностей мають границі при $n\to\infty$, що дорівнюють числу e.

Звідси за теоремою 6 §3 і функція $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x\to 0+0$ матиме праву границю, що дорівнює e.

Покажемо, що і ліва границя функції $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в точці $x=0$ дорівнює числу e. Введемо нову змінну y, зв’язану із змінною x рівністю $y=-\frac{x}{1+x}$.

Зазначивши, що $x=-\frac{y}{1+y}$, дістанемо

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1-\frac{y}{1+y})^{-\frac{1+y}{y}}=(\frac{1}{1+y})^{-1-\frac{1}{y}}=(1+y)^{\frac{1}{y}}\cdot(1+y).$$

Якщо x прямує до нуля зліва, то $y=-\dfrac{x}{1+x}$ прямує до нуля справа. Звідси, враховуючи, що згідно доведеного вище твердження

$\lim\limits_{y\to 0+0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e,$ маємо

$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to 0+0}((1+y)^{\frac{1}{y}}(1+y))=e\cdot 1=e.$$

За теоремою 6 §3 випливає справедливість рівності

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$ Теорема 5 доведена.

Вправа. Виходячи з неперервності елементарних функцій a^x і $\log_a x$ і, використовуючи другу визначну границю, довести справедливість таких рівностей:

$$а)\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e;\quad б)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

$$в)\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad г)\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;$$

$$д)\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha;\quad е)\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$$

Примітка. Другу визначну границю для функції $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x$ при $x\to\infty$ записують так: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e.$

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}=(1+\dfrac{5}{n})^{-2n}.$

Розв'язування. $\lim\limits_{n\to\infty}=(1+\dfrac{5}{n})^{-2n}=(\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{\frac{n}{5}})^{\frac{n}{5}})^{-10}=e^{-10}.$

4.6. Порівняння нескінчено малих величин

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку (a,b) крім, можливо, точки $x_0\in(a,b)$.

<u>Означення1.</u> Функція називається нескінчено малою в точці x_0, якщо існує границя функції в даній точці і ця границя дорівнює нулю.

Нескінчено малу функцію в точці ще називають нескінчено малою величиною.

Приклад 1. Нехай $y=(1-x)^n$. Тоді $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^n=0.$

Отже, функція $y=(1-x)^n$ в точці $x=1$ є нескінчено малою.

Приклад 2. Нехай $y=\sin x$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0.$ Отже, задана функція $y=\sin x$ в точці $x=0$ є нескінченно малою.

Якщо x_0 - внутрішня точка інтервалу (a,b), то, використавши означення границі функції в точці, нескінчену малу функцію можна означити так.

***Означення 2*. Функція $y=f(x)$ називається нескінчено малою в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх $x \in (a,b)$ $x\neq x_0$, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)|<\varepsilon$.**

Аналогічно можна означити нескінчено малу функцію на нескінченості.

***Означення 3.* Функція $y=f(x)$ називається нескінченно малою на нескінченності $(x\to\infty)$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $M>0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x|>M$, виконується нерівність $|f(x)|<\varepsilon$.**

Приклад 3. Розглянемо функцію $y=\dfrac{1}{x^2}$. Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0.$

Отже, функція $y=\dfrac{1}{x^2}$ на нескінченності $(x\to\infty)$ є нескінчено малою.

Нескінченно малі функції аналогічно до нескінчено малих числових послідовностей володіють аналогічними властивостями.

Примітка 1. Іноді доводиться розглядати не одну, а кілька нескінченно малих функцій у даній точці. Такі функції порівнюють між собою за допомогою границі їх відношення, і залежно від того як поводить себе таке відношення поблизу даної точки, нескінченно малим величинам дають певну назву.

Подамо ряд означень.

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малі функції в точці

$x_0 \in (a,b)$ (x_0 може бути і нескінченно віддаленою точкою).

<u>Означення 4.</u> Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, ***то*** $\alpha(x)$ ***називається нескінченно малою вищого порядку малості, ніж*** $\beta(x)$. ***При цьому*** $\beta(x)$ ***називається нескінченно малою нижчого порядку малості, ніж*** $\alpha(x)$.

Приклад 4. Нехай $\alpha(x)=(x-1)^2$, $\beta(x)=x-1.$ Тоді $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в точці $x=1$ є нескінченно малі функції. Знайдемо

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 1}(x-1)=0.$$

Отже, в цьому випадку $\alpha(x)$є нескінчено мала вищого порядку, ніж $\beta(x)$.

Приклад 5. Нехай $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0,$ $\lim\limits_{x\to\infty}\beta(x)=0,$

тобто $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ на нескінченності є нескінченно малі функції. Знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^3+1}=0.$

Отже, функція $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ є нескінченно мала вищого порядку, ніж $\beta(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ при $x\to\infty$ або, що те саме, $\beta(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ є нескінчено мала нищого порядку, ніж $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$ при $x\to\infty$.

<u>Означення 5.</u> Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$, ***де C- відмінне від нуля число, то*** $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ ***в точці*** x_0 ***називаються нескінчено малими однакового порядку малості***.

Якщо при цьому $C=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в точці x_0 називаються **еквівалентними** і записують $\alpha(x)\sim\beta(x)$ (при $x\to x_0$).

Приклад 6. Нехай $\alpha(x)=tgx$, а $\beta(x)=x$. Тоді $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в точці $x=0$ є нескінченно малі функції. Оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1,\text{ то } tgx\sim x \text{ (при } x\to 0).$$

***Означення 6**. Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малі функції в точці x_0 і $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C$, де k - довільне число, а число $C\neq 0$, то функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою порядку k по відношенню до $\beta(x)$.*

Приклад 7. Нехай $\alpha(x)=1-\cos x$, а $\beta(x)=x$. Оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

то функція $\alpha(x)=1-\cos x$ у точці $x=0$ **є нескінченно малою другого порядку** по відношенню до x.

§5. Неперервність функції

5.1. Означення неперервності функції в точці і на відрізку

***Означення 1.** Нехай функція $f(x)$ визначена в околі $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ точки. Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо границя функції $f(x)$ при $x\to x_0$ існує і дорівнює значенню в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.*

Це означення вимагає виконання таких трьох умов:

1. $f(x)$ повинна бути визначена в деякому околі точки x_0.
2. Існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.
3. Ця границя повинна дорівнювати значенню функції . $f(x_0)$.

***Означення 2.** Нехай функція $f(x)$ визначена в околі $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ точки x_0. Функція $y=f(x)$ називається непе–рервною в точці x_0., якщо для довільного як завгодно малого додатного ε, можна вказати таке $\delta>0$, що з нерівності $|x-x_0|<\delta$ випливає нерівність $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.*

Якщо вираз $\Delta x = x - x_0$ назвати приростом аргументу x, а вираз $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x_0)$ - приростом функції, то на основі означення 1 можна формулювати інше означення неперервності функції $f(x)$ в точці x_0.

***<u>Означення 3.</u>* Нехай функція $f(x)$ визначена в околі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ точки x_0. Функція $y = f(x)$ є неперервною в точці x_0, якщо в цій точці нескінчено малому приросту Δx аргументу x відповідає нескінчено малий приріст функції $\Delta y = \Delta f(x_0)$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.**

***<u>Означення 4.</u>* Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[x_0, b]$. Функція $y = f(x)$ називається неперервною зліва в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.**

***<u>Означення 5.</u>* Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, x_0]$.. Функція $y = f(x)$ називається неперервною справа в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.**

***<u>Означення 6.</u>* Функція $y = f(x)$ називається неперервною на відрізку $[a, b]$., якщо вона неперервна в кожній точці інтервалу (a,b). Неперервна зліва в точці b $\lim\limits_{x \to b - 0} f(x) = f(b)$ і неперервна справа в точці a $\lim\limits_{x \to a + 0} f(x) = f(a)$.**

Примітка. Сума, різниця, добуток декількох неперервних в деякій точці функцій є неперервні в цій точці. Якщо знаменник не перетворюється в нуль у точці неперервності, то частка двох неперервних в цій точці функцій є неперервною функцією.

5.2. Класифікація точок розриву функції

***<u>Означення 7.</u>* Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ не є неперервною, то точка x_0 називається точкою розриву функції.**

Виходячи з означення 1 неперервності функції $y = f(x)$ в точці x_0, точка x_0 буде точкою розриву функції, якщо не виконується одна з трьох умов:

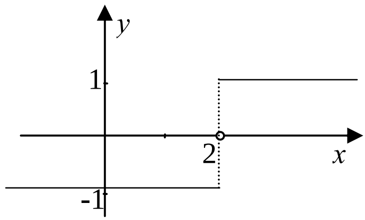
1) у точці x_0 функція $f(x)$ невизначена;

2) у точці x_0 не існує границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, але вона не дорівнює значенню функції $f(x_0)$.

Існують такі типи розривів :

1) Розрив 1-го роду. Якщо існують скінчені ліва і права границі ($\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$), але вони не рівні між собою.

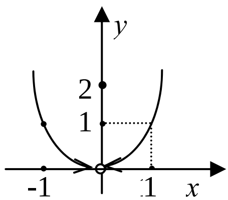


Наприклад, функція

$y = \dfrac{x-2}{|x-2|} = \begin{cases} -1, x < 2, \\ 1, x > 2 \end{cases}$ має при

$x = 2$ розрив 1-го роду (див. мал.) тому, що існують скінчені границі $\lim\limits_{x \to 2-0} y = -1,$ $\lim\limits_{x \to 2+0} y = 1,$ але ці границі не рівні між собою.

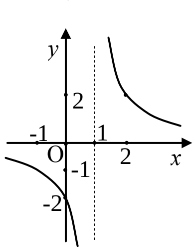
2) Якщо лівостороння і правостороння границі $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ в точці x_0 рівні між собою, тобто $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, але не дорівнюють значенню функції в точці x_0, тобто $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.



Наприклад, функція $f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0, \\ 2, x = 0 \end{cases}$

має в точці $x = 0$ розрив, тому що $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} = 0,$ але ці границі не дорівнюють значенню $f(0) = 2$ в точці $x = 0.$

Розрив 2-го роду. Якщо лівостороння або правостороння границі функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнюють $\pm\infty$, то кажуть, що функція $f(x)$ має в точці x_0 розрив другого роду.



Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ має в точці $x = 1$ розрив 2-го роду, бо

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = +\infty.$$

§6. Властивості неперервних на відрізку функцій

6.1. Обмежені функції

Функції, неперервні на відрізку, мають ряд властивостей, яких, взагалі кажучи, не мають функції, неперервні, наприклад, в інтервалі. Ці властивості ми й розглянемо далі.

ТЕОРЕМА 1 (Вейєрштрасса). Неперервна функція на відрізку обмежена на цьому відрізку, тобто існують такі два числа m і M, що $m \leq f(x) \leq M$ для всіх $x \in [a,b]$.

Доведення. Доводячи за допомогою методу міркування від супротивного, припустимо, що функція $f(x)$, неперервна на відрізку $[a,b]$, не обмежена на цьому відрізку. Тому для кожного натурального n знайдеться точка $x_n \in [a,b]$ така, що $|f(x)| > n,\ n = 1,2,...$

Послідовність (x_n) обмежена. За відповідною теоремою математичного аналізу з цієї послідовності можна виділити збіжну послідовність (x_{n_k}), $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ і точка x_0 належить обов'язково відрізку $[a,b]$, тому в ній функція $f(x)$ неперервна, якщо $x_0 \in (a,b)$, неперервна справа, якщо $x_0 = a$ і неперервна зліва, якщо $x_0 = b$. Отже, ми можемо записати такі два твердження:

$$|f(x_{n_k})| > n_k,\ k = 1,2,..., \qquad \text{і}$$
$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),\ k \to \infty.$$

Звідси з першої нерівності випливає, що послідовність $(f(x_{n_k}))$ необмежена, а з другого твердження випливає, що вона, будучи збіжною, обмежена. Суперечність, до якої ми дійшли, доводить теорему 1.

6.2. Існування найменшого і найбільшого значення

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D.

Значення $f(x^*)$, $x^* \in D$ називається найменшим (найбільшим) значенням функції $f(x)$ на множині D, якщо для будь-якого $x\in D$ правильна нерівність $f(x^*)\le f(x)$ ($f(x^*)\ge f(x)$). Найменше і найбільше значення функції не завжди існують.

Однак правильна теорема.

ТЕОРЕМА 2 (Вейєршрасса). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше, тобто $\min\limits_{[a,b]} f(x)=f(x_1)$, $x_1\in[a,b]$ і $f(x)\ge f(x_1), x\in[a,b]$; $\max\limits_{[a,b]} f(x)=f(x_2)$, $x_2\in[a,b]$ і $f(x)\le f(x_2), x\in[a,b]$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то за теоремою 1 всі її значення обмеженні, тобто $m\le f(x)\le M$, де m і M - сталі величини. Тоді для такої множини $\{f(x)\}$ значень функції існує точна верхня межа. Нехай $\mu=sup\{f(x)\}$. Припустимо, що $\mu\ne f(x)$, коли $x\in[a,b]$.

Розглянемо нову функцію $\varphi(x)=\dfrac{1}{\mu-f(x)}$.

Оскільки $\mu-f(x)\ne 0,\ x\in[a,b]$, то функція $\varphi(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а значить за теоремою 1 вона обмежена, тобто існують числа α і β такі, що $\alpha\le\varphi(x)\le\beta$ $(\beta>0)$.

Розглянемо нерівність $\dfrac{1}{\mu-f(x)}\le\beta$.

Звідси одержуємо, що

$$\mu-f(x)\ge\frac{1}{\beta},\ -f(x)\ge-\mu+\frac{1}{\beta},\ f(x)\le\mu-\frac{1}{\beta}.$$

Остання нерівність показує, що число μ не може бути точною верхньою межею. Отже, наше припущення неправильне. Теорема 2 доведена.

6.3. Теорема про перетворення функції в нуль

Для доведення наступної властивості функцій, неперервних на відрізку, потрібна одна локальна властивість неперервної функції.

ДОПОМІЖНА ТЕОРЕМА. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 справа (зліва) і якщо $f(x_0)\neq 0$, то знайдеться число $\delta>0$ таке, що для всіх $x\in[x_0, x_0+\delta)$ $(x_0\in(x_0-\delta, x_0])$ значення функції $f(x)$ за знаком будуть такими, як $f(x_0)$.

Доведення. Нехай для означеності $f(x_0)>0$ і функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 справа. Тоді для числа $\varepsilon=\dfrac{f(x_0)}{2}>0$
існує число $\delta>0$ таке, що для всіх $x\in[x_0, x_0+\delta)$ буде правильна нерівність $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon=\dfrac{f(x_0)}{2}$.

Звідси для $x\in[x_0, x_0+\delta)$ маємо

$$\left|f(x)>f(x_0)\right|-\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

Теорема доведена для розглядуваного випадку. Інші випадки доводяться аналогічно.

Наслідок 1. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і якщо $f(x_0)\neq 0$, то знайдеться окіл $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0, для всіх точок x якого значення функції $f(x)$ за знаком будуть такими ж, як $f(x_0)$.

ТЕОРЕМА 3 (Больцано-Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і якщо значення цієї функції на кінцях цього відрізка протилежні за знаком, то існує принаймні одна точка $c\in(a,b)$, значення функції в якій дорівнює нулю, тобто $f(c)=0$.

Доведення. Нехай для означеності $f(a)<0$, $f(b)>0$. Оскільки функція $f(x)$ в точці $x=a$ неперервна справа , а в точці $x=b$ неперервна зліва, то за допоміжною теоремою знайдеться число $\delta>0$ таке, що $f(x)<0$ для всіх $x\in[a, a+\delta)$ і $f(x)>0$ для всіх $x\in(b-\delta, b)$. Позначимо через D множину всіх точок $x\in[a,b]$ в яких $f(x)<0$. Ця множина непорожня, оскільки $[a, a+\delta)\subset D$. Вона обмежена зверху числом $b-\delta$. Така множина має точну верхню межу. Позначимо її через $c=\sup D$. Ясно, що $a+\delta\leq c\leq b-\delta$ і, отже, $c\in(a,b)$. Доведемо рівність $f(c)=0$.

Припустимо, що $f(c) \neq 0$. Оскільки $c \in (a,b)$, то за наслідком 1 допоміжної теореми знайдеться окіл $(c-\delta_1, c+\delta_2)$ точки c, в усіх точках якого значення функції $f(x)$ за знаком будуть такими ж, як $f(c)$.

Якщо $f(c) < 0$, то $f(x) < 0$ для всіх $x \in (c-\delta_1, c+\delta_2)$, що суперечить означенню числа c як верхньої грані множини D всіх тих точок $x \in [a,b]$, в яких $f(x) < 0$.

Якщо $f(c) > 0$, тоді $f(x) > 0$ для всіх $x \in (c-\delta_1, c+\delta_2)$, що знову ж таки суперечить означенню числа c як верхньої грані множини D, бо за властивістю верхньої грані в проміжку $(c-\delta_1, c)$ міститься проміжна одна точка x' з множини D, в якій $f(x') < 0$. Припущення, що $f(c) \neq 0$, привело до суперечності. Отже, $f(c) = 0$ і теорему 3 доведено.

§7. Деякі економічні задачі і їх розв'язування

Задача 1. Бюро економічного аналізу підприємства встановило, що при виробництві x комплектів меблів щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою $V(x) = 2050 + 15x$ (гривень), а дохід $D(x)$, одержаний від продажу x комплектів меблів визначається формулою $D(x) = 25x - 0{,}1x^2$ (гривень).

Кожного кварталу підприємство виробляє 80 комплектів, але прагне збільшити випуск меблів до 110 одиниць. Обчислити приріст витрат, доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції :

Розв'язування. Запланований приріст продукції буде $\Delta x = 110 - 80 = 30$ (одиниць продукції).

Приріст витрат :

$$\Delta V(x) = V(110) - V(80) = (2050 + 15 \cdot 110) - (2050 + 15 \cdot 80) =$$
$$= 3700 - 3250 = 450.$$

Приріст доходу:

$$\Delta D(x) = D(110) - D(80) = (25 \cdot 110 - 0{,}1 \cdot 110^2) - (25 \cdot 80 - 0{,}1 \cdot 80^2) =$$
$$= 1540 - 1360 = 180.$$

Позначимо прибуток через $P(x)$. Тоді прибуток буде:

$$P(x)=D(x)-V(x)=25x-0{,}1x^2-2050-15x=$$
$$=-2050+10x-0{,}1x^2.$$

Приріст прибутку буде таким:

$$\Delta P(x)=P(110)-P(80)=-2050+10\cdot 110-0{,}1\cdot 110^2-$$
$$-(-2050+10\cdot 80-0{,}1\cdot 80^2)=1100-1210-800+640=-270$$

тобто зменшиться на 270 гривень. Середня величина прибутку на одиницю приросту продукції буде $\dfrac{\Delta P(x)}{\Delta(x)}=\dfrac{-50}{30}=-1{,}67.$

Задача 2. В одному із обласних центрів в усіх вищих навчальних закладах навчається 35 тис. студентів. Щорічно кількість студентів збільшується на 3%. Яка кількість студентів буде у вказаному обласному центрі через вісім років?

Розв'язування. Використаємо формулу зростання за складними відсотками:

$$K_t=K_0(1+\frac{p}{100})^t=K_0(1+i)^t,$$

де K_t – сума вкладу, нагромаджена через t років; $K_0 -$ початкова сума вкладу; $p -$ щорічний відсотковий приріст; t – період зростання в роках; $i=\dfrac{p}{100}$, $1+i=r$ - коефіцієнт складних відсотків.

На основі формули зростання за складними відсотками маємо:

$K_8=35(1+\dfrac{3}{100})^8=35\cdot(1+0{,}03)^8\approx 44{,}34$ (тис. студентів).

Задача 3. Вкладник надає банку 2000 гривень під складні відсотки з умовою їх неперервного зростання на 12% річних. Обчислити нагромадження капіталу за 4 роки.

Розв'язування. Використаємо формулу неперервного зростання за складними відсотками $K_t=K_0\cdot e^{\frac{p}{100}t}=K_0e^{it}.$

Якщо $p>0$, формула називається показниковим законом зростання, а при $p<0$ - показниковим законом спадання.

На основі формули неперервного зростання за складними відсотками одержуємо таку відповідь:

$$K_4=2000\cdot e^{4\cdot 0{,}12}=3{,}2322 тис.грн.$$

Розділ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Закономірності, які вивчають різні галузі науки, в тому числі й економіки, описуються за допомогою функцій. Описавши процес функцією, дослідження процесу зводиться до вивчення властивостей функції. Відповідь на такі питання , як швидкість процесу в даний момент, проміжки часу, коли буде прискорення чи уповільнення процесу та інші можна одержати за допомогою похідної даної функції.

§1. Означення похідної

Уточнимо поняття похідної функції, з яким знайомі з шкільного курсу математики.

Нехай задано функцію $y = f(x)$, визначену на проміжку (a,b). Візьмемо деяку точку x_0 з цього проміжку. Значення функції в ній буде $y_0 = f(x_0)$. Надамо аргументу приріст Δx, такий, що точка $x_1 = x_0 + \Delta x$ не вийде за вказаний проміжок.Тоді функція одержить нове значення $f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$, а її приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

Знайдемо границю відношення (4.1) при умові, що Δx прямує до нуля. Якщо ця границя існує, то її називають похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 і позначають $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо похідна існує для всіх точок проміжку,то вона є функцією від x . Для кожного конкретного значення $x = x_0$ похідна є число.

Означення. ***Похідною функції y = f(x) в точці x називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.***

Похідну позначають так: $y', y'_x, f', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Покажемо застосування цього означення для знаходження похідних деяких функцій.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^2$.

Розв'язування.

1. Надаємо аргументу x приросту Δx.

2. Знаходимо приріст функції Δy, віднявши від значення функції в новій точці значення функції в початковій точці

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

3. Складаємо відношення приростів

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

4. Обчислюємо границю цього відношення при умові , що приріст аргументу Δx прямує до нуля

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Отже, $y' = 2x$ або $(x^2)' = 2x$.

Приклад 2. (самостійно). Знайти похідну функції $y = x$. Відповідь: $y' = 1$.

Приклад *3*. Знайти похідну функції $y = \sin x$.

Розв'язування.

1. Надаємо довільному x приросту Δx.

2. Знаходимо приріст функції

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos\frac{x + \Delta x + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

3. Складаємо відношення приростів

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x}.$$

4. Обчислюємо границю цього відношення при умові , що $\Delta x \to 0.$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x .$$

Отже, $(\sin x)' = \cos x.$

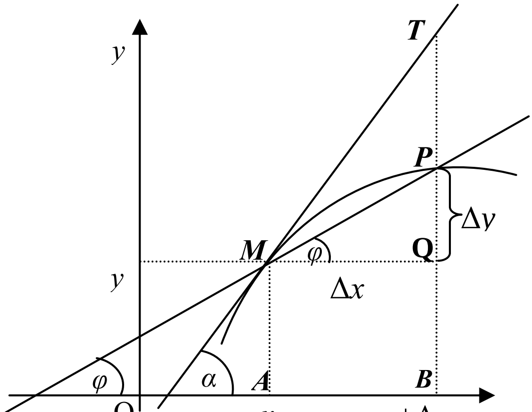
Таким способом можна довести, що $(\cos x)' = -\sin x$.

§2. Задачі, що приводять до поняття похідної

2.1.Геометричний зміст похідної

Однією з задач геометрії, яка тісно пов'язана з історією виникнення диференціального числення є задача про проведення дотичних до кривих.

<u>Означення.</u> ***Дотичною до кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$ в точці дотику $M(x, y)$ називають граничне положення MT січної MP, коли точка P, рухаючись по кривій прямує до точки M.***



Мал.1

Розглянемо графік $y=f(x)$. Візьмемо на графіку точку $M(x,y)$ і другу точку $P(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Проведемо січну MP і позначимо кут нахилу її до додатнього напрямку осі Ox через φ. Позначимо кут, який утворює дотична MT з додатнім напрямом осі $0x$ через α.

Якщо пересувати точку P по кривій до точки M, то граничним положенням січної MP буде дотична MT до графіка в точці M. Як видно з малюнка $AM = f(x)$, $BP = f(x + \Delta x)$,

$$QP = BP - BQ = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y; \quad MQ = AB = \Delta x.$$

Отже, $tg\varphi = \dfrac{QP}{MQ} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,

а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = tg\alpha$.

Отже, похідна в даній точці x дорівнює тангенсові кута, утвореного дотичною до графіка функції в точці $M(x, y)$ з додатнім напрямом осі Ox. Інакше, похідна в точці x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці $(x, f(x))$.

2.2. Дотична і нормаль до графіка функції

Задача. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0.

*Розв'язування.*Точка M на кривій має координати $x = x_0$ $y = y_0 = f(x_0)$. Кутовий коефіцієнт дотичної $k = f'(x_0)$. Використавши рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом на площині, що проходить через задану точку M, одержимо рівняння дотичної:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Нормаль до кривої в заданій точці перпендикулярна до дотичної, проведеної в цій точці. А тому кутовий коефіцієнт нормалі на основі умови перпендикулярності двох прямих

$k_н = -\dfrac{1}{k_д} = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Отже, рівняння нормалі

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = x^2$ в точці з абсцисою $x = 2$.

Розв'язування. Похідна $y' = 2x$, $y'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$Знайдемо ординату цієї точки $y(2) = 2^2 = 4.$

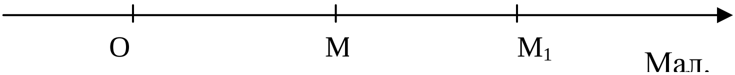
Рівняння дотичної $y - 4 = 4(x - 2)$ або $y = 4x - 4$.

Рівняння нормалі $y - 4 = -\dfrac{1}{4}(x - 2)$ або $y = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{9}{2}$.

2.3. Механічний зміст похідної

Нехай матеріальна точка рухається по прямій, починаючи з точки $\boldsymbol{O}$ і шлях, пройдений нею, описується рівнянням $\boldsymbol{s = f(t)}$

Зафіксуємо момент часу $\boldsymbol{t}$,коли точка знаходилася в положенні $\boldsymbol{M}$.Надамо часу $\boldsymbol{t}$ приріст $\boldsymbol{\Delta t}$**.** За цей час точка перейде в положення $\boldsymbol{M_1}$. Приріст шляху $\boldsymbol{\Delta s = MM_1}$ (мал.2).



Мал.

$$\boldsymbol{\Delta s = OM_1 - OM = f(t + \Delta t) - f(t).}$$

Середня швидкість руху $\boldsymbol{V_{\text{сер.}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}}$.

Спрямувавши $\boldsymbol{\Delta t}$ до нуля, ми одержимо миттєву швидкість руху точки $\boldsymbol{M}$ в момент часу $\boldsymbol{t}$.

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

Отже, похідна від пройденого шляху $\boldsymbol{s}$ по часу $\boldsymbol{t}$ виражає миттєву швидкість руху в момент $\boldsymbol{t}$**.** Це є механічний зміст похідної.

2.4. Економічний зміст похідної

Якщо слово “швидкість” розуміти більш широко , як швидкість зміни функції в залежності від зміни аргументу, то можна вказати економічний зміст похідних від функцій, які описують певні економічні процеси.

Нехай витрати виробництва $\boldsymbol{V}$ однорідної продукції є функцією кількості продукції $\boldsymbol{x}$, тобто $\boldsymbol{V = V(x).}$ Припустимо, що кількість продукції збільшується на $\boldsymbol{\Delta x}$. Продукції $\boldsymbol{x + \Delta x}$ відповідають витрати виробництва $\boldsymbol{V(x + \Delta x)}$. Приріст витрат виробництва $\boldsymbol{\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)}$. Середній приріст витрат на одиницю приросту продукції $\boldsymbol{\dfrac{\Delta V}{\Delta x}}$.

Похідна $\boldsymbol{V'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta x}}$ **називається маржинальними (або граничними) витратами виробництва при умовах хоча би простого відтворення виробництва продукції.**

Вкажемо на економічний зміст похідних для інших залежнос тей, які найбільш часто вживаються.

Позначимо через $D(x)$ та $P(x)$ відповідно дохід і прибуток при виробництві і реалізації x одиниць продукції. Тоді, якщо підприємство збільшує випуск продукції на Δx одиниць, ці функції одержать приріст

$$\Delta D(x) = D(x+\Delta x) - D(x),$$

$$\Delta P(x) = P(x+\Delta x) - P(x),$$

а тому маржинальний дохід

$$D'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta D(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{D(x+\Delta x) - D(x)}{\Delta x},$$

а маржинальний прибуток

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x}.$$

§3. Зв'язок між неперервністю та диференційовністю фукції

Означення. **Функції, які мають похідні в точці x називають диференційованими в цій точці.**

Зв'язок між неперервністю і диференційовністю функції встановлює наступна теорема.

ТЕОРЕМА. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

Доведення. Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона має в цій точці скінчену похідну. Це означає, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

На основі означення границі випливає, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$

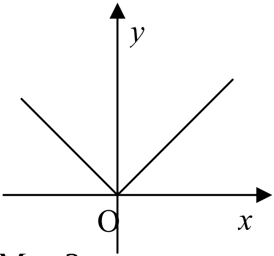
де α - нескінченно мала величина.

Звідси $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$. А тому $\Delta y \to 0,$ коли $\Delta x \to 0$.

А з означення неперервності функції випливає , що $y = f(x)$ неперервна в точці x_0. Теорема доведена.

Обернене твердження неправильне.

Так, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x = 0$ (мал.3), але вона немає похідної в цій точці. Дійсно,



Мал.3

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1, \text{ а } \lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

Отже, границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ залежить від способу прямування Δx до нуля і тому не існує в точці $x=0.$ А, отже, функція $y=|x|$ не диференційовна в цій точці.

§4. Основні правила диференціювання

Знаходження похідних за означенням не проста задача. Тому для відшукання похідних від функцій, які утворені з декількох елементарних функцій використовують правила диференціювання, що сформульовані у вигляді теорем.

ТЕОРЕМА 1. Похідна постійної величини c дорівнює 0.

Доведення. Нехай $y=c$, де $c=const-$ стала.Надаємо довільному x приросту Δx .Враховуючи, що функція прийме одне і теж значення при всіх значеннях аргументу, маємо $\Delta y=c-c=0$.

Знаходимо відношення приростів $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$.

Похідна цієї функції $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$. Отже $(c)'=0$.

ТЕОРЕМА 2. Якщо кожна з скінченого числа функцій $u_1(x),u_2(x),...,u_n(x)$ диференційовна в деякій точці x, то диференційовною в цій точці є їх алгебраїчна сума, причому похідна алгебраїчної суми цих функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх похідних.

$$[u_1(x)\pm u_2(x)\pm\ldots\pm u_n(x)]'=u_1'(x)\pm u_2'(x)\pm\ldots\pm u_n'(x).$$

Доведення. Візьмемо функцію з трьох доданків $y=u_1(x)+u_2(x)-u_3(x)$. Надамо аргументу x приріст Δx . Тоді функція y та її складові $u_1(x),u_2(x),u_3(x)$ одержать відповідно прирости $\Delta y,\Delta u_1,\Delta u_2,\Delta u_3,$ причому

$$\Delta y=[u_1(x+\Delta x)+u_2(x+\Delta x)-u_3(x+\Delta x)]-$$
$$-[u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)]=\Delta u_1+\Delta u_2-\Delta u_3.$$

Складемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при умові, що $\Delta x \to 0$. Використавши властивості границь і врахувавши, що похідні функцій $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ існують, одержимо

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u_1 + \Delta u_2 - \Delta u_3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u_2}{\Delta x} - -$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u_3}{\Delta x} = u_1'(x) + u_2'(x) - u_3'(x)$ або

$[u_1(x) + u_2(x) - u_3(x)]' = u_1'(x) + u_2'(x) - u_3'(x)$, що треба було довести.

ТЕОРЕМА 3. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в точці x, то їх добуток диференційовний в цій точці і має місце формула $(u\cdot v) = u'v + v'u$.

Доведення. Позначимо $y = uv$. Надамо приросту Δx аргументу x. Тоді функції u, v, y одержать відповідно прирости $\Delta u, \Delta v, \Delta y,$ причому

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

Знайдемо приріст Δy:

$$\Delta y = uv + \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv = \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

Складаємо відношення приростів

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + \frac{\Delta v}{\Delta x}u + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Перейдемо до границі при умові , що $\Delta x \to 0$, використавши властивості границь і врахувавши, що функція v неперервна, оскільки вона диференційовна, і тому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0$.

Отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v + u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v =$
$= u'v + uv'$, а тому $y' = (uv)' = u'v + uv'$. Теорема доведена.

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак похідної.

Доведення. $(Cy)' = C'y + Cy' = Cy'$, оскільки $C' = 0.$

Наслідок 2. Похідна добутку декількох диференційованих функцій дорівнює сумі добутків похідної кожної з цих функцій на всі решта функції співмножники.

Доведення проведемо для випадку трьох співмножників.

$(uvw)' = (uv)'w + uvw' = (u'v + uv')w + uvw' = u'vw + v'uw + w'uv$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^n$ ($n -$ натуральне число).

Розв'язування.

$$x^n = \underbrace{x\,x\,x\,\ldots\,x}_{n\,-\,\text{раз}}.$$

Використовуючи наслідок 2 , маємо

$$(x^n)' = \underbrace{x'x^{n-1} + x'x^{n-1} + \ldots + x'x^{n-1}}_{n} = nx^{n-1}\ .$$

Отже, $$y' = nx^{n-1}. \qquad (4.2)$$

ТЕОРЕМА 4. Якщо функції $u = u(x),\ \ v = v(x)$ диференційовні в точці x , причому $v(x) \neq 0$, то їх частка також має похідну в цій точці, яка обчислюється за формулою:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доведення. Позначимо $y = \dfrac{u}{v}$. Надамо аргументу x приросту Δx . Тоді u, v, y одержать відповідно прирости $\Delta u, \Delta v, \Delta y$, причому $y + \Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$. Знайдемо приріст Δy :

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{\Delta uv - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}.$$

Складемо відношення приростів $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$.

Перейдемо до границі при умові, що $\Delta x \to 0$, використавши властивості границь і врахувавши, що функція v неперервна, оскільки вона диференційовна, і тому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$.

Отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v^2+v\Delta v)}=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$,

а тому $y'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Теорема доведена.

Наслідок 3. Якщо знаменник дробу постійна величина, то

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}\quad .$$

Дійсно, $\left(\dfrac{u}{c}\right)'=\dfrac{u'c-uc'}{c^2}=\dfrac{u'c}{c^2}=\dfrac{u'}{c}$.

Наслідок 4. Якщо чисельник дробу – постійна величина, то

$$\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{c'v-cv'}{v^2}=-\frac{cv'}{v^2}.$$

Зокрема, при $c=1$ маємо $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$.

Наслідок 5. (похідні функцій $y=tgx, y=ctgx$).

Справедливі формули:

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;\ (ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\ x\neq\pi n.$$

Доведення.

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}=$$

$=\dfrac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$, що треба довести.

Приклади.

1.Знайти похідні функцій:

а) $y=5x^4-2x^3+x^2-4x+10$.

Розв'язування. Використовуючи послідовно теорему 2, наслідок 1 і формулу похідних від степеня (4.2), одержимо:

а) $y' = (5x^4)' - (2x^3)' + (x^2)' - (4x)' + (10)' =$

$= 5 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 2x - 4 + 0 = 20x^3 - 6x^2 + 2x - 4$.

б) $y = (2x^3 + 1)\cos x$.

Розв'язування. Використовуючи теорему 3, одержимо

$y' = (2x^3 + 1)'\cos x + (2x^3 + 1)(\cos x)' = 6x^2 \cdot \cos x +$

$+ (2x^3 + 1)(-\sin x) = 6x^2 \cos x - (2x^3 + 1)\sin x$.

в) $y = \dfrac{tgx}{x^2 - 1}$.

Розв'язування. Використовуючи теорему 4 і наслідок 5, одержимо

$$y' = \frac{(tgx)'(x^2 - 1) - tgx(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(x^2 - 1) - 2xtgx}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 1 - 2xtgx \cdot \cos^2 x}{(x^2 - 1)^2 \cos^2 x} = \frac{x^2 - 1 - \frac{2x \sin x \cos^2 x}{\cos x}}{(x^2 - 1)^2 \cos^2 x} =$$

$$= \frac{x^2 - 1 - 2x \sin x \cos x}{(x^2 - 1)^2 \cos^2 x} = \frac{x^2 - x \sin 2x - 1}{(x^2 - 1)^2 \cos^2 x}.$$

2.Економічним підрозділом підприємства встановлено, що витрати виробництва x одиниць продукції виражаються формулою (у гривнях). $V(x)=0{,}01x^2+40x+2000$.

Знайти маржинальні (граничні) витрати та середні витрати і обчислити їх при $x=200$.

Розв'язування. Маржинальні витрати для довільної кількості виготовленої продукції визначаються як похідна від функції витрат

$V'(x) = 0{,}02x + 40$. При $x = 200$ маємо

$V'(200) = 0{,}02 \cdot 200 + 40 = 4 + 40 = 44$.

Середні витрати $\overline{V}(x)$ на одиницю продукції $\overline{V}(x) = \dfrac{V(x)}{x}$.

$$\overline{V}(x) = \frac{0{,}01x^2 + 40x + 2000}{x} = 0{,}01x + 40 + \frac{2000}{x}.$$

При $x = 200$, одержимо

$$\overline{V}(200) = 0{,}01 \cdot 200 + 40 + \frac{2000}{200} = 2 + 40 + 10 = 52.$$

Проаналізувавши одержані результати, можна зробити висновок, що при середніх витратах на виробництво одиниці продукції в розмірі 52 грн., додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції складуть 44 грн. і не перевищать середніх витрат.

3. Визначити маржинальний дохід і прибуток підприємства, якщо місячні витрати на виготовлення і реалізацію x одиниць продукції виражаються формулою $V(x) = 0{,}02x^2 + 100x + 10000$, а кількість реалізованих виробів в залежності від роздрібної ціни p визначаються формулою $x = 4000 - 10p$. Знайти маржинальний дохід і прибуток при виробництві $x = 500$ одиниць продукції.

Розв'язування. Визначимо роздрібну ціну одиниці продукції $10p = 4000 - x$, $p = 400 - 0{,}1x$.

Дохід підприємства буде

$D(x) = p \cdot x = (400 - 0{,}1x)x = 400x - 0{,}1x^2$, а прибуток

$$P(x) = D(x) - V(x) = 400x - 0{,}1x^2 - 0{,}02x^2 - 100x - 10000 =$$
$$= 300x - 0{,}12x^2 - 10000.$$

Маржинальний дохід

$$D'(x) = (400x - 0{,}1x^2)' = 400 - 0{,}2x,$$

а маржинальний прибуток

$$P'(x) = (300x - 0{,}12x^2 - 10000)' = 300 - 0{,}24x.$$

При $x=500$ маємо $D'(500)=400-0{,}2\cdot500=400-100=300$,
$P'(500)=300-0{,}24\cdot500=300-120=180$.

§5 Похідна від складної функції

Нехай y є функція від аргументу u, тобто $y = f(u)$, і нехай аргумент u є деяка функція від незалежної змінної x: $u = \varphi(x)$. Тоді y є функція від x: $y = f[\varphi(x)]$. В таких випадках говорять, що y є функція від функції або складною функцією від аргументу x.

Нехай ми вміємо обчислювати похідну від y по аргументу u, а також похідну від аргументу u по незалежній змінній x. Встановимо, як обчислюється похідна від y по незалежній змінній x.

ТЕОРЕМА. Якщо функції $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ мають похідні, то похідна складної функції $y = f[\varphi(x)]$ дорівнює похідній від функції *y* по проміжному аргументу *u*, помноженій на похідну від проміжного аргументу *u* по незалежній змінній *x*.

Тобто, $y'_x = f'_u u'_x$.

Доведення. Надамо x довільний малий приріст Δx. Тоді функція $u=\varphi(x)$ дістане приріст Δu, а функція $y = f(u)$ дістане приріст Δy, викликаний приростом Δu . Оскільки похідна $y'_u = f'_u$ за умовою існує, то $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'_u$.

Звідки $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'_u + \alpha,$ **де** $\alpha \to 0$ **разом з** $\Delta u \to 0$ **.**

А тому $\Delta y = f'_u \Delta u + \alpha \Delta u.$ Розділивши обидві частини рівності на Δx , маємо $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = (f'_u + \alpha)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$ і , врахувавши, що $\Delta u \to 0$ внаслідок неперервності функції u , що зумовлює і $\alpha \to 0$, одержимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(f'_u + \alpha) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ або } y'_x = f'_u u'_x ,$$

що доводить теорему.

Зауваження. В даній теоремі розглянуто складну функцію, де y залежить від x через проміжну змінну u. Можлива і більш складна залежність з двома, трьома і більшим числом проміжних змінних. При цьому правило диференціювання залишається тим же.

Так, наприклад, якщо $y=f(u)$, де $u=\varphi(t)$, а $t=\psi(x)$, то $y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(t) \cdot \psi'(x)$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \sin^3 x.$

*Розв'язування.*Покладаємо $u = \sin x$, тоді $y = u^3$.

Звідси $u'_x = \cos x$, $y'_u = 3u^2$. Отже, $y'_x = 3\sin^2 x \cos x$.

При певному досвіді проміжний аргумент не пишуть, а використовують його неявно.

Приклад 2. Знайти $y',$ якщо $y = tg\,(x^2 + 4)$.

Розв'язування. Пам'ятаючи, що $u = x^2 + 4$, знаходимо

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x^2+4)}(x^2+4)' = \frac{2x}{\cos^2(x^2+4)} .$$

Приклад 3. Знайти похідну функції

$y = cos^2(3x+2)$.

Розв'язування. Цю функцію можна розглядати як складну з двома проміжними змінними

$y = u^2$, де $u = cos\,t$, $t = 3x+2$.

$$y' = 2cos(3x+2)(cos(3x+2))' = 2cos(3x+2)(-sin(3x+2))\times$$
$$\times(3x+2)' = -2cos(3x+2)sin(3x+2)\cdot 3 = -3sin2(3x+2).$$

§6. Похідна від оберненої функції

6.1. Поняття оберненої функції і її похідна

Нехай $y=f(x)$ деяка диференційована функція від аргументу x.

Якщо в цьому рівнянні y розглядати як аргумент, а x як функцію, то ця функція $x = \varphi(y)$, де $f[\varphi(y)] = y$, називається оберненою до даної функції.

Наша задача, знаючи похідну $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, знайти $x'_y = \dfrac{dx}{dy}$.

Теорема 1. Похідна функції $x = \varphi(y)$, оберненої до даної функції $y = f(x)$ дорівнює величині, оберненій до похідної даної функції, якщо остання не дорівнює нулю.

Тобто, $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ **або** $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$.

Доведення. Нехай дана функція $y = f(x)$ і обернена їй функція $x = \varphi(y)$. Тоді $x = \varphi(y) = \varphi[f(x)]$.

Отже, x можна розглядати як складну функцію. Диференціюючи цю рівність по x, і враховуючи, що $x' = \dfrac{dx}{dx} = 1$, застосовуючи попередню теорему про диференціювання складної функції, маємо

$$1 = \frac{d\varphi}{df}\frac{df}{dx} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = x'_y y'_x \text{. Звідси } x'_y = \frac{1}{y'_x} \text{ або } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

Теорема доведена.

6.2. Похідні від обернених тригонометричних функцій

Наслідок 1. Справедливі формули:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доведення. Якщо $y = \arcsin x$, то обернена до неї $x = \sin y,$ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$ Оскільки $y'_x = \frac{1}{x'_y},$ а $x'_y = \cos y,$ то $y' = \frac{1}{\cos y}$.

Виразимо $\cos y$ через x. Маємо $\sin y = x.$

Тоді $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$ Перед коренем беремо знак "+", тому що $\cos y$ для всіх $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ додатний. Отже,

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогічно доводиться $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Наслідок 2. Похідні функцій $y = arctg\, x,$ $y = arcctg x$ знаходяться за формулами:

$$(arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}; \ (arcctg x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Доведення. Оберненою до функції $y = arctg x$ є функція $x = tg y,$ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Оскільки $y'_x = \frac{1}{x'_y},$ $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y},$ то $y' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y.$

Виразимо $\cos^2 y$ через x. Маємо $tg\, y = x$. З шкільного курсу відомо $1 + tg^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}.$ Тому $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + x^2,$ $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$.

Отже, $y' = (arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Аналогічно доводиться $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

§7. Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично

Нехай функція y від аргумента x задана неявно рівністю $F(x,y)=0.$ Для знаходження похідної по x треба продиференціювати тотожність $F(x,y(x))\equiv 0$, використовуючи правило диференціювання складної функції і враховуючи, що y залежить від x. Після цього розв'язати рівняння, яке одержали відносно y'.

Приклад. Знайти y', якщо $x^2+y^2=R^2$.

Розв'язування. Продиференціюємо задане рівняння по x.

$2x+2y\cdot y'=0$, $2y\cdot y'=-2x$, $y'=-\dfrac{x}{y}$.

Функція y від x може бути заданою параметрично у вигляді системи рівнянь: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, де t - параметр.

Якщо t змінюється, то x і y також змінюються і точка (x,y) на площині опише деяку лінію, яка є графіком даної залежності y від x. Якщо ця система рівнянь задає функцію y від x і при цьому функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ диференційовані, причому $\varphi'(t)\neq 0$, то знайдемо y'_x.

Надамо t приросту Δt, тоді x та y одержать прирости відповідно $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t), \Delta y=\psi(t+\Delta t)-\psi(t)$, причому при $\Delta t\to 0, \Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$, тому що задані функції неперервні.

Отже, $$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}=\frac{y'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Тобто, $y'_x=\dfrac{y'_t}{\dot{x}_t}$.

Приклад. Знайти похідну функції y заданої параметрично

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}.$$

Розв'язування. Знаходимо x'_t і y'_t: $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t.$

Тоді $y'_x = -\dfrac{b\cos t}{a\sin t} = -\dfrac{b}{a}ctgt$.

§8. Похідні деяких елементарних функцій

8.1. Похідна логарифмічної функції

Нехай $y = \log_a x \quad (a > 0, \quad a \neq 1)$.Знайдемо її похідну, користуючись означенням. Надамо аргументу x приріст $\Delta x \neq 0$ такий, що $x + \Delta x > 0.$ Знаходимо приріст функції Δy:

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Складемо відношення приростів

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Обчислюємо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$, ввівши заміну $\dfrac{\Delta x}{x} = \alpha$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\alpha \to 0}\frac{1}{x}\frac{1}{\alpha}\log_a(1 + \alpha) =$$

$$= \frac{1}{x}\log_a \lim_{\alpha \to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

При цьому ми використали неперервність логарифмічної функції і другу визначну границю.

При $a = e$ маємо $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

8.2. Похідна від показникової функції

Нехай $y = a^x (a > 0, a \neq 1).$ Знайти y'.

Прологарифмуємо обидві частини цієї рівності при основі *e:* $\ln y = x\ln a$. Продиференціюємо обидві частини одержаної рівності, використавши правило диференціювання неявної функції: $\frac{y'}{y} = \ln a$.

Звідси, $y' = y \ln a = a^x \ln a$.

Якщо $a = e$, то $(e^x)' = e^x$.

8.3. Похідна степеневої функції

Нехай $y = x^{\alpha}$, де α - довільне дійсне число. Функція $y = x^{\alpha}$ визначена для довільних α при $x > 0$. Тому її можна прологарифмувати $\ln y = \alpha \ln x$. Використавши правило диференціювання неявної функції, одержимо $\frac{1}{y} y' = \alpha \frac{1}{x}$.

Звідси, $y' = \alpha y \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha} \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

§9. Таблиця похідних

Враховуючи правила диференціювання , встановлені формули похідних і узагальнивши їх на складні функції, складемо таблицю основних формул диференціювання.

№ /п	Функція	Похідна
I	$y = C$	$y' = 0$
II	$y = x$	$y' = 1$
III	$y = Cu$	$y' = Cu'$
IV	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
V	$y = uv$	$y' = u'v + v'u$
VI	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
VII	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
VIIa)	$y = \frac{1}{u}$	$y' = -\frac{u'}{u^2}$
VIIб)	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

VIII	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
IX	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
X	$y = tgu$	$y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
XI	$y = ctgu$	$y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
XII	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
XIII	$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
XIV	$y = arctgu$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
XV	$y = arcctgu$	$y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
XVI	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
XVIa)	$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
XVII	$y = a^u$	$y' = a^u \ln a \cdot u'$
XVIIa)	$y = e^u$	$y' = e^u u'$

9.1. Приклади на використання таблиці похідних

Знайти похідні деяких функцій:

а) $y = (x^2 - 3x + 1)^4$.

Розв'язування. Використавши формулу (УІІ), одержимо

$$y' = 4(x^2 - 3x + 1)^3 (x^2 - 3x + 1)' = 4(x^2 - 3x + 1)^3 (2x - 3).$$

б) $y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}$.

Розв'язування. Перетворимо даний вираз, використавши дробові показники степеня $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{2}{3}}$. Використавши формули (VII) і (VI), одержимо

$$y'=\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\times$$

$$\times\frac{(x-1)'(x+1)-(x+1)'(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{4}{3(x+1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

в) $y=(x^3-2x+1)\cdot 3^x$.

Розв'язування. Використавши формули (V) і (XVII), маємо

$$y'=(x^3-2x+1)'\cdot 3^x+(x^3-2x+1)\cdot(3^x)'=(3x^2-2)\cdot 3^x+$$

$$(x^3-2x+1)\cdot 3^x\ln 3=3^x(3x^2-2+(x^3-2x+1)\ln 3).$$

г) $y=\ln^3(x^2+x+1).$

Розв'язування. Використавши формули (VII) і (XVIa), одержимо

$$y'=3\ln^2(x^2+x+1)\cdot(\ln(x^2+x+1)'=\frac{3\ln^2(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\times$$

$$\times(x^2+x+1)'=\frac{3\ln^2(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\cdot(2x+1)=$$

$$=\frac{3(2x+1)\ln^2(x^2+x+1)}{x^2+x+1}.$$

д) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}.$

Розв'язування. Використавши формули (IV,V,VII б ,XII), одержимо

$$y'=(x)'\arcsin x+x(\arcsin x)'+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'=$$

$$=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)=\arcsin x+$$

$$+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x.$$

е) $y=(1+x^2)e^{arctgx}$ (Розв'язати самостійно).

Відповідь: $y'=(2x+1)e^{arctgx}$.

§10. Похідні вищих порядків

Похідна функції $y=f(x)$ є також функцією: $y'=f'(x)$.

Ця функція також може мати похідну. Ця нова похідна називається другою похідною функції $y=f(x)$ або похідною функції $f(x)$ другого порядку і позначаться $y''=f''(x)$ або $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Похідна другої похідної, тобто функції $y''=f''(x)$ називається третьою похідною або похідною третього порядку і позначається символом $y'''=f'''(x)$ або $\frac{d^3y}{dx^3}$. Так можна ввести похідні четвертого, п'ятого і взагалі n – го порядку, які позначають $y^{IV}, y^{V}, ..., y^{(n)}$.

Приклад 1. Знайти похідну четвертого порядку функції $y=x^4-5x^3+2x-1$.

Розв'язування. Маємо $y'=4x^3-15x^2+2;$

$$y''=12x^2-30x;$$

$$y'''=24x-30;$$

$$y^{IV}=24.$$

Приклад 2. Знайти похідні n-го порядку від функцій:

а) $y=e^x$, б) $y=\sin x$, в) $y=\cos x$.

Розв'язування.

а) $y'=e^x, y''=e^x, \ldots, y^{(n)}=e^x$;

б) $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2});$

$$y''=-\sin x=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2});$$

$$y'''=-\cos x=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2});$$

$$y^{IV}=\sin x=\sin(x+4\cdot\frac{\pi}{2})$$

і по індукції $y^{(n)}=\sin(x+\frac{\pi}{2}n).$

в) аналогічно знаходимо $y^{(n)} = cos^{(n)} x = cos(x + \frac{\pi}{2} n)$.

§11. Диференціал функції

11.1 Означення диференціала

Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x похідну , то $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ і приріст функції Δy можна подати у вигляді

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x , \qquad (4.3)$$

де α - нескінченно мала величина, яка прямує до нуля разом з Δx .

В формулі (4.3) другий доданок $\alpha\Delta x$ є нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx і тому головну частину суми складає перший доданок $f'(x)\Delta x$, який має назву диференціала функції.

<u>Означення</u>. Головна лінійна частина приросту функції, яка дорівнює добутку похідної на приріст незалежної змінної називається диференціалом функції $f(x)$.

Позначається диференціал символом dy або $df(x)$. Отже,

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (4.4)$$

Приріст Δx незалежної змінної також позначають так : $\Delta x = dx$.

Це пояснюють тим, що для функції $y = x$ диференціал $dy = x' \Delta x = \Delta x$. Тому рівність (4.4) записують $dy = f'(x)dx$.

Приклад1. Знайти диференціал функції $y = 1 + \ln x$.

Розв'язування. $dy = (1 + \ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$.

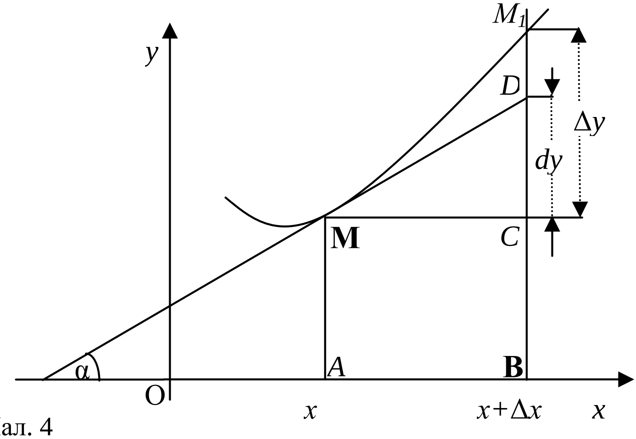
Приклад 2. Знайти диференціал функції $y=sin^3 2x$.

Розв'язування. Обчислимо спочатку похідну y', використавши правило диференціювання складної функції $y' = 3 sin^2 2x(sin 2x)' = 3 sin^2 2x cos 2x(2x)' = 6 sin^2 2x cos 2x.$ Отже, $dy = 6 sin^2 2x cos 2x dx.$

11.2. Геометричний зміст диференціала

Диференціал функції має просте геометричне тлумачення.

Нехай маємо графік функції $y=f(x)$. Візьмемо на цій кривій точку ***M(x,y)*** і проведемо в ній дотичну до кривої.



Мал. 4

Нехай α - кут нахилу дотичної з додатнім напрямом осі ***OX.*** Тоді $tg\alpha = f'(x)$.

Надамо x деякого приросту Δx. На мал. 4 $\Delta x = AB = MC$. Тоді ордината точки ***M*** дістане приріст $\Delta y = CM_1$, а ордината точки ***M***, дотичної - приріст ***СД.*** Враховуючи, що $\angle ДМС = \alpha$**,** маємо ***СД=MC*** $tg\alpha$ або ***СД***= $f'(x)\Delta x = dy$.

З геометричної точки зору диференціал dy функції $y = f(x)$ в даній точці є приріст ординати дотичної до графіка функції в цій точці, коли x дістає приріст Δx.

11.3. Основні властивості диференціала

1). Диференціал сталої дорівнює нулю:

$dc = 0.$

2).Диференціал алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі диференціалів цих функцій:

$d(u \pm v) = du \pm dv$

3)Диференціал добутку двох функцій дорівнює сумі добутків кожної з функцій на диференціал другої функції:

$d(u \cdot v) = udv + vdu.$

4) Диференціал частки знаходиться за формулою

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Доведемо властивість 3):

$$d(u\cdot v)=(uv)'dx=(u'v+v'u)dx=vu'dx+uv'dx=$$
$$=vdu+udv.$$

11.4. Властивість інваріантності форми диференціала

Нехай дана складна функція $y=f(u)$, де $u=\varphi(x)$.Тоді $y_x'=f'(u)u_x'$ а $dy=y_x'dx=f'(u)u_x'dx=f'(u)du$.

Оскільки $dy=d[f(x)]=f'(x)dx$, то можемо зробити висновок, якщо замість незалежної змінної x підставити довільну функцію від x, то форма диференціала не змінюється. Ця властивість носить назву **інваріантності форми диференціала.**

11.5. Застосування диференціалів при наближених обчисленнях

Диференціали використовують при наближених обчисленнях значень функцій, застосовуючи приблизну рівність $\Delta y\approx dy$. В розгорнутому вигляді маємо

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x.$$

Звідки значення функції $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$.

Приклад 1. Обчислити наближено $\ln 1{,}02$ з допомогою диференціалу.

Розв'язування. Число $\ln 1{,}02$ є значення функції $y=\ln x$ при x=1,02. Взявши $x_0=1$, $\Delta x=0{,}02$, маємо $f(x_0)=\ln 1=0$;

$$f'(x)=\frac{1}{x};\quad f'(x_0)=\frac{1}{1}=1.$$

Отже, $\ln 1{,}02=\ln 1+1\cdot 0{,}02=0{,}02$.

Приклад 2. Обчислити $\sqrt[3]{65}$.

Розв'язування. Запишемо $\sqrt[3]{65}$ у вигляді $\sqrt[3]{65}=\sqrt[3]{(64+1)}=4\sqrt[3]{1+\frac{1}{64}}$. Будемо розглядати дане число як значення функції $y=4\sqrt[3]{x}$ при $x=1+\frac{1}{64}$.

Взявши $x_0=1,\Delta x=\frac{1}{64}$ і врахувавши, що

$$y' = \left(4x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}},$$ маємо

$$f(x_0) = f(1) = 4\sqrt[3]{1} = 4, \quad f'(x_0) = f'(1) = \frac{4}{3\sqrt{1^2}} = \frac{4}{3},$$

і тому $\sqrt[3]{65} = 4 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{64} = 4\frac{1}{48} \approx 4{,}0208.$

§12.Основні теореми диференціального числення

Похідна функції є важливим інструментом при дослідженні властивостей функції. Перш ніж займатись дослідженням властивостей функції, доведемо деякі важливі теореми.

12.1. Теорема Ферма

Незважаючи на те, що в час, коли жив відомий французький математик П'єр Ферма (1601-1665), поняття похідної не було відоме, суть того методу, який він застосовував при знаходженні найбільших і найменших значень функції виражає теорема, яку справедливо називають теоремою Ферма.

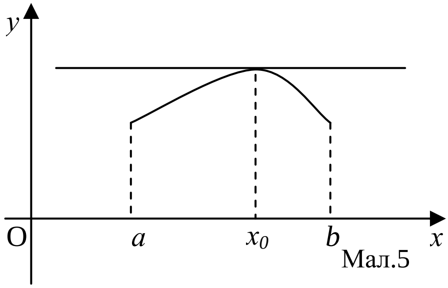
ТЕОРЕМА ФЕРМА. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в інтервалі (a,b) і в деякій внутрішній точці x_0 цього інтервалу приймає найбільше чи найменше значення. Тоді, якщо в цій точці існує похідна, то вона дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Нехай в точці x_0 функція $f(x)$ приймає найбільше значення, тобто $f(x) \le f(x_0)$ для будь-якого $x \in (a,b)$. Це значить, що $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0$ для будь-якої точки $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Тому при $\Delta x > 0$ буде $\frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \le 0,$ а при $\Delta x < 0$ маємо $\frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$ і

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \ge 0.$$

Співставивши обидва співвідношення, одержуємо, що $f'(x_0)=0.$

Аналогічно доводиться, що $f'(x_0)=0$ у випадку, коли функція $f(x)$ в точці x_0 набуває найменшого значення.



Мал.5

Перетворення в нуль похідної функції $f'(x_0)$ геометрично означає, що в цій точці x_0 дотична до графіка функції $y=f(x)$ паралельна осі $0x$ (мал. 5).

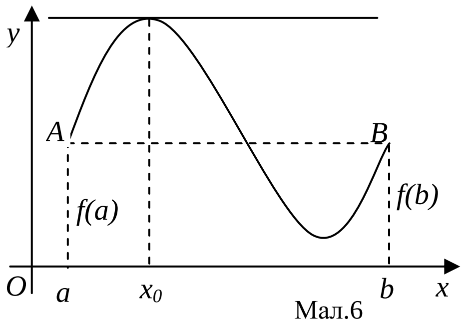
12.2.Теорема Ролля

ТЕОРЕМА. Якщо $f(x)$ функція неперервна на замкнутому проміжку $[a,b]$ і має похідну в кожній внутрішній точці цього проміжку, а на кінцях його приймає однакові значення $f(a)=f(b)$, то тоді принаймні в одній внутрішній точці проміжку її похідна дорівнює нулю.

Доведення. Розглянемо дві можливості.

1.Функція $f(x)$ зберігає стале значення на всьому проміжку $[a,b]$, тобто $f(x)=C$. Тоді $f'(x)=0$ для всіх $x \in [a,b]$ і теорема доведена.

2.Функція $f(x)$ не є сталою. Як неперервна функція на замкненому проміжку, вона досягає свого найбільшого M і свого найменшого m значення за теоремою Вейєрштраса. Принаймні одне з цих значень функція приймає всередині проміжку, бо тільки одне з них може прийматись на кінці проміжку. Припустимо для визначеності, що функція приймає всередині найбільше значення M в точці $x=x_0$, тобто $f(x_0)=M$.



Мал.6

Через те, що x_0 є внутрішньою точкою проміжка (a,b) і функція $f(x)$ за умовою має похідну в ній, то за теоремою Ферма похідна $f'(x_0)=0$.

Доведення аналогічне для

випадку, коли в точці x_0 функція набуває найменшого значення.

Теорема Ролля припускає просте геометричне тлумачення. Якщо крива AB є графік функції $y=f(x)$ на $[a,b]$, $f(a)=f(b)$, то існує точка, в якій дотична до кривої паралельна осі Ox (мал.6).

12.3. Теорема Лагранжа

Цю теорему ще називають теоремою про скінчені прирости.

ТЕОРЕМА. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на замкнутому проміжку $[a,b]$ і має похідну в кожній внутрішній точці цього проміжку, то знайдеться принаймні одна така точка $x=c$ всередині проміжку, що справедлива рівність

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c). \tag{4.5}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $F(x)=f(x)-kx$. Ця функція неперервна, як різниця двох неперервних функцій, а також має похідну у внутрішніх точках проміжку $[a,b]$, бо її мають функції $f(x)$ та kx. Доберемо сталу k так, щоб $F(a)=F(b)$. Тоді $F(x)$ буде задовільняти всі умови теореми Ролля. Маємо $f(a)-ka=f(b)-kb$. Звідки

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ . \tag{4.6}$$

Отже, при такому k буде $F(a)=F(b)$.

Застосуємо до $F(x)$ теорему Ролля . Знайдемо похідну

$F'(x)=f'(x)-k$.

Тоді існує точка $x=c$, $a<c<b$, що $F'(c)=f'(c)-k=0$.

Звідки $k=f'(c)$. Підставивши це значення k у формулу (4.6), одержимо

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

або
$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

Теорема доведена.

Якщо покласти $a=x_0$, $b=x_0+\Delta x$, то рівність (4.5) запишеться у вигляді $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\cdot f'(c)$, де $x_0<c<x_0+\Delta x$.

Це означає, що приріст функції дорівнює приросту аргументу, помноженому на похідну в деякій проміжній точці c, що знаходиться між x_0 і $x_0+\Delta x$. Звідси і друга назва теореми.

З теореми Лагранжа випливає два важливих наслідки.

Наслідок 1. *Якщо похідна* $f'(x)=0$ *на деякому інтервалі* (a,b), *то функція* $f(x)$ *стала на цьому проміжку.*

Доведення. Нехай $f'(x)=0$ на (a,b), а x_1 і x_2 - довільні точки з цього проміжку. За теоремою Лагранжа

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)=0.$$

Звідси, $f(x_2)=f(x_1)$, а це означає, що $f(x)=const.$

Наслідок 2. *Якщо дві функції* $f_1(x)$ *та* $f_2(x)$ *мають однакові похідні на деякому проміжку, то ці функції на ньому відрізняються хіба що на сталу.*

Доведення. Якщо $f_1'(x)=f_2'(x)$ на проміжку (a,b), то функція $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$ на підставі попереднього наслідку 1 дорівнює сталій: $F(x)=c$, тому що $F'(x)=f_1'(x)-f_2'(x)=0.$

Отже, $f_1(x)-f_2(x)=c$ або $f_1(x)=f_2(x)+c.$

12.4. Теорема Коші

ТЕОРЕМА. Якщо дві функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні на замкнутому проміжку $[a,b]$ і мають похідні $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ в кожній внутрішній точці цього проміжку, причому $\varphi'(x)\neq 0$ в кожній внутрішній точці проміжку, то існує принаймні одна така точка *c* з цього проміжку, для якої виконується рівність

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доведення. Побудуємо допоміжну функцію

$F(x)=f(x)+k\varphi(x)$, де k визначимо з умови, що

$F(a)=F(b)$, тобто $f(a)+k\varphi(a)=f(b)+k\varphi(b)$. Звідси,

$$k=-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)},$$

тому що $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$. Це випливає з умови, що $\varphi'(x)\neq 0$ на основі теореми Лагранжа.

Оскільки функція $F(x)$ неперервна як сума неперервних функцій на $[a,b]$ і має похідну в кожній внутрішній точці (a,b), то при цьому k

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi(x)$$

задовільняє всі умови теореми Ролля.

Отже, існує точка $c(a<c<b)$, така що $F'(c)=0$.

Знайдемо $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$.

Тоді $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(c)=0$ або

$\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, що треба було довести.

12.5. Правило Лопіталя

Знаходження границь, які вимагають "розкриття невизначеностей" типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ значно спрощується за допомогою правила Лопіталя.

Правило Лопіталя. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в околі точки x_0, за виключенням, можливо, самої точки x_0, причому в цьому околі $g'(x)\neq 0$ і якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$,

то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Коротко це правило можна сформулювати так:

Для невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ границя відношення двох функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо вона існує.

Доведемо першу частину цього правила.

Доведення. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ на деякому проміжку $[a,b]$ задовольняють умови теореми Коші і у внутрішній точці

x_0 цього проміжку $f(x_0)=0$ і $g(x_0)=0.$ Візьмемо на проміжку $[a,b]$яку-небудь точку x, відмінну від x_0, тобто $x \neq x_0$. Застосувавши теорему Коші, маємо

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

де c - точка, що знаходиться між x_0 та x. Оскільки за припущенням $f(x_0)=0, \quad g(x_0)=0,$ то $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Якщо x прямує до x_0, то і c буде прямувати до x_0, бо c міститься між x_0 і x. Таким чином, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує $\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, які рівні. Звідси випливає, що

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Випадок, що в такий спосіб розкривається невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$ вимагає більш складних міркувань і доводиться в більш повних курсах вищої математики.

Зауваження. Відмітимо, що умова про існування границі похідних є суттєвою.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$ і виконані умови $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sin x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$. Про те застосувати правило Лопіталя при розкритті цієї невизначеності типу $\dfrac{\infty}{\infty}$ неможливо, бо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ не існує.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg(x^2-4)}{x^2-3x+2}$.

Розв'язування. Підстановка $x=2$ в даний вираз дає невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{tg(x^2-4)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(tg(x^2-4))'}{(x^2-3x+2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{\cos^2(x^2-4)\cdot(2x-3)}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot(2\cdot 2-3)}=4.$$

§13. Формула Тейлора

Важливою задачею математичного аналізу є знаходження значень функцій, заданих формулами. Безпосередньо ми можемо обчислити значення функцій, заданих многочленами, чи дробово-раціональними функціями. Так, наприклад, знайдемо значення функцій: а) $y=x^2-5x+4$, при $x=2$, б) $z=\frac{2x-1}{4x^2+3}$, при $x=2$.

Отримаємо: $y(2)=2^2-5\cdot 2+4=2$, $z(2)=\frac{2\cdot 2-1}{4\cdot 2^2+3}=\frac{3}{19}$.

Тоді як значення функцій $y=\sin x, y=\ln x$ знайти безпосередньо не можемо.

В розв'язанні цієї задачі може допомогти формула Тейлора. Встановимо цю формулу для многочленів.

13.1. Формула Тейлора для многочлена

Нехай задано многочлен $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n$ і деяке число a. Покажемо, що даний многочлен можна записати у вигляді:

$$f(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+...+A_n(x-a)^n \qquad (4.7)$$

знайдемо значення постійних $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$. Підставивши $x=a$ в (4.7), одержимо $f(a)=A_0$.

Продиференціюємо (4.7):

$$f'(x)=A_1\cdot 1+A_2\cdot 2(x-a)+...+A_n\cdot n(x-a)^{n-1} \qquad (4.8)$$

Поклавши в (4.8) $x=a$, одержимо $f'(a)=A_1\cdot 1.$ Звідси,

$$A_1=\frac{f'(a)}{1!}.$$

Продиференціюємо (4.8):

$$f''(x)=A_2\cdot 2\cdot 1+A_3\cdot 3\cdot 2(x-a)+...+A_n\cdot n(n-1)(x-a)^{n-2}.$$

Поклавши тут $x=a,$ одержимо $f''(a)=A_2\cdot 2\cdot 1,$ звідки

$$A_2=\frac{f''(a)}{2!}.$$

Продовжуючи такі міркування, одержимо

$$A_3=\frac{f'''(a)}{3!}\text{ і взагалі }A_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Отже, для будь-якого многочлена і будь-якого a справедлива формула

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

яка називається формулою Тейлора для многочлена.

Приклад. Нехай $f(x)=x^3+2x^2-4x-5.$ Розкласти за степенями $x-2.$

Розв’язування:

$$f(x)=x^3+2x^2-4x-5,\ f(2)=2^3+2\cdot 2^2-4\cdot 2-5=3,$$

$$f'(x)=3x^2+4x-4,\ \ f'(2)=3\cdot 2^2+4\cdot 2-4=16,$$

$$f''(x)=6x+4,\ f''(2)=6\cdot 2+4=16,$$

$$f'''(x)=6,\ \ f'''(2)=6.$$

Тому,

$$x^3+2x^2-4x-5=3+16(x-2)+\frac{16}{1\cdot 2}(x-2)^2+\frac{6}{1\cdot 2\cdot 3}(x-2)^3=$$

$$=3+16(x-2)+8(x-2)^2+(x-2)^3.$$

13.2. Формула Тейлора для довільної функції

Нехай $f(x)-$ будь-яка функція, неперервна, що має неперервні похідні всіх порядків на проміжку (α,β). Візьмемо яке- небудь

a з цього проміжку та будь-яке натуральне число n і складемо многочлен

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

який будемо називати **тейлоровським многочленом нашої функції**.

Вважаємо, що $f(x)$ не може дорівнює $T_n(x)$. Проте досить часто різниця між ними виявляється малою. Позначимо її $R_n(x)$. Одержимо $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Доведено, що $R_n(x)$ можна виразити формулою $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$,

де $\bar{x}$ проміжна точка між a і x. Ця формула задає залишковий член $R_n(x)$ в формі Лагранжа. Доведення її виходить за рамки нашого курсу і тому не приводиться.

Отже, для довільної функції маємо формулу

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

яка називається **формулою Тейлора** з залишковим членом у **формі Лагранжа.**

13.3. Формула Маклорена

Взявши у формулі Тейлора $a = 0$, одержимо формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

де $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, де θ число $0 < \theta < 1$.

Ця формула найчастіше використовується для зображення функцій.

Приклад. Знайти формулу Маклорена для функції $f(x) = \sin x$, взявши $n = 8$.

Розв'язування: Обчислимо

$f(x) = \sin x,$ $\qquad\qquad$ $f(0) = 0;$

$$f'(x)=\cos x, \qquad f'(0)=1;$$
$$f''(x)=-\sin x, \qquad f''(0)=0;$$
$$f'''(x)=-\cos x, \qquad f'''(0)=-1;$$
$$f^{IV}(x)=\sin x, \qquad f^{IV}(0)=0.$$

Зауваживши, що значення похідних дальше повторюються, одержимо $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{\cos\overline{x}}{9!}x^9$.

Враховуючи, що величина залишкового члена досить мала, можемо написати наближену формулу

$$\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}.$$

Обчислюючи синус якого-небудь кута, вираженого в градусах, треба спочатку перетворити їх в радіани і тоді підставляти у формулу. Приклади на використання подібних формул буде показано в іншому розділі.

§14.Зростання і спадання функції на проміжку

Означення 1. ***Функція $f(x)$ називається зростаючою на проміжку (a,b), якщо більшому значенню аргументу x відповідає більше значення функції. Тобто, якщо $x_1<x_2$, то $f(x_1)<f(x_2)$.***

Якщо нерівність виконується нестрога, $f(x_1)\le f(x_2)$, то функція називається неспадною.

Означення 2. ***Функція $f(x)$ називається спадною на проміжку (a,b), якщо більшому значенню аргументу x відповідає менше значення функції. Тобто, якщо $x_1<x_2$, то $f(x_1)>f(x_2)$.***

Якщо нерівність виконується нестрого, $f(x_1)\ge f(x_2)$, то функція називається незростаючою.

14.1 Необхідна умова зростання та спадання функцій

ТЕОРЕМА. Якщо диференційована функція на проміжку (a,b) зростає, то її похідна невід'ємна, а якщо спадає, то її похідна недодатна.

Доведення. Якщо функція $y = f(x)$ зростає, то з означення прирости Δx і Δy будуть однакових знаків. Тому відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0.$ А $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geq 0.$

У випадку, коли функція $y = f(x)$ спадає, прирости Δx і Δy різних знаків, їх відношення від'ємне, а похідна $f'(x) \leq 0.$

14.2Достатні умови зростання і спадання функції

ТЕОРЕМА. Якщо неперервна на замкненому проміжку $[a,b]$ функція $f(x)$ має всередині цього проміжку додатну похідну, то функція зростає, а якщо від'ємну, то функція спадає.

Доведення. Нехай $f'(x) > 0$ при $a < x < b.$ Візьмемо дві точки x_1 та x_2 $(x_1 < x_2)$ з проміжку $(a,b),$ і застосуємо до функції $f(x)$ теорему Лагранжа. Одержимо

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c).$$

Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, $f'(c) > 0$ за умовою теореми, то цей добуток також більший нуля, а тому $f(x_2) - f(x_1) > 0,$ або $f(x_2) > f(x_1).$ Це означає, що функція $f(x)$ зростає.

Аналогічно доводиться друга частина теореми.

Проміжки зростання і спадання функцій називаються проміжками монотонності функцій.

Для їх визначення знаходять похідну функції, прирівнюють її до нуля і знаходять корені похідної. Цими коренями розбивають область визначення функції на проміжки. В кожному з проміжків беруть всередині точку і встановлюють знак похідної в них. В тих проміжках, де похідні додатні, функція зростає, а де від'ємні – спадає.

Приклади. Знайти проміжки зростання і спадання функцій:

а) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x;$

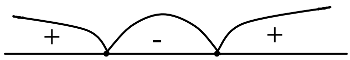
б) $y = \ln x$.

Розв'язування.

а) Область визначення функції – вся числова вісь $(-\infty,\infty)$.

Знаходимо похідну: $y' = x^2 - 2x - 3.$ Шукаємо корені похідної: $x^2 - 2x - 3 = 0$, $D = 4 + 4\cdot 3 = 16$,

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1,\quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$



-1 3 Мал.7

Наносимо ці корені на числову пряму. Область визначення вони поділяють на три проміжки (мал.7).

Знаходимо знаки похідної в кожному з зазначених проміжків, обчисливши значення похідної в деяких точках кожного проміжка:

$$f'(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5 > 0.$$

$$f'(0) = -3 < 0.$$

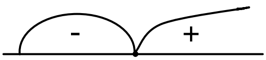
$$f'(4) = 4^2 - 2\cdot 4 - 3 = 16 - 8 - 3 = 5 > 0.$$

Отже, функція зростає на проміжках:
$(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$, спадає на проміжку $(-1;3)$.

б) Область визначення тільки додатні числа $(0;\infty)$.

$$y' = (x)'\ln x - x(\ln x)' = \ln x - x\cdot\frac{1}{x} = \ln x - 1.$$

Знаходимо корені похідної $\ln x - 1 = 0$, $\ln x = 1$, $x = e$.



0 e Мал.8

Наносимо цей корінь на промінь, що зображає область визначення (мал.8). Встановлюємо знаки похідної в цих проміжках:

$$y'(1) = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0,$$

$$y'(e^2) = \ln e^2 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0.$$

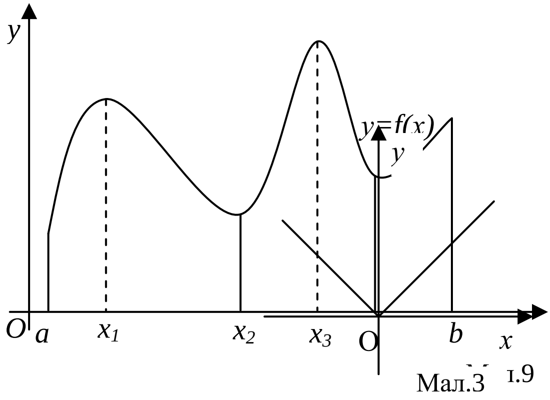
Отже, функція спадає на проміжку $(0;e)$, зростає на проміжку $(e;\infty)$.

§15. Екстремум функції

15.1. Поняття екстремуму

Будемо розглядати неперервні функції, які не змінюються монотонно, тобто такі, які на окремих проміжках зростають, а на інших спадають. Графіки таких функцій схематично можна зобразити малюнком 9.

Тоді існують такі значення функції $f(x)$, які в порівнянні з іншими сусідніми значеннями є найбільшими чи найменшими. Такі значення називають відповідно максимумами і мінімумами. На малюнку 9 $f(x_1)$, $f(x_3)$ – максимуми, $f(x_2)$, $f(x_4)$ – мінімуми.



Мал.3 ı.9

Означення 1. ***Максимумом функції $f(x)$ називається таке значення $f(x_0)$, яке не менше всіх значень функції в точках достатньо близьких до x_0. При цьому виконується нерівність $f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$ для будь-яких достатньо малих Δx.***

Точка x_0, в якій функція $f(x)$ досягає максимуму $f(x_0)$, називається точкою максимуму.

Означення 2. ***Мінімумом функції $f(x)$ називається таке значення $f(x_0)$, яке не більше всіх значень функції в точках достатньо близьких до x_0. При цьому маємо $f(x_0+\Delta x)\ge f(x_0)$ для будь-яких достатньо малих Δx.***

Точка x_0, в якій функція $f(x)$ досягає мінімуму $f(x_0)$, називається точкою мінімуму.

Максимуми і мінімуми разом називають екстремумами. Функція може мати всередині інтервалу (a,b) декілька екстремумів.

15.2 Необхідні умови екстремуму

Для відшукання екстремумів розглянемо спочатку необхідні умови екстремуму.

ТЕОРЕМА. *(необхідна умова екстремуму).*

Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, або не існує.

Доведення. Нехай в точці x_0 функція $f(x)$ має похідну і досягає максимуму. Це означає, що при достатньо малому Δx

маємо $f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$. З цього випливає, що відношення $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0,$ якщо $\Delta x<0$ і $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0,$ якщо $\Delta x>0$. Переходячи в нерівностях до границі, дістанемо

$f'(x_0)\ge 0$ і $f'(x_0)\le 0$.

А це може одночасно виконуватись тільки при $f'(x_0)=0$.

Аналогічно доводиться перша частина теореми у випадку, коли функція $f(x)$ досягає в точці x_0 мінімуму.

Але неперервна функція $f(x)$ може мати екстремум в точках, в яких похідна не існує. Наприклад, функція $y=|x|$ в точці $x=0$ не диференційована, але досягає в ній мінімуму, що видно з графіка (мал.3).

Такі точки називають кутовими. Але ці умови не є достатніми. Похідна може дорівнювати нулю не тільки в точках екстремуму. Так похідна функції $y=x^3$ є $y'=3x^2$. В точці $x=0$ $y'=0,$ але в цій точці функція не досягає екстремального значення.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує називають стаціонарними або критичними точками першого роду.

15.3. Достатні умови екстремуму

ТЕОРЕМА ***(перше правило)*. Якщо похідна функції $f'(x)$ при переході через критичну точку x_0 зліва направо змінює знак з “+”на “-“, то $f(x)$ має максимум в точці x_0, якщо зміна знаку відбувається з “-“ на “+”, то функція має мінімум в цій точці. Відсутність зміни знаку вказує на відсутність екстремуму.**

Доведення. Якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку $x=x_0$ змінює знак з **“+”**на **“-“,** то це означає, що при досить малому Δx похідна $f'(x)$ додатня на проміжку $(x_0-\Delta x, x_0)$ і від’ємна на проміжку $(x_0, x_0+\Delta x)$. Отже, функція $f(x)$ зростає на проміжку $(x_0-\Delta x, x_0)$ і спадає на проміжку $(x_0, x_0+\Delta x)$, тобто в точці x_0 досягає максимуму.

Аналогічно доводиться твердження теореми відносно мінімуму функції.

ТЕОРЕМА.(*друге правило*). **Якщо в точці x_0 перша похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ дорівнює нулю, а її друга похідна $f''(x)$ неперервна в околі цієї точки і $f''(x)\neq 0$, то функція $f(x)$ має максимум в точці x_0, коли $f''(x_0)<0$ і мінімум, коли $f''(x_0)>0$.**

Доведення. Нехай $f'(x_0)=0$ і $f''(x_0)>0$. Тоді внаслідок неперервності $f''(x)$ вона додатня в малому інтервалі $(x_0-\Delta x, x_0+\Delta x)$. Це означає, що $f'(x)$, для якої $f''(x)$ є похідною, зростає в цьому інтервалі. Оскільки $f'(x_0)=0$, то на проміжку $(x_0-\Delta x, x_0)$ похідна $f'(x)<0$, а на проміжку $(x_0, x_0+\Delta x)$ похідна $f'(x)>0$.

Тому $f(x)$ в інтервалі $(x_0-\Delta x, x_0)$ спадає, а в інтервалі $(x_0, x_0+\Delta x)$ зростає. Значить, в точці x_0 функція $f(x)$ має мінімум.

Аналогічно доводиться достатність умови існування максимуму.

Зауваження. Треба мати на увазі, що другим правилом не можна користуватися у випадку,коли критична точка x_0 одержана від того, що в ній похідна не існує, а також, якщо $f''(x_0)=0$. Тоді користуються першим правилом.

Приклад. Знайти максимум і мінімум функції $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

*Розв'язування.*Дана функція визначена на проміжку $(-\infty,\infty)$. Знаходимо похідну і прирівнюємо її до нуля.

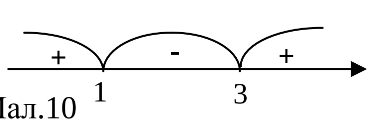
$$y'=x^2-4x+3,$$

$$x^2-4x+3=0.$$

Корені даного рівняння $x_1=1, x_2=3$.

Спочатку використаємо перше правило $y'=(x-1)(x-3)$.

Область визначення функції критичними точками ділиться на проміжки: $(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,\infty)$ (мал.10). Знайдемо знаки похідної в кожному з цих проміжків, підставивши конкретні числа з них в похідну.



Мал.10

Наприклад ,

$y'(0) = (0-1)(0-3) = 3 > 0,$

$y'(2) = (2-1)(2-3) = -1 < 0,$ Отже, в точці $x = 1 -$ макси-

$y'(4) = (4-1)(4-3) = 3 > 0.$

мум.

$$y_{max} = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2\frac{1}{3}.$$

В точці $x = 3 -$ мінімум. $y_{min} = \frac{1}{3} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 1.$

При застосуванні другого правила знаходимо другу похідну $y'' = 2x - 4.$

Підставляємо значення $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$ в другу похідну:

$$y''(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0, \quad y''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0.$$

В точці $x_1 = 1 -$ максимум , в точці $x_2 = 3 -$ мінімум.

§16. Найменше та найбільше значення функції на відрізку

За теоремою Вейєрштраса неперервна функція на замкнутому відрізку $[a,b]$ досягає свого найбільшого і найменшого значення. Ці значення функція може досягти на одному з кінців відрізка або всередині відрізка. Тому задачу знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку $[a,b]$ розв'язують так:

1). Знаходять похідну, і прирівнявши її до нуля, знаходять критичні точки першого роду.

2). Обчислюють значення функції в усіх критичних точках, що належать проміжку $[a,b]$ і значення функції на кінцях відрізка.

3). Серед цих значень вибирають найбільше і найменше значення.

Зауваження. Якщо всередині проміжку функція має тільки одну критичну точку і досягає в ній максимуму, то він буде найбільшим значенням, а якщо досягає в ній мінімуму, то він буде найменшим значенням.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ на проміжку $[-2,1]$.

Розв'язування. Знаходимо похідну $y' = 6x^2 - 6x - 12.$

Прирівнявши похідну до нуля, знаходимо критичні точки першого роду: $6x^2-6x-12=0$,

$$x^2-x-2=0,$$

$$x_1=-1;\,x_2=2.$$

Оскільки точка $x_2=2$ не входить в даний проміжок, її до уваги не беремо. Обчислюємо значення функції:

$$y(-2)=2(-2)^3-3(-2)^2-12(-2)+3=-16-12+24+3=-1;$$

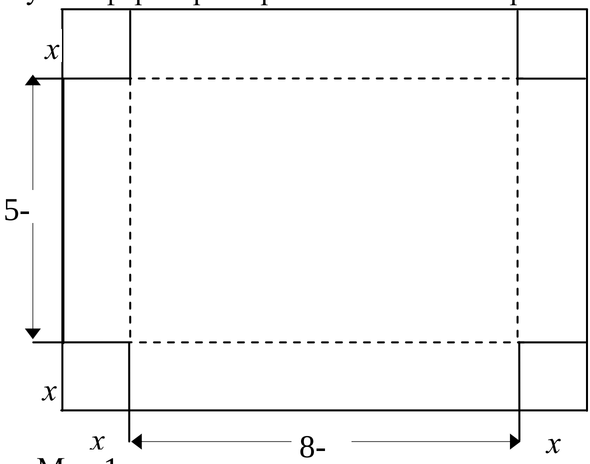
$$y(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2-12(-1)+3=-2-3+12+3=10;$$

$$y(1)=2\cdot 1^3-3\cdot 1^2-12\cdot 1+3=2-3-12+3=-10.$$

Отже, найбільше значення функції $y=10$ в точці $x=-1,$ а найменше значення $y=-10$ в точці $x=1.$

§17. Приклади задач оптимізації з економічним змістом

Задача 1. На підприємстві з відходів бляшаних листів прямокутної форми розмірами $8дм\times 5дм$ вирішили виготовляти відкриті зверху ящики найбільшого об’єму, вирізавши по кутах рівні квадратики і загнувши бляху, щоб отримати бічні стінки. Якої довжини мають бути сторони вирізаних квадратів?



Мал.1

Розв’язування. Нехай x сторони вирізаних квадратів (мал.11).

Тоді розміри ящика будуть $8-2x,$ $5-2x$ і $x.$ Об’єм ящика

$V=x(5-2x)(8-2x)$. Знайдемо найбільше значення цієї функції при умові , що $0<x<2{,}5$.$V=4x^3-26x^2+40x$. Обчислимо похідну $V'=12x^2-52x+40$.

Прирівнявши її до нуля, знайдемо критичні точки першого роду:

$$12x^2-52x+40=0, \quad 3x^2-13x+10=0,$$

$$D=13^2-4\cdot 3\cdot 10=169-120=49,$$

$$x_1=\frac{13-7}{6}=1, \quad x_2=\frac{13+7}{6}=\frac{10}{3}.$$

Оскільки точка $x_2=\dfrac{10}{3}>2{,}5$ не входить у вказаний проміжок, то вона відкидається.

Знайдемо другу похідну V''

$V''=24x-52;\ V''(1)=24-52=-28<0$.

Отже, в точці $x=1$ функція V досягає максимуму. При $x=0$ і $x=2{,}5$, $V=0$.

Відповідь: $V_{найб.}$ досягається при $x=1(дм)$.

Задача 2. Треба виготовити відкритий циліндричний бак об’єму V . Матеріал, з якого виготовляють дно бака коштує p_1 гривень за $м^2$, а вартість матеріалу бокової поверхні - p_2 гривень за $м^2$. При якому співвідношенні радіуса дна до висоти витрати на матеріал будуть найменшими?

Розв’язування. Нехай r радіус основи, а h висота бака. Тоді об’єм бака $V=\pi r^2h$, а витрати на матеріал $Z=\pi r^2p_1+2\pi rhp_2$.

Виразимо з формули об’єму $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$ і підставимо у вираз для Z. Одержимо функцію однієї змінної

$Z=\pi r^2p_1+\dfrac{2\pi rVp_2}{\pi r^2}=\pi r^2p_1+\dfrac{2Vp_2}{r}$. Знайдемо похідну

$$Z'=2\pi rp_1-\frac{2Vp_2}{r^2}.$$

Знаходимо критичні точки:

$$2\pi r p_1 - \frac{2Vp_2}{r^2} = 0,\ \pi r^3 p_1 = Vp_2;\ \ r^3 = \frac{Vp_2}{\pi p_1}; r = \sqrt[3]{\frac{Vp_2}{\pi p_1}},$$

друга точка $r = 0$ не входить в область визначення функції.

Знайдемо $Z'' = 2\pi p_1 + \frac{2Vp_2 \cdot 2r}{r^4} = 2\pi p_1 + \frac{4Vp_2}{r^3};$

$$Z''(r) = 2\pi p_1 + \frac{4Vp_2}{\frac{Vp_2}{\pi p_1}} = 2\pi p_1 + 4\pi p_1 = 6\pi p_1 > 0.$$

Отже, в точці $r = \sqrt[3]{\frac{Vp_2}{\pi p_1}}$ функція витрат Z має мінімум.

Знаходимо h: $h = V : \pi\sqrt[3]{\left(\frac{Vp_2}{\pi p_1}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-2}}$.

Знайдемо відношення $\frac{r}{h}$: $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}}{\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-2}}} = \frac{p_2}{p_1}$.

Отже, радіус дна до висоти бака повинен відноситись як ціна матеріалу дна до ціни матеріалу бокової поверхні.

Задача 3. Фірма вирішила випускати нові радіоприймачі. Економічним підрозділом фірми встановлено, що при випуску x приймачів щоквартально затрати будуть $V(x) = 90000 + 30x$ (гривень), а кількість проданих приймачів в залежності від ціни p (гривень) за один приймач становитиме $x = 9000 - 30p$. При якому випуску фірма матиме найбільший дохід і прибуток? Який найбільший дохід і прибуток, і при якій ціні, якщо фірма щоквартально може випускати до 5000 приймачів?

Розв'язування. Знайдемо ціну p:

$30p = 9000 - x;\ p = 300 - \frac{x}{30}.$ Тоді дохід від реалізації

радіоприймачів $D(x) = px = (300 - \frac{x}{30})x = 300x - \frac{x^2}{30}.$

Знайдемо маржинальний дохід і, прирівнявши його до нуля, знайдемо критичні точки:

$$D'(x) = 300 - \frac{2x}{30} = 300 - \frac{x}{15}; \;\; 300 - \frac{x}{15} = 0; \;\; x = 4500 .$$

Оскільки $D''(x) = -\frac{1}{15} < 0,$ а точка $x = 4500$ єдина входить в даний проміжок $[0;5000]$, то в цій точці $D(x)$ досягає найбільшого значення. $D_{max} = D(4500) = 300 \cdot 4500 - \frac{(4500)^2}{30} = 675000$ (гривень).

Досягається це значення доходу при ціні на приймач

$p = 300 - \frac{4500}{30} = 150$ (гривень).

Прибуток $P(x)$ шукаємо як різницю між доходом $D(x)$ і витратами $V(x)$: $P(x) = D(x) - V(x).$

$$P(x) = 300x - \frac{x^2}{30} - 30x - 90000 = 270x - \frac{x^2}{30} - 90000.$$

Знаходимо маржинальний прибуток і, прирівнявши його до нуля, критичні точки:

$$P'(x) = 270 - \frac{2x}{30} = 270 - \frac{x}{15}; \;\; 270 - \frac{x}{15} = 0; \;\; x = 4050 .$$

Оскільки $P''(x) = -\frac{1}{15}$, а точка $x = 4050$ єдина входить в проміжок $[0;5000]$, то в цій точці $P(x)$ досягає найбільшого значення.

$P_{max} = P(4050) = 270 \cdot 4050 - \frac{(4050)^2}{30} - 90000 = 456750$ (гривень).

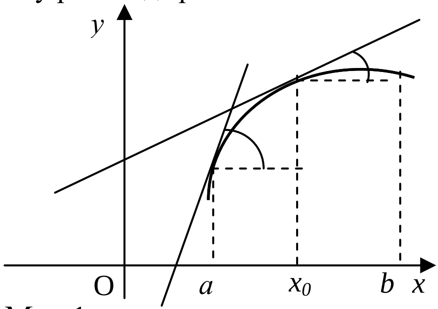
З формули прибутку видно, що максимальний прибуток досягається, якщо $D'(x) = V'(x)$, тобто коли маржинальні витрати дорівнюють маржинальному доходу.

Максимальний прибуток досягається при випуску і продажі 4050 приймачів по ціні $p = 300 - \frac{4050}{30} = 165$ (гривень).

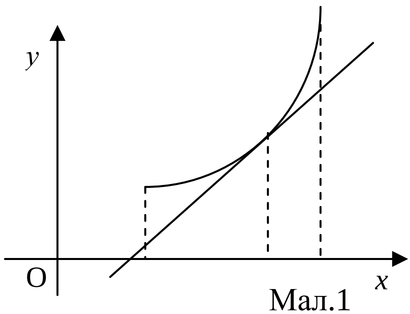
Отже, максимальна виручка (дохід) ***675000грн.*** досягається при випуску і реалізації ***4500*** радіоприймачів по ціні ***150 грн***. за приймач, а максимальний прибуток ***456750 грн***. при випуску і реалізації ***4050*** радіоприймачів по ціні ***165 грн.*** за приймач.

§18.Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину

При дослідженні функцій з метою побудови їх графіків важливу роль відіграють такі поняття як опуклість і вгнутість кривих.



Мал.1



Мал.1

<u>Означення 1</u>. Крива $y = f(x)$ ***називається опуклою в точці*** x_0***, якщо в околі цієї точки крива знаходиться під дотичною до кривої, проведеної в цій точці (*****мал.12*****).***

<u>Означення 2.</u> Крива $y = f(x)$ ***називається вгнутою в точці*** x_0***, якщо в околі цієї точки крива знаходиться над дотичною до кривої, проведеної в цій точці (мал 13).***

<u>Означення 3.</u> Крива $y = f(x)$ ***називається опуклою (вгнутою) на проміжку*** (a,b)***, якщо вона опукла (вгнута) в кожній точці цього проміжку.***

Для встановлення проміжків, на яких графік функції $y = f(x)$ опуклий, а на яких вгнутий, вкажемо теорему, яка дає достатні умови опуклості і вгнутості кривих на проміжку.

ТЕОРЕМА. Якщо на проміжку (a,b) **друга похідна функції** $y = f(x)$ **від'ємна, то її графік опуклий на цьому проміжку, якщо** $f''(x)$ **додатня на** (a,b)**, то графік** $y = f(x)$ **вгнутий.**

Не приводячи строгого доведення, приведемо геометричні міркування, які пояснюють теорему.

Якщо скрізь на проміжку (a,b) $f''(x)<0$, то це означає, що $f'(x)$, як функція для якої $f''(x)$ є похідною, буде спадною. Отже, спадає на розглядуваному проміжку кутовий коефіцієнт дотичної $tg\alpha$ до кривої і спадає сам кут α, утворюваний дотичною з додатним напрямом осі Ox (мал12).

Очевидно крива на проміжку (a,b) розташована під дотичною. Якщо $f''(x)>0$, то крива буде угнутою.

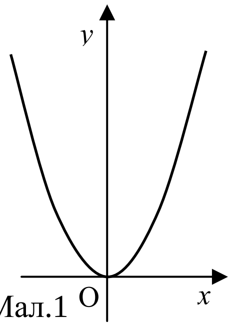
<u>Означення 4.</u> Точка, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої від вгнутої чи навпаки, називається точкою перегину.

Необхідні умови існування точки перегину дає теорема.

ТЕОРЕМА. Якщо x_0 - точка перегину неперервної функції $y=f(x)$, то друга похідна її $f''(x)$ в цій точці дорівнює нулю або не існує.

Точки, в яких $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує називають критичними точками другого роду.

Проте умови теореми не є достатніми. Так для функції $y=x^4$ друга похідна $y''=12x^2$ дорівнює нулю при $x=0$. Проте графік її вгнутий в цій точці (мал.14).



Мал.1

◙ ***Достатні умови існування точки перегину.***

ТЕОРЕМА. Якщо друга похідна $f''(x)$ в точці x_0 дорівнює нулю і міняє знак при переході через цю точку, то точка з абсцисою x_0 є точкою перегину кривої $y=f(x)$.

Доведення. Припустимо, що в точці M з абсцисою $x=x_0$, друга похідна $f''(x)=0$ і при переході через неї зліва на право змінює знак з мінуса на плюс. Тоді зліва від M крива опукла $(f''(x)<0)$, а справа крива вгнута $(f''(x)>0)$. Отже, в точці M крива змінює опуклість на вгнутість, і тому точка M є точкою перегину.

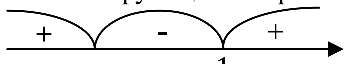
Приклад. Знайти точки перегину і визначити проміжки опуклості та вгнутості кривої $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ (крива Гаусса).

Знаходимо похідні: $y'=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$,

$$y''=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

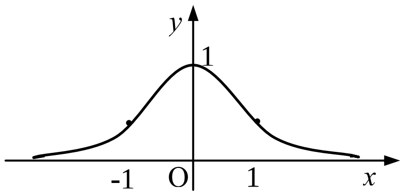
Прирівнюємо другу похідну до нуля і знаходимо критичні точки другого роду: $(x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}=0, x^2-1=0$, $x_1=-1,\ x_2=1.$

Ці точки розбивають область визначення функції на проміжки: $(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)$ (мал.15). Знаходимо знаки другої похідної в цих проміжках.



Мал.1

Отже, точки $x_1=-1$, $x_2=1$ є точками перегину. На проміжку $(-1,1)-$ крива опукла, на проміжках $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ - крива вгнута (мал.16).



Мал.16

§19. Асимптоти графіка функції

При дослідженні функцій часто буває, що графіки їх як завгодно близько наближаються до цієї чи іншої прямої. З такими лініями ви зустрічалися при вивченні гіперболи.

<u>Означення 1.</u> Пряму лінію називають асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо відстань точки M графіка від цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки M в нескінченість.

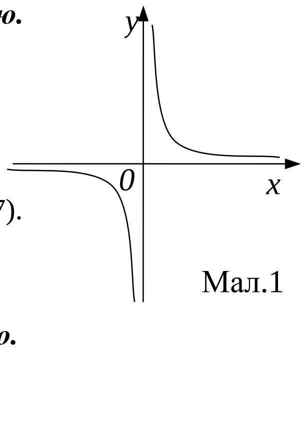
Асимптоти бувають вертикальними, похилими і горизонтальними.Вертикальні асимптоти існують тоді, коли функція має розриви другого роду.

<u>Означення 2.</u> Якщо в точці $x=x_0$ хоч одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$, то пряма $x=x_0$ є вертикальною асимптотою.

Наприклад, для функції $y=\frac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0-0} y=\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty$ і $\lim\limits_{x\to 0+0} y=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=\infty.$

Отже, $x=0$ - вертикальна асимптота (мал.17).



Мал.1

<u>Означення3.</u> Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=b$, то пряма $y=b$ називається горизонтальною асимптотою.

Оскільки для функції $y=\frac{1}{x}$ маємо $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$ то пряма $y=0$ - горизонтальна асимптота.

Рівняння похилої асимптоти шукають у вигляді прямої з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b.$ Відстань точки $M(x,y)$ графіка функції $y=f(x)$ приблизно можна виразити через різницю ординат при одному і тому значенні x : $d=f(x)-(kx+b).$

За означенням асимптоти $d\to 0$ при $x\to\pm\infty,$ тобто

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0\,. \tag{4.9}$$

Розділивши цю рівність на x ,маємо

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x}=0,$ то

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\,. \tag{4.10}$$

Якщо границя (4.10) не існує, то похилої асимптоти не буде. Якщо k скінчене число, то з (4.9) знайдемо

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Таким чином, одержимо рівняння похилої асимптоти $y=kx+b.$ При $k=0$ маємо рівняння горизонтальної асимптоти $y=b.$

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції

$$y=\frac{x^2+2x-3}{x}.$$

Розв'язування. Область визначення функції $(-\infty;0)\cup(0;\infty).$

$$\lim_{x\to 0-0} y=\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+2x-3}{x}=\lim_{x\to 0-0}\left[x+2-\frac{3}{x}\right]=+\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 0+0} y=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+2x-3}{x}=\lim_{x\to 0+0}\left(x+2-\frac{3}{x}\right)=-\infty.$$

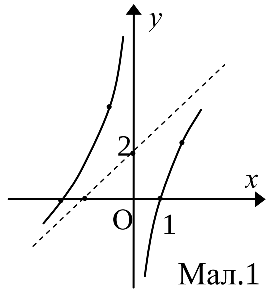
Отже, $x=0$ - вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-3}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=$$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)=2.$ Отже, $y=x+2$ - похила асимптота (мал.18).



Мал.1

Горизонтальних асимптот нема, оскільки

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x+2-\frac{3}{x}\right)=\infty.$$

§20.Загальна схема дослідження функції і побудова її графіка

Графік заданої функції можна будувати по довільно взятих точках. При такому способі можна не виявити всіх особливостей її графіка.

Провівши попередньо дослідження, ми шукаємо характерні для даного графіка точки і тим спрощуємо розв’язок задачі про побудову графіка.

При дослідженні функції і побудові її графіка доцільно дотримуватися такої схеми:

Перший етап (використання виду заданої функції).

1). Знаходимо область визначення функції, точки розриву;

2). Досліджуємо функцію на парність чи непарність, періодичність;

3). Знаходимо асимптоти графіка функції;

4). Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат.

Другий етап (використання похідної першого порядку).

5). Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання і спадання, точки екстремумів та екстремальні значення функції.

Третій етап (використання похідної другого порядку).

6). Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості і вгнутості, точки перегину та значення функції в цих точках.

Четвертий етап. Складемо таблицю результатів дослідження.

Наносимо отримані точки, асимптоти на координатну площину і будуємо графік функції з урахуванням точок розриву, інтервалів зростання та спадання функцій, проміжків опуклості та вгнутості графіка функцій.

Приклад 1. Дослідити функцію $y=x^3-3x^2$ та побудувати її графік.

Розв'язування.

1) Область визначення функції : вся числова вісь $(-\infty,\infty)$

2). Функція ні парна ні непарна, оскільки

$y(-x)=-x^3-3x^2$, а тому $y(-x)\neq y(x)\neq -y(x).$

Функція не періодична.

3). Вертикальних асимптот графік немає, бо нема точок розриву.

Дослідимо чи графік має похилі асимптоти $y=kx+b:$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}(x^2-3x)=\infty.$$

Похилих асимптот графік також немає.

4). Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат: при $x=0, y=0;$ тобто точка $O(0;0);$

при $y=0$ $x^3-3x^2=0\Rightarrow x^2(x-3)=0\Rightarrow x=0$ і $x=3,$

тобто точка $M(3;0).$

Другий етап.

5). Знаходимо похідну першого порядку:

$y'=3x^2-6x=3x(x-2).$

Знаходимо критичні точки першого роду:

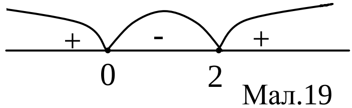
$3x(x-2)=0, x_1=0, x_2=2.$

Критичні точки розбивають область визначення на проміжки $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,\infty)$ (мал.19). Знаходимо знаки похідної в цих проміжках:

$y'(3)=3\cdot 3(3-2)=9>0,$

$y'(1)=3\cdot 1(1-2)=-3<0,$

$y'(-1)=3(-1)(-1-2)=9>0.$



Мал.19

Отже, функція зростає на проміжках $(-\infty,0)\cup(2;\infty)$, спадає на проміжку $(0;2)$.

В точці $x=0$ функція має максимум, $y_{max}=y(0)=0.$

В точці $x=2$ функція має мінімум, $y_{min}=y(2)=2^3-3\cdot 2^2=8-12=-4.$

Третій етап.

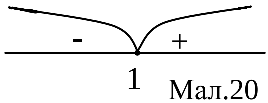
6). Знаходимо похідну другого порядку:

$y''=6x-6=6(x-1).$ Знаходимо критичні точки другого роду: $6(x-1)=0,\ \ x=1.$ Критична точка $x=1$ розбиває область визначення на проміжки: $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ (мал.20).

Знаходимо знаки другої похідної в цих проміжках:

$y''(0)=6(0-1)=-6<0,$

$y''(2)=6(2-1)=6>0.$



Мал.20

Отже, графік функції опуклий на проміжку $(-\infty;1)$, вгнутий на проміжку $(1;\infty)$. Точка $x=1$ є точкою перегину, $y_{пер.}=y(1)=1^3-3\cdot 1^2=1-3=-2.$

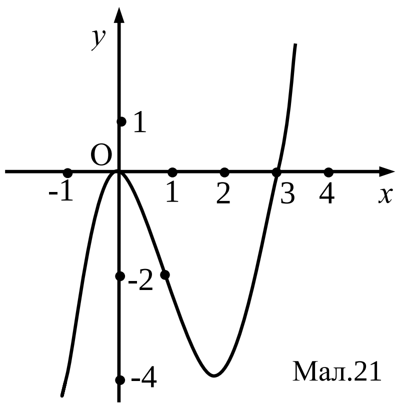
7). Складемо таблицю, де занесемо всі результати дослідження

x	(-∞;0)	0	(0;1)	1	(1;2)	2	(2:∞)
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-6	-	0	+	6	+
y	↗ ∩	0 максимум	↘ ∩	-2 перегин	↘ ∪	-4 мінімум	↗ ∪

Знайдемо ще додатково

$y(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2=-4.$

Наносимо всі характерні точки на координатну площину і будуємо графік (мал.21).



Мал.21

Приклад 2. Дослідити функцію $y = \frac{2x-6}{(x-2)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язування. Перший етап.

1). Область визначення функції $(-\infty;2)\cup(2;\infty)$. Функція має розрив в точці $x=2$.

2). Функція ні парна ні непарна, оскільки

$y(-x)=\frac{-2x-6}{(-x-2)^2}=-\frac{2x+6}{(x+2)^2}$ і $y(-x)\neq y(x)\neq -y(x)$.

Функція неперіодична.

3) Оскільки в точці розриву $x=2$,

$\lim\limits_{x\to 2-0} y=\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{2x-6}{(x-2)^2}=-\infty$, а

$\lim\limits_{x\to 2+0} y=\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{2x-6}{(x-2)^2}=+\infty$, то пряма $x=2$ - вертикальна асимптота.

Дослідимо чи графік має похилі асимптоти $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-6}{x(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{6}{x}}{(x-2)^2}=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-6}{(x-2)^2}=0.$$

Отже, $y=0$ - горизонтальна асимптота.

4). Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат: при $x=0, y=\frac{-6}{(-2)^2}=-\frac{3}{2}$, тобто точка $M_0(0;-\frac{3}{2})$; при $y=0$,

$\frac{2x-6}{(x-2)^2}=0, x=3$, тобто точка $M_1(3;0)$.

Переходимо до другого етапу:

5). Знайдемо похідну першого порядку:

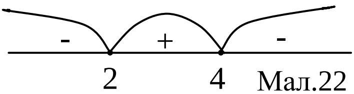
$$y'=\frac{(2x-6)'(x-2)^2-((x-2)^2)'(2x-6)}{(x-2)^4}=$$

$$=\frac{2(x-2)^2-2(x-2)(2x-6)}{(x-2)^4}=\frac{2(x-2)-2(2x-6)}{(x-2)^3}=$$

$$=\frac{2x-4-4x+12}{(x-2)^3}=\frac{8-2x}{(x-2)^3}.$$

Знаходимо критичні точки першого роду:

$$\frac{8-2x}{(x-2)^3}=0;8-2x=0;x=4.$$



Мал.22

Враховуючи точку $x=2$, де похідна не існує, розіб'ємо область визначення на проміжки $(-\infty,2)\cup(2;4)\cup(4;8)$ (мал.22) і встановимо знаки першої похідної в цих проміжках:

$$y'(1)=\frac{8-2}{(1-2)^3}=\frac{6}{-1}=-6<0;$$

$$y'(3)=\frac{8-2\cdot 3}{(3-2)^3}>0; \qquad y'(5)=\frac{8-2\cdot 5}{(5-2)^3}=-\frac{2}{27}<0.$$

Отже, функція зростає на проміжку $(2;4)$, спадає на проміжках $(-\infty;2)\cup(4;\infty)$. В точці $x=4$ функція має максимум,

$$y_{max}=y(4)=\frac{2\cdot 4-6}{(4-2)^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$ Маємо точку $M_2(4;\frac{1}{2})$.

Переходимо до третього етапу:

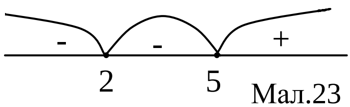
6). Знаходимо другу похідну:

$$y''=\frac{(8-2x)'(x-2)^3-((x-2)^3)'(8-2x)}{(x-2)^6}=$$

$$=\frac{-2(x-2)^3-3(x-2)^2(8-2x)}{(x-2)^6}=\frac{-2(x-2)-3(8-2x)}{(x-2)^4}=$$

$$=\frac{-2x+4-24+6x}{(x-2)^4}=\frac{4x-20}{(x-2)^4}.$$

Знайдемо критичні точки другого роду:



Мал.23

$$\frac{4x-20}{(x-2)^4}=0; \quad 4x-20=0; \quad x=5.$$

Враховуючи точку $x=2$, де y'' не існує, розбиваємо область визначення на проміжки: $(-\infty;2)\cup(2;5)\cup(5;\infty)$ (мал.23).

Встановимо знаки другої похідної в цих проміжках:

$$y''(0)=\frac{-20}{(-2)^4}=-\frac{20}{16}=-\frac{5}{4}<0,\quad y''(3)=\frac{4\cdot 3-20}{(3-2)^4}=-\frac{8}{1}=-8<0,$$

$$y''(6)=\frac{4\cdot 6-20}{(6-2)^4}=\frac{4}{4^4}=\frac{1}{64}>0.$$

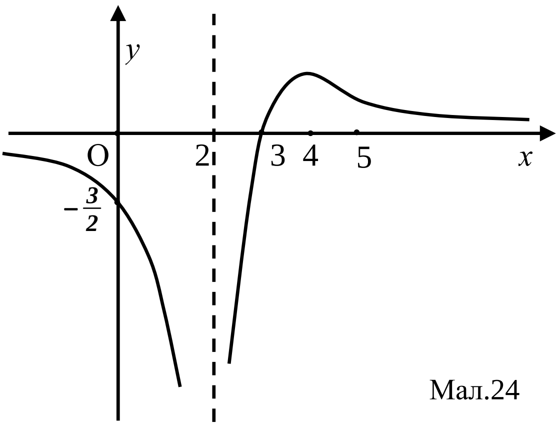
Отже, графік функції опуклий на проміжках: $(-\infty;2)\cup(2;5)$, вгнутий на проміжку $(5;\infty)$. Точка $x=5$ є точкою перегину,

$$y_{пер.}=y(5)=\frac{2\cdot 5-6}{(5-2)^2}=\frac{4}{9}.$$ Маємо точку $M_3(5;\frac{4}{9})$.

7). Складемо таблицю, де занесемо результати дослідження

	(-∞;0)	0	(0;2)	2	(2;3)	3	(3;4)	4	(4;5)	5	(5:∞)
y'	-	-	-	не існує	+	+	+	0	-	-	-
y''	-	-	-	не існує	-	-	-	-	-	0	+
y	↘ ∩	$-\frac{3}{2}$	↘ ∩	не існує	↗ ∩	0	↗ ∩	0,5	↘ ∩	$\frac{4}{9}$	↘ ∪
висновок	Функція Спадає, Графік Опук-лий	точка **перетину** з віссю Оy	Функція спадає, графік опуклий	вертикальна асимптота	Фунція Зростає, Графік Опуклий	точка **перетину** з віссю Ох	Функція зростає, графік опуклий	Точка перегину	Функція спадає графік опуклий	максимум	Функція спадає, графік опуклий

Будуємо графік (мал.24).



Мал.24

§21. Еластичність функції

В економічних дослідженнях прирости тих чи інших показників, що характеризують економічні процеси найчастіше виражають у відсотках до базових значень. Тому і зміну величин, які зв'язані з ними функціональною залежністю також виражають у відсотках. Для цього використовують поняття еластичності функції, яке виражається через похідну функції.

21.1. Означення і властивості еластичності функцій

Нехай задана функція $y = f(x)$. Якщо аргумент x одержав приріст Δx і при цьому функція y одержала приріст Δy, то $\frac{\Delta x}{x}$ називають відносним приростом аргумента, а $\frac{\Delta y}{y}$ - відносним приростом функції.

<u>Означення</u>. Границя відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргумента при умові, що приріст аргумента прямує до нуля, якщо існує, називається еластичністю функції.

Позначають еластичність функції $y = f(x)$ відносно змінної x $E_x(y)$. Тобто,

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x).$$

Отже, якщо в точці x функція має похідну, то еластичність визначається формулою $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Еластичність виражає наближений відсоток приросту функції, який відповідає 1% приросту аргумента.

Приклад. Знайти еластичність функції $y = x^2 - 4x + 7$ і обчислити її при $x = 1, \quad x = 2, \quad x = 5.$

Розв'язування.

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 - 4x + 7}(2x - 4) = \frac{x(2x - 4)}{x^2 - 4x + 7}.$$

$$E(y/_{x=1})=\frac{1(2\cdot 1-4)}{1^2-4\cdot 1+7}=-\frac{2}{4}=-0{,}5,$$

$$E(y/_{x=2})=\frac{2(4-4)}{4-8+7}=0,$$

$$E(y/_{x=5})=\frac{5(2\cdot 5-4)}{25-20+7}=2{,}5.$$

Отже, якщо x зросте на 1% з 1 до 1,01, то y спаде на 0,5%. Якщо x зросте на 1% з 2 до 2,02, то значення змінної y практично не зміниться. Якщо x зросте на 1% з 5 до 5,05, то y зросте на 2,5%.

◙ ***Властивості еластичності функції***

ТЕОРЕМА 1. Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі еластичностей співмножників:

$$E_x(U\cdot V)=E_x(U)+E_x(V).$$

Доведення. За означенням еластичності

$$E_x(U\cdot V)=\frac{x}{UV}(UV)'=\frac{x}{UV}(U'V+V'U)=\frac{xU'}{U}+\frac{xV'}{V}=$$

$$=E_x(U)+E_x(V).$$

ТЕОРЕМА 2. Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці показників еластичності діленого і дільника:

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right)=E_x(U)-E_x(V).$$

Доведення. За означенням еластичності

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right)=\frac{x}{\frac{U}{V}}\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{Vx}{U}\cdot\frac{U'V-V'U}{V^2}=\frac{x}{U}\left(U'-\frac{UV'}{V}\right)=$$

$$=\frac{xU'}{U}-\frac{xV}{V}=E_x(U)-E_x(V).$$

21.2. Еластичність попиту відносно ціни

В аналізі і прогнозах цінової політики застосовується поняття еластичності попиту і пропозиції**.**

Нехай p ціна одного виробу, а Q- кількість виробів, вироблених і проданих за деякий час, що визначає попит. Величина Q залежить від ціни, тобто Q є функцією від p: $Q=f(p)$.

Нехай приріст ціни Δp викликає приріст ΔQ. Тоді відносні прирости ціни і попиту будуть відповідно $\frac{\Delta p}{p}$ і $\frac{\Delta Q}{Q}$.

Відношення $\frac{\Delta Q}{Q} : \frac{\Delta p}{p}$ показує відносну зміну попиту, якщо ціна виробу зросла на 1%.

Еластичністю попиту відносно ціни називається границя відношення відносного приросту попиту до відносного приросту ціни при умові, що приріст ціни прямує до нуля.

$$\eta = E_p(Q) = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\frac{\Delta Q}{Q} : \frac{\Delta p}{p}\right) = \frac{p}{Q}\lim_{\Delta p \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta p} = \frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp}.$$

Еластичність попиту відносно ціни наближено визначає, як змінюється попит на даний виріб, якщо його ціна зростає на 1%.

Так, наприклад, якщо зростання ціни на 5% викликає спадання попиту на 8%, то еластичність буде $\eta = \frac{-8}{5} = -1{,}4$.

Якщо еластичність попиту $\eta = -0{,}5$, то 10% зростання вартості товару викликає спадання попиту на (-0,5)10%=-5%.

<u>Означення</u>. Якщо відсоток зміни попиту більше відсотка зміни ціни ($\eta<-1$), то попит називають еластичним, якщо відсоток зміни попиту менше відсотка зміни ціни ($-1<\eta<0$), то попит називають не еластичним, а якщо відсоток зміни попиту рівний відсотку зміни ціни ($\eta=-1$), то попит називають нейтральним.

Приклад. Встановлено, що кількість вироблених і проданих виробів Q за ціною p визначається за формулою $Q=10000-500p$ $(0<p<20)$. Визначити при якій ціні попит еластичний, нейтральний, не еластичний.

Розв'язування. Еластичність попиту відносно ціни

$$\eta = \frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp} = \frac{p}{10000-500p}(-500) = -\frac{p}{20-p}.$$

Попит буде еластичним, якщо $\eta < -1$, $-\frac{p}{20-p} < -1.$ Звідси, враховуючи, що $20-p>0$, маємо $\frac{p}{20-p} > 1;$

$p > 20 - p; \;\; 2p > 10; \;\; p > 10.$ Отже, попит еластичний при ціні $10 < p < 20$ (грн).

$$-\frac{p}{20-p} = -1; \;\; \frac{p}{20-p} = 1; \quad p = 20 - p; \quad p = 10.$$

Попит нейтральний при ціні $p = 10$ (грн.). Попит буде не еластичний, коли $-1 < \eta < 0.$

$$-\frac{p}{20-p} > -1; \;\; \frac{p}{20-p} < 1; \quad p < 20 - p; \quad p < 10.$$

$$-\frac{p}{20-p} < 0; \quad p > 0.$$

Отже, попит не еластичний при ціні меншій 10 грн. за виріб.

Приклад 2. Встановити зв'язок між доходом підприємства та еластичністю попиту від ціни.

Розв'язування. Дохід визначається як добуток вартості кожного виробу на кількість вироблених і проданих виробів Q

$$D(Q) = p \cdot Q.$$

Знайдемо маржинальний дохід, врахувавши, що Q є функція від p.

$$\frac{dD(Q)}{dp} = Q + p\frac{dQ}{dp} = Q(1 + \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}) = Q(1 + \eta).$$

Якщо $\eta \le -1,$ то $1 + \eta < 0,$ а $\frac{dD(Q)}{dp} < 0.$ І тому дохід спадає при зростанні $p,$ коли попит еластичний.

Якщо $-1 < \eta < 0,$ то $1 + \eta > 0,$ а $\frac{dD(Q)}{dp} > 0.$

Тобто функція $D(Q)$ доходу зростає з зростанням ціни $p,$ коли попит не еластичний.

21.3. Еластичність пропозиції відносно ціни

Поняття еластичності можна застосовувати і до інших функцій економічного змісту.

Розглянемо поняття еластичності пропозиції S в залежності від ціни товару p. Під пропозицією розуміють кількість деякого товару, який пропонується на продаж за одиницю часу. Як правило, пропозиція якого-небудь товару є зростаючою функцією ціни. Але бувають випадки, коли пропозиція підвищується із зниженням ціни. Величина S є функцією від ціни товару. Тобто, $S = S(p)$.

Нехай Δp- приріст ціни, а ΔS- відповідний приріст пропозиції. Тоді відносні прирости ціни і пропозиції будуть відповідно $\frac{\Delta p}{p}$ і $\frac{\Delta S}{S}$.

Еластичністю пропозиції відносно ціни називається границя відношення відносного приросту пропозиції до відносного приросту ціни при умові, що приріст ціни прямує до нуля.

$$E_p(S) = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\frac{\Delta S}{S} : \frac{\Delta p}{p}\right) = \frac{p}{S}\cdot\frac{dS}{dp}.$$

Еластичність пропозиції відносно ціни наближено визначає відсоток приросту пропозиції на 1% приросту ціни.

Приклад 3. Функція пропозиції деякого товару $S = \frac{10+3p^2}{4p+1}$. Визначити еластичність пропозиції при ціні $p = 2$.

Розв'язування.

$$E_p(S) = \frac{p}{S}\cdot\frac{dS}{dp} = \frac{p(4p+1)}{10+3p^2}\cdot\frac{6p(4p+1)-4(10+3p^2)}{(4p+1)^2} =$$

$$\frac{p(24p^2+6p-40-12p^2)}{(10+3p^2)(4p+1)} = \frac{2p(6p^2+3p-20}{(10+3p^2)(4p+1)}.$$

Якщо $p = 2$, то $E_p(S) = \frac{2\cdot 2(24+6-20)}{22\cdot 9} = 0{,}2.$

Отже, при ціні $p = 2$ збільшення її на 1% викличе збільшення пропозиції на $0{,}2\%$.

Розділ 5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§1. Основні поняття про функції багатьох змінних

Вивчення зв'язків і закономірностей, які існують в матеріальному світі, часто приводять до функції не однієї, а багатьох змінних. Ці функції дозволяють виражати більш складні залежності, ніж функції однієї змінної. Тому теорія функцій багатьох змінних має широке практичне застосування в різних галузях.

1.1. Означення функції багатьох змінних.

Функція двох змінних та її графічне зображення

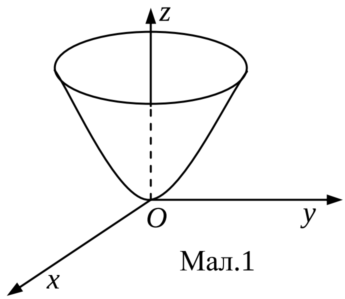
Змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються незалежними між собою, якщо кожна із них може приймати довільні значення в своїй області зміни незалежно від того, які значення приймають при цьому інші змінні.

<u>Означення 1.</u> Функцією багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***називається така закономірність, при якій змінним*** $x_1, x_2, ..., x_n$ ***із деякої множини*** $D \subset R^n$ ***ставиться у відповідність одне значення*** u ***із множини*** $E \subset R'$.

Наприклад: $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{xy}$, $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Множина D називається областю визначення функції $u = f(x_1, ..., x_n)$, а множина E - область значень цієї функції. Наприклад, функція $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ задана для всіх x і y, для яких виконується нерівність $x^2 + y^2 \leq 9.$ У даному випадку областю визначення функції є круг на площині $x0y$ з центром в точці $O(0;0)$ і радіусом R=3 Область значень цієї функції $E = [0;3]$.

Частинним випадком функції багатьох змінних є функція двох змінних $z = f(x, y)$, для якої можна дати поняття графіка функції. В загальному випадку графіком такої функції є поверхня у трьохвимірному просторі R^3



Мал.1

Приклад 1. $z = x^2 + y^2$. Графіком цієї функції є параболоїд обертання (мал.1).

1.2. Економічні задачі, що приводять до поняття функцій багатьох змінних

Приведемо приклади конкретних функцій багатьох змінних, які зустрічаються в економічних задачах.

Приклад 2. Нехай підприємство випускає тільки один товар і на його випуск затрачається тільки одна сировина (один ресурс). Підприємство характеризується повністю своєю виробничою функцією $y=f(x)$ залежність об'єму випущеного товару y від об'єму затраченої сировини x. Така виробнича функція **називається одноресурсною.**

Якщо на виробництво продукції певного типу витрачається багато видів сировини (ресурсів) $x_1, x_2, ..., x_n$ то така виробнича функція називається багаторесурсною або багатофакторною: $y = F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Найбільш відомою виробничою функцією є функція **Кобба-Дугласа** $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, де A, α, β - невід'ємні константи, причому $\alpha + \beta \leq 1$;

K- об'єм фондів в вартісному або натуральному виражені;

L- об'єм трудових ресурсів – число працівників, число людино-днів;

y- випуск продукції в вартісному або натуральному виразі. На цьому прикладі видно, що функція Кобба-Дугласа є функцією двох незалежних змінних K і L.

Приклад 3. Розглянемо основне рівняння класичної кількісної теорії грошей, яке **називається рівнянням обміну Фішера**:

$MV=PY$

даному рівнянні будь-яка із змінних M, V, P, Y може розглядатися як функція трьох змінних, де

M - це загальна кількість грошей, наявних в обороті;

V - швидкість їх обороту (скільки раз кожна гривня бере участь в розрахунках в середньому за рік);

Y- національний продукт або дохід (**національний продукт** – це всі готові товари і послуги, що виготовлені в економічній системі у вартісному виразі; **національний дохід** – це всі виплати, одержані домашніми господарствами: заробітна плата, рента, прибуток; національний продукт і національний дохід чисельно рівні);

P - рівень цін (середнє зважене значення цін готових товарів і послуг, що визначені відносно базового показника, прийнятого за одиницю).

Нехай $P = \dfrac{M \cdot V}{Y}$ - тобто ціна є функцією трьох незалежних змінних. Тоді із збільшенням грошової маси (кількості грошей) M в декілька разів (тобто гроші просто надрукують), ціни зростуть в стільки ж разів, при умові, що інші величини V і Y залишаться незмінними. Такі дії і є найчастіше причиною інфляції.

§2. Лінії та поверхні рівня. Гіперповерхні рівня

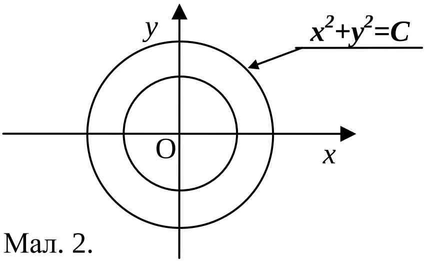
2.1. Поняття лінії та поверхні рівня

Для характеристики функцій двох змінних вводиться поняття ліній рівня.

<u>Означення 2.</u> Лінією рівня функції z=f(x,y) називається сукупність всіх точок на площині xOy, для яких виконується умова $f(x,y)=C$.

Лінії рівня можна отримати, перетнувши поверхню $z=f(x,y)$ площинами $z=C$, де $C=const$.

Приклад 1. Знайти лінії рівня функції $z=x^2+y^2$.



Мал. 2.

Розв'язування.
Нехай $z=C$. $x^2+y^2=C$ $(C\geq 0)$,

У цьому випадку лініями рівня є множина концентричних кіл з центром у початку координат і радіусом $\sqrt{C}$ (мал.2).Аналогічно вводиться поняття поверхні рівня для функції трьох змінних $u=f(x,y,z)$, $(f(x,y,z)=C)$..

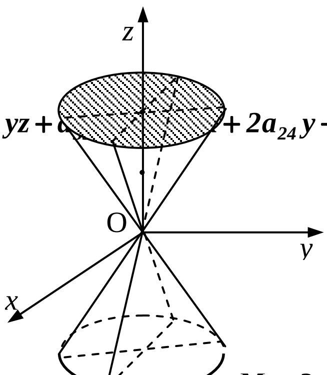
Приклад 2. Знайти поверхні рівня функції $u=x^2+y^2+z^2$.

Розв'язування. Нехай $u=C$. Тоді $x^2+y^2+z^2=C$. $(C\geq 0)$ – це множина сфер з центром у точці $O(0;0;0)$ і радіусом $\sqrt{C}$.

2.2. Поверхні другого порядку

Найбільш вивчені поверхні в курсі аналітичної геометрії – поверхні другого порядку. В загальному випадку рівняння такої поверхні має вигляд.

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+\ldots+2a_{24}y+$$
$$+2a_{34}z+a_{44}=0.$$



Мал.3

Залежно від значень коефіцієнтів

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, ..., a_{44}$ одержують різні поверхні другого порядку.

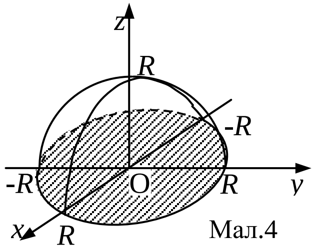
Наприклад:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

- конус;

2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

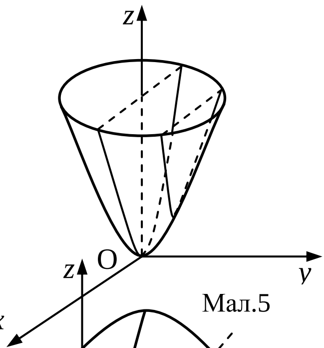
- напівсфера;



Мал.4

3) $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ -

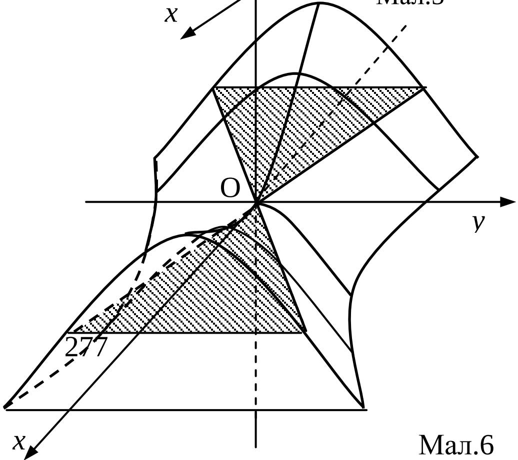
еліптичний параболоїд;



Мал.5

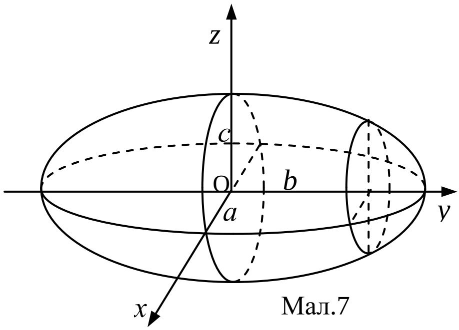
4) $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}$

-гіперболічний параболоїд;



Мал.6

5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ -трьохосний еліпсоїд.



Мал.7

Для вивчення поверхонь в трьохвимірному просторі застосовується метод перерізів. Суть цього методу така: перерізаємо задану поверхню площинами. $x=C_1$, $y=C_2$, $z=C_3$. В результаті отримуємо деякі криві, які характеризують поверхню.

Приклад 3. $z=x^2+y^2$. Нехай $z=C_1$ $(C_1\geq 0)$. Отримаємо рівняння $x^2+y^2=C_1$ (рівняння кола). Покладемо $y=C_2$, тоді $x^2+C_2^2=z$ - рівняння параболи в площині $x0z$, яка зміщена на C_2^2 одиниць вверх по осі Oz. Покладемо $x=C_3$. Отримаємо рівняння $z=y^2+C_3^2$. Одержали рівняння параболи в площині $y0z$, яка зміщена на C_3^2 одиниць вверх по осі $0z$. З цих досліджень випливає, що графіком функції $z=x^2+y^2$ є параболоїд обертання навколо осі $0z$.

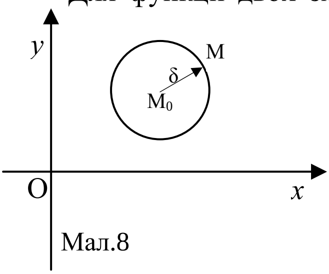
2.3. Гіперповерхня рівня

Нехай задана функція від n змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо покласти $u = C$, то одержимо рівняння $f(x_1, ..., x_n) = C$, яке називається рівнянням гіперповерхні рівня в просторі R^n. Наприклад: $u = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$. Якщо $u = C$, то рівняння $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = C$ є рівнянням гіперсфери в R^n з центром в точці $O(0,0,...,0)$ і радіусом $R = \sqrt{C}$.

§3. Границя функції двох змінних в точці. Неперервність функції двох змінних

3.1. Границя функції двох змінних

Для функції двох змінних можна ввести поняття границі та неперервності в точці $M_0(x_0, y_0)$. Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ (мал. 8). Під δ- околом точки M_0 будемо розуміти множину точок площини $x0y$, які задовольняють нерівностям $|M_0M| < \delta$ або $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.



Мал.8

Означення 3. ***Число*** b ***називається границею функції*** $z = f(x, y)$ ***при*** $M \to M_0(x \to x_0; y \to y_0)$, ***якщо для будь-якого*** $\varepsilon > 0$ ***існує таке*** $\delta > 0$, ***що як тільки*** $|M_0M| < \delta$, ***то*** $|f(x, y) - b| < \varepsilon$.

Символічно це можна записати так: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$ (5,1)

Очевидно, що границя функції не повинна залежати від способу наближення точки M до точки M_0.

Приклад 1. Знайти границю функції $z = \dfrac{x - y}{x + y}$ в точці $O(0;0)$.

Розв'язування. Знайдемо спочатку границю функції, коли $y = 0, x \to 0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

Тепер знайдемо границю функції, коли $x=0, y\to 0:$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x=0}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{y}{y}\right)=-1.$$

Очевидно, що в цьому випадку границя функції не існує, тому що при наближенні до точки $O(0;0)$ з різних напрямків отримуються нерівні границі.

3.2. Неперервність функції двох змінних в точці

<u>Означення 4</u>. Функція $z=f(x,y)$ ***називається неперервною в точці*** $M_0(x_0;y_0)$, ***якщо вона задана в цій точці та деякому її околі і виконується умова***

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0). \tag{5.2}$$

Для неперервних функцій двох змінних справедливі ті ж теореми, що і для функції однієї змінної.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію

$z=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$ в точці $O(0;0)$.

*Розв'язування.*Знайдемо повторні границі:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{9}=0;$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{4}=0.$$

Будемо наближатись до точки $O(0,0)$ по довільній прямій $y=kx$, тоді:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to kx}}\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{9}+\frac{k^2x^2}{4}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}x^2\left(\frac{1}{9}+\frac{k^2}{4}\right)=0.$$

З того, що всі границі рівні і співпадають із значенням функції в точці $O(0;0)$, випливає неперервність функції в цій точці.

Аналогічно вводимо поняття границі та неперервності в точці для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

§4. Частинні похідні функції багатьох змінних. Геометричний та економічний зміст частинних похідних

4.1. Частинні похідні першого порядку

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Нехай вона задана в точці $M_0(x_0; y_0)$ і в деякому околі цієї точки. Покладемо $y = y_0$, а значенню x_0 надамо приросту Δx. Тоді частинний приріст по x матиме вигляд $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

Складемо тепер відношення частинного приросту функції $\Delta_x z$ до приросту аргументу Δx і знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$. Якщо така границя існує, то ми назвемо її частинною похідною першого порядку функції $z = f(x, y)$ по x і позначимо z'_x або $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$z'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}. \qquad (5.3)$$

Аналогічно вводиться поняття частинної похідної першого порядку по y. У цьому випадку фіксуємо значення $x = x_0$, а значенню y_0, надаємо приросту Δy. Тоді $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ і відповідно

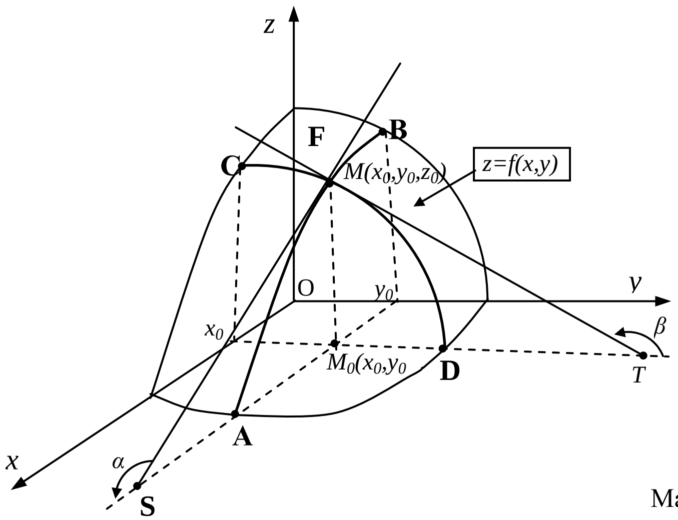
$$z'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}. \qquad (5.4)$$

Із означення частинних похідних випливає таке правило диференціювання: **щоб знайти частинну похідну функції $z = f(x, y)$ по x, вважаємо y постійною величиною, а x - змінною. Щоб знайти частинну похідну по y, вважаємо x постійною величиною, а y - змінною.**

4.2. Геометричний зміст частинних похідних

Частинним похідним першого порядку можна дати геометричну інтерпретацію по аналогії з геометричним змістом похідної для функції однієї змінної.

Нехай функція $z = f(x,y)$ зображується в просторі деякою поверхнею. Спроектуємо точку $M(x_0, y_0, z_0)$ цієї поверхні на площину $x0y$ і отримаємо точку $M_0(x_0, y_0)$ (мал.9).



Мал.9

При знаходженні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ покладемо $y = y_0$, тоді будемо мати $z=f(x,y_0)$. Ця функція однієї змінної має графіком криву ***AB***, яка розміщена в площині $y=y_0$. З геометричної точки зору частинна похідна $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює $tg\alpha$ (по аналогії з функцією однієї змінної), оскільки дотична ***MS*** до кривої ***AB*** утворює з віссю ***Ox*** кут α.

Таким чином $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = tg\alpha$

Перетнемо тепер поверхню $z = f(x,y)$ площиною $x = x_0$. Отримаємо функцію $z = f(x_0, y)$, графіком якої є крива

CD. Тоді дотична MT в точці $M(x_0, y_0, z_0)$ до кривої CD утворює з віссю $0y$ кут β. Тому $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = tg\beta.$

Приклад 1.. Знайти частинні похідні функції $z = e^{x^2+y^3+3}$.

Розв'язування. Використовуємо табличну похідну $(e^u)' = e^u u'$.

$$z'_x = e^{x^2+y^3+3}(x^2+y^3+3)'_x = e^{x^2+y^3+3} \cdot 2x = 2xe^{x^2+y^3+3}.$$

Аналогічно

$$z'_y = e^{x^2+y^3+3}(x^2+y^3+3)'_y = e^{x^2+y^2+3} \cdot 3y^2 = 3y^2 e^{x^2+y^2+3}.$$

4.3. Економічний зміст частинних похідних

Відповідним чином можна надати економічного змісту частинним похідним.

Розглянемо в якості прикладу функцію Кобба-Дугласа $y = A \cdot K^{\alpha} L^{\beta}$

Величину $l = \frac{y}{L}$ будемо називати **середньою продуктивністю праці** (кількість продукції, виробленої одним робітником).

Величину $k = \frac{y}{K}$ будемо називати **середньою фондовіддачею** (кількість продукції, що вироблена одним верстатом).

Величину $f = \frac{K}{L}$ назвемо **середньою фондоозброєністю** **(**фондоозброєність - це вартість фондів, що припадають на одиницю трудових ресурсів).

Зафіксуємо біжучий стан підприємства, тобто об'єм фондів K і число працівників L. Їм відповідає випуск продукції $y = y(K, L)$. Якщо найняти ще одного працівника, то приріст випуску продукції

$$\Delta y = y(K, L+1) - y(K, L).$$

А це є частковий приріст функції по L і тому $\Delta y \approx y'_L(K, L)\Delta L$

Оскільки $\Delta L = 1,$ то $\Delta y \approx y'_L(K, L)$.

Отже, частинна похідна від виробничої функції по об’єму трудових ресурсів приблизно рівна додатковій вартості продукції, що вироблена ще одним робітником. Тому похідна

$$y'_L = \beta A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta-1}$$

називається граничною продуктивністю праці.

Якщо ж збільшити фонди ще на одиницю – купити ще один верстат, то додаткова вартість продукції, що вироблена на ньому, приблизно дорівнює частинній похідній виробничої функції по об’єму фондів. Тоді

$y'_K = L \cdot AK^{\alpha-1}L^{\beta}$ **називається граничною фондовіддачею.**

І гранична продуктивність праці, і гранична фондовіддача – це абсолютні величини. Але в економіці надзвичайно цікаво знати на скільки відсотків зміниться випуск продукції, якщо число робітників збільшиться на 1%, або якщо фонди зростуть на 1%. Тому розглядаються поняття **еластичності** випуску продукції по об’єму трудових ресурсів і еластичності випуску продукції по фондах:

$$E_L(y) = \frac{L}{y} \cdot y'_L = \frac{L}{y} \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} = \beta$$

$$E_K(y) = \frac{K}{y} \cdot y'_k = \frac{K}{y} \alpha AK^{\alpha-1} \cdot L^{\beta} = \alpha$$

Звідси маємо економічний зміст параметрів функції Кобба-Дугласа.

α - еластичність випуску по фондах;

β - еластичність випуску по праці.

Приклад 2. Нехай виробнича функція є функцією Кобба-Дугласа. Щоб збільшити випуск продукції на 5% треба збільшити фонди на 10% або чисельність робітників на 15%. В 2001 році один робітник виготовляв продукцію на 2000 грн., а всього робітників 1000. Основні фонди оцінювались в 4 млн.грн. Записати виробничу функцію, величину середньої фондовіддачі і середньої продуктивності праці.

Розв’язування. Зрозуміло, що еластичність випуску продукції по праці $\beta = \frac{1}{3}$, а по фондах $\alpha = \frac{1}{2}$. Отже, функція Кобба-Дугласа має вид $y = A \cdot K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$. Підставляючи інші величини, отримаємо:

$$2000 \cdot 1000 = A \cdot (4 \cdot 10^6)^{\frac{1}{2}} \cdot (1000)^{\frac{1}{3}}, \text{ тобто}$$

$$2000 \cdot 1000 = A \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 10, \quad A = \frac{2000 \cdot 1000}{2000 \cdot 10} = 100 .$$

Отже, виробнича функція $y = 100 \cdot K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}}$. Середня фондовіддача рівна $k = \frac{y}{K} = \frac{2000 \cdot 1000}{4000000} = \frac{1}{2}$, а середня продуктивність $l = \frac{y}{L} = \frac{2000 \cdot 1000}{1000} = 2000.$

4.4. Частинні похідні функції багатьох змінних

Ми розглянули випадок функції двох змінних. Для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ означення частинних похідних вводиться аналогічно і знаходиться n частинних похідних:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Очевидно, що для функцій багатьох змінних можна використовувати відомі правила диференціювання, включаючи таблиці похідних, які отримані для функцій однієї змінної.

§5. Градієнт функції багатьох змінних. Похідна функції по напрямку

5.1. Градієнт функції багатьох змінних

<u>Означення 5.</u> Градієнтом функції $z = f(x, y)$ ***називається вектор***

$$qradz = z'_x \cdot \vec{i} + z'_y \cdot \vec{j} \qquad (5,5)$$

Аналогічно для функції $u = f(x, y, z)$

$$qradu = u'_x \cdot \vec{i} + u'_y \cdot \vec{j} + u'_z \cdot \vec{k} \qquad (5.6)$$

Відповідно вводимо градієнт функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$qradu = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}; \frac{\partial u}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial u}{\partial x_n} \right). \qquad (5.7)$$

Скорочено градієнт функції позначимо через $\vec{q}$.

5.2. Похідна складної функції

Відомо, що для похідної складної функції однієї змінної $y = f(u),$ де $u = u(x),$ має місце формула

$$y' = f'_u(u) \cdot u'.$$

Узагальнимо цю формулу на випадок функції двох змінних $z = f(x,y).$ Нехай задана диференційовна функція $z = f(x,y)$, яка має неперервні частинні похідні z'_x і z'_y. Допустимо , що аргументи x і y є в свою чергу диференційовними функціями від третьої змінної t : $x = \varphi(t);$ $y = \psi(t).$ Ясно, що функція $z = f(x,y)$ є складною функцією від змінної t : $z = f(\varphi(t), \psi(t)) = F(t)$.

Знайдемо похідну цієї функції по змінній t . Для цього надамо приросту Δt аргументу t і знайдемо повний приріст функції Δz, якщо аргументи x і y набувають відповідно приростів Δx і Δy :

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y).$$

Перепишемо цей приріст в іншому вигляді:

$$\Delta z = \left[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \right] + \left[f(x, y + \Delta y) - f(x,y) \right].$$

Застосуємо тепер теорему Лагранжа про скінчені прирости відповідно до першої і другої квадратних дужок. Тоді отримаємо:

$$\Delta z = f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y.$$

Допустимо тепер, що частинні похідні неперервні по сукупності змінних x і y, тоді:

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x,y) + \varepsilon_1,$$
$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x,y) + \varepsilon_2.$$

Таким чином,

$$\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Тепер згідно означення похідної знаходимо:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$ і враховуючи, що $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2 = 0$, отримаємо формулу:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Ця похідна називається повною похідною функції $z = f(x, y)$ по аргументу t. Аналогічно вводиться формула повної похідної для функції $u = u(x, y, z)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t},$$

де $x(t) = \varphi_1(t),\ y(t) = \varphi_2(t),\ z(t) = \varphi_3(t)$.

Поняття похідної функції $z = f(x, y)$ можна узагальнити, якщо ввести похідну функції по напрямку.

5.3. Похідна функції по напрямку

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в деякій замкнутій області D площини $x0y$.

Нехай в цій області задана точка $M_0(x_0, y_0)$. Надамо приросту аргументам відповідно Δx і Δy, тоді отримаємо точку $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j}$.

Позначимо через φ кут, який утворює вектор $\overrightarrow{M_0M}$ з віссю $0x$, а через l - довжину цього вектора. Тоді можна записати:

$\Delta x = l\cos\varphi,\ \Delta y = l\sin\varphi$ або $dx = l\cos\varphi,\ dy = l\sin\varphi.$

Таким чином: $\overrightarrow{M_0M} = l\cos\varphi \cdot \vec{i} + l\sin\varphi\, \vec{j}.$ Значення функції $z = f(x, y)$ в точках M_0 і M відповідно будуть такі:

$f(x_0, y_0)$ і $f(x_0 + l\cos\varphi, y_0 + l\sin\varphi)$.

Звідси випливає, що коли зафіксувати точку M_0 і напрямок вектора $\overrightarrow{M_0M}$ і міняти тільки l, то функцію $z = f(x, y)$ можна записати у вигляді $z = F(l)$, а її значення в точках M_0 і M відповідно $F(0)$ і $F(l).$ Таким чином

$$F(l) = f(x_0 + l\cos\varphi, y_0 + l\sin\varphi).$$

Згідно означення похідної функції однієї змінної, похідна функції $z = F(l)$ по змінній l дорівнює

$$\frac{dz}{dl} = \lim_{l \to 0} \frac{F(l) - F(0)}{l - 0} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}.$$

Цю границю назвемо похідною функції $z = f(x, y)$ по даному напрямку. Виходячи із викладеного вище, функцію $z = f(x, y)$ можна вважати складною функцією по l. Її повна похідна по l дорівнює

$$\frac{dz}{dl} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dl} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dl}.$$

Але $dx = l\cos\varphi,\ \ dy = l\sin\varphi$, тому $\dfrac{dz}{dl} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi.$

Цю формулу можна узагальнити на випадок функції трьох змінних $u = f(x, y, t)$. В цьому випадку напрямок задається вектором $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ і формула диференціювання по напрямку відповідно матиме вид

$$\frac{du}{dl} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Встановимо зв'язок між похідною функції $z = f(x, y)$ по напрямку і градієнтом цієї функції. Для цього розглянемо вектори

$\vec{q} = qradz = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j}$ і $\vec{a} = \cos\varphi\, \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j}$.

Помножимо скалярно вектор $\vec{q}$ на вектор $\vec{a}$, отримаємо:

$(\vec{q} \cdot \vec{a}) = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi$. Таким чином ,

$\dfrac{dz}{dl} = (qradz \cdot \vec{a}) = (\vec{q} \cdot \vec{a})$. Згідно з означенням скалярного добутку $\dfrac{dz}{dl} = \left|\vec{q}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha = \sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \cdot 1 \cdot \cos\alpha$.

Із цієї формули випливає, що у випадку, коли напрямок вектора $\vec{a}$ співпадає з напрямком вектора $\vec{q}(\cos\alpha = 1)$

$$\left(\frac{dz}{dl}\right)_{max}=\left|\vec{q}\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ .$$

Висновок. Похідна функції $z=f(x,y)$ має найбільше значення по напрямку градієнта $\vec{q}$ і дорівнює модулю градієнта $\left|\vec{q}\right|$.

Приклад 3. Обчислити градієнт функції $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точці $M_0(3,4)$.

Розв'язування. Знаходимо частинні похідні функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Обчислимо їх значення в даній точці:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}=\frac{3}{5}\,;\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}=\frac{4}{5}\,.$$

Таким чином $\vec{q}=qradz=\frac{3}{5}\cdot\vec{i}+\frac{4}{5}\cdot\vec{j},\ \left|\vec{q}\right|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1.$

§ 6. Повний приріст та повний диференціал функції багатьох змінних

Нехай z=f(x,y) - функція двох змінних. Надамо обом змінним прирости відповідно Δx і Δy, тоді функція z отримає приріст $\Delta z=f(x+\Delta x;y+\Delta y)-f(x,y)$, який називається повним приростом функції.

Відомо, що для функції $y=\varphi(x)$, яка має похідну $y'=\varphi'(x)$, приріст функції можна зобразити у вигляді

$$\Delta y=\varphi'(x)\cdot\Delta x+\varepsilon\Delta x, \tag{5.8}$$

де $\varepsilon\to 0$, якщо $\Delta x\to 0$.

Тоді головна лінійна частина приросту функції називається диференціалом функції $dy=\varphi'(x)\Delta x=\varphi'(x)dx$.

В випадку функції двох або більше змінних наявність частинних похідних ще не гарантує того, що повний приріст функції можна представити в виді, аналогічному (5.8).

<u>Означення 6</u> .Функція z=f(x,y) називається диференційовною в даній точці $M(x;y)$, якщо її повний приріст в цій точці можна представити в виді:

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\cdot\Delta y, \tag{5.9}$$

де $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0,$ а A і B не залежать від приростів $\Delta x, \Delta y$.

Доданки $\varepsilon_1\Delta x$ і $\varepsilon_2\Delta y$ є, очевидно, нескінченно малими величинами вищого порядку малості, ніж Δx і Δy.

<u>Означення 7.</u> Повним диференціалом функції $z = f(x;y)$ називається головна лінійна частина приросту функції відносно Δx і Δy, тобто: $dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ або $dz = Adx + Bdy$.

ТЕОРЕМА 1. Якщо функція $z = f(x;y)$ диференційовна в даній точці $M(x;y)$, то існують частинні похідні цієї функції і має місце рівність $A = z'_x; B = z'_y$, тобто

$$dz = z'_x dx + z'_y dy. \tag{5.10}$$

Доведення. Нехай функція $z = f(x,y)$ диференційовна. Тоді має місце формула (5.9). Покладемо $\Delta y = 0$: тоді із (5.9) отримаємо

$\Delta_x z = A\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$ звідки $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1$, де $\varepsilon_1 \to 0,$ якщо $\Delta x \to 0.$

Оскільки A - стала величина (x і y фіксовані), то

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = z'_x = A.$$

Аналогічно доводиться, що $z'_y = B.$ Таким чином, формула (5.10) доведена.

Нехай задана функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n).$ Можна довести, по аналогії з функцією $z = f(x,y),$ що в випадку диференційовності функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має місце формула

$$du = u'_{x_1}dx_1 + u'_{x_2}dx_2 + ... + u'_{x_n}dx_n \tag{5.11}$$

Навпаки, якщо допустити , що функція $u = f(x_1 x_2, ..., x_n)$ має частинні похідні, які є неперервними функціями по сукупності змінних в околі точки $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ то справедлива формула (5.11).

§7. Частинні похідні вищих порядків

Оскільки частинні похідні першого порядку функції $z = f(x,y)$ знову є функціями від x і y, то від них можна ще раз знайти похідні. Таким чином, приходимо до поняття частинних похідних другого порядку, які визначаються за формулами:

$$(z'_x)'_x = z''_{xx}; \quad (z'_x)'_y = z''_{xy}; \quad (z'_y)'_x = z''_{yx}; \quad (z'_y)'_y = z''_{yy} \qquad (5.12)$$

Похідні z''_{xy} і z''_{yx} називаються мішаними частинними похідними другого порядку. Для них справедлива рівність (при умові, що вони неперервні по x і y) $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Для позначення частинних похідних другого порядку вживають також символи:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y).$$

Звідси випливає спосіб знаходження частинних похідних другого порядку: щоб знайти частинні похідні другого порядку, треба знайти частинні похідні першого порядку даної функції, а потім від цих похідних знайти відповідні частинні похідні першого порядку.

Таким же способом, як введено похідні другого порядку , можна ввести похідні третього порядку і т.д.

Наприклад: $z'''_{xxx} = (z''_{xx})'_x, \quad z''_{xxy} = (z''_{xx})'_y$.

Приклад 1. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = arctg\frac{y}{x}$. Перевірити, чи рівні мішані частинні похідні між собою.

Розв'язування. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$z'_x = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'_x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$z'_y = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = -\frac{(y)'_x(x^2+y^2) - y(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{xy} = -\frac{(y)'_y(x^2+y^2) - y(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yx} = \frac{(x)'_x(x^2+y^2) - x(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z''_{yy} = \frac{x'_y(x^2+y^2) - x(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Очевидно, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Для функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ частинні похідні другого порядку вводимо за формулою

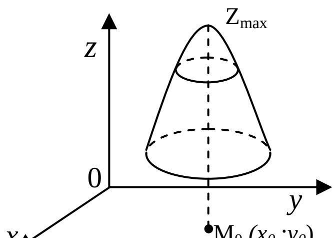
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad \text{де } i = \overline{1,n}; \qquad j = \overline{1,n}.$$

Якщо частинні похідні другого порядку неперервні по сукупності змінних, то мішані похідні рівні між собою, тобто

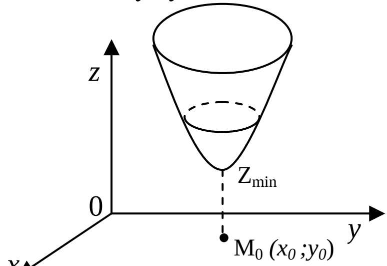
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}, \quad (i, j = \overline{1,n}).$$

§8. Екстремум функції двох змінних. Необхідні та достатні умови екстремуму функції

Для функції двох змінних, як і для функції однієї змінної, можна ввести поняття екстремуму. Вважають, що в точці $M_0(x_0, y_0)$ функція $z=f(x,y)$ досягає локального максимуму, якщо в околі точки



Мал.10



Мал.11

M_0 виконується нерівність $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$. Аналогічно, в точці $M_0\ (x_0,y_0)$ функція $z=f(x,y)$ досягає локального мінімуму, якщо в околі цієї точки виконується нерівність $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.

На мал.10 функція досягає максимуму, а на мал.11 – мінімуму.

Точки локального мінімуму і максимуму називаються точками екстремуму функції $z = f(x, y)$.

Для знаходження екстремальних значень функції двох змінних використовуються необхідні та достатні умови екстремуму.

ТЕОРЕМА 2. (Необхідна умова екстремуму функції).

Якщо в точці $M_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ досягає екстремуму, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{cases} z'_x(x_0, y_0) = 0, \\ z'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Доведення. Нехай в точці $M_0(x_0; y_0)$- функція $z = f(x; y)$ досягає екстремуму. Для конкретності припустимо, що це max. Зафіксуємо значення $y = y_0$ і розглянемо функцію $z = f(x; y_0)$. Як функція однієї змінної ця функція при $x = x_0$ досягає максимуму, тому повинна виконуватись необхідна умова екстремуму: похідна $\frac{d}{dx} f(x; y_0)$ при $x = x_0$ перетворюється в нуль. Але похідна від $f(x; y_0)$ по x є не що інше, як частинна похідна функції $z = f(x; y)$ по x в точці $M_0(x_0; y_0)$. Отже, $z'_x(x_0; y_0) = 0$.

Аналогічно, зафіксуємо значення $x = x_0$ і розглянемо функцію $z = f(x_0; y)$. При $y = y_0$ ця функція досягає max, тому $\frac{d}{dy} f(x_0; y)$ повинна перетворюватись в нуль, якщо $y = y_0$.

Звідси випливає, що $z'_y(x_0; y_0) = 0$. Теорема доведена.

Фактично ми отримуємо систему рівнянь для знаходження координат точки $M_0(x_0, y_0)$. Таких точок може бути декілька або не існувати зовсім. Точки, в яких частинні похідні першого порядку перетворюються в нуль, називаються точками підозрілими на екстремум, або критичними точками. Нехай в точці $M_0(x_0; y_0)$ виконується умова $z'_x = z'_y = 0$ і існують частинні похідні другого порядку. Введемо такі позначення:

$$z''_{xx}(x_0, y_0) = A; \quad z''_{xy}(x_0; y_0) = B; \quad z''_{yy}(x_0, y_0) = C$$

і розглянемо число $D = AC - B^2$.

ТЕОРЕМА 3. (Достатня умова екстремуму функції).

Якщо $D > 0$, то в точці $M_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має екстремум, якщо $D < 0$, то екстремуму немає. Якщо $D > 0$ і $A > 0$, то функція досягає мінімуму, якщо $D > 0$ і $A < 0$, то функція досягає максимуму.

Доведення. Нехай т. $M_0(x_0; y_0)$ є критичною точкою, тобто $z'_x(x_0; y_0)$ і $z'_y(x_0; y_0) = 0$. Допустимо, що існують другі частинні похідні $z''_{xx}(x_{0;}y_0) = A$, $z''_{xy}(x_{0;}y_0) = B$ і $z''_{yy}(x_0; y_0) = C$. Складемо із чисел A, B, C визначник $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. Розглянемо приріст функції $z = f(x; y)$ в т. $M_0(x_0; y_0)$:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = f(x_0; y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x +$$

$$+ \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y \partial x} \Delta y \Delta x + \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) + \varepsilon \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right)^3 -$$

$$- f(x_0; y_0) = \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x \Delta y + +C\Delta y^2) + +\varepsilon \left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \right)^3.$$

де $\varepsilon \to 0$, якщо $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

Останній запис випливає із формули Тейлора для функцій двох змінних. Очевидно, що основний вклад в прирості Δz задається квадратичною формою відносно Δx і Δy.

Розглянемо матрицю: $H(x_0; y_0) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$.

а). Допустимо тепер, що $D = \left| H(x_0; y_0) \right| = AC - B^2 > 0$ і $A > 0$. Тоді автоматично випливає, що $C > 0$. Оскільки вираз

$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2$ представляє собою квадратичну форму, то за умовою теореми Рауса-Гурвіца квадратична форма є додатньо-визначеною, тобто $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \geq f(x_0; y_0) \to (min).$

б). Допустимо, що $D > 0, A < 0.$ Тоді автоматично $C < 0.$ В даному випадку квадратична форма є від'ємно-визначеною, отже $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y_0) \leq f(x_0; y_0) \to (max).$ Теорема доведена.

Зауваження 1. Якщо $D < 0,$ то функція не досягає ні мінімуму ні максимуму, отже екстремуму функції немає. Це можна продемонструвати для випадку сідловидної точки поверхні, наприклад, для функції $z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}$ в т. $O(0;0).$

Із мал.6 видно, що по змінній x функція досягає min, а по змінній y досягає min, а екстремуму в т. $O(0;0)$ не існує.

Зауваження 2. Випадок $D = 0$ не розглядаємо, тому що в цьому випадку екстремум може бути, а може не бути. За допомогою частинних похідних другого порядку дослідити функцію на екстремум неможливо. Наприклад, $z = x^4 + y^4.$

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y + 3.$

Розв'язування. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$z'_x = 2x + y + 2, \qquad z'_y = x + 2y - 2.$ Прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -2 \\ x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -2 \\ -3x \quad = \ 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$z''_{xx} = 2; \qquad z''_{xy} = z''_{yx} = 1; \qquad z''_{yy} = 2.$

Тоді $D = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0.$ Отже, в точці $M_0(-2;2)$ функція досягає екстремуму. Оскільки $A = 2 > 0,$ то маємо мінімум. Знаходимо $z_{min} = -5.$

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $z = \dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{6}.$

Розв'язування. Знаходимо частинні похідні:

$$z'_x = \frac{x}{5};\ .\ z'_y = -\frac{y}{3}$$

Із системи рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x}{5} = 0 \\ -\dfrac{y}{3} = 0 \end{cases}$ знаходимо , що $x = 0;\quad y = 0.$

Далі $z''_{xx} = \frac{1}{5};\quad z''_{xy} = 0;\quad z''_{yy} = -\frac{1}{3}.$ Тоді

$$D = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}\right) - 0^2 = -\frac{1}{15} < 0.$$

Звідси випливає, що екстремум функції не існує.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430.$$

Розв'язування. Знайдемо

$$z'_x = 6x^2 - 36y;\quad z'_y = 6y^2 - 36x.$$

Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0, \\ 6y^2 - 36x = 0, \end{cases}$

або
$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0, \\ y^2 - 6x = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння маємо $y = \frac{x^2}{6}.$ Підставивши це значення в друге рівняння, одержимо $\frac{x^4}{36} - 6x = 0 \Leftrightarrow x^4 - 216x = 0.$ Останнє рівняння можна записати так:

$$x^4 - 216x = x(x^3 - 216) = x(x-6)(x^2 + 6x + 36) = 0.$$

Звідси випливає, що $x_1 = 0,\quad x_2 = 6.$Корені рівняння $x^2 + 6x + 36 = 0$ комплексні, які нас не цікавлять.

Підставивши одержані значення x в рівність $y = \frac{x^2}{6}$, одержимо: $y_1 = 0;\ \ y_2 = 6.$ Таким чином, маємо дві пари розв'язків попередньої системи рівнянь: $1)x_1 = 0;\ \ y_1 = 0;\ 2)x_2 = 6;\ y_2 = 6.$

Для знаходження D визначимо $z''_{xx}; z''_{xy}; z''_{yy}:$

$$z''_{xx} = 12x; \;\; z''_{xy} = -36; \;\; z''_{yy} = 12y.$$

Підставляючи сюди спочатку першу пару розв'язків, а потім другу, обчислимо $A, B, C.$ Для першої пари розв'язків:

$$A = z''_{xx}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0; \;\; B = z''_{xy}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = -36; \;\; C = z''_{yy}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0,$$

тобто $D = AC - B^2 = -36^2 < 0.$ Оскільки $D < 0,$ то при $x = 0; y = 0$ функція не має екстремуму. Для другої пари розв'язків:

$$A = z''_{xx}\Big|_{\substack{x=6\\y=6}} = 72; \quad B = z''_{xy}\Big|_{\substack{x=6\\y=6}} = -36; \quad C = z''_{yy}\Big|_{\substack{x=6\\y=6}} = 72.$$

Оскільки число $D = AC - B^2 = 72 \cdot 72 - (-36)^2 = 3888$, додатне, то екстремум при $x = 6; y = 6$ існує, причому мінімум $(A > 0).$ Для знаходження мінімального значення функції підставимо $x = 6; y = 6$ і одержимо

$$z_{min} = 2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^3 - 36 \cdot 6 \cdot 6 + 430 = -2.$$

Приклад 4. Мале підприємство виробляє товари виду A і $B.$ Загальні щоденні витрати на виробництво x одиниць товару A та y одиниць товару B задаються функцією

$$V = 620 - 14x - 10y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2.$$

Визначити кількість одиниць товарів A і B, при яких загальні витрати підприємства будуть мінімальними.

Розв'язування. Щоб знайти кількість одиниць x та y товарів A і B необхідно дослідити на екстремум функцію

$$V = 620 - 14x - 10y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2.$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$V'_x = -14 + 0{,}4x,$$

$$V'_y = -10 + 0{,}2y.$$

Прирівнюючи їх до нуля, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -14 + 0{,}4x = 0, \\ -10 + 0{,}2y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35, \\ y = 50. \end{cases}$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку

$$A = V''_{xx} = 0{,}4,$$

$$B = V''_{xy} = 0,$$

$$C = V''_{yy} = 0{,}2.$$

Знаходимо $D = AC - B^2 = 0{,}4 \cdot 0{,}2 - 0^2 = 0{,}08 > 0.$ Оскільки $A > 0,$ то маємо мінімум. Отже, функція витрат $V(x;y)$ при $x = 35,\ \ y = 50$ досягає мінімуму. $V_{min} = 125$ (гр.од.)

§9. Екстремум функції багатьох змінних. Необхідна та достатня умови екстремуму. Критерій Рауса-Гурвіца

Нехай задана функція багатьох змінних $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Покажемо, як знайти u_{max} або u_{min} цієї функції, по аналогії з функцією двох змінних.

ТЕОРЕМА 3. Якщо функція $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ в точці $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ досягає екстремуму, то її частинні похідні в цій точці рівні нулю, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(X^0) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(X^0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(X^0) = 0. \end{cases}$$

Доведення теореми 3 аналогічне доведенню теореми 1.

Допустимо, що точка $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ є критичною точкою. Знайдемо значення других частинних похідних функції $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точці X^0 і складемо матрицю

$$H(X^0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(X^0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(X^0), & \ldots, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(X^0) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}(X^0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(X^0), & \ldots, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n}(X^0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}(X^0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2}(X^0), & \ldots, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(X^0) \end{bmatrix} \qquad (5.13)$$

Матриця виду (5.13) називається матрицею Гесса.

Встановимо достатні умови екстремуму функції $u=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ в т. $X^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Нехай точка $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ є підозрілою на екстремум.

Розкладемо функцію $u=u(x_1,x_2,...,x_n)$ в ряд Тейлора в околі точки $X^0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$:

$$u(x_1,x_2,...,x_n)=u(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u(X^0)}{\partial x_j}(x_j-x_j^0)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_i\partial x_j}(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0)+\varepsilon(\left|X-X^0\right|^3),$$

де $\varepsilon\to 0,$ коли

$$\left|X-X^0\right|=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2+...+(x_n-x_n^0)^2}\to 0.$$

Очевидно, що точка X^0 є точкою максимуму, якщо $u(x_1,x_2,...x_n)\le u(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0).$ Аналогічно , точка X^0 є точкою мінімуму, якщо $u(x_1,x_2,...,x_n)\ge u(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0).$

Це в свою чергу залежить від значення квадратичної форми

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_i\partial x_j}(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0).$$

Для характеристики знаку цієї суми використаємо матрицю Гесса, яка була введена раніше. Тепер сформулюємо умови додатної (від'ємної) визначеності матриці Гесса. Для цього введемо поняття головних мінорів матриці $\boldsymbol{H(X^0)}$

<u>Означення 6.</u> Мінор, розташований на перетині перших k-рядків і k стовпців матриці називається головним мінором k-го порядку.

Наприклад:

$$M_1=\frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_1^2},\qquad M_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_2^2}\end{vmatrix},$$

$$M_n=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_1^2} & ... & \frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_1\partial x_n}\\ ... & ... & ...\\ \frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_n\partial x_1} & ... & \frac{\partial^2 u(X^0)}{\partial x_n^2}\end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 4. (Критерій Рауса-Гурвіца). Якщо головні мінори матриці $H(X^0)$ додатні, то функція $u=u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ досягає мінімуму в точці X^0.

Якщо $(-1)M_1>0, M_2>0, (-1)M_3>0, \dots, (-1)^n M_n>0,$ то функція $u=u(x_1, x_2,\dots,x_n)$ досягає максимуму в точці X^0. Цей факт добре відомий із теорії додатної (від'ємної) визначеності матриць і , відповідно, квадратичних форм. В математичній літературі цей критерій **називають також критерієм Сільвестра**.

Випадок екстремуму функції двох змінних $z=f(x,y)$ є частковим випадком екстремуму функції багатьох змінних.

§10. Умовний екстремум функції багатьох змінних

Нехай функція $u=u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ досліджується на екстремум при умові, що виконуються рівняння

$$\begin{cases} q_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_1 \\ q_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_m(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_m \end{cases}, \text{ де } m<n \qquad (5.14)$$

Рівняння (5.14) називаються рівняннями зв'язку, а відповідний екстремум функції називається умовним екстремумом.

Для дослідження функції $u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ на екстремум при умові (5.14) використаємо функцію Лагранжа.

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)=u(x_1,x_2,\dots,x_n)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(q_i(x)-b_i),$$

яка дозволяє задачу з обмеженням звести до задачі без обмежень. Очевидно, що при обмеженнях (5.14)

$$L(x,\lambda)=u(X) \text{ і } u_{extr.}(X^*)=L_{extr.}(X^*,\lambda).$$

Необхідні умови екстремальності в точці X^* функції $L(X,\lambda)$ мають вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X^*,\lambda)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u(X^*)}{\partial x_1} + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \dfrac{\partial q_j(X^*)}{\partial x_1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial L(X^*,\lambda)}{\partial x_n} = \dfrac{\partial u(X^*)}{\partial x_n} + \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \dfrac{\partial q_j(X^*)}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial L(X^*,\lambda)}{\partial \lambda_1} = q_1(X^*,\lambda) - b_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial L(X^*,\lambda)}{\partial \lambda_m} = q_m(X^*,\lambda) - b_m = 0. \end{cases} \qquad (5.15)$$

Із системи рівнянь знаходимо координати точки $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, в якій досягається екстремум. Значення $\lambda_1, ..., \lambda_n$ при цьому ролі не грають. Характер екстремальності точок $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ визначаємо з допомогою достатніх умов, які застосовуються тільки до функції $u(x)$, оскільки $q_i(x) - b_i = 0$, $(i = \overline{1,m})$.

Приклад 1. Знайти екстремум функції

$z = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2$ при умові $x_1 + x_2 = 2$.

Розв'язування. Запишемо обмеження у виді $x_1 + x_2 - 2 = 0$. Функція Лагранжа матиме вид:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2).$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 + 2 + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 2.$$

Використовуючи необхідну умову екстремуму, складаємо систему рівнянь:

$$\left.\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2 + \lambda = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 2 \quad = 0 \end{cases}\right| \times (-1).$$

Виключимо $\boldsymbol{\lambda}$ з перших двох рівнянь. Помножимо друге рівняння на число (-1) і додамо до першого рівняння. В результаті отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6 = 0 \\ 4x_1 \qquad + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 3.$$

Отже, точка $X^*(-1;3)$ є точкою підозрілою на екстремум.

Складаємо матрицю Гесса:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1 + x_2) = 4; \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1 + x_2) = 1;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + 2x_2) = 2;$$

$$H(X^*) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad M_1 = 4 > 0; \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0.$$

Отже, в точці $X^*(-1;3)$ маємо z_{min}:

$$z_{min} = 2(-1)^2 + (-1)\cdot 3 + 3^2 + 2\cdot(-1) - 4\cdot 3 = -6.$$

З геометричної точки зору $z_{min}(X^*)$ досягається в вершині параболи, яка отримується в результаті перетину параболоїда

$z = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2$ з площиною $x_1 + x_2 - 2 = 0.$

§11. Емпіричні формули. Побудова формули лінійної залежності методом найменших квадратів

При розв'язуванні практичних задач часто виникає ситуація, коли аналітичний вигляд функції не заданий, але ця функція задана таблично, тобто:

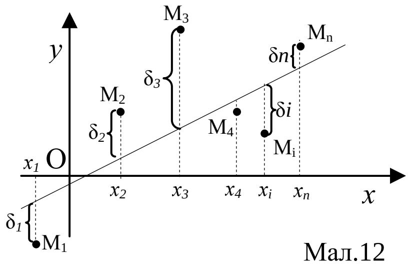
x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Такі таблиці отримують в результаті дослідів (експериментів), тому їх називають **емпіричними таблицями**. За заданою емпіричною таблицею потрібно знайти аналітичний вид функції. В загальному випадку це досить складна задача і розв’язується вона неоднозначно. Одним із найбільш поширених методів знаходження аналітичного виду відповідної функції є метод найменших квадратів. Цей метод часто використовується в статистиці та економічних дослідженнях.

Розглянемо випадок, коли зв’язок між x і y прямолінійний, тобто $y = kx + b$.

Нехай задана емпірична таблиця. Розглянемо на площині $x0y$ точки $M_1(x_1;y_1);\quad M_2(x_2;y_2),...,M_i(x_i;y_i),...,M_n(x_n;y_n).$

Оскільки між x і y існує прямолінійний зв’язок, то ці точки будуть розміщені на площині xOy так, що через них можна наближено провести пряму лінію. Побудуємо відповідний малюнок (мал. 12).



Мал.12

Нам відомо, що рівняння цієї прямої буде $y = kx + b$, де k і b деякі невідомі параметри. З кожної точки $M_i(i = 1,2,...,n)$ опустимо перпендикуляри на вісь $0x$ і продовжимо їх до перетину з прямою лінією. Ординати точок перетину з прямою $y = kx + b$ позначимо $\overline{y}_i(i = 1,2,...,n).$ Різницю $\overline{y}_i - y_i$ позначимо через δ_i і назвемо її нев’язкою (похибкою). Очевидно, що числа $\delta_i = \overline{y}_i - y_i$ можуть приймати довільні значення.

Складемо суму квадратів нев’язок, тобто:

$$F(k,b) = \delta_1^2 + \delta_2^2 + ... + \delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 .$$

Тепер сформулюємо задачу: потрібно вибрати положення прямої $y = kx + b$ так, щоб величина F приймала мінімальне значення. Аналітично цю задачу розв’язуємо так: припустимо, що функція $y = kx + b$ задана. Знайдемо значення нев’язок:

$$\delta_1 = \overline{y}_1 - y_1 = kx_1 + b - y_1;$$

....

$$\delta_i = \overline{y}_i - y_i = kx_i + b - y_i;$$

....

$$\delta_n = \overline{y}_n - y_n = kx_n + b - y_n.$$

Підставимо ці значення δ_i в $F(k,b)$:

$$F(k,b)=\sum_{i=1}^{n}(kx_i+b-y_i)^2.$$

Таким чином , задача зводиться до знаходження мінімуму функції $F(k,b)$ відносно змінних k і b. Запишемо необхідну умову екстремуму:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(k,b)}{\partial k}=0,\\ \dfrac{\partial F(k,b)}{\partial b}=0.\end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні і підставимо їх в рівняння:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(k,b)}{\partial k}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(kx_i+b-y_i)\cdot x_i=0,\\ \dfrac{\partial F(k,b)}{\partial b}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(kx_i+b-y_i)=0.\end{cases}$$

Виконавши відповідні елементарні перетворення, в кінцевому результаті отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}k\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,y_i,\\ k\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}.$$

Ця система називається нормальною системою рівнянь методу найменших квадратів. З неї знаходимо k і b і підставляємо в формулу $y=kx+b.$ Для практичного розв'язування задач зручно користуватися розширеною емпіричною таблицею, яка одержується таким чином: до вихідної таблиці додаємо два рядки для x^2 та xy і один стовпчик, в якому записуємо відповідні суми, що входять у нормальну систему. В результаті отримаємо таку таблицю:

x	x_1	x_2	...	x_n	$\sum x_i$
y	y_1	y_2	...	y_n	$\sum y_i$
x^2	x_1^2	x_2^2	...	x_n^2	$\sum x_i^2$
xy	x_1y_1	x_2y_2	...	x_ny_n	$\sum x_iy_i$

Дані останнього стовпчика таблиці підставляємо в нормальну систему рівнянь.

Приклад 1. Дано таблицю

x	-1	0	1	3	5
y	-0,9	1,2	2,8	7,1	10,8

Знайти коефіцієнти прямолінійного зв'язку між x і y.

Розв'язування. Будуємо розширену таблицю.

x	-1	0	1	3	5	8
y	-0,9	1,2	2,8	7,1	10,8	21
x^2	1	0	1	9	25	36
xy	0,9	0	2,8	21,3	54	79

За таблицею складаємо систему рівнянь при $n = 5$:

$$\begin{cases} 36k + 8b = 79, \\ 8k + 5b = 21. \end{cases}$$

Домножимо друге рівняння на (-1,6) і додамо до першого. Одержимо:

$$\begin{cases} 23{,}2k = 45{,}4 \\ 8k + 5b = 21. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1{,}96 \\ b = 1{,}06. \end{cases}$$

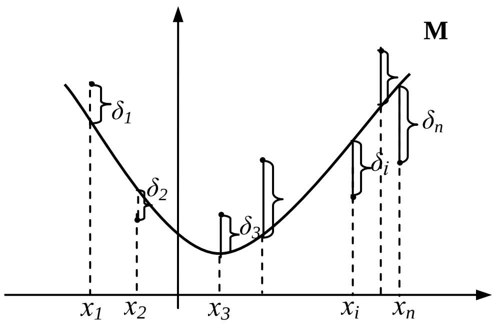
Відповідь: $y = 1{,}96x + 1{,}06.$

§12. Побудова емпіричних формул у випадку нелінійної залежності

12.1. Параболічна залежність

Нехай залежність між змінними величинами задається формулою $y = ax^2 + bx + c$. Така залежність називається параболічною. Скористаємося методом найменших квадратів для знаходження коефіцієнтів a, b, c.

Допустимо, що нам задана емпірична таблиця, за якою будуємо малюнок (мал.13).



Мал.13

За аналогією з лінійною залежністю розглянемо суму квадратів нев'язок:

$$F(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2,\ \text{де}\ \delta_i=\overline{y_i}-y_i,\ \text{а}\ \overline{y}_i=ax_i^2+bx_i+c,\ \ i=1,2,...,n.$$

Підставивши замість δ_i їх значення в $F(a,b,c)$, отримаємо:

$$F(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2.$$

Накладемо вимогу, щоб функція $F(a,b,c)$ досягла мінімуму, і запишемо необхідну умову існування екстремуму:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(a,b,c)}{\partial a}=0,\\ \dfrac{\partial F(a,b,c)}{\partial b}=0,\\ \dfrac{\partial F(a,b,c)}{\partial c}=0.\end{cases}$$

Розписавши систему рівнянь в розгорнутому вигляді і виконавши відповідні елементарні перетворення , одержимо нормальну систему рівнянь для випадку параболічної залежності:

$$\begin{cases}a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2y_i,\\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy,\\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+c\cdot n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

12.2. Нелінійні залежності, які зводяться до лінійних. Гіперболічна залежність

Нехай залежність між змінними *x* і *y*, які задані емпіричною таблицею, задається формулою

$$y=\frac{ax}{1+bx.}$$

Така залежність **називається гіперболічною**. Виконаємо перетворення змінних:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{ax}+\frac{b}{a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{x}+\frac{b}{a}.$$

Введемо нові позначення: $\overline{x}=\frac{1}{x}$; $\overline{y}=\frac{1}{y}$; $\frac{1}{a}=a_1$; $\frac{b}{a}=b_1$.

Тоді вихідне рівняння можна записати у вигляді: $\overline{y}=a\overline{x}+b_1$.

Очевидно, що залежність між змінними величинами $\overline{x}$ і $\overline{y}$ є лінійною. Потрібно знайти значення a_1 і b_1. Для цього складемо нову емпіричну таблицю.

$\overline{x}$	$\frac{1}{x_1}$	$\frac{1}{x_2}$	…	$\frac{1}{x_n}$
$\overline{y}$	$\frac{1}{y_1}$	$\frac{1}{y_2}$	…	$\frac{1}{y_n}$

Для цієї емпіричної таблиці складемо нормальну систему рівнянь для a_1 і b_1. Отримаємо:

$$\begin{cases} a_i\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{x}_i^{\,2}+b_1\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{x}_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{x}_i\,\overline{y}_i, \\ a_1\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{x}_i+b_1\cdot n=\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{y}_i. \end{cases}$$

Знайшовши із цієї системи значення a_1 і b_1, знаходимо відповідні значення a і b:

$$a=\frac{1}{a_1};\;\; b=ab_1=\frac{b_1}{a_1}.$$

12.3.Показникова залежність

Припустимо, що залежність між x і y задана формулою $y=Be^{kx}$, тобто зв'язок заданий за допомогою показникової функції. Потрібно знайти коефіцієнти B і k.

Прологарифмуємо вираз $y=Be^{kx}$ при основі e, одержимо: $\ln y=\ln B+kx.$ Ввівши позначення $\overline{x}=x,$ $\overline{y}=\ln y,$ $b=\ln B,$ отримаємо таку залежність: $\overline{y}=k\overline{x}+b.$ Для знаходження k і B можна скористатись нормальною системою рівнянь, перейшовши попередньо до нової емпіричної таблиці.

$\overline{x}$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$\overline{y}$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	$\ln y_3$	…	$\ln y_n$

Тоді B знаходимо за формулою $B = e^{b}$, знайдені значення B і k підставимо у вихідну формулу.

12.4. Степенева залежність

Нехай змінні x і y зв'язані формулою $y = Bx^{k}$. Прологарифмуємо цю функцію (при $x > 0$): $\ln y = \ln B + k \ln x$. Ввівши нові позначення $\overline{x} = \ln x$, $\overline{y} = \ln y$, $b = \ln B$, знову приходимо до лінійної залежності $\overline{y} = k\overline{x} + b$.

Щоб скористатись нормальною системою рівнянь для знаходження k і b, складаємо нову емпіричну таблицю.

$\overline{x}$	$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln x_3$	$\cdots$	$\ln x_n$
$\overline{y}$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	$\ln y_3$	$\cdots$	$\ln y_n$

Із нормальної системи знаходимо k і b, потім знаходимо B і одержані значення підставляємо в формулу $y = Bx^{k}$.

Приклад 2. За даною емпіричною таблицею знайти гіперболічну залежність між x і y:

x	0,5	1	3	5	6
y	0,72	1,05	1,3	1,36	1,42

Розв'язування. Зробивши відповідні позначення, отримаємо формулу $\overline{y} = a_1\overline{x} + b_1$. Складаємо нову розширену емпіричну таблицю для $\overline{x}$ і $\overline{y}$.

$\overline{x}$	2	1	0,33	0,2	0,17	3,7
$\overline{y}$	1,39	0,95	0,77	0,73	0,7	4,64
$\overline{x}^2$	4	1	0,109	0,04	0,029	5,198
$\overline{x}\,\overline{y}$	2,78	0,95	0,254	0,146	0,12	4,25

Для знаходження a_1 і b_1 розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5{,}198a_1 + 3{,}7b_1 = 4{,}25, \\ 3{,}7a_1 + \quad 5b_1 = 4{,}64. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5{,}198a_1 + 3{,}7b_1 = 4{,}25, \\ b_1 = -0{,}74a_1 + 0{,}92b. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2{,}68a_1 = 0{,}816, \\ b_1 = -0{,}74a_1 + 0{,}928. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \approx 0{,}304, \\ b_1 \approx 0{,}703. \end{cases}$$

Тоді $a = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{0,304} \approx 3,29;$ $\qquad b = \frac{b_1}{a_1} = \frac{0,703}{0,304} \approx 2,31.$

Таким чином отримуємо: $y = \frac{3,29x}{1 + 2,31x}.$

Приклад 3. Задана емпірична таблиця:

x	-1	0	1	2	3
y	0,75	2	5,3	15	40

Знайти зв'язок між x і y за формулою $y = Be^{kx}$.

Розв'язування. Згідно з теорією після введення нових позначень залежність між $\overline{x}$ і $\overline{y}$ матиме такий вигляд: $\overline{y} = k\overline{x} + b.$ Складаємо розширену емпіричну таблицю для $\overline{x}$ і $\overline{y}$:

$\overline{x}$	-1	0	1	2	3	5
$\overline{y}$	-0,218	0,693	1,668	2,708	3,689	8,540
$\overline{x}^2$	1	0	1	4	9	15
$\overline{x}\,\overline{y}$	0,218	0	1,668	5,416	11,067	18,39

При складанні таблиці використовуємо формулу $ln(x \cdot 10^p) = ln\,x + p\,ln10,$ значення $ln\,x$ беремо із відповідних логарифмічних таблиць, а $ln10 = 2,3026.$ Записуємо нормальну систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів прямолінійної залежності:

$$\begin{cases} 15k + 5b = 18,39, \\ 5k + 5b = 8,54. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10k = 9,85, \\ b = 1,708. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0,985, \\ b = 0,723. \end{cases}$$

За логарифмічними таблицями маємо $B = e^{0,723} \approx 2,07.$

Відповідь: $y = 2,07e^{0,985x}.$

Приклад 4. У таблиці задані витрати пального на 100 км (y) залежно від пробігу автомобіля (x) тис.км.

x	1	5	15	20	30
y	28,3	27,6	22,3	27,4	32,5

Обрати вигляд залежності між x і y і визначити параметри цієї залежності.

Розв'язування. Аналіз показує, що залежність між величинами x і y параболічна, тобто $y = ax^2 + bx + c.$

Виписуємо розширену таблицю:

x	1	5	15	20	30	71
y	28,3	27,6	22,3	27,4	325	138,1
x^2	1	25	225	400	900	1551
x^3	1	125	3375	8000	27000	38501
x^4	1	625	50625	160000	810000	1021251
xy	28,3	138	334,5	548	975	2023,8
x^2y	28,3	690	5017,5	10960	29250	45945,8

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1021251a + 38501b + 1551c = 45945{,}8, \\ 38501a + 1551b + 71c = 2023{,}8, \\ 1551a + 71b + 5c = 138{,}1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0{,}04, \\ b = -1{,}15, \\ c = 31{,}54. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо: $y = 0{,}04x^2 - 1{,}15x + 31{,}54$.

Розділ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Одним з основних завдань розділу **IV** диференціальне числення функцій однієї змінної, є завдання знаходження похідної від заданої функції. Розділ математики, який розв'язує обернену задачу – знаходження функції за її похідною (інтегрування), а також інші задачі, які безпосередньо зв'язані з інтегруванням називається інтегральним численням. Предметом вивчення даного розділу є інтеграли: визначений, невизначений, поверхневий, криволінійний, подвійний, потрійний і інші, їхні властивості, методи знаходження, їх застосування до розв'язування різних задач.

Інтегральне числення практично виникло із задач обчислення площ і об'ємів різних фігур і тіл. Вперше такі задачі намагались розв'язати вчені Стародавньої Греції (Евдокс Кнідський, Архімед та ін.). В XVI - XVII ст.., інтенсивний промисловий розвиток в Європі привів до розвитку інтегрального числення та його застосування. Праці вчених І. Кеплера, Б. Кавальєрі, П. Ферма, Е. Торрічеллі, Дж. Валліса, Б. Паскаля, Х. Гюйгенса поглибили теоретичні основи інтегрального числення. Вчені І. Ньютон та Г. Лейбніц створили ряд загальних методів знаходження інтегральних сум. Їх праці багато задач інтегрального числення звели до суто технічного рівня. Г. Лейбніц ввів зручну символіку, яка застосовується і тепер. А формула Ньютона-Лейбніца, яка зв'язала невизначений і визначений інтеграли, є центральною формулою інтегрального числення. Подальший історичний розвиток інтегрального числення пов'язаний з іменами І. Бернуллі, Л. Ейлера, П. Чебишева, О. Коші, В. Буняковського. Суттєвими для розвитку інтегрального числення є роботи видатного українського математика М.В. Остроградського. (12.09.1801-20.12.1861, народився в с. Пашенівка, Козельського р-ну Полтавської обл.),. Навчався в Харківському університеті, де його вчителями були Т.Ф. Осиповський та А.Ф. Павловський. Під час перебування в Парижі слухав лекції А.М.Ампера, О.Л.Коші, П.С.Лапласа, С.Д.Пуассона, Ж.Б.Ж.Фур'є. Друг В.Я.Буняковського. Перебуваючи в Петербурзі потоваришував з Т. Г. Шевченком. Основні праці М.В. Остроградського стосуються математичної фізики, математичного аналізу (формула зв'язку інтеграла по об'єму з інтегралом по поверхні, принцип розкладності функцій в ряд за власними функціями, принцип локалізації для тригонометричних рядів, правило перетворення змінних в подвійних інтегралах, метод інтегрування раціональних функцій і ін.), теоретичної механіки. Розв'язав деякі задачі з теорії чисел, алгебри, диференціальних рівнянь, теорії рядів.

§ 1. Невизначений інтеграл

1.1. Первісна функція та невизначений інтеграл

Задача знаходження для функції ***f(x)*** такої функції ***F(x)***, що $F'(x)=f(x)$ є основною задачею інтегрального числення. Операція інтегрування (знаходження *інтегралу*) є оберненою операцією до диференціювання (знаходження похідної). Термін ***інтеграл*** походить від латинського *integer* – цілий. Деколи вживають термін – *антипохідна*.

Означення 1. Функція F(x) називається первісною для функції f(x), якщо для довільного x з області визначення f(x),

$$F'(x)=f(x) \text{ або } dF(x)=f(x)dx. \qquad (6.1)$$

Наприклад,

а) для $f(x)=2\cos x$, первісною є $F(x)=2\sin x$, тому, що $F'(x)=(2\sin x)'=2\cos x=f(x)$.

б) для $f(x)=4x^3$, - $F(x)=x^4$, тому що $F'(x)=(x^4)'=4x^3=f(x)$.

Відшукання первісної є операція неоднозначна. Так $F(x)=x^4+5$, $F(x)=x^4-24{,}3$ і $F(x)=x^4+179$ і т.д.і взагалі, $F(x)=x^4+C$, де C - довільне стале число є первісні для $f(x)=4x^3$.

ТЕОРЕМА 1. Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ - дві первісні для функції *f(x)* на відрізку $[a;b]$, то різниця між ними дорівнює сталому числу.

Доведення. Нехай $F_1'(x)=f(x)$ і $F_2'(x)=f(x)$. Тоді $F_1'(x)-F_2'(x)=(F_1(x)-F_2(x))'=0$, а значить, за наслідком з теореми Лагранжа про скінченні прирости, що

$$F_1(x)-F_2(x)=C \text{, або } F_1(x)=F_2(x)+C. \qquad (6.2)$$

<u>Означення 2</u>. Сукупність усіх первісних для функції f(x) називається невизначеним інтегралом від цієї функції і позначається
$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (6.3)$$

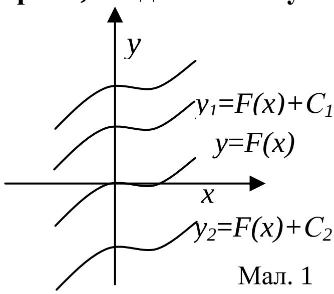
При цьому $F'(x) = f(x)$, ***f(x)*** - називається підінтегральною функцією, $f(x)dx$ -підінтегральним виразом, $\int$ - знак невизначеного інтеграла.

Операція відшукання первісної для даної функції називається інтегруванням. Таким чином, невизначений інтеграл - це множина всіх функцій, похідна яких дорівнює підінтегральній функції, а диференціал дорівнює підінтегральному виразу.

Базовою для інтегрального числення є така теорема:

ТЕОРЕМА 2. Якщо функція неперервна, то для неї існує первісна, отже і невизначений інтеграл.

(Доводиться в фундаментальних курсах вищої математики). З геометричної точки зору невизначений інтеграл - це сім’я кривих, кожна з яких утворюється зсувом однієї з них паралельно собі вверх або вниз. (мал. 1)



Мал. 1

1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла

ТЕОРЕМА 3. (Властивість 1) **Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції.**

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad (6.4)$$

Доведення. Згідно з означенням (6.2) $\int f(x)dx = F(x) + C$,

а тому $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = \left(F(x)\right)' + \left(C\right)' = f(x)$.

Отже похідна від первісної дорівнює підінтегральній функції.

ТЕОРЕМА 4. (Властивість 2) **Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу**

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \qquad (6.5)$$

Доведення. За означенням диференціала $d(f(x)) = f'(x)dx$.

Тому

$$d\left(\int f(x)dx\right)=d\left(F(x)+C\right)=d\left(F(x)\right)=F'(x)dx=f(x)dx.$$

ТЕОРЕМА 5. (Властивість 3) **Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції *F(x)* дорівнює цій функції з точністю до довільної сталої,**

$$\int d\left(F(x)\right)=F(x)+C. \qquad (6.6)$$

Доведення. Продиференціюємо ліву і праву частини рівності.

Одержимо: $d\int d\left(F(x)\right)=d\left(F(x)\right)=f(x)dx$ і

$$d(F(x)+C)=d(F(x))=F'(x)dx=f(x)dx.$$

Праві частини рівностей однакові. Значить рівні й ліві. Теорему доведено.

Аналогічно, диференціюванням лівої і правої частин рівності, доводяться теореми 6 і 7.

ТЕОРЕМА 6. (Властивість 4). **Сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла.**

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \quad (k=const) \qquad (6.7)$$

ТЕОРЕМА 7. (Властивість 5) **Інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій**

$$\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx. \qquad (6.8)$$

1.3. Таблиця невизначених інтегралів

Інтегрування є операція, обернена до диференціювання. Тому формули інтегрування отримують з формул для знаходження похідних. А універсальність застосування формул інтегрування випливає з теореми про незалежність вигляду невизначеного інтеграла від вибору аргументу (інваріантність невизначеного інтеграла відносно змінної інтегрування).

ТЕОРЕМА 8. Нехай *f(x)* – деяка неперервна функція на даному проміжку, *x* – незалежна змінна, *F(x)* – її первісна, $\int f(x)dx=F(x)+C$ і нехай $u=\varphi(x)$ неперервно диференційована функція. Тоді $$\int f(u)du=F(u)+C. \qquad (6.9)$$

Доведення. Розглянемо інтеграл $\int f(u)du=\int f(u)u'dx$. В цьому випадку складна функція $F(u)=F(\varphi(x))$ є первісна для ***f(u)***.

Справді, внаслідок незалежності диференціала першого порядку від вибору незалежної змінної, одержуємо $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$. При цьому

$$\frac{d}{dx}\left[F(u)\right] = \frac{dF(u)}{du}\frac{du}{dx} = f(u)u'.$$

Тому, з справедливості формули (6.3), випливає справедливість формули

$$\int f(u)du = F(u) + C. \tag{6.9}$$

Отже формулами інтегрування можна користуватись при будь-якій змінній інтегрування. Використовуючи таблицю диференціалів основних елементарних функцій, виведемо деякі формули інтегрування. Інші виводяться аналогічно.

1) Інтегруючи формулу $dtgu = \frac{du}{\cos^2 u}$ одержимо

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C. \tag{6.10}$$

2) В випадку показникової функції, використовуємо формулу $d(a^u) = a^u \ln a du$. Інтегруючи цю рівність, одержимо $\int a^u \ln a du = \ln a \int a^u du = a^u + C_1$. І далі $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + \frac{C_1}{\ln a} = \frac{a^u}{\ln a} + C$. Внаслідок того, що *lna* величина стала то і $\frac{C_1}{\ln a}$ - теж довільна стала, яку прийнято записувати *C*.

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C. \tag{6.11}$$

3) Виведемо формулу інтегрування з формули $darctgu = \frac{du}{1+u^2}$.

Одержимо $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \int \frac{du}{a^2(1+\frac{u^2}{a^2})} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{u}{a}}{1+\frac{u^2}{a^2}} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$.

Отже $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C \qquad (6.12)$$

4) Інтегруючи формулу диференціювання

$$d\, arcsin\, u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

одержуємо $\int d\, arcsin\, u = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ або $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arcsin\, u + C$. Використовуючи цю формулу, будемо мати

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \int \frac{du}{a\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}} = \int \frac{d\frac{u}{a}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{a^2}}} = arcsin \frac{u}{a} + C .$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin \frac{u}{a} + C . \qquad (6.13)$$

5) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C ,\ (n \neq -1)$.

Для виведення цієї формули використовують формулу для знаходження диференціала $du^n = nu^{n-1}du$. Якщо показник степеня дорівнює $n+1$ формула запишеться так: $du^{n+1} = (n+1)u^n du$. Інтегруючи цю формулу (ліву і праву частину) і, зробивши перетворення, одержимо

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad (6.14)$$

6) Формули $$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C \qquad (6.15)$$

та $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln \left| u + \sqrt{u^2+a^2} \right| + C \qquad (6.16)$$

доводяться диференціюванням лівої і правої частин рівності.

Такий метод доведення формул можна використовувати для будь-якої формули інтегрування.

7) Доведемо справедливість формули $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$.

Нехай $x>0$. Тоді $|x| = x$ і $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$ Якщо $x<0$, то $|x| = -x$ і $(\ln|x| + C)' = \ln(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Формула доведена.

Для компактності всі формули зводять в таблицю.

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ	
$\int Cdx = C\int dx$	$\int du = u + C$
$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq 1$	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$
$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{u}{a} + C \end{cases}$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{u}{a} + C \\ -\arccos \frac{u}{a} + C \end{cases}$
$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$

1.4. Методи обчислення інтегралів

◙ ***Безпосереднє інтегрування***

Безпосереднє інтегрування, це метод, який полягає в прямому застосуванні табличної формули і властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад 1. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

Використали формулу $\int \sin u du = -\cos u + C$.

Приклад 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} = ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|+C$.

Для знаходження цього інтеграла використано формулу

$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right|+C$.

Приклад 3. $\int x^3\sqrt[5]{x^2}dx = \int x^{\frac{17}{5}}dx = \frac{5}{22}x^{\frac{22}{5}}+C$.

В даному випадку, після елементарних перетворень, інтегруємо за формулою $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha \neq 1$.

◙ ***Метод розкладу***

Метод розкладу полягає в тому, що інтеграл розкладають на суму (різницю) табличних інтегралів.

Приклад 4.

$$\int (3\cos x - 5\cdot 2^x + \frac{1}{x})dx = \int 3\cos x dx - \int 5\cdot 2^x dx + \int \frac{dx}{x} =$$

$$= 3\sin x - 5\frac{2^x}{ln 2} + ln\, x + C .$$

При інтегруванні цього виразу враховано те, що сталий множник виноситься за знак інтеграла, а також те, що сума довільних сталих інтегрування є теж стала і її записують як одну.

◙ ***Метод підстановки (метод заміни змінної).***

Метод полягає в тому, що вводиться нова змінна $x = \varphi(t)$, або $t = \psi(x)$. Вдалою заміною часто вдається суттєво спростити інтеграл і навіть звести його до табличного.

Нехай $x = \varphi(t)$ - диференційована функція від t, похідна $\varphi'(t)$ якої зберігає знак на проміжку інтегрування.

Формулу заміни змінної $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ одержуємо на основі властивості інваріантності невизначеного інтеграла (теорема 8) і, врахувавши, що $dx = \varphi'(t)dt$. Для доведення продиференціюємо праву і ліву частини формули

$d\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

$d\int f(x)dx = f(x)dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Формула доведена.

Приклад 5. Знайти $\int tg(x-3)dx$.

Розв'язування. При інтегруванні даного виразу вводимо заміну $t=cos(x-3)$. Тоді $dt=dcos(x-3)=-sin(x-3)dx$. Одержуємо

$$\int tg(x-3)dx=\int\frac{sin(x-3)dx}{cos(x-3)}=-\int\frac{dt}{t}=-ln|t|+C=-ln|x-3|+C .$$

Приклад 6. Знайти $\int e^{x^2+3}xdx$.

Розв'язування. Вводимо заміну $x^2+3=t$. Визначаємо $dt=2xdx$. Врахувавши, що $xdx=\frac{dt}{2}$, одержуємо

$$\int e^{x^2+3}xdx=\int e^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2+3}+C .$$

Розглянемо ще ***дві важливі формули***, які суттєво пришвидшують інтегрування:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (6.17)$$

та

$$\int\frac{u'(x)}{u(x)}dx=ln|u(x)|+C . \qquad (6.18)$$

Виведемо їх. Якщо $\int f(u)du=F(u)+C$ і $u=ax+b$ - лінійна функція від x, то $du=d(ax+b)=adx$. Підставивши в вираз для інтеграла, одержимо $\int f(ax+b)d(ax+b)=a\int f(ax+b)dx=F(ax+b)+C$.

З останньої рівності випливає, що

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C .$$

Друга формула виводиться на основі формули $\int\frac{du}{u}=ln|u|+C$ з врахуванням того, що $du(x)=u'(x)du$.

Приклад 7. $\int e^{5x-6}dx=\frac{1}{5}e^{5x-6}+C$,

Приклад 8. Знайти $\int\frac{1}{(x+8)ln(x+8)}dx$.

Розв'язування.

$$\int\frac{1}{(x+8)ln(x+8)}dx=\int\frac{(ln(x+8))'}{ln(x+8)}dx=ln|ln(x+8)|+C .$$

◙ ***Метод інтегрування частинами***

Нехай задано дві неперервно диференційовані функції $u(x)$ і $v(x)$. Розглянемо диференціал добутку: $d(u\cdot v)=udv+vdu$. Проінтегруємо цей вираз $\int d(u\cdot v)=\int udv+\int vdu$. Перетворивши одержуємо формулу інтегрування за частинами:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (6.19)$$

Застосовуючи цю формулу, підінтегральний вираз $f(x)dx$ подають у вигляді добутку множників u і dv. Для даного методу має велике значення правильний вибір функцій u і v. Необхідно, щоб множник dv був виразом, який інтегрується. Є декілька видів інтегралів, для яких правила вибору функцій u і v відомі.

а) $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx, \int P_n(x)sin(\alpha x)dx, \int P_n(x)cos(\alpha x)dx$.

Підінтегральний вираз містить добуток многочлена на тригонометричну, або многочлена на показникову функції. Вибираємо за u многочлен, а за dv - вираз, що залишився.

Приклад 9. Обчислити $\int x\sin 3xdx$.

Розв'язування. Застосовуємо метод інтегрування за частинами (6.19): $\int udv=uv-\int vdu$. Вибираємо: $u=x$, $dv=sin3xdx$.

Тоді $du=dx$, $v=\int \sin 3xdx = -\frac{1}{3}\cos 3x$. Одержуємо

$$\int x\sin 3xdx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3xdx = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

б) $\int P_n(x)\ln xdx, \int P_n(x)\arcsin xdx, \int P_n(x)\arccos xdx,$

$\int P_n(x)arctgxdx, \int P_n(x)arcctgxdx$.

Підінтегральний вираз - добуток многочлена на логарифмічну або многочлена на аркфункцію. За dv беремо добуток многочлена на dx, а за u логарифмічну або аркфункцію.

Приклад 10. Обчислити $\int arctg\,xdx$

Розв'язування. За u беремо $arctgx$, за dv - dx. Тоді $du=\frac{dx}{1+x^2}$, а $v=x$, і за формулою інтегрування за частинами

$$\int arctg\,x dx = x arctg x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x arctg x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C.$$

в) $\int e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx, \int e^{\alpha x}\cos(\alpha x)dx$.

В цьому випадку вибір u і v несуттєвий.

Приклад 11. Знайти $\int e^{3x}\sin x dx$.

Розв'язування. Виберемо $u = e^{3x}$, а $dv = \sin x dx$. Тоді $du = 3e^{3x}dx$, $v = -\cos x$. Отже

$$\int e^{3x}\sin x dx = -e^{3x}\cos x + 3\int e^{3x}\cos x dx,$$

$\int e^{3x}\cos x dx$ - інтегруємо за частинами. Знову виберемо $u = e^{3x}$. Тоді $dv = \cos x dx$, $v = \sin x$. Одержуємо

$$\int e^{3x}\sin x dx = -e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\sin x - 9\int e^{3x}\sin x dx.$$

Шуканий інтеграл є в правій і в лівій частинах рівності. Визначимо його: $10\int e^{3x}\sin x dx = -e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\sin x$.

Отже $$\int e^{3x}\sin x dx = \frac{-e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\sin x}{10} + C.$$

Такі інтеграли інколи називають циклічними або коловими. При їх інтегруванні обов'язково за u двічі вибирати **ту ж саму функцію**.

Зауваження: В випадку, якщо підінтегральний вираз є добутком многочлена на одну з розглянутих функцій, можна інтеграл розкласти на суму декількох інтегралів. Наприклад,

$$\int (2x^2 - 3x + 2)e^{2x}dx = \int 2x^2e^{2x}dx - \int 3xe^{2x}dx + \int 2e^{2x}dx.$$

1.5. Інтегрування раціональних дробів

Функціями, які завжди інтегруються, є раціональні дроби. Нехай $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ і $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$ два многочлени з дійсними коефіцієнтами. Вираз $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називається раціональним дробом.

Якщо степінь чисельника менша за степінь знаменника, то дріб називається **правильним**. Якщо ж степінь чисельника більша або дорівнює степеневі знаменника то дріб називається **неправиль-ним**. Так, наприклад, $\dfrac{5x^3-4x+7}{2x^5-6x^2}$ - правильний дріб, а дріб

$\dfrac{7x^5-5x^3+3x-9}{6x^2+8x-4}$ - неправильний.

<u>Теорема Вейєрштраса про наближення</u>. Будь-яку функцію *f(x)*, неперервну на (*a*,*b*), можна з наперед заданою довільною похибкою замінити многочленом

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n\,.$$

Тобто, практично, багато інтегралів можна звести до інтегрування раціональних функцій. З алгебри відомо, що всякий многочлен можна розкласти на добуток множників виду ($x-b$) та (x^2+px+q), так званих незвідних многочленів, де (x^2+px+q) – квадратний тричлен, який немає дійсних коренів. І всякий правиль-ний дріб можна розкласти на суму простих:

$$\frac{A}{x-b},\ \frac{B}{(x-b)^k},\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r}. \qquad (6.20)$$

Це роблять методом невизначених коефіцієнтів.

◙ ***Метод невизначених коефіцієнтів***

Метод невизначених коефіцієнтів дає алгоритм для знаход-ження коефіцієнтів розкладу правильного раціонального дробу на суму простих.

Нехай

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_kx^k}{(x-\alpha)^m...(x-\beta)^n...(x^2+px+q)^l...(x^2+rx+s)^t}=$$

$$=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+...+\frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+...+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+...+$$

$$+\frac{B_n}{(x-\beta)^n}+...+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}+$$

$$...+\frac{E_1x+F_1}{x^2+rx+s}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+rx+s)^2}+...+\frac{E_lx+F_l}{(x^2+rx+s)^t}. \qquad (6.21)$$

Зводимо праву частину рівності до спільного знаменника. Прирівнюємо відповідні коефіцієнти чисельника лівої частини з коефіцієнтами чисельника правої. Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язки її є коефіцієнтами розкладу.

Приклад 12.

$$\frac{5x^3+3x-9}{(x-6)^2(x+4)(x^2+3x+11)^3}=\frac{A_1}{x-6}+\frac{A_2}{(x-6)^2}+\frac{B}{(x+4)}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+3x+11}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+3x+11)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+3x+11)^3}.$$

Це приклад розкладу правильного раціонального дробу на суму простих, де A_1, A_2, B, M_i, N_i-невизначені коефіцієнти.

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int \frac{9x+8}{x^3+x-10}dx$.

Розв'язування. $\frac{9x+8}{x^3+x-10}$ - правильний дріб. Розкладаємо знаменник на добуток незвідних множників:

$x^3+x-10=(x-2)(x^2+2x+5)$. Для рівняння $x^2+2x+5=0$, $D=4-20<0$. Тому рівняння немає дійсних коренів.

Отже $\frac{9x+8}{x^3+x-10}=\frac{9x+8}{(x-2)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+5}$.

Звівши до спільного знаменника і прирівнявши чисельники одержимо: $9x+8=(A+M)x^2+(2A-2M+N)x+5A-2N$.

Прирівнюючи відповідні коефіцієнти отримуємо:

$$\begin{cases} A+M=0, \\ 2A-2M+N=9, \\ 5A-2N=8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-M, \\ -4M+N=9, \\ -5M-2N=8. \end{cases}$$

$N=9+4M;\ -13M-18=8;\ -13M=26;\ M=-2;\ N=1;\ A=2$.

Ми одержали інтеграли від дробів (6.20). Отже:

$$\int\frac{9x+8}{x^3+x-10}dx=\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{-2x+1}{x^2+2x+5}\right)dx=\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{-2x+1}{x^2+2x+5}dx$$

Знайдемо, відповідні простим дробам (6.20) інтеграли, а потім завершимо приклад, використавши одержані результати.

◙ ***Інтеграли від найпростіших раціональних дробів***

$$a)\int\frac{Adx}{x-b}=A\ln|x-b|+C. \qquad (6.21)$$

При розв'язуванні використано формулу (6.7) та табличний інтеграл $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C$.

$$б)\ \int \frac{Bdx}{(x-b)^k} = B\int (x-b)^{-k}dx = B\frac{(x-b)^{-k+1}}{-k+1} + C . \qquad (6.22)$$

$$в)\ \int \frac{Mx+N}{x^2+px+g}dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+(N-\frac{Mp}{2})}{x^2+px+g}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+g}dx +$$

$$+(N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+g} = \frac{M}{2}ln|x^2+px+g| + (N-\frac{Mp}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(g-\frac{p^2}{4})} =$$

$$= \frac{M}{2}ln|x^2+px+g| - \frac{2N-Mp}{2\sqrt{\frac{4g-p^2}{4}}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4g-p^2}} + C. \qquad (6.23)$$

Приклад 14. Знайти $\int \frac{2x-2}{x^2-4x+8}dx$.

Використовуючи формулу (6.23) запишемо

$$\int \frac{2x-2}{x^2-4x+8}dx =$$

$$= ln|x^2-4x+8| - \frac{4}{4}arctg\frac{2x-4}{2} + C = ln|x^2-4x+8| - arctg\frac{x-2}{2} + C .$$

Проте, на практиці, цю громіздку формулу застосовують рідко а інтеграл шукають, виділивши в знаменнику повний квадрат.

$x^2-4x+8 = x^2-4x+4+4 = (x-2)^2+2^2$. Зробимо заміну ***(x-2)=u.***

Тоді $\int \frac{2x-2}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{2u+2}{u^2+4}du = \int \frac{2u}{u^2+2^2}du + \int \frac{2}{u^2+2^2}du =$

$$= ln|u^2+4| + arctg\frac{u}{2} + C = ln|(x-2)^2+4| + arctg\frac{x-2}{2} + C .$$

г) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+g)^k}dx$. Виділивши в знаменнику повний квадрат, визначаємо заміну: $x = t\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}$, $dx = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}dt$.Ввівши її, одержуємо суму двох

виразів: $M(q-\frac{p^2}{4})\int \frac{tdt}{(t^2+1)^k} + (N - M\cdot\frac{p}{2})\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$.

Інтеграл $\int \frac{tdt}{(t^2+1)^k}$ знаходимо, наприклад, новою заміною $t^2+1=u$, $tdt=du$.

Інтеграл $\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$ знайдемо, вивівши рекурентну формулу.

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}} = \int (t^2+1)^{-k+1}dt = t(t^2+1)^{-k+1} - \int td(t^2+1)^{-k+1} =$$

$$= t(t^2+1)^{-k+1} + (k-1)\int \frac{2t^2dt}{(t^2+1)^k} = t(t^2+1)^{-k+1} + \text{ і далі}$$

$$+2(k-1)\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}} - 2(k-1)\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}.$$

$\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{2(k-1)(t^2+1)} + \frac{2k-3}{2k-2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k-1}}$. Це є рекурентна формула, якою понижується порядок знаменника. Використавши її (***к-1***) раз приходимо до інтеграла $\int \frac{dt}{t^2+1}$, який є табличним. $\int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C$.

Ми розглянули чотири випадки до яких зводиться інтегрування правильних раціональних дробів.Завершимо розв'язування прикладу 13, використовуючи виведені формули:

$$\int \frac{2}{x-2}dx = 2\ln|x-2| + C.$$

$\int \frac{-2x+1}{x^2+2x+5}dx = -2\ln|x^2+2x+5| - \frac{3}{2}arctg\frac{x+2}{2} + C$. Отже:

$$\int \frac{9x+8}{x^3+x-10}dx = 2\ln|x-2| - 2\ln|x^2+2x+5| - \frac{3}{2}arctg\frac{x+2}{2} + C.$$

◙ ***Інтегрування неправильних раціональних дробів***

Інтегрування неправильних раціональних дробів зводиться (після виділення цілої частини дробу) до інтегрування многочлена та інтегрування правильного раціонального дробу.

Приклад. 15 . Обчислити інтеграл $\int \frac{x^3-1}{x^2-x-2}dx$.

Розв'язування. Раціональний дріб неправильний. Виділяємо цілу частину і записуємо його в вигляді суми цілої і дробової частин.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3-1 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2} x^3-x^2-2x & x+1 \\ \cline{1-1} -\,x^2+2x-1 & \\ x^2-x-2 & \\ \cline{1-1} 3x+1 & \end{array}$$

$$\frac{x^3-1}{x^2-x-2}=x+1+\frac{3x+1}{x^2-x-2}.$$ Тоді

$$\int\frac{x^3-1}{x^2-x-2}dx=\int(x+1)dx+\int\frac{3x+1}{(x+1)(x-2)}dx.$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів розкладаємо дріб на суму простих: $\frac{3x+1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$;

$$3x+1=Ax-2A+Bx+B;\ 3x+1=(A+B)x+(-2A+B);$$

$\begin{cases} A+B=3, \\ -2A+B=1. \end{cases}$ $3A=2$; $A=\frac{2}{3}$; $B=\frac{7}{3}$. Одержимо:

$$\int\frac{3x+1}{(x+1)(x-2)}dx=\int\frac{\frac{2}{3}}{x+1}dx+\int\frac{\frac{7}{3}}{x-2}dx=\frac{2}{3}ln|x+1|+\frac{7}{3}ln|x-2|+C.$$

Отже $\int\frac{x^3-1}{x^2-x-2}dx=\frac{x^2}{2}+x+\frac{2}{3}ln|x+1|+\frac{7}{3}ln|x-2|+C$.

◙ ***Метод Остроградського інтегрування раціональних функцій.***

Це метод виділення алгебраїчної частини в невизначених інтегралах від раціональних функцій. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$- многочлени з дійсними коефіцієнтами. Степінь $P(x)$ менша за степінь $Q(x)$. Тобто $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильний раціональний дріб і

$$Q(x)=(x-\alpha)^m...(x-\beta)^n...(x^2+px+q)^l...(x^2+rx+s)^t.$$

Нехай, також $Q_1(x)=(x-\alpha)^{m-1}...(x-\beta)^{n-1}...(x^2+px+q)^{l-1}...(x^2+rx+s)^{t-1}$ і $Q_2(x)=(x-\alpha)...(x-\beta)...(x^2+px+q)...(x^2+rx+s)$ -многочлени. То існують многочлени $P_1(x)$, $P_2(x)$, степені яких менші за степені $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ відповідно, такі що

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \quad (6.25)$$

Коефіцієнти многочленів $P_1(x)$ і $P_2(x)$ можна знайти методом невизначених коефіцієнтів продифиренціювавши (6.25). $Q_1(x)$ є найбільшим спільним дільником $Q(x)$ і його похідної $Q'(x)$ і можна визначити за допомогою метода Евкліда. $Q_2(x) = Q(x)/Q_1(x)$. Формула зводить інтегрування правильного раціонального дробу до інтегрування правильного раціонального дробу, знаменник якого має прості корені.

Приклад 16 . Знайти інтеграл $\int\frac{1}{(x^3+1)^2}dx$.

Розв'язування. Розкладемо многочлен (x^3+1) на прості множники $(x^3+1)=(x+1)(x^2-x+1)$. Тоді, за методом Остроградського, запишемо

$$\int\frac{1}{(x^3+1)^2}dx=\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}+\int\frac{D}{x+1}dx+\int\frac{Mx+N}{x^2-x+1}dx\ .$$

Диференціюємо цей вираз і зводимо до спільного знаменника.

Прирівнюємо чисельники:

$$1=-Ax^4-2Bx^3-3Cx^2+2Ax+B+D(x^5-x^4+x^3+x^2-x+1)+$$

$+(Mx+N)(x^4+x^2+x+1)$. Прирівнюючи відповідні коефіцієнти, одержуємо $0=D+N$; $0=-A-D+M+N$; $0=-2B+D+N$; $0=-3C+D+M$; $0=2A-D+M+N$; $1=B+D+N$.

Розв'язком цієї системи рівнянь є: $A=C=0$; $B=1/3$; $D=2/9$; $M=-2/9$; $N=4/9$.

Отже $\int\frac{1}{(x^3+1)^2}dx=\frac{x}{3(x^3+1)}+\int\frac{2}{9(x+1)}dx+\int\frac{2(x-2)}{9(x^2-x+1)}dx=$

$$=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C. \quad (x\neq-1).$$

1.6. Інтегрування тригонометричних функцій

При інтегруванні тригонометричних функцій важливо вміти використовувати тригонометричні формули, вдало підібраною заміною або підстановкою, звести інтеграл до простішого (дробово-раціонального виразу), а в результаті і до табличного. Є деякі види інтегралів (проте не всі) для яких є правила їх знаходження.

а) *Інтеграли виду* $\int \sin^m x\cdot\cos^n xdx.$

Якщо хоча б одне із чисел m або n додатне ціле непарне число, наприклад m, то вводимо заміну $\cos x=t$. Тоді

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-t^2}\ ,\ dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\ .$$

Якщо ж n – додатне непарне, то $\sin x=t$,

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-t^2}\ ,\ dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\ .$$

Приклад 17. Знайти $\int\sin^3 x\cdot\cos^2 xdx$

Розв'язування. $\int\sin^3 x\cdot\cos^2 xdx=\int\sin^2 x\cos^2 x\cdot\sin xdx=$

$$=-\int(1-t^2)t^2\sqrt{1-t^2}\ \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\int(t^2-t^4)dt=$$

$$=-(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5})+C=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$

Якщо m та n парні невід'ємні числа, то понижають степені за формулами:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\ .$$

Приклад 18. Знайти $\int cos^2 xdx$

Розв'язування.

$$\int cos^2 xdx = \int \frac{1+cos\,2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1+cos\,2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}sin\,2x\right) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin\,2x + C.$$

б) *Інтеграли виду* $\int sin\,mx\,cos\,nxdx$, $\int sin\,mx\,sin\,nxdx$, $\int cos\,mx\,cos\,nxdx$.

Ці інтеграли спрощуються застосуванням формул перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\int sin\,mx\,cos\,nxdx = \frac{1}{2}\int (sin(m+n)x + sin(m-n)x)dx,$$

$$\int sin\,mx\,sin\,nxdx = \frac{1}{2}\int (cos(m-n)x - cos(m+n)x)dx,$$

$$\int cos\,mx\,cos\,nxdx = \frac{1}{2}\int (cos(m-n)x + cos(m+n)x)dx.$$

Такі інтеграли мають широке застосування в теорії рядів Фур'є.

Приклад 19. Знайти $\int sin5x\,cos3xdx$.

$$\int sin5x\,cos3xdx = \frac{1}{2}\int (sin8x + sin2x)dx = -\frac{1}{16}cos8x - \frac{1}{4}cos2x + C.$$

в) *Інтеграли виду* $\int R(sin\,x, cos\,x)dx$,

універсальна тригонометрична підстановка.

Для інтегралів виду $\int R(sin\,x, cos\,x)dx$, де $R(sin\,x, cos\,x)$ - раціональна функція відносно $sin\,x, cos\,x$, часто застосовують універсальну підстановку. Це підстановка

$$tg\frac{x}{2} = t. \qquad (6.26)$$

Тоді: $sin\,x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $cos\,x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,

$\dfrac{x}{2} = arctgt$, $x = 2arctgt$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Приклад 20. Знайти $\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{2dt}{2t^2+2t}=\int \frac{dt}{t^2+t}=\int \frac{dt}{t(t+1)}$$

і далі інтегруємо як раціональний дріб. (Пункт 6.1.5.)+

Інтегрування тригонометричних функцій та інтегрування ірраціональних функцій, вдало підібраною заміною, часто зводиться до інтеграла від раціонального дробу, який завжди інтегрується.

1.7. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Інтеграли виду $\int R(x,\sqrt[m]{ax+b},...,\sqrt[n]{ax+b})dx,$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки $ax+b=t^k,$ де k - найменше спільне кратне чисел $m,..., n.$

Приклад 21. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt{x-3}}$.

Розв'язування. Використано заміну: $x-3=t^6$, $dx=6t^5dt$, $t=\sqrt[6]{x-3}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt{x-3}}=\int \frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=6\int \frac{t^5}{t^2(t+1)}dt=6\int \frac{t^3}{t+1}dt=...$$

А далі шукаємо інтеграл від раціональної функції.(Пункт 6.1.5.)

Інтеграли $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ можна звести, виділивши під знаком радикала повний квадрат, до трьох таких інтегралів:

$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$ вводимо заміну $x=a\sin t$ ($x=a\cos t$).

$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,$ заміна $x=a\,tg\,t$ ($x=a\,ctg\,t$).

$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$ заміна $x=\frac{a}{\sin t}$ ($x=\frac{a}{\cos t}$).

Для інтегралів виду $\int R\left(x,\sqrt{x^2\pm a^2}\right)dx,$ часто використовують підстановку (підстановка Ейлера) $t=x+\sqrt{x^2\pm a^2}$,

$$x=\frac{1}{2}(t\mp\frac{a^2}{t}),\ \sqrt{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}(t\pm\frac{a^2}{t}),\ dx=\frac{1}{2}(1\pm\frac{a^2}{t^2})dt.$$

На закінчення треба зауважити, що різні способи інтегрування можуть привести до різних аналітичних виразів первісної. Проте ми отримуємо вирази, які відрізняються хіба, що на сталу.

1.8. Поняття про невизначений інтеграл, що не має первісних в елементарних функціях

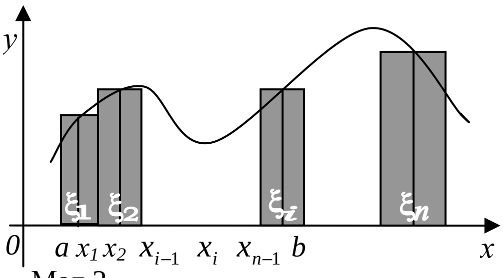
До цього моменту ми вдало розв'язували задачу знаходження невизначеного інтеграла для функції. Проте, ми побачили, що це завдання не є простим. Більше того, доведено, що є ряд функцій, первісна для яких не може бути представлена, як вираз утворений "елементарними" функціями. Наведемо,як приклад, деякі такі інтеграли: $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$ ($|k|<1$).

§ 2. Визначений інтеграл

При розв'язуванні деяких важливих задач необхідно знаходити нескінченну суму нескінченно малих доданків. Це приводить до одного з центральних понять математики – визначеного інтеграла.

2.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

◙ ***Задача про площу криволінійної трапеції***



Мал.2

Знайдемо площу фігури, яка обмежена графіком неперервної функції $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$, віссю абсцис, та прямими $x=a$ та $x=b$. Називатимемо її криволінійною трапецією (мал. 2). Для простоти, розглянемо випадок, коли $f(x)\geq 0$ на даному відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо проміжок $[a,b]$ на n відрізків $[x_{i-1},x_i]$ (*i=1,2,3…n)*, $x_0=a$, $x_n=b$. На кожному з відрізків $[x_{i-1},x_i]$ виберемо по довільній точці $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ (*i=1,2,3…n)*. Тоді площа *i*- го прямокутника - $s_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, а площа східчастої фігури даного розбиття $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, де $f(\xi_i)$ значення функції f в точці ξ_i, а $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Якщо ж тепер кількість точок розбиття збільшувати, одночасно зменшуючи $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, то площу S трапеції можна записати, як $S = \lim\limits_{\max \Delta x_i = 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Доведено, що вибір точок розбиття на площу S не впливає.

◙ ***Задача про об'єм виробництва із змінною продуктивністю праці***

Аналізуючи будь-яке виробництво видно, що продуктивність є величина змінна і в різні моменти різна. Нехай продуктивність за період від 0 до t (певний період часу) описується функцією $f(t)$. Розіб'ємо проміжок $[0;t]$ на n проміжків тривалістю Δt_i і вважаючи продуктивність за час Δt_i сталою і рівною $f(t_i)$ визначимо, приблизно, об'єм продукції виробленої за проміжок часу $(t_k;\ t_l)$ як $K(k,l) = \sum_{k}^{l} f(t_i)\Delta t_i$. Тоді, збільшуючи кількість проміжків розбиття, одержуємо все точніші формули для обчислення об'єму виробленої продукції. Якщо ж $n \to \infty$ і $\Delta t_i \to 0$ то $K = \lim\limits_{i\to\infty} \sum_{i} f(t_i)\Delta t_i$.

2.2. Визначений інтеграл, як границя інтегральних сум

Проведемо міркування аналогічно до міркувань попереднього пункту. Для неперервної функції $f(x)$ визначеної на $[a,b]$, і для розбиття ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$) (мал.2.) запишемо суму

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (6.27)$$

Суму (6.27) називають **інтегральною сумою.** Введемо ще одну величину $\max\Delta x_i$ - це довжина найбільшого з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

<u>Означення 3</u>. Функція f(x) називається інтегровною на $[a,b]$, ***якщо існує скінчена границя*** $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, ***яка не залежить***

від того, яким чином проміжок $[a,b]$ поділений на часткові проміжки і яким чином вибираються точки ξ_i на цих часткових проміжках, тільки б довжина максимального з них прямувала до нуля. ($\max \Delta x_i \to 0$).

<u>Означення 4</u>. Число I називається границею інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, якщо для будь-якого довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що як тільки $\max \Delta x_i < \delta$, то виконується нерівність $\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon$, незалежно від вибору часткових проміжків $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \ldots \Delta x_n$ і точок ξ_i на цих проміжках.

<u>Означення 5</u>. Визначеним інтегралом від функції f(x) на проміжку $[a,b]$ називається границя $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Позначається $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Числа a і b називаються, відповідно, нижньою і верхнею межами інтегрування, а $[a,b]$ – проміжок інтегрування.

На основі цих означень можна записати, що

$S = \int_a^b f(x)dx$ - формула для знаходження площі фігури (мал. 2.) і

$K = \int_{t_k}^{t_l} f(t)dt$ - формула для знаходженння об'єму виробництва. (6.2.1)

Для границь інтегральних сум зберігаються багато властивостей границь послідовностей або функцій. Проте, з означення визначеного інтеграла не випливає, що будь-яка функція є інтегровна на будь-якому інтервалі. Є такі функції для яких не існує визначений інтеграл . Відповідь на питання про існування визначеного інтеграла дає така теорема:

ТЕОРЕМА 9. Якщо функція *f(x)* неперервна на замкненому проміжку $[a,b]$, то вона інтегровна на цьому проміжку, тобто для неї існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема доводиться в ширших курсах вищої математики.

ТЕОРЕМА 10. Якщо, на $[a,b]$ функція обмежена і має лише скінчене число точок розривів, то вона інтегровна на $[a,b]$.

Ця теорема дає можливість інтегрувати розривні функції.

Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ був означений для випадку $a < b.$

Доповнимо означення. Якщо $a > b$, то
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (6.28)$$

а якщо $a = b,$ то
$$\int_a^a f(x)dx = 0. \quad (6.29)$$

2.3. Основні властивості визначеного інтеграла

З означення $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ одержуємо:

Властивість 1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$ (6.30)

Властивість 2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$ (6.31)

Доведемо ще декілька інших властивостей.

ТЕОРЕМА 11. (*Властивість 3*) **Нехай c – проміжна точка проміжку $[a,b]$ $(a < c < b)$. Тоді виконується рівність**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$ **якщо всі три інтеграли** $\int_a^b f(x)dx, \int_a^c f(x)dx$ **і** $\int_c^b f(x)dx$ **існують.**

Доведення. За умовою $a < c < b$ і всі три інтеграли, про які йде мова, існують. Розіб'ємо проміжок $[a,b]$ на n часткових проміжків: $[a, x_1],[x_1, x_2],[x_2, x_3]...[x_{n-1}, b]$ з довжинами, відповідно $\Delta_1, \Delta_2,...,\Delta_n,$ так щоб точка c була точкою поділу. *(*Наприклад $x_m = c(m < n)).$ Тоді інтегральна сума $\sum(f(\xi_i)\Delta x_i)$, що відповідає проміжку $[a,b]$ розіб'ється на два доданки:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Перейшовши до границі при $max \Delta x_i \to 0$ одержимо

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (6.32)$$

ТЕОРЕМА 12. (*Властивість 4*) **Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.**

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx. \ (k=const) \qquad (6.33)$$

Доведення. За означенням $\int_a^b kf(x)dx =$

$$= \lim_{max \Delta x_i \to 0} \left[kf(\alpha_1)\Delta x_1 + kf(\alpha_2)\Delta x_2 + ... + +kf(\alpha_n)\Delta x_i \right] =$$

$$= \lim_{max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\alpha_i)\Delta x_i$$

На основі властивості границь, про те, що константу можна виносити за знак границі та означення інтеграла, одержуємо:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \lim_{max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx.$$

ТЕОРЕМА 13. (*Властивість 5*) **Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох неперервних функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій.**

Доведення. В загальному випадку все можна звести до

розгляду такого виразу $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx.$ (6.34)

За означенням інтеграла, і врахувавши властивість границь (пункт 3.4.1.), одержуємо

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \lim_{max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2) - f_3(\xi_3)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{maz \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i - \lim_{max \Delta x_1 \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_3(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx.$$

2.4. Теорема про середнє значення визначеного інтеграла.

ТЕОРЕМА 14. *(про середнє значення визначеного інтеграла).*

Якщо функція *f(x)* неперервна на проміжку $[a,b]$, то всередині нього знайдеться така точка *c*, що

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c). \tag{6.35}$$

Доведення. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a,b]$, то вона досягає своїх найбільшого і найменшого значення M і m на проміжку $[a,b]$. (пункт 3.6.2.) Розіб'ємо проміжок $[a,b]$ на n часткових проміжків довжиною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1,2,3,...,n).$

Оскільки $f(\xi_i) \geq m$ для будь-якого ξ_i з проміжку $[x_{i-1}, x_i]$, то $f(\xi_i)\Delta x_i \geq m\Delta x_i$. Врахувавши,що

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n = b - a.$$

Одержимо
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq m(b-a) \tag{6.36}$$

Аналогічно, $f(\xi_i) \leq M$, а тому $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq M(b-a)$ (6.37)

Об'єднавши ці дві нерівності (6.36) і (6.37), одержимо

$$m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq M(b-a).$$

Якщо $max\,\Delta x_i \to 0$ то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

або
$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M. \ (b>a)$$

Врахуємо теорему про те, що функція $f(x)$, неперервна на проміжку $[a,b]$ набуває на ньому всі проміжні значення між своїм найбільшим і найменшим значеннями, відповідно M і m. Нехай в точці c: $m \leq f(c) \leq M$ де $(a \leq c \leq b)$.

Тоді $\dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$, значить $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$ (6.38)

А це й треба було довести.

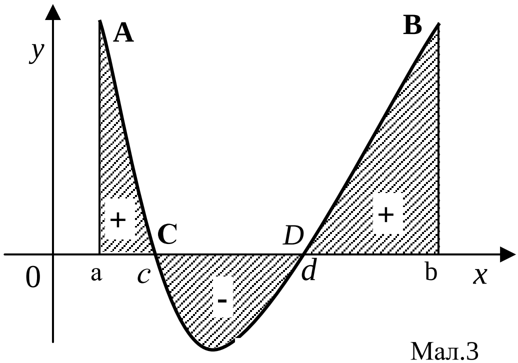
2.5. Геометричний зміст визначеного інтеграла.

Раніше ми вияснили, що площа криволінійної трапеції, яка обмежена зверху кривою $y = f(x),$ знизу – проміжком $[a,b]$ осі Ox $(a \le x \le b)$ і з бічних сторін – прямими $x = a$

і $x = в$, дорівнює: $S = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$ Це значить, що

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Якщо ж функція на $(a;b)$ змінює знак. На $(a;c)$ і $(d;b)$ – додатна, а на $(c;d)$ – від'ємна, то і відповідні значення інтегралів будуть додатними і від'ємним. (мал.3). Тому площу криволінійної трапеції, зображеної на малюнку , обчислюють за формулою:



Мал.3

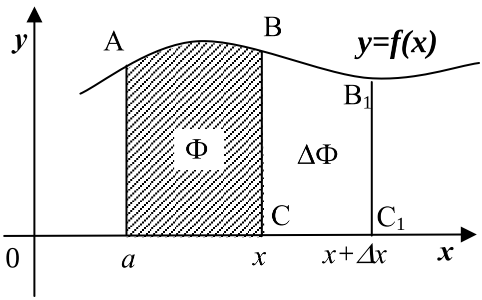
$$S = пл.aAC + пл.DbB + пл.CED = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_d^b f(x)dx - \int\limits_c^d f(x)dx.$$

Це потрібно враховувати при знаходженні площ за допомогою визначеного інтеграла і при обчисленні визначеного інтеграла. В випадку, якщо $y = f(x)$ - непарна функція то, $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, якщо ж – парна, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

2.6. Зв'язок невизначеного і визначеного інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца.

Одним з важливих моментів цього розділу є знаходження зв’язку між визначеним і невизначеним інтегралами. Невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ - це функція, а визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ - число. Який між ними зв’язок? Якщо величину b – замінити змінною x і розглянути $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$, як функцію , то для цього інтеграла виконується теорема, про властивість визна ченого інтеграла із змінною верхньою межею.

ТЕОРЕМА 15. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то похідна визначеного інтеграла $\int_a^x f(t)dt$ з змінною верхньою межею x по цій межі дорівнює значенню підінтегральної функції при $t = x$, тобто $$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x). \qquad (6.39)$$



Мал. 4

Доведення. Розглянмо функцію $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, де $f(t)$ –неперервна на $[a,b]$ функція. Доведемо, що $\Phi(x)$ має похідну $\Phi'(x) = f(x)$. Задамо змінній x приріст Δx. Тоді $\Phi(x)$ буде мати приріст $\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)$, який на малюнку 4 зображається площею криволінійної трапеції CBB_1C_1. Але $\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Тому $\Delta\Phi = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$.

На основі теореми (11) одержимо $\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$.

Значить $\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$. Застосовуючи теорему (14), знаходимо

$$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = [(x+\Delta x) - x]\cdot f(c) = \Delta x \cdot f(c),$$

де $x < \mathbf{c} < x + \Delta x$. Звідси випливає що $\quad \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)$. (6.40)

Спрямуємо Δx до нуля. Тоді $(x+\Delta x)$ буде прямувати до x, а значить і c прямуватиме до x. Внаслідок неперервності $f(x)$, одержимо $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c) = \lim\limits_{c\to x} f(c) = f(x)$.

Переходячи до границі в рівності (6.40), одержимо $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x)$. Тобто $\Phi'(x) = f(x)$.

Але $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, а тому $\dfrac{d\Phi}{dx} = \dfrac{d[\int_a^x f(t)dt]}{dx} = f(x)$.

Проте, базовою при обчисленні визначеного інтеграла, є наступна теорема.

ТЕОРЕМА 16. *(Ньютона-Лейбніца).* **Визначений інтеграл від неперервної функції $f(x)$ дорівнює різниці значень її первісної $F(x)$ при $x = b$ і, $x = a$ де a і b-нижня і верхня межі інтегрування, тобто має місце формула**

$$\int_a^b f(x)dt = F(b) - F(a). \tag{6.41}$$

Доведення. Розглянемо функцію $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

За теоремою 15 функція $\Phi(x)$ є первісною для $f(x)$ на проміжку $[a,b]$. Значить $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$. Але дві первісних для однієї й тієї ж функції відрізняються лише на константу.

Тобто $\Phi(x)=F(x)+C$.

Якщо ж $x=a$, одержимо $\int\limits_a^a f(t)dt=F(a)+C$.

Оскільки $\int\limits_a^a f(t)dt=0$ та $0=F(a)+C,$ то $F(a)=-C,\ C=-F(a).$

А отже $\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)-F(a).$

При $x=b$ одержимо $\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$.

Ця формула називається формулою Ньютона-Лейбніца і дає найпростіший метод для знаходження визначеного інтеграла.

Її прийнято записувати так: $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$

2.7. Методи обчислення визначеного інтеграла

В більшості випадків обчислення визначеного інтеграла зводиться до знаходження первісної для відповідного невизначеного інтеграла, а потім використовується формула Ньютона-Лейбніца. Тому всі методи, які використовуються для знаходження невизначеного інтеграла використовуються для знаходження визначеного інтеграла.

◙ ***Заміна змінної в визначеному інтегралі***

Нехай дано $\int\limits_a^b f(x)dx$, $f(x)$ - неперервна на **[*a*;*b*]**. Заміна змінної для визначеного інтеграла полягає в тому, що вводиться нова змінна, зв'язана з попередньою співвідношенням $x=\varphi(t)$ така, що $\varphi(t)$ - неперервно диференційована на **[*a*;*b*]**. Якщо при зміні t від α до β, x змінюється від a до b, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ і складна функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на відрізку **[*α*;*β*],**

то правильна формула $$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (6.42)$$

Приклад 22. Обчислити $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

Розв'язування. Вводимо нову змінну за формулою $x = 2\sin t$. Визначимо нові межі інтегрування. Якщо $x = 0,$ то $2\sin t = 0$ і $t = 0$ – нижня межа інтегрування. Якщо $x = 2,$ то $2\sin t = 2$ і $t = \frac{\pi}{2}$ - верхня межа інтегрування. Отже t буде змінюватись від **0** до $\frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = 2(t+\frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi .$$

◙ ***Метод інтегрування за частинами***

Полягає в застосуванні формули: $\int\limits_a^b udv = [uv]\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$ (6.43)

Приклад 23. Обчислити $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx.$

Розв'язування. Використаємо формулу інтегрування за частинами. Нехай $u = x,\ dv = e^{-x}dx.$ Одержимо $du = dx$, $v = -e^{-x}$.

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2.8. Наближене обчислення визначених інтегралів

Знаходженню інтеграла, присвячені всі попередні викладки цього розділу. Проте, як ми вже знаємо, є ряд функцій для яких первісну неможливо виразити в елементарних функціях. З іншого боку, в застосуванні визначеного інтеграла, не обов'язково мати йому відповідний невизначений інтеграл. Достатньо мати його значення або знайти його певне чисельне наближення. Розглянемо деякі методи наближеного обчислення визначених інтегралів.

◙ ***Розклад підінтегрального виразу***

При знаходженні визначеного інтеграла розкладають підінтегральну функцію за формулами Тейлора або Маклорена і інтегруванням розкладу знаходять відповідний інтеграла .

Приклад 24. Обчислити $\int_{-1}^{0}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}dx$.

$$\int_{-1}^{0}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1+\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+1)^2}{2!}+\frac{(x+1)^3}{3!}+\ldots-1}{x+1}dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{1!}+\frac{x+1}{2!}+\frac{(x+1)^2}{3!}+\ldots\right)dx=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{3\cdot 3!}+\ldots\approx 1{,}32\ .$$

◙ ***Інтегрування з допомогою таблиць***

Ряд інтегралів є добре вивчені і для них складені таблиці. Це так звані табульовані неелементарні “спеціальні” функції. Наприклад інтеграли Френеля: $C(x)=\int_{0}^{x}\cos\frac{\pi t^2}{2}dt$ і $S(x)=\int_{0}^{x}\sin\frac{\pi t^2}{2}dt$,

інтегральна показникова функція, інтегральні синус і косинус, функція Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, і ін..

◙ ***Інтеграли, для яких знайдено точне значення визначеного інтеграла, не знаходячи невизначеного інтеграла***

Наприклад $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}tg^{p}x\,dx=\frac{\pi}{2}(\cos\frac{p\pi}{2})^{-1}$ якщо $(-1<p<1)$,

$\int_{0}^{\pi}\ln\sin x\,dx=-\pi\ln 2$, і ін.

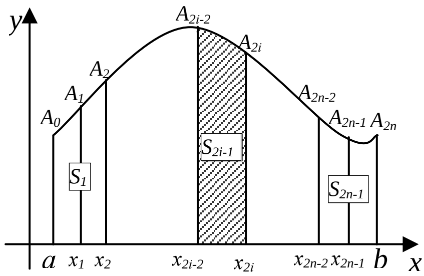
◙ ***Чисельне інтегрування***

Методи чисельного інтегрування дають наближене чисельне значення визначеного інтеграла, якщо можливо обчислити значення підінтегральної функції в деяких точках проміжку інтегрування.

Нехай треба знайти $\int_{a}^{b}f(x)dx$. Проміжок інтегрування $[a;b]$

розбивають на $2n$ проміжків однакової довжини Δ і знаходять значення функції $y_i=f(x_i)$ в точках розбиття $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_{2n}$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx S = S_1 + S_3 + S_5 + \ldots + S_{2i-1} + \ldots + S_{2n-1},$$



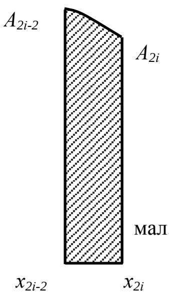
Мал. 5

де S_i площа криволінійної трапеції $(x_{2i-2}, A_{2i-2}, A_{2i}, x_{2i})$. Виокремимо криволінійну трапецію $(x_{2i-2}, A_{2i-2}, A_{2i}, x_{2i})$ (мал.6) і будемо шукати її площу. Якщо площу фігури (мал.7) $(x_{2i-2}, A_{2i-2}, A_{2i}, x_{2i})$ замінити площею прямокутника з основою $(x_{2i-2}\ x_{2i})$ то одержимо **формулу прямокутників** наближеного обчислення визначеного інтеграла.

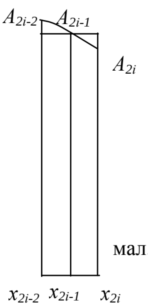
$$\int_a^b f(x)dx \approx S = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2i-1} + \ldots + y_{2n-1}) \qquad (6.44)$$

Якщо ж дугу A_{2i-2}, A_{2i} замінити відрізком A_{2i-2}, A_{2i} (мал.8) то фігура $(x_{2i-2}, A_{2i-2}, A_{2i}, x_{2i})$ – трапеція, і одержуємо формулу трапецій

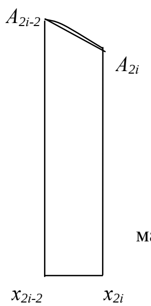
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_{2n}}{2} + y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\right) \qquad (6.45)$$



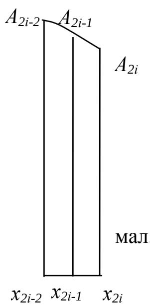
мал.6



мал.7



мал.8



мал.9

Замінивши дугу $A_{2i-2}, A_{2i-1}, A_{2i}$ частиною параболи, яка проходить через точки A_{2i-2}, A_{2i-1}, A_{2i} (мал.9) і знову обчисливши відповідну суму одержимо формулу Сімпсона (парабол). (6.46)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta}{3}((y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}))$$

Приклад 25. Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

Розв'язування. Використаємо формулу Сімпсона. Запишемо
$n=2; \Delta=0{,}5; x_0=0; x_1=0{,}5; x_2=1; y_0=1; y_1=0{,}8; y_2=0{,}5.$

$\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{0{,}5}{3}(1+0{,}5+4\cdot 0{,}8) \approx 0{,}783$. Збільшуючи кількість точок розбиття, досягають необхідної точності обчислень.

§3. Невласні інтеграли та їх знаходження

При означенні $\int\limits_a^b f(x)dx$ передбачалось виконання умов:

1. проміжок інтегрування $[a,b]$ - скінчений.
2. підінтегральна функція $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,b]$.

В випадку коли хоча б одна з умов не виконується, інтеграл називається **невласним**. Розглянемо два найпростіші випадки.

3.1. Інтеграл з нескінченними межами інтегрування

<u>Означення 6</u>. Нехай f(x) визначена на $[a,\infty)$ і інтегровна на $[a,Z]$, де $[a,Z]$-будь- який скінчений проміжок. Тоді

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{Z\to\infty}\int\limits_a^Z f(x)dx, \tag{6.47}$$

невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування.

За формулою Ньютона-Лейбніца $\int\limits_a^Z f(x)dx = F(Z)-F(a)$.

Якщо, при $Z\to\infty$ $(F(Z)-F(a))$ має скінчену границю, то ця границя буде визначена, і інтеграл даної функції на (a,∞) дорівнює $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{Z\to\infty}\int\limits_a^Z f(x)dx = \lim\limits_{Z\to\infty}(F(z)-F(a)).$

Аналогічно розглядається і інтеграл виду $\int\limits_{-\infty}^{в} f(x)dx$

У випадку, коли потрібно обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ його розбивають на суму двох $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx$ і обчислюють кожен інтеграл окремо.

3.2. Інтеграл від розривної функції

Нехай $f(x)$ визначена на $[a,b)$ і має точку розриву при $x=b$. Отже $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ - відповідний невласний інтеграл від розривної функції. Якщо ***f(x)*** визначена на ***(a,b***] і ***x=a*** точка розриву, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$. Якщо ж $f(x)$ має точку розриву $c\in(a,b)$, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^{в} f(x)dx$.

Якщо для інтегралів пунктів (6.3.1) і (6.3.2) відповідні їм границі існують, то інтеграли називаються збіжними. Якщо границі не існують або нескінченні, то інтеграли називаються розбіжними.

Приклад 26.

$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{Z\to\infty}\int\limits_{1}^{Z}\frac{1}{x}dx = \lim\limits_{Z\to\infty} \ln x\Big|_{1}^{Z} \to \infty$. Це є розбіжний інтеграл.

Приклад 27. Обчислити $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{p}}dx$

Розв'язування. $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{p}}dx = \lim\limits_{Z\to\infty}\int\limits_{1}^{Z}\frac{1}{x^{p}}dx$. Досліджуємо цю границю:

якщо $p<1$, $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{p}}dx = \lim\limits_{Z\to\infty}\int\limits_{1}^{Z}\frac{1}{x^{p}}dx = \lim\limits_{Z\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Big|_{1}^{Z} \to \infty$;

$$p>1,\ \int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{p}}dx = \lim\limits_{Z\to\infty}\int\limits_{1}^{Z}\frac{1}{x^{p}}dx = \lim\limits_{Z\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Big|_{1}^{Z} = 0 - \frac{1}{1-p};$$

$$p=1,\ \int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim\limits_{Z\to\infty}\int\limits_{1}^{Z}\frac{1}{x}dx = \lim\limits_{Z\to\infty}\ln x\Big|_{1}^{Z} \to \infty.$$

Значить, даний інтеграл розбіжний при $p\le 1$ і збіжний при $p>1$. Його часто використовують при дослідженні рядів на збіжність.

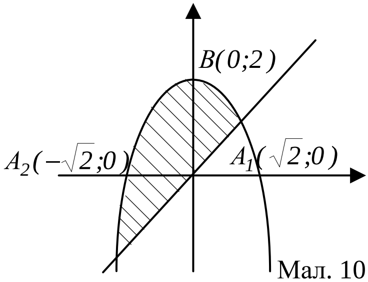
§ 4. Застосування визначених інтегралів

4.1. Обчислення площ

Площа фігури, яка обмежена графіком функції $y=f(x)$ прямими $x=a$ і $x=b$, а також віссю Ox, визначається за формулою $S=\int_a^b f(x)dx$. Площа ж фігури, яка обмежена графіками функцій $y=f_в(x)$ та $y=f_н(x)$ $(f_в(x)\ge f_н(x))$, прямими $x=a$ і $x=b$ визначається за формулою

$$S=\int_a^b (f_в(x)-f_н(x))dx. \qquad (6.48)$$

Приклад 28. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=2-x^2$, $y=x$. (мал. 10).



Мал. 10

Розв'язування. а) Будуємо ескіз графіків функцій: $y=2-x^2$, (парабола, яка перетинає вісь Ox в точках $A_1(\sqrt{2};0)$ і $A_2(-\sqrt{2};0)$, вершина параболи знаходиться в точці $B(0;2)$), $y=x$ - пряма, бісектриса 1- го і 3-го координатних кутів.

б) Знайдемо точки перетину графіків даних функцій (межі інтегрування). Розв'яжемо рівняння: $2-x^2=x$; $-x^2-x+2=0$. Одержуємо розв'язки: $x_1=1$, $x_2=-2$.

в) далі, за формулою (6.46) обчислюємо площу фігури:

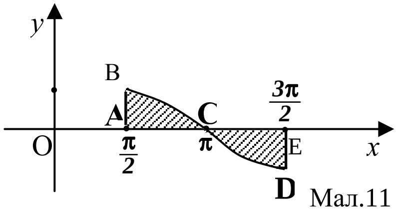
$$S=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(-4+\frac{8}{3}-2\right)=\frac{9}{2} \text{ (кв. од.).}$$

Приклад 29. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями,

$$y=\sin x,\ \ y=0,\ \ x=\frac{\pi}{2},\ \ x=\frac{3\pi}{2}.$$

Розв'язування. Будуємо графіки функцій (мал.11). Записуємо формулу для знаходження площі $S=\int\limits_a^b (f_в(x)-f_н(x))dx$. Бачимо, що

$f_в(x)$ записати одним виразом неможливо. Верхня межа даної площі, складається з двох: $y=\sin x$ (на інтервалі $(\frac{\pi}{2};\pi)$) та $y=0$ (на інтервалі $(\pi;\frac{3\pi}{2})$). $y=\pi$ є нулем функції $y=\sin x$. Тому



Мал.11

$$S=S_{ABC}+S_{CDE}=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-0)dx+\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(0-\sin x)dx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-(-1+0)+(0+1)=2(кв.од.).$$

Інтеграл же $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x-0)dx=0$. Тому, при застосуванні визначеного інтеграла, для знаходження площ, необхідно враховувати нулі функцій, які обмежують площу (мал.3). Проміжок інтегрування, врахувавши нулі функцій, розбивають, і тоді шукана площа дорівнює сумі абсолютних величин відповідних визначених інтегралів.

4.2. Задача про розподіл доходів населення держави

Рівень розвитку держави характеризується тим, як вона забезпечує рівень життя своїх громадян. Одним з таких показників є матеріальний добробут. Легко і досить точно проводити такий порівняльний аналіз маючи певні кількісні характеристики. Доброю характеристикою для цього є коефіцієнт Джіні, який показує нерівність в розподілі доходів населення. Він безпосередньо зв’язаний з кривою Лоренца, яка відображає залежність відсотка доходів населення від відсотка тих, які ці доходи мають. Розглянемо це на прикладі.

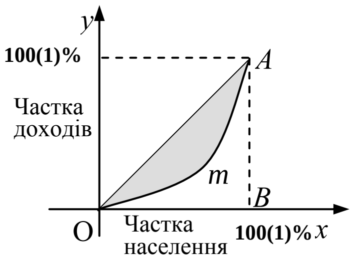
Приклад 30. Нехай $y=2-\sqrt{4-x^2}$, крива Лоренца, визначена за дослідженнями розподілу доходів в якійсь країні, де x-відсоток населення, y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні. ($0<k<1$).

Розв'язування. З малюнка видно, що $k=\dfrac{S_{OAm}}{S_{\Delta OAB}}$,

$$S_{OAm}=\int_0^1 (x-2+\sqrt{4-x^2})dx=\int_0^1 xdx-2\int_0^1 dx+\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx=$$

Для знаходження $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$ введемо заміну $x=2\sin t$, тоді

нижня межа $t=0$, а верхня $t=\dfrac{\pi}{6}$.



Обчислюємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{1-\sin^2 t}\,2\cos t dt=$$

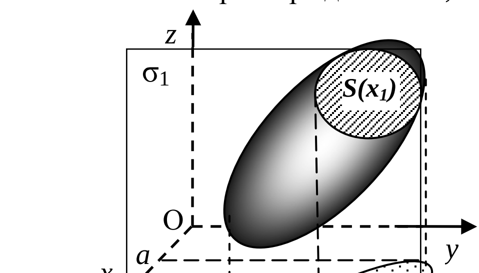
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt=\frac{1}{2}-2+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,41$$

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}$. Тому $k=\dfrac{0,41}{0,5}=0,82$. Великий коефіцієнт k показує нерівномірність розподілу доходів серед населення даної країни.

4.3. Обчислення об'ємів

Визначення і обчислення об'єму тіл за площами паралельних перерізів

Нехай в просторі дано тіло, що знаходиться між двома площинами $x=a$ і $x=b$, і відомо, що всяка площина паралельна до площини zOy і яка знаходиться від неї на відстані x, перетинає тіло по плоскій фігурі, площа якої є функція $S(x)$ (мал. 12). Спроектуємо тіло на площину xOy. Одержимо плоску фігуру, яку знову спроектуємо на вісь Ox $(a<b)$.



Мал. 12

Розіб’ємо проміжок $[a,b]$ точками $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Через точки поділу проведемо перпендикулярні площини $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_{n-1}$ до площини xOy і позначимо $S(x_1), S(x_2), \ldots S(x_{n-1})$ - площі відповідних паралельних один одному перерізів. Побудуємо на кожному перерізі, як на основі, циліндр висотою, відповідно, Δx_1, Δx_2, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Таким чином одержимо n циліндрів. Запишемо суму, яка є інтегральною:

$$S(x_1)\Delta x_1 + S(x_2)\Delta x_2 + S(x_3)\Delta x_3 + \ldots + S(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i.$$

Перейдемо до границі при $\max \Delta x_i \to 0.$ Одержимо

$$V = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} [S(x_1)\Delta x_1 + S(x_2)\Delta x_2 + S(x_3)\Delta x_3 + \ldots + S(x_n)\Delta x_n] = \int_a^b S(x)dx$$

Якщо така границя існує, то кажуть, що дане тіло має об’єм.

Обчислення об’єму тіла обертання

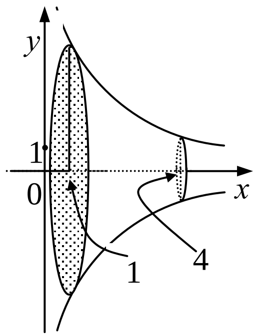
Нехай криволінійна трапеція утворена лінією $y = f(x)$, прямими $x=a$ та $x=b$ та віссю Ox, обертається в просторі навколо осі Ox. Знайти об’єм фігури обертання, яка утворилась.

Враховуючи те, що для об’єму тіла обертання площа поперечного перерізу $S(x) = \pi f^2(x)$ одержимо

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (6.49)$$

Якщо ж криволінійна трапеція утворена лінією $x = \varphi(y)$, прямими $y=c$ та $y=d$ та віссю Oy, обертається в просторі навколо осі Oy то

$$V = \int_c^d \pi\varphi^2(y)dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy.$$



Мал. 13

Приклад 31. Знайти об’єм тіла утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = \frac{4}{x}$, $x=1, x=4.$

Розв’язування. Об’єм тіла обертання обчислюємо за формулою $V = \pi\int_a^b y^2 dx$.

$$V = \pi\int_1^4 \frac{16}{x^2}dx = 16\pi\int_1^4 x^{-2}dx = -16\pi(x^{-1})\Big|_1^4 = -16\pi(\frac{1}{4} - 1) = 12\pi(\text{куб.од.})$$

4.4. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Запишемо, без виведення, формулу для знаходження дуги плоскої кривої, заданої рівнянням $y=f(x)$, при умові неперервності на $[a,b]$ функцій $f(x)$ і $f'(x)$.

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx. \qquad (6.50)$$

Приклад 32. Знайти довжину дуги плоскої кривої лінії $y=\sqrt{x^3}$ від точки $O(0;0)$ до точки $M(4;8)$.

Розв'язування. В задачі $a=0$, $b=4$, $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$. Тоді

$L=\int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}dx=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx$. Введемо заміну $1+\frac{9}{4}x=t$.

Тоді $dx=\frac{4}{9}dt$. Змінимо межі інтегрування. Якщо $t=1$, то $x=0$; якщо $t=10$, то $x=4$. Обчисливши інтеграл, одержуємо довжину дуги:

$$L=\int_1^{10} t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{4}{9}dt=\frac{4}{9}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{10}=\frac{8}{27}(\sqrt{10^3}-1)\approx 9{,}2(од.довж.)$$

4.5. Задача про максимізацію прибутку за часом

Метою всякого виробництва є досягнення максимального прибутку. Тобто, досягнення максимальної різниці між доходами і видатками. Позначимо $P(t)$, $D(t)$, $V(t)$ – відповідно функції прибутку, доходу та видатків від часу. Тоді $P(t)=D(t)-V(t)$. Функція досягає свого екстремуму, якщо її похідна рівна 0. Тобто $P'(t)=D'(t)-V'(t)=0$. Тобто $D'(t)=V'(t)$. Визначимо момент t_k в який швидкість зміни доходу та видатків зрівнюються. Загальний прибуток за час t_k можна знайти за формулою

$$P(t_k)=\int_0^{t_k} P'(t)dt=\int_0^{t_k}(D'(t)-V'(t))dt.$$

Приклад 33. Швидкості зміни витрат і доходу підприємства, після початку його діяльності визначались формулами: $V'(t)=5+2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t)=9-2\sqrt[4]{t^3}$, V і D вимірювали у мільйонах гривень, а t у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, одержаний за цей час.

Розв'язування. Оптимальний час t_1 для прибутку підприємства одержимо з умови $D'(t)=V'(t)$. З рівняння $5+2\sqrt[4]{t^3}=9-2\sqrt[4]{t^3}$ визначаємо $4\sqrt[4]{t^3}=4,\ \sqrt[4]{t^3}=1,\ t_1=1$. Отже, підприємство було прибутковим 1 рік. За цей час одержано прибутку: $P=\int_0^1[D'(t)-V'(t)]dt=\int_0^1\left(9-2\sqrt[4]{t^3}-5-2\sqrt[4]{t^3}\right)dt=$

$$\int_0^1\left(4-4t^{3/4}\right)dt=\left(4t-\cdot\frac{t^{7/4}}{7/4}\right)\Bigg|_0^1=4-\frac{4}{7}=3\frac{3}{7}(\text{млн. грн.}).$$

4.6. Задача про витрати, дохід і прибуток

Нехай тепер $V(x)$ – функція загальних видатків на виробництво x одиниць продукції, $V'(x)$ - функція маржинальних видатків. $P'(x), D'(x)$ - функції, відповідно, маржинальних прибутку та доходу. Тоді при зростанні кількості одиниць продукції від a до b, зміна загальних видатків обчислюється за формулою $\int_a^b V'(x)dx=V(x)\Big|_a^b=V(b)-V(a)$.

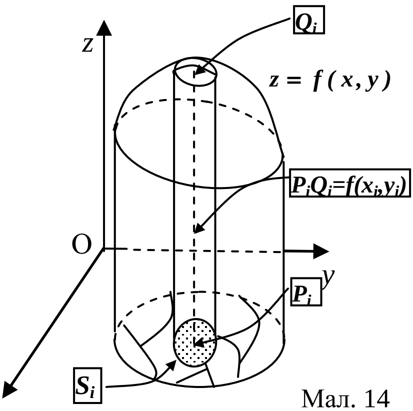
При зростанні реалізації продукції зміни прибутку і доходу визначимо за формулами: $\int_a^b P'(x)dx=P(x)\Big|_a^b=P(b)-P(a)$,

$$\int_a^b D'(x)dx=D(x)\Big|_a^b=D(b)-D(a).$$

§ 5. Поняття про подвійний інтеграл. Зведення подвійного інтегралу до повторного

5.1. Поняття про подвійний інтеграл

При введені поняття визначеного інтеграла ми розв'язували задачу про знаходження площі криволінійної трапеції. Проте, часто необхідно знайти об'єм деякої просторової фігури. Розв'яжемо задачу: знайти об'єм тіла обмеженого



Мал. 14

зверху неперервною поверхнею $z = f(x,y)$ ($f(x,y) \geq 0$), знизу скінченою замкненою областю S площини xOy, з боків прямою циліндричною поверхнею побудованою на межі області S, перпендикулярно до площини xOy.

Знайдемо об'єм V тіла зображеного на малюнку 14. Розіб'ємо область S деякими лініями на n частин з площами відповідно S_1, S_2... S_n.В кожній з частин виберемо по одній точці $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)\ldots P_n(x_n,y_n)$ і побудуємо циліндри з основами S_i і висотами P_i-$Q_i=f(x_i,y_i)$. Тоді об'єм V

$$V = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot S_i = f(x_1,y_1)S_1 + f(x_2,y_2)S_2 + \ldots +$$

. (6.51)

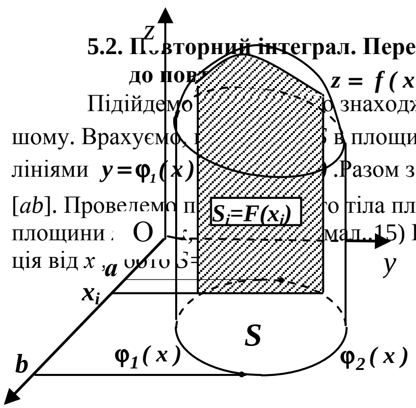
Ця сума називається двомірною інтегральною сумою для функції $z = f(x,y)$ по області $\boldsymbol{S}$. Для цієї суми виконується **теорема існування подвійного інтеграла:** ***Якщо функція, $z = f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкнутій області S і якщо число частинок n, на які розбита область S, необмежено зростає, а найбільша відстань між двома точками кожної частинки, які лежать на границі ($diamS_i$) , прямує до 0, то існує границя двомірної інтегральної суми (6.50), величина якої не залежить ні від способу розбиття S ні від вибору точки P_i всередині частинки з площею S_i.***

Ця границя називається **подвійним інтегралом** від функції $z = f(x,y)$ поширеним на область $\boldsymbol{S}$ і позначається $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$. Тобто

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ diamS_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)S_i \ .$$

Треба зазначити, що якщо $diamS_i \to 0$, то автоматично $n \to \infty$. Тому можна записати

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \lim_{diamS_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)S_i \qquad (6.52)$$



Мал. 15

5.2. П...вторний інтеграл. Перехід від подвійного інтеграла до пов...

Підійдемо ... знаходження об'єму V поверхні $z = f(x,y)$ по іншому. Врахуємо, ... в площині xOy обмежена зверху і знизу певними лініями $y=\varphi_1(x)$ ... .Разом з тим, функції $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ неперервні на $[ab]$. Проведемо п... тіла площиною $x= x_i$, паралельно до координатної площини ... (мал. 15) Площа перерізувизначається як деяка функція від x , тобто S=...

В такому випадку об'єм тіла

$$V=\int_a^b F(x)dx. \qquad (6.53)$$

Визначимо тепер функцію $F(x)$. Так $S_i=\int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i,y)dy$. А це значить, що

$$F(x)=S=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (6.54)$$

Об'єднавши формули (6.53) і (6.54) одержуємо

$$V=\int_a^b\Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\Big]dx. \qquad (6.55)$$

Інтеграл (6.55) називається **повторним інтегралом**, поширеним на довільну область S. Зауважимо, що якщо б область була обмежена кривими $x=\psi_1(y)$ і $x=\psi_2(y)$ (неперервними на (c,d)) то отримали б, що $V=\int_c^d\Big[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\Big]dy$, також повторний інтеграл.

Отже, обчислення подвійного інтеграла можна звести до обчислення повторного.

5.3. Інтеграл Ейлера-Пуассона

В теорії ймовірності і математичній статистиці велику роль відіграє інтеграл Ейлера-Пуассона:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \qquad (6.56)$$

Він належить до інтегралів, які не виражаються в елементарних функціях. Обчислимо його з допомогою подвійного інтеграла. Застосуємо формули зв'язку між декартовими і полярними координатами $\begin{cases} x=r\cos\varphi. \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$

Врахуємо те, що визначений інтеграл не залежить від позначення змінної (інваріантність визначеного інтеграла відносно змінної).

Тому можемо записати

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy \qquad (6.57)$$

Перемноживши формули (6.56) і (6.57) , одержимо

$$I^2=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Врахувавши,що $x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2$ *і* $tg\varphi=\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}=\frac{y}{x}$, *Одержимо:* $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}rdrd\varphi=\int_0^\infty[\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi]e^{-r^2}rdr=$

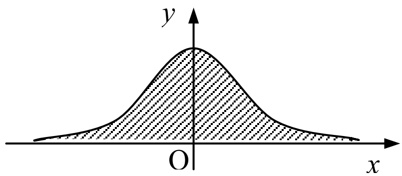
$$=\int_0^\infty\frac{\pi}{2}e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}dr^2=-\frac{\pi}{4}[e^{-r^2}]\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{4}.$$

З одержаної рівності $I^2=\frac{\pi}{4}$ визначаємо, що $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Тобто $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

А тепер визначимо інтеграл Ейлера-Пуасона

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \qquad (6.58)$$

Геометрично, інтеграл Пуассона виражає собою площу фігури (мал.16.), обмеженої графіком функції $y=e^{-x^2}$ (крива Гаусса) і віссю Оx.



Мал.16

Розділ 7. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

При розв'язанні багатьох задач математики, техніки, економіки та інших галузей науки буває важко встановити закон, який зв'язує шукані і відомі змінні величини. Але вдається встановити зв'язок між похідними або диференціалами цих змінних, який виражається рівняннями або системами рівнянь. Такі рівняння називають диференціальними рівняннями. Термін "диференціальне рівняння" введений у 1676 році Г.В.Лейбніцем.

Ми розглянемо тільки рівняння з функціями однієї змінної і звичайними похідними, які називають звичайними диференціальними рівняннями**.**

§ 1. Основні поняття про диференціальні рівняння

***<u>Означення.</u>* Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію y=f(x) і її похідні або диференціали різних порядків, тобто рівняння**

$$F(x, y, y', y''..., y^{(n)}) = 0 . \qquad (7.1)$$

Важливо зрозуміти, що шукана функція у диференціальному рівнянні входить під знак диференціала або під знак похідної.

***<u>Означення.</u>* Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної від невідомої функції, яка входить у диференціальне рівняння.**

Так, рівняння $y' - 2xy^2 + 5 = 0$ є диференціальним рівнянням першого порядку, а рівняння $y'' + 2y' - y - \sin x = 0$ - диференціальним рівнянням другого порядку.

***<u>Означення.</u>* Розв'язком диференціального рівняння (7.1) називається така функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці у рівняння (7.1) перетворює його в тотожність.**

Наприклад, для диференціального рівняння

$$y' - 2x = 0 \qquad (7.2)$$

розв'язком є функція $y = x^2$. Знайдемо похідну $y' = 2x$ і підставимо у рівняння, одержимо: $2x - 2x = 0; 0 \equiv 0.$

Слід зауважити, що $y=x^2$ не єдиний розв'язок рівняння. Це рівняння має нескінчену множину розв'язків, які можна записати так: $y=x^2+C$.

§ 2. Диференціальні рівняння першого порядку

<u>Означення</u>. Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x , шукану функцію y=f(x) і її першу похідну:

$$F(x,y,y')=0. \tag{7.3}$$

Оскільки похідну можна записати у вигляді відношення диференціалів, то в рівняння похідна може не входити, а будуть входити диференціали невідомої функції і незалежної змінної.

Якщо рівняння (7.2) розв'язати відносно y′, то воно матиме вигляд :

$$y' = f(x,y) \text{ або } \frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{7.4}$$

Прості приклади показують, що диференціальне рівняння може мати нескінчену множину розв'язків. Це ми бачимо на прикладі рівняння (7.2). Легко переконатись також , що диференціальне рівняння $y' = \frac{y}{x}$ має розв'язками функції $y = Cx$, а диференціальне рівняння $y' = -\frac{y}{x}$ функції $y = \frac{C}{x}$, де C - довільне число.

Як бачимо, в розв'язок наведених диференціальних рівнянь входить довільне число C . Надаючи сталій C різних значень, будемо одержувати різні розв'язки диференціального рівняння.

<u>Означення</u>. Загальним розв'язком диференціального рівняння (7.3) називається функція

$$y=\varphi(x,C), \tag{7.5}$$

яка залежить від однієї довільної сталої і задовольняє диференціальне рівняння при довільному значенні C .

Якщо функція (7.5) виражається неявно, тобто у вигляді

$$\Phi(x,y,C)=0, \tag{7.6}$$

то (7.6) називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

<u>Означення.</u> Частинним розв'язком диференціального рівняння (7.3) називається такий розв'язок , який одержується із загального розв'язку (7.5) при деякому конкретному значенні сталої C.

$\Phi(x,y,C_0)$ називається частинним інтегралом диференціального рівняння.

На практиці при розв'язанні конкретних задач часто доводиться знаходити не всі розв'язки, а розв'язок, який задовольняє певним початковим умовам. Однією із таких задач є задача Коші, яка для диференціального рівняння першого порядку формулюється так : серед усіх розв'язків диференціального рівняння (7.3) знайти такий розв'язок y, який при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$ дорівнює заданому значенню y_0, тобто

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{або} \quad y\,\big|_{x=x_0} = y_0 . \tag{7.7}$$

Умова (7.7) називається початковою умовою розв'язку.

Покажемо на прикладі, як знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, коли відомий загальний розв'язок і задана початкова умова.

Ми бачимо, що диференціальне рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$ має загальний розв'язок $y = Cx$. Задамо початкову умову $y\,\big|_{x=2} = 6$. Підставимо ці значення в загальний розв'язок, одержимо $6 = 2C$, звідки $C = 3$. Отже, функція $y = 3x$ задовольняє і диференціальне рівняння і початкову умову.

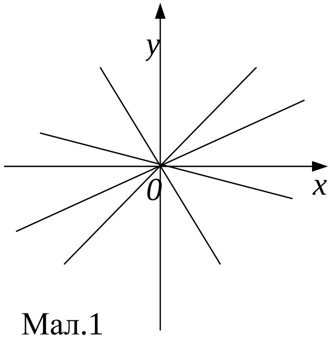
Відповідь на питання про те, за яких умов рівняння (7.4) має розв'язок, дає теорема Коші.

ТЕОРЕМА (про існування та єдиність розв'язку). Якщо функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $f_y'(x,y)$ визначені і неперервні в області G, яка містить точку $M_0(x_0; y_0)$, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (7.4), який задовольняє початковій умові : $y(x_0) = y_0$.

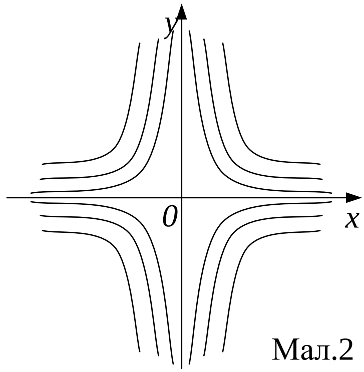
Теорема Коші дає достатні умови існування єдиного розв'язку диференціального рівняння (7.4). Зауважимо, що в умові теореми не вимагається існування частинної похідної $f_x'(x,y)$.

Графік довільного частинного розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою. Загальному розв'язку відповідає сім'я кривих. Так ми перевірили, що рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$ має загальний розв'язок $y = Cx$, то йому відповідає сім'я прямих, які проходять через початок координат (мал. 1).

Рівняння $y' = -\frac{y}{x}$ має загальний розв'язок $y = \frac{C}{x}$. Йому відповідає сім'я рівносторонніх гіпербол (мал.2).



Мал.1



Мал.2

Якщо задана початкова умова $y\,\big|_{x=x_0} = y_0$, то це означає, що задана точка $M_0(x_0; y_0)$ через яку повинна проходити інтегральна крива, яка відповідає шуканому частинному розв'язку. Таким чином, відшукання частинного розв'язку диференціального рівняння за заданою початковою умовою геометрично означає, що із сім'ї інтегральних кривих ми вибираємо ту, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Треба зауважити, що знаходження розв'язку диференціального рівняння часто називають інтегруванням рівняння. При цьому операцію інтегрування функцій називають квадратурою.

Загального методу розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку не існує. Розглянемо деякі методи розв'язування окремих типів диференціальних рівнянь.

2.1. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

<u>Означення</u>. Рівняння вигляду

$$f_1(y)dy = f_2(x)dx, \tag{7.8}$$

де $f_1(y)$ і $f_2(x)$ - задані функції, називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

В цьому рівнянні кожна із змінних знаходиться тільки в тій частині рівняння, де знаходиться її диференціал. Рівняння $dy = f(x)dx$ є частинним випадком рівняння (7.8). Щоб розв'язати рівняння (7.8), треба проінтегрувати обидві його частини:

$$\int f_1(y)dy = \int f_2(x)dx + C\ .$$

Зрозуміло, що довільну сталу C можна записувати в будь-якій частині рівності.

Приклад 1. ***Розв'язати диференціальне рівняння:***

$$\frac{dy}{y} = 3x^2 dx\ \text{, яке задовольняє початковій умові}\ \ y\big|_{x=0} = 2.$$

Розв'язування. Проінтегруємо ліву і праву частину рівняння, причому для зручності потенціювання довільну сталу запишемо у вигляді ln|C| одержимо:

$$\int \frac{dy}{y} = 3\int x^2 dx\ ;\ \ ln|y| = x^3 + ln|C|\ ;$$

$$ln|y| - ln|C| = x^3\ ;\quad ln\left|\frac{y}{C}\right| = x^3;\qquad \frac{y}{C} = e^{x^3}\quad ;$$

$y = Ce^{x^3}$ - це загальний розв'язок диференціального рівняння.

Підставляючи в загальний розв'язок початкову умову, знайдемо *C:* $2 = C$.

Отже, $y = 2e^{x^3}$ є частинним розв'язком даного рівняння.

2.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

<u>Означення.</u> Рівняння вигляду

$$f_1(x)\ f_2(y) + g_1(x)\ g_2(y) = 0 \tag{7.9}$$

називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

В цьому рівнянні змінні ще не відокремлені, але, поділивши обидві частини рівняння на добуток $f_2(y)g_1(x)$, одержимо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = 0\ .$$

Інтегруючи це рівняння, запишемо

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = C\ .$$

Одержали загальний інтеграл даного рівняння.

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x(y+1)dx-(x^2+1)ydy=0.$$

Розв'язування. Поділимо обидві частини цього рівняння на $(y+1)(x^2+1)$, після чого одержимо

$$\frac{xdx}{x^2+1}-\frac{ydy}{y+1}=0.$$

Інтегруючи, будемо мати

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}=\int\frac{ydy}{y+1}; \qquad \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy;$$

$$\frac{1}{2}ln\left|x^2+1\right|=y-ln\left|y+1\right|+ln\left|C\right|;$$

$$ln\sqrt{x^2+1}+ln\left|y+1\right|-ln\left|C\right|=y; \quad y=ln\frac{\sqrt{x^2+1}\cdot(y+1)}{C};$$

$\dfrac{Ce^y}{y+1}=\sqrt{x^2+1}$ - загальний інтеграл диференціального рівняння.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $(1+x^2)dy+ydx=0$, який задовольняє початкову умову $y(0)=1.$

Розв'язування. Відокремимо змінні, поділивши рівняння на $y\cdot(1+x^2)$, і проінтегруємо дане рівняння:

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{1+x^2}=0; \quad \int\frac{dy}{y}+\int\frac{dx}{1+x^2}=C; \quad ln\left|y\right|+arctgx=C.$$

Одержали загальний інтеграл диференціального рівняння.

Використовуючи початкову умову, знайдемо довільну сталу С:

$ln1+arctg0=C,$ звідки $C=0$.

Знайдену сталу підставимо у загальний інтеграл і відшукаємо частинний розв'язок:

$ln\left|y\right|+arctgx=0;$ звідки $y=e^{-arctgx}.$

2.3.Однорідні диференціальні рівняння

<u>Означення.</u> Функція двох змінних f(x,y) називається однорідною n- го виміру, якщо виконується умова

$$f(x,y)=f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

Наприклад, $f(x,y)=x^2+y^2$, $f(tx,ty)=t^2 f(x^2+y^2)$- однорідна функція другого виміру.

<u>Означення</u>. Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \qquad \textbf{(7.10)}$$

називається однорідним, якщо функція f(x,y) однорідна нульового виміру.

Покажемо, що це рівняння можна звести до рівняння з відокремленими змінними.

Розглянемо функцію $f(tx, ty)$. Зробимо заміну $t = \frac{1}{x}$, будемо мати: $f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Тоді рівняння (7.10) запишеться у вигляді

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (7.11)$$

В загальному випадку змінні в однорідному рівнянні не відокремлюються зразу. Але, якщо ввести допоміжну невідому функцію u=u(x) за формулою

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{або} \quad y = xu, \qquad (7.12)$$

то ми зможемо перетворити однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними.

З формули (7.12) знайдемо $y' = u + xu'$ і рівняння $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ набуде вигляду: $u+xu'=\varphi(u)$,

тобто $x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$, звідки $\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$.

Після інтегрування одержимо $\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C$.

Звідси знаходимо вираз для функції u, вертаємось до змінної y=xu і одержимо розв’язок однорідного рівняння.

Найчастіше не вдається знайти функцію u явно вираженою, тоді, після інтегрування, в ліву частину слід підставити $\frac{y}{x}$ замість u .

В результаті отримаємо розв’язок рівняння в неявному вигляді.

Приклад 1. Знайти розв’язок однорідного рівняння

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

Розв'язування. Заміною $y = xu$ зведемо задане рівняння до рівняння $u + xu' = \frac{u - u^2}{1 - 2u}$ або $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{u - u^2}{1 - 2u} - u\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{u^2}{1 - 2u}$.

Відокремлюючи змінні , знайдемо

$\frac{1 - 2u}{u^2} du = \frac{dx}{x}$, звідки $\frac{1}{u} + 2\ln|u| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$ або $\ln\left(e^{\frac{1}{u}} \cdot u^2\right) = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$,

тобто $u^2 \cdot e^{\frac{1}{u}} = \frac{C}{x}$.

Повертаючись до змінної y, одержимо загальний розв'язок:

$$\frac{y^2}{x} \cdot e^{\frac{x}{y}} = C .$$

2.4.Лінійні диференціальні рівняння

<u>Означення.</u> Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння , яке містить шукану функцію і її похідну у першому степені без їх добутку:

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{7.13}$$

Тут P(x), Q(x)- відомі функції незалежної змінної x. Наприклад, $y' + 2xy = x^2$.

Якщо Q(x)=0, то рівняння (7.13) називається лінійним однорідним і є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Якщо Q(x)≠0 , то рівняння (7.13) називається лінійним неоднорідним, яке можна розв'язати декількома способами.

Розглянемо метод Бернуллі за допомогою якого рівняння (7.13) можна звести до інтегрування двох диференціальних рівнянь першого порядку з відокремлюваними змінними.

Розв'язок диференціального рівняння (7.13) шукаємо у вигляді

$$y = u(x)\,v(x) \quad \text{або} \quad y = uv, \tag{7.14}$$

де u(x), v(x) невідомі функції. Одну з цих функцій можна взяти довільну, а інша визначається із рівняння (7.13).

Із рівності y=uv знайдемо похідну y′:

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' .$$

Підставимо y та y' в рівняння (7.13):

$u'v + uv' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$ або $u'v + u(v' + P(x) \cdot v) = Q(x)$.

Виберемо функцію v такою, щоб

$$v' + P(x)v = 0 \;. \tag{7.15}$$

Тоді для відшукання функції u одержимо рівняння

$$u'v = Q(x)\;. \tag{7.16}$$

Спочатку знайдемо v із рівняння (7.15).

Відокремлюючи змінні, маємо $\dfrac{dv}{v} = -P(x)dx$, звідки

$$ln|v| = -\int P(x)dx \quad \text{або} \quad v = e^{-\int P(x)dx} \;.$$

Під невизначеним інтегралом тут будемо розуміти якусь одну первісну від функції P(x), тобто v буде визначеною функцією від x.

Знаючи v, знаходимо u із рівняння (7.16):

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}; \; du = Q(x)e^{\int P(x)dx}\cdot dx \,,$$

звідки $u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$

Тут ми вже беремо для u всі первісні.

Знайдені функції u та v підставляємо в (7.14) і одержуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u\cdot v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)\;. \tag{7.17}$$

При розв'язуванні конкретних прикладів простіше виконувати ці викладки, ніж застосовувати громіздку формулу (7.17).

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - \dfrac{y}{x} = x.$

Розв'язування. Розв'язок шукаємо у вигляді y=uv, тоді $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

Підставимо y та y' в рівняння: $u'v + uv' - \dfrac{u\cdot v}{x} = x$ або

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x \;. \tag{7.18}$$

Вираз, що стоїть у дужках прирівнюємо до нуля, маємо

$$v' - \frac{v}{x} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0\;; \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}.\,.$$

Відокремимо змінні, домноживши обидві частини рівняння на $\dfrac{dx}{v}$, тоді $\qquad \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x}$.

Після інтегрування , одержимо ln|v|=ln|x| (тут обмежимось однією первісною), звідки v=x.
Підставимо v=x в рівняння (7.18):

$$u'v = x; \quad \frac{du}{dx}\cdot x = x; \; du = dx; \quad u = x + C.$$

Загальний розв'язок запишеться:

$$y = x(x + C) = x^2 + Cx.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$, який задовольняє початковій умові y(0)=0.

Розв'язування. Задане рівняння – це лінійне неоднорідне рівняння першого порядку, розв'язок якого шукаємо у вигляді $y = u \cdot v$.

Тоді $\quad u'v + uv' - uvtgx = \frac{1}{\cos x}; \quad u'v + u(v' - vtgx) = \frac{1}{\cos x};$

$$v' - vtgx = 0; \quad \frac{dv}{dx} - vtgx = 0; \quad \frac{dv}{v} = tgxdx; \; \ln|v| = -\ln|\cos x|; \; v = \frac{1}{\cos x}.$$

Підставимо v в рівняння і знайдемо u:

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}; \quad \frac{du}{dx} = 1; \quad du = dx; \quad u = x + C.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння буде :

$$y = (x + C)\cdot\frac{1}{\cos x}.$$

Підставляємо початкові умови в знайдений розв'язок
і знаходимо C:

$$0 = (0 + C)\cdot\frac{1}{\cos 0}; \quad C = 0.$$

Із загального розв'язку одержуємо частинний розв'язок

$$y = \frac{x}{\cos x}.$$

2.5. Диференціальне рівняння Бернуллі

<u>Означення.</u> Рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = y^n Q(x) \quad \text{(або } \frac{dx}{dy} + P(y)x = x^n Q(y)\text{)}$$

називається диференціальним рівнянням Бернуллі.

Дане рівняння відрізняється від рівняння (7.13) лише множником y'' (або x'') в правій його частині. Для того, щоб права частина даного рівняння була такою як в (7.13), поділимо його ліву і праву частину на y'':

$$\frac{y'}{y^n}+P(x)\frac{y}{y^n}=Q(x).$$

Зробимо заміну: $z=\frac{y}{y^n}=y^{-n+1}$; $\quad z'=(1-n)y^{-n}\cdot y';$

$$z'=(-n+1)\frac{y'}{y^n}.$$

Домножимо ліву і праву частини одержаного рівняння на $(n+1)$ і, використовуючи заміну, матимемо:

$$(-n+1)\frac{y'}{y^n}+(-n+1)P(x)\frac{y}{y^n}=(-n+1)Q(x);$$

$$z'+(-n+1)P(x)z=(-n+1)Q(x).$$

Ми одержали лінійне диференціальне рівняння відносно нової змінної $z=y^{-n+1}$.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $xy'+y=y^2\ln x$.

Розв’язування. $x\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{y}=\ln x$

Зробимо заміну $z=\frac{1}{y},\ z'=-\frac{y'}{y^2}$. Тоді $-x\cdot\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{y}=\ln x;$

$$xz'-z=-\ln x;\quad \frac{dz}{dx}-\frac{z}{x}=-\frac{\ln x}{x}.$$

Дане рівняння розв’яжемо, зробивши заміну $z=u(x)\cdot v(x)$.

$$z'=u'v+v'u;\ u'v+v'u-\frac{uv}{x}=-\frac{\ln x}{x};\ u'v+u(v'-\frac{v}{x})=-\frac{\ln x}{x}.$$

Вибираємо функцію $v(x)$ так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю і ця функція була б частинним розв’язком рівняння

$$v'-\frac{v}{x}=0;\ \frac{dv}{dx}=\frac{v}{x};\ \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x};\ \ln|v|=\ln|x|;\ \ v=x.$$

Тоді, $u'\cdot x=-\frac{\ln x}{x};\quad \frac{du}{dx}=-\frac{\ln x}{x^2};\quad \int du=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx+C$.

Проінтегрувавши праву частину цього рівняння за частинами, одержимо $u=\frac{1}{x}(\ln x+1)+C$, а при $y^{-1}=z=uv$, маємо

$$y=\frac{1}{Cx+\ln x+1}.$$

2.6. Економічні задачі, що приводять до диференціальних рівнянь першого порядку

Задача 1. Повні затрати K є функцією об'єму виробництва x. Знайти функцію K затрат, якщо відомо, що швидкість росту затрат для всіх значень x дорівнює середнім затратам.

Розв'язування. Швидкість росту затрат є похідна: $\frac{dK}{dx}$, а середні затрати $\frac{K}{x}$. За умовою задачі $\frac{dK}{dx}=\frac{K}{x}$, а це рівняння з відокремлюваними змінними.

Отже, $\frac{dK}{K}=\frac{dx}{x}$; $\ln|K|=\ln|x|+\ln|C|$; $\ln|K|=\ln|Cx|$;

K=Cx - шукана функція затрат.

Звідси, $\frac{K}{x}=C$ - середні затрати постійні.

Задача 2. Кількість населення y є функцією часу t, тобто з часом кількість населення змінюється. Швидкість зміни приросту населення пропорційна кількості населення. Треба знайти формулу для визначення кількості населення у будь-який момент часу t.

Розв'язування. За умовою задачі швидкість зміни приросту населення пропорційна кількості населення. Це можна записати так:

$\frac{dy}{dt}=k\cdot y(t)$, де k - коефіцієнт пропорційності.

В одержаному диференціальному рівнянні відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y}=kdt.$$

Далі будемо мати: $\ln|y|=kt+\ln|C|$; $\ln|y|-\ln|C|=kt$; $\ln\left|\frac{y}{C}\right|=kt$;

$$y=Ce^{kt}. \tag{7.19}$$

Одержано формулу для визначення кількості населення як функції часу. Вона містить довільну сталу, яка може приймати будь-які числові значення.

Покажемо на прикладі як за формулою (7.19) можна прогнозувати ріст населення. Для зручності візьмемо наближені дані.

Нехай за переписом 1980 року населення на Землі було, наприклад, 5 млрд. Почнемо звідси відлік, тобто $t_0=0$. А в 1990 році населення на Землі стало 6 млрд. , тобто $t=10$ (років). Тоді, використавши ці початкові умови, одержимо: $5=C\cdot e^{k\cdot 0}$; $C=5$.

Підставимо знайдене $C=5$ у формулу $y=Ce^{kt}$, маємо

$$6=5\cdot e^{10\cdot k};\ \ 10k=ln\frac{6}{5};\ \ k=\frac{1}{10}ln\frac{6}{5}.$$

Ми знайшли коефіцієнт пропорційності.

Враховуючи, що $k=\frac{1}{10}ln\frac{6}{5}$, формулу $y=Ce^{kt}$ запишемо у вигляді

$$y=5e^{\frac{1}{10}\cdot ln\frac{6}{5}\cdot t} \text{ або } y=5e^{\frac{1}{10}t\cdot ln\frac{6}{5}\cdot}. \tag{7.20}$$

Формула (7.20) дає можливість знайти кількість населення у будь-який момент часу t , наприклад, знайдемо кількість населення у 2010 році (t =30):

$$y=5e^{\frac{1}{10}\cdot 30\cdot ln\frac{6}{5}\cdot}=5\cdot e^{\left(\frac{6}{5}\right)^3}=5\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^3=\frac{6^3}{5^2}=\frac{216}{25}\approx 8{,}6(\text{млрд.})$$

Задача 3. Нехай в момент часу t величина вкладу в банк $g=g(t)$. Очевидно, що збільшення (зміна) вкладу пропорційне його величині:

$$\frac{dg}{dt}=kg(t);\ \ \frac{dg}{g}=kdt;\ \ ln|g|=kt+ln|C|;$$

$$ln\left|\frac{g}{C}\right|=kt;\ \ g=C\cdot e^{kt}. \tag{7.21}$$

Нехай при $t=0$ початковий вклад в банк був g_0, тоді $g_0=Ce^0$ і формула (7.21) запишеться:

$$g=g_0e^{kt}. \tag{7.22}$$

Нехай величина вкладу змінюється неперервно з часом і за місяць зростає на N *%:*

$$g_0+\frac{N}{100}\cdot g_0=g_0e^{k\cdot 1}(\ \ t=1\ \text{місяць}\ ), \text{ звідки } k=ln\left(1+\frac{N}{100}\right).$$

Підставимо k у (7.22): $g=g_0\cdot e^{ln\left(1+\frac{n}{100}\right)^t}=g_0\left(1+\frac{N}{100}\right)^t;$

Остання формула дає можливість визначити величину вкладу в банк в будь- який момент часу t.

Задача 4. Зростання інвестицій.

Економісти встановили, що швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу t пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності ,що дорівнює узгодженому відсотку R неперервного зростання капіталу. Треба знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової (при $t=0$) інвестиції K_0.

Розв'язування. Позначимо $K(t)$ - величина інвестованого капіталу у момент часу t (шукана функція).

Тоді $\dfrac{dK(t)}{dt}$ - швидкість зміни величини інвестицій, $r=\dfrac{R}{100}$.

За умовою задачі маємо: $\dfrac{dK(t)}{dt}=r\cdot K(t)$; $K(t)\,\big|_{t=0}=K_0$.

Одержали задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку. Загальним розв'язком диференціального рівняння буде функція

$$K(t)=e^{rt+C}=e^{C}\cdot e^{rt}.$$

Згідно з початковою умовою при $t=0$ маємо $K_0=e^{C}$.

Отже, розв'язком задачі буде функція $K(t)=K_0\cdot e^{rt}$.Це означає, що за даними умовами задачі інвестиції з часом зростають за експоненціальним законом.

Задача 5. Відомо, що еластичність попиту η визначається за формулою $\eta=\dfrac{p}{x}\cdot\dfrac{dx}{dp}$, де x - кількість одиниць деякого товару вартістю p за кожну одиницю. Знайти функцію попиту на цей товар, якщо еластичність попиту постійна і дорівнює *-1*.

Розв'язування. За умовою задачі: $\dfrac{p}{x}\cdot\dfrac{dx}{dp}=-1$; $\dfrac{dx}{x}=-\dfrac{dp}{p}$;

$$\ln|x|=-\ln|p|+\ln|C|;\ \ln|x|=\ln\left|\frac{C}{p}\right|;\ x=\frac{C}{p};\quad p=\frac{C}{x}.$$

Знайшли залежність між кількістю товару та його вартістю, тобто функцію попиту.

§ 3. Диференціальні рівняння другого порядку

<u>Означення.</u> Диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію y та першу і другу похідні від цієї функції:

$$F(x, y, y', y'') = 0 . \qquad (7.23)$$

<u>Означення.</u> Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку називається функція $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ яка задовольняє диференціальне рівняння при довільних значеннях C_1 та C_2.

Будь-який частинний розв'язок диференціального рівняння одержується із загального розв'язку при певних значеннях C_1 та C_2 і задовольняє певним початковим умовам. Початковими умовами для диференціального рівняння другого порядку є задання значень функції та її першої похідної в деякій точці x_0:

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0 \text{ і } y'\Big|_{x=x_0} = y'_0 .$$

Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку формулюється так:

знайти частинний розв'язок диференціального рівняння (7.23), який задовольняє початковим умовам .

Геометричний зміст частинного розв'язку – це інтегральна крива, яка проходить через точку (x_0,y_0) в даному напрямку, тобто заданий кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої.

Розглянемо задачу, яка приводить до диференціального рівняння другого порядку.

Згідно теорії Дж. Хікса, із стабільним ростом затрат праці при незмінних інших факторах виробництва вартість випуску продукції також зростає . Швидкість її зростання є постійною додатною величиною V_0. Однак, додаткове залучення фактору затрат праці веде до зниження граничного значення випуску продукції, причому темпи такого зниження можна вважати постійною від'ємною величиною a_0.

Нехай початковий випуск продукції характеризується вартістю C_0 при затратах праці L_0. Треба знайти величину вартості випуску продукції при затратах праці рівних L_1.

$$(C_0 = 100; V_0 = 0,5; a_0 = -0,01; L_0 = 50; L_1 = 55).$$

Позначимо $U(L)$ - вартість випуску продукції при затратах праці рівних L. Тоді $\dfrac{dU}{dL}$ - швидкість зростання вартості продукції відносно затрат праці L; $\dfrac{d^2U}{dL^2}$ - темпи зміни швидкості зростання вартості продукції відносно затрат праці L.

За умовою задачі $\dfrac{d^2U}{dL^2}=a_0$, проінтегруємо по L: $\dfrac{dU}{dL}=a_0L+a_1$,

ще раз проінтегруємо по L, маємо: $U=a_0\dfrac{L^2}{2}+a_1L+a_2.$

Визначимо сталі a_1 та a_2:

$$\begin{cases} C_0=\dfrac{a_0}{2}\cdot L_0{}^2+a_1L_0+a_2, \\ V_0=a_0L_0+a_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2=C_0+\dfrac{a_0}{2}L_0{}^2-V_0L_0, \\ a_1=V_0-a_0L_0. \end{cases}$$

У нашому випадку одержимо $a_2=62{,}5;\ a_1=1.$

Отже, $U=-0{,}005L^2+L+62{,}5$, звідки

$$U(L_1)=-0{,}005\cdot 55^2+55+62{,}5=102{,}375$$

3.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

<u>Означення.</u> Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння

$$y''+p(x)y'+g(x)y=0\,. \tag{7.24}$$

Очевидно, що $y\equiv 0$ є розв'язком рівняння (7.24). Цей розв'язок називають нульовим або тривіальним. Надалі ми будемо шукати тільки нетривіальні розв'язки диференціального рівняння (7.24).

Встановимо деякі властивості його розв'язків.

1. Якщо $y(x)$ є розв'язком рівняння (7.24), то $Cy(x)$ також є розв'язком цього рівняння.

2. Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - частинні розв'язки рівняння (7.24), , то $y_1(x)+y_2(x)$ є також розв'язком цього рівняння.

ТЕОРЕМА. Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - частинні розв'язки рівняння (7.24), то розв'язком цього рівняння є також функція

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{7.25}$$

Доведення. Підставимо функцію (7.25) в рівняння(7.24), маємо:

$$C_1y''(x)+C_2y''(x)+p(x)(C_1y'(x)+C_2y_2'(x))+$$

$$+g(x)(C_1y'(x)+C_2y_2'(x))=C_1(y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+g(x)y_1(x))+$$
$$+C_2(y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+g(x)y_2(x)).$$

Вирази в дужках тотожно рівні нулю, бо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - розв'язки рівняння (7.24), а це означає, що права частина рівняння дорівнює нулю. Отже, функція (7.25) є розв'язком рівняння (7.24).

<u>Означення.</u> Система функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називається лінійно незалежною на відрізку $[a,b]$, якщо рівність

$$C_1y_1+C_2y_2\equiv 0 \qquad (7.26)$$

виконується для всіх x тоді і тільки тоді, коли $C_1=C_2=0$.

Якщо рівність (7.26) виконується, коли хоча б один із $C_i\neq 0$, то **система називається лінійно залежною**.

Нехай $C_1y_1+C_2y_2\equiv 0$; якщо $C_1\neq 0$, тоді $y_1=-\dfrac{C_2}{C_1}y_2$ або

$y_1=\lambda y_2$, звідки $\dfrac{y_1}{y_2}=\lambda$, де λ - стале число.

Іншими словами, дві функції лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони пропорційні.

<u>Означення</u>. Лінійно незалежна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння називається фундаментальною системою розв'язків.

ТЕОРЕМА (про структуру розв'язку однорідного диференціального рівняння). *Якщо* $y_1(x)$ та $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (7.24), то $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, де C_1,C_2 - довільні сталі, є загальним розв'язком рівняння (7.24).

Доведення. Відомо, що розв'язок називається загальним, якщо з нього при певних числових значеннях сталих можна отримати будь-який частинний розв'язок. А за теоремою про існування і єдиність будь-який частинний розв'язок однозначно визначається початковими умовами.

Покажемо, що можна знайти C_1 і C_2 такі, щоб задовольнялись початкові умови:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0\ ,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0'\ .$$

Нехай, коли $x=x_0$, маємо:

$y_1 = y_{10}, \; y_1' = y_{10}', \; y_2 = y_{20}, \; y_2' = y_{20}'.$

Тоді $\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0 \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = y_0' \end{cases}$

Розв'яжемо цю систему відносно C_1 і C_2, одержимо:

$$C_1 = \frac{y_0 y_{20}' - y_0' y_{20}}{y_{10} y_{20}' - y_{10}' y_{20}} = \frac{y_0 y_{20}' - y_0' y_{20}}{\Delta_0},$$

$$C_2 = \frac{y_{10} y_0' - y_{10}' y_0}{y_{10} y_{20}' - y_{10}' y_{20}} = \frac{y_{10} y_0' - y_{10}' y_0}{\Delta_0}.$$

Оскільки $\Delta_0 \neq 0$, бо система розв'язків y_1 і y_2 фундаментальна, то для C_1 і C_2 справді знайдемо потрібні значення.

Таким чином, з розв'язку $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ можна знайти будь-який частинний розв'язок, тобто розв'язок, що відповідає будь-яким початковим умовам, а це означає, що розв'язок $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ є загальним розв'язком рівняння (7.24).

3.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку

<u>Означення.</u> Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння :

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x), \tag{7.27}$$

де функція $f(x)$ називається правою частиною рівняння.

Рівняння $y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$, яке одержується із рівняння(7.27), коли $f(x)=0$, називається однорідним рівнянням, що відповідає рівнянню (7.27).

ТЕОРЕМА (про структуру розв'язку неоднорідного диференціального рівняння). Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку дорівнює сумі загального розв'язку відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння і будь-якого частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

Надалі будемо користуватись позначенням:

$$y = y_{з.о} + y_{ч.н}, \tag{7.28}$$

де y - загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку; $y_{з.о.}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння; $y_{ч.н.}$ - будь-який частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння.

Доведення. Знайдемо похідні:

$$y' = y'_{з.о.} + y'_{ч.н.},\ y'' = y''_{з.о.} + y''_{ч.н.}.$$

Підставимо $y = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$ і знайдені похідні y', y'' в рівняння(7.27), матимемо

$y''_{з.о.} + y''_{ч.н.} + p(x)(y'_{з.о.} + y'_{ч.н.}) + g(x)(y_{з.о.} + y_{ч.н.}) = f(x)$ або

$y''_{з.о.} + p(x)y'_{з.о.} + g(x)y_{з.о.} + y''_{ч.н.} + p(x)y'_{ч.н.} + g(x)y_{ч.н.} = f(x)$.

Оскільки $y_{з.о.}$ є загальним розв'язком однорідного рівняння $y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$, то в останній рівності

$y''_{з.о.} + p(x)y'_{з.о.} + g(x)y_{з.о.} = 0$.

А з того, що $y_{ч.н.}$ - частинний розв'язок рівняння (7.27), матимемо тотожність: $y''_{ч.н.} + p(x)y'_{ч.н.} + g(x)y_{ч.н.} = f(x)$.

Отже, ми довели, що функція $y = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$ - розв'язок диференціального рівняння (7.27)

Легко показати, що кожний розв'язок рівняння (7.27), який задовольняє будь-які початкові умови (з певної області їх визначення), можна знайти з функції $y = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$. Отже, ця функція є загальним розв'язком. Довести це твердження можна аналогічно до доведення такого ж твердження для відповідного однорідного рівняння, яке ми привели вище, тому тут на цьому доведенні не зупиняємось.

3.3. Метод варіації довільних сталих

Розглянемо метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) для знаходження частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння.

Суть цього методу полягає в наступному: щоб знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння (7.27), досить у вираз для загального розв'язку $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ відповідного однорідного рівняння замість сталих C_1 і C_2 підставити функції незалежної змінної x, похідні від яких $C'_1(x)$ і $C'_2(x)$ задовольняють таку систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0, \\ C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x). \end{cases}$$

Доведемо це твердження.

Запишемо розв'язок диференціального рівняння у вигляді:

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

Знайдемо похідну:

$$y'=C_1'y_1(x)+C_2'y_2(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x).$$

Ми хочемо визначити дві функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

Одне співвідношення між ними ми можемо вибрати довільним. Поставимо вимогу, щоб $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольняли рівність $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$,
тоді $y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)$.

Знайдемо другу похідну:

$$y''=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x).$$

Підставимо значення y,y',y''в диференціальне рівняння (7.27), будемо мати

$$C_1'(x)y_1''(x)+p_1\cdot y_1'(x)+p_2y_1(x))+C_2(x)(y_2''(x)+p_1y_2'(x)+$$
$$+p_2y_2(x))+(C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є розв'язками однорідного рівняння, то вирази :

$$y_1''(x)+p_1y_1'(x)+p_2y_1(x)=0,$$
$$y_2''(x)+p_1y_2'(x)+p_2y_2(x)=0.$$

Звідси $C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)$.

Отже, для того щоб функція $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$, яка задовольняє умову $C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0$, була розв'язком рівняння (7.27), необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність: $C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)$.

Таким чином дістаємо систему

$$\begin{cases} C_{1(}'x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x), \end{cases}$$

з якої визначаємо $C_1'(x)$та $C_2'(x)$. Ця система має єдиний розв'язок, бо за нашим припущенням $y_1(x)$ та $y_2(x)$ -лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння.

Нехай $C_1'(x)=\varphi_1(x)$ і $C_2'(x)=\varphi_2(x)$, тоді, інтегруючи, одержимо $C_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+\overline{C}_1$, $C_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+\overline{C}_2$, де $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ - довільні сталі. Підставимо знайдені $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в співвідношення $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ і отримаємо загальний розв'язок диференціального рівняння (7.27).

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-\dfrac{y'}{x}=x$

Розв'язування. Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння методом варіації довільних сталих. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y''-\dfrac{y'}{x}=0$, $\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{1}{x}$

Інтегруючи обидві частини рівняння, одержимо
$ln|y'|=ln|x|+ln|C|;\ y'=Cx$, звідки $y=C_1x^2+C_2$.

Тепер припустимо, що C_1 і C_2 є функціями від x і складаємо систему для знаходження $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2+C_2'(x)=0, \\ 2C_1'(x)x=x. \end{cases}$$

Звідки $C_1'(x)=\dfrac{1}{2}$, $C_2'(x)=-\dfrac{1}{2}x^2$.

В результаті інтегрування, маємо

$C_1(x)=\dfrac{x}{2}+\overline{C}_1$, $C_2(x)=-\dfrac{x^3}{6}+\overline{C}_2$, де $\overline{C}_1,\overline{C}_2$ - довільні сталі.

Підставляємо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y=C_1(x)x_2+C_2(x)$,
одержимо загальний розв'язок даного рівняння:

$$y=\overline{C}_1x^2+\overline{C}_2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6} \text{ або } y=\overline{C}_1x^2+\overline{C}_2+\frac{x^3}{3}.$$

3.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами

<u>Означення.</u> Рівняння вигляду

$$y''+py'+gy=0, \tag{7.29}$$

де p,g- сталі числа, називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з сталими коефіцієнтами.

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. За теоремою про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку маємо: $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$,
де $y_1(x),y_2(x)$ - лінійно незалежні частинні розв'язки.

Частинний розв’язок рівняння (7.29) будемо шукати у вигляді $y = e^{kx}$, k - стала , яку треба знайти.

Знайдемо $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ і підставимо в рівняння (7.29), маємо: $e^{kx}(k^2 + pk + g) = 0.$ Оскільки $e^{kx} \neq 0$ завжди, то

$$k^2 + pk + g = 0\ . \qquad (7.30)$$

Рівняння (7.30) називається характеристичним рівнянням для диференціального рівняння (7.29).

Позначимо через k_1, k_2 - корені характеристичного рівняння. При розв’язанні характеристичного рівняння, яке є квадратним рівнянням відносно k , можливі три випадки:

1) Корені характеристичного рівняння дійсні, різні: $k_1 \neq k_2$, $(D > 0)$.

2) Корені характеристичного рівняння дійсні, рівні: $k_1 = k_2$, $(D = 0)$.

3) Корені характеристичного рівняння комплексні числа $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $(D < 0)$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

1)Корені характеристичного рівняння дійсні, різні: $k_1 \neq k_2$.

Частинними розв’язками рівняння (7.29) в цьому випадку будуть функції $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$.

Ці розв’язки лінійно незалежні, бо

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq const.$$

Отже, загальний розв’язок рівняння (7.29) запишеться

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}\ . \qquad (7.31)$$

Приклад 1. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' + y' - 2y = 0\ .$$

Розв’язування. Складаємо характеристичне рівняння: $k^2 + k - 2 = 0.$ Тут корені $k_1 = 1; k_2 = -2$ -дійсні, різні. Загальний розв’язок диференціального рівняння запишеться: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$.

2) Корені характеристичного рівняння дійсні, рівні: $k_1 = k_2$.

Один частинний розв’язок може бути $y_1 = e^{k_1 x}$.

Розв’язок $e^{k_2 x}$ лінійно залежний з першим $e^{k_1 x}$, тому його розглядати в якості другого частинного розв’язку не можна. Будемо шукати другий частинний розв’язок у вигляді $y_2 = u(x)e^{k_1 x}$, де $u(x)$ - невідома функція, яку можна знайти.

Знайдемо y_2' та y_2'':

$y_2' = u'e^{k_1 x} + k_1 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u' + k_1 u),$

$y_2'' = u''e^{k_1 x} + 2k_1 u'e^{k_1 x} + k_1^2 u e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(u'' + 2k_1 u' + k_1{}^2 u)$ і підставимо в рівняння (7.29):

$$e^{k_1 x}(u'' + (2k_1 + p)u' + (k_1^2 + pk_1 + q)u) = 0.$$

Оскільки k_1 - кратний корінь характеристичного рівняння (7.30), то $k_1^2 + pk_1 + q = 0.$ Крім того $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ або $2k_1 = -p$, $2k_1 + p = 0.$

Отже, для того, щоб знайти $u(x)$, треба розв’язати рівняння

$e^{k_1 x}u'' = 0$ або $u'' = 0.$ Інтегруючи двічі, одержимо $u = Ax + B.$ Якщо покласти $A = 1, B = 0,$ то $u = x.$

Таким чином, в якості другого частинного розв’язку будемо брати функцію $y_2 = xe^{k_1 x}$.Розв’язки y_1 та y_2 будуть лінійно незалежними, бо $\frac{y_2}{y_1} = x \neq const.$

Отже, загальний розв’язок диференціального рівняння (7.29) буде :

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x). \qquad (7.32)$$

Приклад 2. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Розв’язування. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0,$ корені якого $k_1 = k_2 = 2$ - дійсні, рівні.

Загальний розв’язок диференціального рівняння буде:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

3) Корені характеристичного рівняння комплексні числа.

Якщо дискримінант характеристичного рівняння $D < 0$, то дійсних коренів це рівняння не має.Введемо поняття комплексного числа. Будь-яке комплексне число можна представити у вигляді:

$$z = \alpha + \beta i \text{ де } i = \sqrt{-1} \text{ або } i^2 = -1.$$

При цьому α - називається дійсною частиною комплексного числа; β - уявною частиною комплексного числа .

Числа $z = \alpha + \beta i$ та $z = \alpha - \beta i$ називаються комплексно спряженими числами.

Повернемось тепер до розв’язання характеристичного рівняння (7.30), дискримінант якого менший нуля. Тоді його корені будуть комплексно спряженими числами, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

У випадку, коли $k_1 = \alpha + \beta i$, розв’язок диференціального рівняння буде $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$.

Якщо алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має корінь $k_1 = \alpha + \beta i$, то воно має і спряжений з ним корінь $k_2 = \alpha - \beta i$, а тому $y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$.

За формулами Ейлера : $e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x$,запишемо функції y_1 та y_2 у вигляді:

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x .$$

Далі використаємо таку теорему.

Теорема. Якщо диференціальне рівняння (7.29) **має розв’язком функцію $u(x) + iv(x)$, то кожна з функцій $u(x)$ і $v(x)$ є розв’язком рівняння (7.29).**

Доведення. Дійсно, підставимо функцію $u(x) + iv(x)$ в рівняння (7.29), маємо

$$(u(x) + iv(x))'' + p(u(x) + iv(x))' + q(u(x) + iv(x)) \equiv 0$$

або $(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0$.

Але комплексна функція дорівнює тотожно нулю тоді і тільки тоді, коли рівні нулю її дійсна і уявна частини, тобто:

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

$$v'' + pv' + qv = 0.$$

А це означає, що $u(x)$ і $v(x)$ є розв’язками рівняння (7.29).

На основі доведеної вище теореми, частинними розв'язками будуть функції $\bar{y}_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x$, $\bar{y}_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$, причому вони будуть лінійно незалежними, бо

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos\beta x}{e^{\alpha x} \sin\beta x} = ctg\beta x \neq const.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння(7.29) буде

$y = C_1\bar{y}_1 + C_2\bar{y}_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x$ або

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \qquad (7.33)$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$, що задовольняє таким початковим умовам $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

Розв'язування. Шукаємо спочатку загальний розв'язок. Для цього складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$k^2 + 2k + 5 = 0$, $D = 4 - 20 = -16 < 0$,

$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16\cdot(-1)}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$ -

корені комплексно спряжені числа. Загальний розв'язок запишеться:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Знайдемо частинний розв'язок, використовуючи початкові умови :

$0 = e^{-0}(C_1 \cos(2\cdot 0) + C_2 \sin(2\cdot 0))$, $C_1 = 0$;

$y' = e^{-x}\cdot 2C_2 \cos 2x - e^{-x}C_2 \sin 2x$; $1 = 2C_2$, $C_2 = \frac{1}{2}$,

звідки $y = \frac{1}{2}e^{-x} \sin 2x.$

3.5 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами

<u>Означення.</u> Рівняння

$$y'' + py' + gy = f(x), \qquad (7.34)$$

де p, g - сталі числа, $f(x) \neq 0$, називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку з сталими коефіцієнтами.

За теоремою про структуру розв'язку лінійного неоднорідного рівняння другого порядку загальний розв’язок рівняння (7.34) є сумою загального розв’язку відповідного однорідного рівняння і будь-якого частинного розв’язку неоднорідного рівняння. Це твердження записано формулою (7.28): $y = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$.

Загальний розв’язок однорідного рівняння ми детально розглянули вище. Тепер перейдемо до знаходження частинного розв’язку неоднорідних рівнянь із спеціальною правою частиною, розв’язок яких можна знайти не вдаючись до інтегрування.

1) Нехай права частина рівняння (7.34) має вигляд $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ - многочлен n-го степеня. Тут можливі два випадки:

а) α - не є коренем характеристичного рівняння, тоді $y_{ч.н.} = Q_n(x)e^{\alpha x}$, де $Q_n(x)$ - многочлен n-го степеня із неозначеними коефіцієнтами.

б) α - є коренем характеристичного рівняння кратності r ($r = 1$ або $r = 2$), тоді $y_{ч.н.} = x^r Q_n(x)e^{\alpha x}$.

<u>*Зауваження.*</u> Якщо $f(x) = P_n(x)$, то вважаємо , що $\alpha = 0$ і перевіряємо , чи 0 є коренем характеристичного рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}. \tag{7.35}$$

Розв’язування. Загальний розв’язок шукаємо у вигляді $y = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$.

Спочатку знайдемо загальний розв’язок $y_{з.о.}$ відповідного однорідного рівняння:

$$2y'' - y' - y = 0;\ 2k^2 - k - 1 = 0;\ k_1 = 1, k_2 = -\frac{1}{2},$$

$$y_{з.о.} = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Частинний розв’язок $y_{ч.н.}$ неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді правої частини рівняння, а саме $y_{ч.н.} = (Ax + B)e^{2x}$, оскільки $\alpha = 2$ не є коренем характеристичного рівняння. Тут потрібно знайти неозначені коефіцієнти A та B. Для цього знайдемо $(y_{ч.н.})'$ та $(y_{ч.н.})''$, маємо:

$$(y_{ч.н.})' = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x} \cdot A;$$

$$(y_{ч.н.})'' = 4e^{2x}(Ax+B) + 2e^{2x}\cdot A + 2e^{2x}\cdot A = 4e^{2x}(Ax+B) + 4Ae^{2x}$$

Підставляємо $y_{ч.н.}$, $(y_{ч.н.})'$ та $(y_{ч.н.})''$ у рівняння (7.35), одержимо

$$8Axe^{2x} + 8Be^{2x} + 8Ae^{2x} - 2Axe^{2x} - 2Be^{2x} - Ae^{2x} - Axe^{2x} - Be^{2x} = 4xe^{2x}.$$

Розділимо ліву і праву частини рівняння на e^{2x}, маємо :

$$8Ax + 8B + 8A - 2Ax - 2B - A - Ax - B = 4x,$$

$$5Ax + 5B + 7A = 4x.$$

Відомо, що многочлени рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні їх коефіцієнти при однакових степенях x лівої і правої частини, тобто

$$\begin{cases} 5A = 4 \\ 7A + 5B = 0 \end{cases}, \text{ звідки } A = \frac{4}{5}; B = -\frac{28}{25}.$$

Отже, $y_{ч.н.} = \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}$ і загальний розв'язок буде

$$y = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}.$$

Приклад 2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = 1 + x, \qquad (7.36)$$

який задовольняє початковим умовам $y|_{x=0} = 2;\ y'|_{x=0} = -3$.

Розв'язування. Тут характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має дійсні, рівні корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння буде $y_{з.о.} = (C_1 + C_2x)e^x$.

Права частина рівняння (7.36) має вигляд $P_n(x) = 1 + x$, причому $\alpha = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді $y_{ч.н.} = Ax + B$. Продиференціювавши $y_{ч.н.}$, підставимо у рівняння (7.36), маємо :

$-2A + Ax + B = 1 + x,$ звідки $A = 1;\ -2A + B = 1;\ B = 3.$

Частинним розв'язком заданого рівняння є функція $y_{ч.н.} = x + 3,$ а його загальним розв'язком функція

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + (x + 3).$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок рівняння (7.36), який задовольняє заданим початковим умовам. Для цього знайдемо

$y' = (C_1 + C_2x)e^x + C_2e^x + 1$, тоді

$$\begin{cases} 2 = C_1 + 3, \\ -3 = C_1 + C_2 + 1. \end{cases}$$ Звідки $C_1 = -1$, $C_2 = -3$.

Шуканим частинним розв'язком буде $y_{ч.н.} = -(1 + 3x)e^x + x + 3.$

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння:

$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$.

Розв'язування. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння : $k^2 - 7k + 6 = 0$, $k_1 = 1;\ k_2 = 6;$

$y_{з.о.} = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y_{ч.н.} = x(Ax + B)e^x$, бо $\alpha = 1$ є коренем характеристичного рівняння. Виконавши необхідні обчислення, знайдемо

$A = -\frac{1}{10}, B = \frac{9}{25}.$ Тоді $y_{ч.н.} = x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x$.

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння буде

$$y = C_1e^x + C_2e^{6x} - x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x.$$

2) Нехай права частина рівняння (7.34) має вигляд

$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x)$.

Перевіряємо чи $\alpha+\beta i$ є коренем характеристичного рівняння:

а) $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, тоді $y_{ч.н.} = e^{\alpha x}(L_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x),$,

де $L_k(x)$, $N_k(x)$, - многочлени k-го степеня з неозначеними коефіцієнтами ***(k=max(m,n))***.

б) $\alpha+\beta i$ є коренем характеристичного рівняння, тоді $y_{ч.н.} = xe^{\alpha x}(L_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x)$.

Зауваження 1. Якщо $\alpha=0$, то перевіряємо, чи β є коренем характеристичного рівняння.

Зауваження 2. Якщо в правій частині є одна із тригонометричних функцій, наприклад, ***cosx***, то в частинний розв'язок повинна входити і функція ***sinx***.

Приклад4. Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + y' - 2y = e^x\cos x. \qquad (7.37)$$

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його : $k^2 + k - 2 = 0$; $k_1 = -2, k_2 = 1$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння $y_{з.о.}=C_1e^{-2x}+C_2e^x$.
Права частина неоднорідного рівняння $f(x)=e^x\cos x$, тобто має вигляд

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x),$$

де $\alpha=1, \beta=1, P_n(x)=1, Q_m(x)=0$.

Оскільки $\alpha+\beta i=1+i$ не є коренем характеристичного рівняння, а $P_n(x)=1, Q_m(x)=0$ многочлени нульового степеня, то $y_{ч.н.}=e^x(A\cos x+B\sin x)$.

Знайдемо $y'_{ч.н.}$ та $y''_{ч.н.}$:

$$(y_{ч.н.})'=e^x(A\cos x+B\sin x)+e^x(-A\sin x+B\cos x)$$

$$(y_{ч.н.})''=e^x(A\cos x+B\sin x)+e^x(-A\sin x+B\cos x)+$$

$$+e^x(-A\sin x+B\cos x)+e^x(-A\cos x-B\sin x)=$$

$$=e^x(-2A\sin x+2B\cos x).$$

Підставляємо $y_{ч.н.}, (y_{ч.н.})'$ та $(y_{ч.н.})''$ у рівняння (7.37):

$$e^x(-2A\sin x+2B\cos x)+e^x(A\cos x+B\sin x)+$$

$$+e^x(-A\sin x+B\cos x)-2e^x(A\cos x+B\sin x)=e^x\cos x.$$

Скорочуючи обидві частини рівності на e^x і зводячи подібні члени, одержимо :

$$(-3A-B)\sin x+(3B-A)\cos=\cos x$$

Зрівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ та $\sin x$ в обох частинах рівняння, одержимо:

$$\begin{cases}-3A-B=0,\\ -A+3B=1.\end{cases}\quad \text{Звідки } A=-\frac{1}{10}, B=\frac{3}{10}.$$

$$y_{ч.н.}=e^x\left(-\frac{1}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x\right).$$

Загальний розв'язок рівняння (7.37) буде:

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+e^x\left(-\frac{1}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x\right).$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y''-2y+y=xe^x$.

Розв'язування. $k^2-2k+1=0,\ k_1=k_2=1,\ y_{з.о.}=e^x(C_1+C_2x)$.

$f(x)=xe^x$, $\alpha=1$. Число 1- двократний корінь характеристичного рівняння. Отже, $r=2$.

$y_{ч.н.} = e^x x^2 (Ax + B),$ або $y_{ч.н.} = e^x (Ax^3 + Bx^2).$

$(y_{ч.н.})' = e^x (Ax^3 + Bx^2) + e^x (3Ax^2 + 2Bx).$

$(y_{ч.н.})'' = e^x (Ax^3 + Bx^2) + e^x (3Ax^2 + 2Bx) + e^x (3Ax^2 + 2Bx) +$

$+ e^x (6Ax + 2B).$

Підставляємо $y_{ч.н.}, (y_{ч.н.})', (y_{ч.н.})''$ в дане рівняння:

$e^x (Ax^3 + Bx^2) + e^x (6Ax^2 + 4Bx) + e^x (6Ax + 2B) -$

$- 2e^x (Ax^3 + Bx^2) - 2e^x (3Ax^{22} + 2Bx) + e^x (Ax^3 + Bx^2) = xe^x,$

або $6Ax + 2B = x,$ звідси $6A = 1, 2B = 0.$

Отже, $A = \frac{1}{6}, B = 0.$ Тому $y_{ч.н.} = \frac{1}{6} e^x x^3$,

а $y = e^x (C_1 + C_2 x) + \frac{1}{6} e^x x^3$ - загальний розв'язок даного диференціального рівняння.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y'' - 3y' = x^2 + 1$.

Розв'язування. $k^2 - 3k = 0, \; k(k - 3) = 0, \; k_1 = 0, k_2 = 3,$

$$y_{з.о.} = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

$f(x) = (x^2 + 1)e^{0x}, \; \alpha = 0.$ Число 0 - корінь характеристичного рівняння, тому $r=1$.

Отже, $y_{ч.н.} = x(Ax^2 + Bx + C)$ або $y_{ч.н.} = Ax^3 + Bx^2 + Cx;$

$(y_{ч.н.})' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \; (y_{ч.н.})'' = 6Ax + 2B.$

Підставляємо $y_{ч.н.}, (y_{ч.н.})', (y_{ч.н.})''$ в дане рівняння:

$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = x^2 + 1$ або

$-6Ax^2 + (6A - 4B)x + 2B - 2C = x^2 + 1;$

$$\begin{cases} -6A = 1, \\ 6A - 4B = 0, \\ 2B - 2C = 1. \end{cases}$$

Звідси $A = -\frac{1}{6}, \; B = -\frac{1}{4}, \; C = \frac{2B - 1}{2} = -\frac{3}{4}.$

Отже, $y_{ч.н.} = -\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{4} x.$

$y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$ - загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, що задовольняє початковим умовам $y|_{x=0} = 2;\ y'|_{x=0} = 2.$

Розв'язування. Шукаємо спочатку загальний розв'язок даного рівняння. Для цього знайдемо $y_{з.о.}$ та $y_{ч.н.}$:

$$k^2 - 2k = 0,\ k(k-2) = 0,\ k_1 = 0, k_2 = 2.$$

Тому $y_{з.о.} = C_1 + C_2 e^{2x}$.

$y_{ч.н.} = e^x(Ax^2 + Bx + C), (\alpha = 1$ - не є коренем характеристичного рівняння).

$(y_{ч.н.})' = e^x(Ax^2 + Bx + C) + e^x(2Ax + B);$

$(y_{ч.н.})'' = e^x(Ax^2 + Bx + C) + e^x(2Ax + B) + e^x(2Ax + B) + e^x \cdot 2A.$

Підставляємо $y_{ч.н.}, (y_{ч.н.})', (y_{ч.н.})''$ у дане рівняння, одержимо:

$$e^x(Ax^2 + Bx + C) + e^x(4Ax + 2B) + 2Ae^x - 2e^x(Ax^2 + Bx + C) -$$
$$-2e^x(2Ax + B) = e^x(x^2 + x - 3)$$

або $-Ax^2 - Bx - C + 2A = x^2 + x - 3.$

Звідси $\begin{cases} -A = 1, \\ -B = 1, \\ -C + 2A = -3. \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = -1, C = 1.$

Отже, $y_{ч.н.} = e^x(-x^2 - x + 1),$

а $y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x - 1)$ - загальний розв'язок даного рівняння.

Розв'яжемо задачу Коші.

$$y' = 2C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) + e^x(-2x - 1).$$

Використовуємо початкові умови

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 + 1, \\ 2 = 2C_2 + 1 - 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, $y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1)$ - шуканий частинний розв'язок даного диференціального рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y'' + 2y = 5x\cos x + 3\sin x$.

Розв'язування. $k^2 + 2 = 0, k^2 = -2,\ k_{1,2} = \pm\sqrt{2}i;$

$y_{з.о.} = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x.$

$\alpha = 0, \beta = 1,\ \alpha + \beta i = i,\ i -$ не є коренем характеристичного рівняння. Тому $r = 0.$

$y_{ч.н.} = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x;$

$(y_{ч.н.})' = A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x;$

$(y_{ч.н.})'' = -A\sin x - A\sin x - (Ax + B)\cos x + C\cos x + C\cos x -$

$-(Cx + D)\sin x.$

Підставляємо $y_{ч.н.}, (y_{ч.н.})', (y_{ч.н.})''$ у дане рівняння, одержимо:

$-2A\sin x - Ax\cos x - B\cos x + 2C\cos x - Cx\sin x - D\sin x +$

$+2Ax\cos x + 2B\cos x + 2Cx\sin x + 2D\sin x = 5x\cos x + 3\sin x.$

$$\begin{cases} -2A + D = 3, \\ B + 2C = 0, \\ C = 0, \\ A = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = 13. \end{cases}.$$

Таким чином, $y_{ч.н.} = 5x\cos x + 13\sin x,$ а загальний розв'язок $y = C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x + 5x\cos x + 13\sin x$.

Ми розглянули метод неозначених коефіцієнтів для відшукання частинного розв'язку лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною.

Розглянемо приклад, коли частинний розв'язок рівняння не можна знайти методом неозначених коефіцієнтів.

Приклад 9. Розв'язати методом варіації довільних сталих рівняння $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Розв'язування. Шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2+3k+2=0$, корені якого $k_1=-2;\ k_2=-1,$ тому загальний розв'язок однорідного рівняння запишеться: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$.

Покладемо $C_1 = C_1(x),\ C_2 = C_2(x)$ і запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)(-2)e^{-2x} + C_2'(x)(-e^{-x}) = \dfrac{1}{e^x+1}. \end{cases}$$

Розв’язуємо систему рівнянь відносно $C_1'(x)$ і $C'(x)$.З першого рівняння: $C_1'(x) = -C_2'(x)\dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}}$; $C_1'(x) = -C_2'(x)\cdot e^x$;

Підставимо $C_1'(x)$ в друге рівняння, маємо:

$$2C_2'(x)e^{-x} - C_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{e^x+1};\ C_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{e^x+1};$$

$$C_2'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}.\ \frac{dC_2(x)}{dx} = \frac{e^x}{e^x+1};\ dC_2(x) = \frac{e^x}{e^x+1}dx;$$

$$\int dC_2(x) = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1};\ \ C_2(x) = ln\left|e^x+1\right| + \overline{C}_2.$$

Тоді, аналогічно, знайдемо $C_1'(x)$ і відповідно $C_1(x)$:

$$C_1'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x+1};\ \frac{dC_1(x)}{dx} = -\frac{e^{2x}}{e^x+1};\ dC_1(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx;$$

$$\int dC_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = -\int \frac{t^2}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = -\int \frac{t}{t+1}dt =$$

$$= -\int\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = -t + ln\left|t+1\right| + \overline{C}_1 = -e^x + ln\left|e^x+1\right| + \overline{C}_1 \qquad \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{array} \right.$$

Підставимо знайдені $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в загальний розв’язок однорідного рівняння, одержимо загальний розв’язок даного неоднорідного рівняння:

$y = (-e^x + ln\left|e^x+1\right| + \overline{C}_1)e^{-2x} + (ln\left|e^x+1\right| + \overline{C}_2)e^{-x}$ або

$$y = -e^x + ln\left|e^x+1\right|(e^{-2x} + e^{-x}) + \overline{C}_1 e^{-2x} + \overline{C}_2 e^{-x}.$$

§4. Системи звичайних диференціальних рівнянь

При розв’язанні багатьох задач потрібно знайти функції $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x),$ які задовольняють систему диференціальних рівнянь, що містять незалежну змінну x шукані функції $y_1, y_2, ..., y_n$ і їх похідні.

Приклад. Нехай матеріальна точка маси m має криволінійну траєкторію руху в просторі. Визначити положення точки в будь-який момент часу t, коли на неї діє сила $\vec{F}$.

Положення точки в будь-який момент часу t визначається її координатами x,y,z; отже, x,y,z є функціями від t. Проекціями вектора швидкості точки на осі координат будуть похідні x', y', z'.

Покладемо, що сила $\vec{F}$, а відповідно і її проекції F_x, F_y, F_z залежать від часу t, від положення x,y,z точки і від швидкості руху точки, тобто від $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Шуканими невідомими функціями в цій задачі будуть три функції $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Ці функції визначаються із рівнянь динаміки:

$$\begin{cases} mx'' = F_x(t, x, y, z, x', y', z'), \\ my'' = F_y(t, x, y, z, x', y', z'), \\ mz'' = F_z(t, x, y, z, x', y', z'). \end{cases}$$

Ми одержали систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку. У випадку руху, коли траєкторія є плоска крива, що лежить, наприклад, в площині $x0y$, одержимо систему двох рівнянь для визначення невідомих функцій $x(t)$ та $y(t)$:

$$\begin{cases} mx'' = F_x(t, x, y, x', y'), \\ my'' = F_y(t, x, y, x', y'). \end{cases}$$

Розглянемо найпростіші системи диференціальних рівнянь.

4.1.Системи диференціальних рівнянь першого порядку

Система n рівнянь першого порядку з n невідомими функціями має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \qquad (7.38)$$

де x - незалежна змінна, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - невідомі функції.

Якщо в лівій частині рівнянь системи стоять похідні першого порядку, а праві частини рівнянь зовсім не містять похідних, то така **система рівнянь називається нормальною.**

Розв'язком системи називається сукупність функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, які перетворюють кожне рівняння системи в тотожність відносно x.

Задача Коші для системи (7.38) полягає у знаходженні функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ що задовольняють систему (7.38) і заданим початковим умовам:

$$y_1 |_{x=x_0} = y_{10}, \quad y_2 |_{x=x_0} = y_{20}, \ldots, y_n |_{x=x_0} = y_{n0}. \tag{7.39}$$

Інтегрування системи (7.38) роблять таким чином. Диференціюємо по x перше рівняння системи (7.38):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Замінимо похідні $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ їх виразами $f_1, f_2, \ldots, f_n$ із рівнянь системи (7.38), одержимо рівняння

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Диференціюємо одержане рівняння і, підставивши в цю рівність значення похідних із системи (7.38), знайдемо

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Продовжуючи далі таким чином , одержимо

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F(x, y_1, \ldots, y_n).$$

В результаті дістаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{7.40}$$

З перших $(n-1)$ рівнянь визначимо $y_2, y_3, \ldots, y_n$:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \qquad (7.41)$$

і підставимо їх значення в останнє рівняння системи (7.40) для визначення y_1: $\dfrac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)})$.

Звідки $\qquad y_1 = \Psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad (7.42)$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$- довільні сталі.

Продиференціюємо цей вираз $(n-1)$ раз, визначимо $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{(n-1)} y_1}{dx^{n-1}}$ як функції від $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$. Підставимо ці функції в (7.41), знайдемо

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases} \qquad (7.43)$$

Для того, щоб одержаний розв'язок задовольняв заданим початковим умовам, залишається лише знайти значення довільних сталих із рівнянь (7.42) і (7.43) так, як ми це робили для одного диференціального рівняння.

Приклад 1. Проінтегрувати систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z + x, \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x, \end{cases}$$

коли задані початкові умови $y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = 0.$

Розв'язування. Диференціюємо по x перше рівняння, маємо: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz}{dx} + 1$. Підставляємо сюди значення $\dfrac{dy}{dx}$ і $\dfrac{dz}{dx}$ із системи, одержимо $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = (y + z + x) + (-4y - 3z + 2x) + 1;$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1.$$

З першого рівняння системи знайдемо $z = \frac{dy}{dx} - y - x$ і підставимо в одержане нами рівняння:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2\left(\frac{dy}{dx} - y - x\right) + 3x + 1 \text{ або } \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9 \qquad (*)$$

і тоді

$$z = (C_2 - 2C_1 + 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14 \qquad (**)$$

Підберемо сталі C_1 і C_2 так, щоб виконувались початкові умови. На основі (*) та (**) маємо:

$$1 = C_1 - 9;\ 0 = C_2 - 2C_1 + 14, \text{ звідки } C_1 = 10,\ C_2 = 6.$$

Таким чином, розв'язок системи, який задовольняє заданим початковим умовам буде:

$$y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9, \quad z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14.$$

4.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \qquad (7.44)$$

де коефіцієнти a_{ij} - сталі числа, t- незалежна змінна, $x_1(t),\ldots,x_n(t)$- невідомі функції, **називається системою лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.**

Цю систему можна розв'язувати шляхом зведення до одного рівняння n - го порядку, як це було показано вище. Але цю систему можна розв'язати і іншим методом. Покажемо як це робиться.

Будемо шукати розв'язок системи (7.44) у вигляді:

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \quad x_2 = \alpha_2 e^{kt}, \ldots, \quad x_n = \alpha_n e^{kt}. \qquad (7.45)$$

Треба визначити сталі $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ і k так, щоб функції (7.45) задовольняли систему (7.44). Підставимо функції (7.45) в систему (7.44):

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kt} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n)e^{kt}, \\ k\alpha_2 e^{kt} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n)e^{kt}, \\ \text{...} \\ k\alpha_n e^{kt} = (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n)e^{kt}. \end{cases}$$

Скоротимо на e^{kt} і перетворимо систему, звівши її до такої системи:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \text{..} \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0. \end{cases} \qquad (7.46)$$

Це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. Складемо визначник системи:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} (a_{11} - k) & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - k) & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & (a_{nn} - k) \end{vmatrix}$$

Ми одержимо нетривіальні (ненульові) розв’язки (7.45) тільки за таких k, за яких визначник перетвориться в нуль. Маємо рівняння n-го порядку для визначення k:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - k) & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - k) & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & (a_{nn} - k) \end{vmatrix} = 0$$

Це рівняння називається **характеристичним рівнянням для системи (7.44).**

Розглянемо окремі випадки на прикладах:

1) Корені характеристичного рівняння дійсні і різні.

Розв’язок системи записується у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1t} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{k_2t} + \ldots + C_n\alpha_1^{(n)}e^{k_nt}, \\ x_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{k_1t} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{k_2t} + \ldots + C_n\alpha_2^{(n)}e^{k_nt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_1\alpha_n^{(1)}e^{k_1t} + C_2\alpha_n^{(2)}e^{k_2t} + \ldots + C_n\alpha_n^{(n)}e^{k_nt}. \end{cases}$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Розв'язування .Складаємо характеристичне рівняння:

$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0$ або $k^2 - 5k + 4 = 0,$ корені якого $k_1 = 1, \quad k_2 = 4.$

Розв'язок системи шукаємо у вигляді:

$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)}e^t, \ x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)}e^t, \ x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)}e^{4t}, \ x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)}e^{4t}.$

Складемо систему (7.46) для кореня k_1 і знайдемо $\alpha_1^{(1)}$ і $\alpha_2^{(1)}$:

$$\begin{cases} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0, \\ 1 \cdot \alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0. \end{cases} \text{або} \begin{cases} \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Звідки $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}\alpha_1^{(1)}.$ Покладаючи $\alpha_1^{(1)} = 1,$ одержимо $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}$.

Отже, ми одержали розв'язок системи:

$$x_1^{(1)} = e^t, \quad x_2^{(1)} = -\frac{e^t}{2}.$$

Далі складаємо систему (7.46) для $k = 4$:

$$\begin{cases} -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0, \\ \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Звідки $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$ і $\alpha_1^{(2)} = 1, \quad \alpha_2^{(2)} = 1.$

Одержимо другий розв'язок системи: $x_1^{(2)} = e^{4t}, \quad x_2^{(2)} = e^{4t}.$

Загальний розв'язок системи буде:

$$x_1 = C_1e^t + C_2e^{4t},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}C_1e^t + C_2e^{4t}.$$

2) Корені характеристичного рівняння різні, але серед них є комплексні: $k_1 = \alpha + i\beta, \ \ k_2 = \alpha - i\beta.$ Цим кореням будуть відповідати розв'язки:

$$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)t}, \quad (j = 1,2,...,n) \qquad (7.47)$$

$$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha - i\beta)t}, \quad (j = 1,2,...,n) \qquad (7.48)$$

Можна довести також, що дійсні і уявні частини комплексного розв'язку також будуть розв'язками. Отже, одержимо два частинних розв'язки:

$$\begin{cases} \overline{x}_j^{(1)} = e^{\alpha t}(\lambda_j^{(1)} \cos \beta x + \lambda_j^{(2)} \sin \beta x), \\ \overline{x}_j^{(2)} = e^{\alpha t}(\overline{\lambda}_j^{(1)} \cos \beta x + \overline{\lambda}_j^{(2)} \sin \beta x), \end{cases} \qquad (7.49)$$

де $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}, \overline{\lambda}_j^{(1)}, \overline{\lambda}_j^{(2)}$ - дійсні числа, які визначаються через $\lambda_j^{(1)}$ і $\lambda_j^{(2)}$.

Відповідні комбінації функцій (7.49) ввійдуть в загальний розв'язок системи.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння:
$\begin{vmatrix} 7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$ або $k^2 + 12k + 37 = 0,$ корені якого $k_1 = -6 + i,$ $k_2 = -6 - i.$ Підставляємо по черзі k_1, k_2 в систему (7.46), знайдемо $\alpha_1^{(1)} = 1; \ \alpha_2^{(1)} = 1 + i; \ \alpha_1^{(2)} = 1; \ \alpha_2^{(2)} = 1 - i.$

Запишемо рівняння (7.47) і (7.48) для наших даних

$$x_1^{(1)} = 1 \cdot e^{(-6+i)t}, \ x_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)t},$$

$$x_1^{(2)} = e^{(-6-i)t}, \ x_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)t}.$$

Перепишемо ці розв'язки в такому вигляді:

$$x_1^{(1)} = e^{-6t} \cos t + ie^{-6t} \sin t,$$

$$x_2^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) + ie^{-6t}(\cos t + \sin t),$$

$$x_1^{(2)} = e^{-6t} \cos t - ie^{-6t} \sin t,$$

$$x_2^{(2)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t) - ie^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

За частинні розв’язки можна взяти окремо дійсні і окремо уявні частини:

$$\overline{x_1}^{(1)} = e^{-6t}\cos t, , \overline{x_2}^{(1)} = e^{-6t}(\cos t - \sin t).$$

$$\overline{x_1}^{(2)} = e^{-6t}\sin t, \ \overline{x_2}^{(2)} = e^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

Загальним розв’язком системи буде

$$x_1 = C_1 e^{-6t}\cos t + C_2 e^{-6t}\sin t,$$

$$x_2 = C_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + C_2 e^{-6t}(\cos t + \sin t).$$

§5. Різницеві рівняння

5.1.Поняття різниці та різницевого рівняння

Якщо для значень змінної $x_1, x_2, x_3, \ldots$ функція $f(x)$ набуває значень $f(x_1), f(x_2), f(x_3) \ldots,$ то прирости функції складають $f(x_2) - f(x_1), \ f(x_3) - f(x_2), \ldots$

Приріст функції при переході від значення x_i до значення x_{i+1} будемо позначати: $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i).$ Зокрема можна взяти в якості значення незалежних змінних x і $x+1.$ Різниця $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ називається **першою різницею або різницею першого порядку.** Вона може розглядатись в свою чергу як функція від x, а тому і для неї можна визначити різницю:

$$\Delta\Delta f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = (f(x+2) - f(x+1) -$$
$$-(f(x+1) - f(x)).$$

Введемо позначення $\Delta\Delta f(x) = \Delta^2 f(x),$ тоді

$\Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$ **і називається різницею другого порядку**.

Аналогічно можна знайти різниці третього, четвертого і т.д. порядків.

Визначимо різниці деяких найважливіших функцій.

1) Якщо $f(x) = C,$ де C - стала величина, то

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = C - C = 0.$$

Зрозуміло, що і всі різниці наступних порядків будуть також дорівнювати нулю.

2) Якщо $f(x) = ax + b,$ то

$$\Delta f=\Delta f(x+1)-f(x)=a(x+1)+b-ax-b=a.$$

Різниця першого порядку лінійної функції дорівнює сталій, а всі решта будуть дорівнювати нулю.

3) Якщо $f(x)=ax^2+bx+c,$ то

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=$$
$$=ax^2+2ax+a+bx+b+c-ax^2-bx-c=2ax+a+b.$$

Оскільки різниця першого порядку є лінійною функцією, то різниця другого порядку – стала, а всі наступні різниці дорівнюють нулю.

4) Якщо $f(x)=a^x,$ то

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=a^{x+1}-a^x=a^x\cdot a^1-a^x=(a-1)a^x.$$

В економічних дослідженнях часто зустрічаються задачі, в яких час t є незалежною змінною, а залежна змінна визначається для часу $t, t+1, t+2$ і т.д.

Позначимо y_t - значення функції y в момент часу $t;$ y_{t+1} - значення функції в момент, зсунутий на одну одиницю , наприклад, на наступну годину, на наступний тиждень і т.д., y_{t+2} - значення функції y в момент, зсунутий на дві одиниці, і т.д.

Очевидно, що

$$\begin{cases} y_{t+1}-y_t=\Delta y_t, \\ y_{t+2}-y_{t+1}=\Delta y_{t+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{t+n}-y_{t+n-1}=\Delta y_{t+n-1}. \end{cases}$$

Звідки: $y_{t+1}=y_t+\Delta y_t;$ $y_{t+2}=y_{t+1}+\Delta y_{t+1}=y_t+\Delta y_t+\Delta y_{t+1}$.

За різницю другого порядку, маємо $\Delta^2 y_t=\Delta y_{t+1}-\Delta y_t$ або

$\Delta y_{t+1}=\Delta y_t+\Delta^2 y_t$, тому $y_{t+2}=y_t+\Delta y_t+\Delta y_t+\Delta^2 y_t=y_t+2\Delta y_t+\Delta^2 y_t$.

Аналогічно можна довести, що

$$y_{t+n}=y_t+\binom{n}{1}\Delta y_t+\binom{n}{2}\Delta^2 y_t+\dots+\binom{n}{n-1}\Delta^{n-1} y_t+\Delta^n y_t.$$

Отже, будь-яку функцію

$$f(y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+n}, t)=0$$

можна подати у вигляді:

$$F(y_t, \Delta y_t, ..., \Delta^n y_t, t) = 0 \qquad (7.50)$$

і навпаки .

Означення. ***Рівняння***

$$f(y_t, y_{t+1}, ..., y_{t+n}, t) = 0 \qquad (7.51)$$

називається різницевим рівнянням n-го порядку.

Розв'язати різницеве рівняння n-го порядку – це означає знайти таку функцію y_t, яка перетворює рівняння (7.50) або (7.51) в тотожність.

Розв'язок, в якому є довільна стала, називається загальним; розв'язок , в якому стала відсутня, називається частинним.

Означення. ***Рівняння***

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + ... + a_n y_{t-n} = f(t), \qquad (7.52)$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ сталі числа, називається неоднорідним різницевим рівнянням n-го порядку з сталими коефіцієнтами.

Якщо в рівнянні (7.52) $f(t)=0$, то рівняння називається **однорідним різницевим рівнянням n-го порядку з сталими коефіцієнтами**:

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + ... + a_n y_{t-n} = 0 . \qquad (7.53)$$

Рівняння $ay_t + by_{t-1} = c$ є **однорідне** різницеве рівняння першого порядку з сталими коефіцієнтами a та b, а рівняння $ay_t + by_{t-1} + cy_{t-2} = d$ - **неоднорідне** різницеве рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами a, b, c.

ТЕОРЕМА 1. Якщо розв'язками однорідного різницевого рівняння (7.53) є $y_1(t)$ і $y_2(t)$, то його розв'язком буде також функція $y_1(t) + y_2(t)$.

ТЕОРЕМА 2. Якщо $y(t)$ є розв'язком однорідного різницевого рівняння (7.53), то його розв'язком буде також функція $Ay(t)$, де A – довільна стала.

ТЕОРЕМА 3. Якщо $y(t)$ - частинний розв'язок неоднорідного рівняння (7.52) і $y(t, A_1, A_2, ..., A_n)$ - загальний розв'язок однорідного рівняння (7.53), то загальним розв'язком неоднорідного різницевого рівняння буде функція:

$$y(t) + y(t, A_1, A_2, ..., A_n).$$

Ці теореми схожі з теоремами для диференціальних рівнянь, які були наведені нами в попередньому розділі.

5.2. Різницеві рівняння першого порядку з сталими коефіцієнтами

Розглянемо неоднорідне різницеве рівняння

$$y_t - ay_{t-1} = f(t). \tag{7.54}$$

Відповідне йому однорідне рівняння буде:

$$y_t - ay_{t-1} = 0. \tag{7.55}$$

Візьмемо функцію $y_t = a^t$ і переконаємось, що вона буде розв'язком рівняння (7.55). Оскільки $y_t = a^t$, тоді $y_{t-1} = a^{t-1}$. Підставимо y_t і y_{t-1} в рівняння (7.55): $a^t - a \cdot a^{t-1} = a^t - a^t = 0.$

Отже, $y_t = a^t$ є розв'язком рівняння (7.55).

За теоремою (2) загальний розв'язок однорідного різницевого рівняння (7.55) є функція $y_t = Aa^t$, де A – довільна стала.

Нехай $\overline{y(t)}$ - частинний розв'язок неоднорідного різницевого рівняння (7.54). За теоремою (3) загальним розв'язком неоднорідного різницевого рівняння (7.54) буде функція

$$y(t) = \overline{y(t)} + Aa^t.$$

Частинний розв'язок знайти неважко, якщо $f(t) = \alpha$, де α - деяка стала. Насправді, якщо $\overline{y_t} = u$, де u - стала. Підставимо в рівняння (7.54), маємо: $u - au = \alpha$, звідки $u = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$.

Отже, загальний розв'язок рівняння (7.54) запишемо у вигляді: $y_t = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} + A \cdot a^t$.

5.3. Різницеві рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами.

Нехай задано неоднорідне різницеве рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами:

$$y_t + ay_{t-1} + by_{t-2} = f(t), \tag{7.56}$$

і відповідне йому однорідне рівняння

$$y_t + ay_{t-1} + by_{t-2} = 0. \tag{7.57}$$

Переконаємось, що функція $y_t = \lambda^t$ буде розв'язком рівняння (7.58). Підставимо в рівняння (7.57) $y_t = \lambda^t$ $(\lambda \neq 0)$, одержимо

$\lambda^t + a\lambda^{t-1} + b\lambda^{t-2} = 0.$ Оскільки $\lambda \neq 0,$ то поділимо на $\lambda^{t-2},$ маємо

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \qquad (7.58)$$

Це рівняння називається характеристичним рівнянням для рівняння (7.57).

Тут можуть мати місце такі три випадки:

1. $D = a^2 - 4b > 0,$ тоді рівняння (7.58) буде мати два дійсні, різні корені.

Загальний розв’язок рівняння (7.57) запишеться у вигляді:

$$y_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t,$$

а загальний розв’язок неоднорідного рівняння (7.56) запишеться так:

$$y_t = \overline{y}(t) + A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t.$$

2. $D = a^2 - 4b = 0,$ тоді $b = \frac{1}{4}a^2$ і $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}a$ і

$y_t = \left(-\frac{1}{2}a\right)^t.$ В цьому випадку однорідне рівняння (7.57) набуде вигляду:

$$y_t + ay_{t-1} + \frac{1}{4}a^2 y_{t-2} = 0. \qquad (7.59)$$

Тоді

$$\left(-\frac{1}{2}a\right)^t + a\left(-\frac{1}{2}a\right)^{t-1} + \frac{1}{4}a^2\left(-\frac{1}{2}a\right)^{t-2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}a)\right)^t (1 + a\left(-\frac{1}{2}a\right)^{-1} + \frac{1}{4}a^2\left(-\frac{1}{2}a\right)^{-2}) = \left(-\frac{1}{2}a\right)^t\left(1 - 2 - \frac{1}{2a}\right) = 0.$$

Легко переконатися, що розв’язком рівняння (7.59) є також функція $y_t = t \cdot \lambda^t, (\lambda = -\frac{1}{2}a).$ Тому загальним розв’язком рівняння (7.59) є

функція $y_t = A_1\left(-\frac{1}{2}a\right)^t + A_2 t\left(-\frac{1}{2}a\right)^t = (A_1 + A_2 t)\left(-\frac{1}{2}a\right)^t,$

а загальним розв’язком неоднорідного рівняння (7.56) функція

$$y_t = \overline{y}(t) + (A_1 + A_2 t)\left(-\frac{1}{2}a\right)^t.$$

3. $D = a^2 - 4b < 0,$ тоді характеристичне рівняння (7.58) має два комплексних спряжених корені:

$$\frac{1}{2}(-a - i\sqrt{4b-a^2}), \quad \frac{1}{2}(-a + i\sqrt{4b-a^2}).$$

Позначимо $\alpha = -\frac{1}{2}a, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$, тоді загальним розв'язком однорідного рівняння (7.57) буде функція

$y_t = A_1(\alpha + i\beta) + A_2(\alpha - i\beta)^t$, а неоднорідного рівняння (7.56) – функція $y_t = \overline{y}(t) + A_1(\alpha + i\beta) + A_2(\alpha - i\beta)^t$.

Приклад 1. Розв'язати різницеве рівняння:

$$y_t - 5y_{t-1} + 6y_{t-2} = 7.$$

Розв'язування. Запишемо відповідне йому однорідне рівняння :

$$y_t - 5y_{t-1} + 6y_{t-2} = 0.$$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ буде мати дійсні різні корені $(D = 25 - 24 = 1 > 0)$, $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3.$

Загальним розв'язком однорідного рівняння є функція

$$y_t = A_1 \cdot 2^t + A_2 \cdot 3^t.$$

Далі покладемо, що $y_t = y$ - частинний розв'язок неоднорідного рівняння, тоді

$$y - 5y + 6y = 7; \ 2y = 7; \ y = \frac{7}{2}.$$

Таким чином, загальним розв'язком неоднорідного рівняння є функція $y_t = \frac{7}{2} + A_1 \cdot 2^t + A_2 \cdot 3^t$. Сталі A_1 та A_2 визначимо із початкових умов: $y_0=5$, $y_1=9$. Тоді для $t = 0$ і $t = 1$ відповідно будемо мати:

$$\begin{cases} 5 = \frac{7}{2} + A_1 \cdot 2^0 + A_2 \cdot 3^0, \\ 9 = \frac{7}{2} + A_1 \cdot 2^1 + A_2 \cdot 3^1. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь відносно A_1 і A_2:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = \frac{3}{2}, \\ 2A_1 + 3A_2 = \frac{11}{2}. \end{cases} \quad \text{Звідки } A_1 = -1, \quad A_2 = \frac{5}{2}.$$

Отже, $y_t = \frac{7}{2} - 2^t + \frac{5}{2} \cdot 3^t -$ загальний розв'язок заданого в умові різницевого рівняння.

5.4. Приклади застосування різницевих рівнянь в економічних задачах

Приклад 1. Нехай деяка сума коштів видається під складний відсоток p, то до кінця t-го року її розмір буде складати:

$y_t = \left(1 + \frac{p}{100}\right) y_{t-1}$. Це однорідне різницеве рівняння першого порядку. Його розв'язком буде функція $y_t = A(1 + \frac{p}{100})^t$, де A - деяка стала, яку можна знайти із початкових умов.

Якщо покласти $y_0 = F$, то $A = F$, звідки $y_t = F\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$.

Це відома формула величини фонду F, що видається під складний відсоток.

Приклад 2. Нехай величина пропозиції сільськогосподарської продукції в t-му році є функція ціни минулого року p_{t-1}, а попит на цю продукцію є функція ціни в цьому році. Отже, попит: $q_t = f(p_t)$, а пропозиція $S_t = \varphi(p_{t-1})$.

Ціна рівноваги для даної продукції визначається рівністю:

$$f(p_t) = \varphi(p_{t-1}),$$

а це різницеве рівняння першого порядку.

Покладемо, що функція попиту визначається формулою $q_t = ap_t$, а функція пропозиції – формулою $S_t = bp_{t-1}$.

Ціна рівноваги запишеться: $ap_t = bp_{t-1}$, тобто $p_t = \frac{b}{a} p_{t-1}$.

Розв'язком цього рівняння є функція $p_t = A\left(\frac{b}{a}\right)^t$. Стала A визначається з початкових умов, що для $t = 0$ ціна складає p_0.

Тоді $p_0 = A$ і розв'язком рівняння є функція $p_t = p_0\left(\frac{b}{a}\right)^t$.

Якщо початкова ціна $p_0 = 0$, то $p_t = 0$ для всіх значень t.

Отже, ціна не підлягає зміні.

Взагалі кажучи, функція пропозиції – зростаюча, а тому $\boldsymbol{b>0;}$ а функція попиту – спадна, і тому $\boldsymbol{a<0.}$ Звідки $\boldsymbol{\frac{b}{a}<0.}$ Знак виразу $\boldsymbol{\left(\frac{b}{a}\right)^t}$ залежить від номера року $\boldsymbol{t}$, отже, ціна коливається.

Тут мають місце три випадки:

1) Якщо $\boldsymbol{\left|\frac{b}{a}\right|<1,}$ то $\boldsymbol{\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^t=0}$ і відповідно $\boldsymbol{\lim\limits_{t\to\infty} p_t=0.}$
Тоді кажуть, що коливання ціни стримується.

2) Якщо $\boldsymbol{\left|\frac{b}{a}\right|=1,}$ то послідовні коливання ціни складають $\boldsymbol{p_0, -p_0, p_0, \cdots}$
В цьому випадку кажуть, що коливання ціни періодичні.

3) Якщо $\boldsymbol{\left|\frac{b}{a}\right|>1,}$ то $\boldsymbol{\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^t=\infty}$ і $\boldsymbol{p_t}$ безмежно росте.
Кажуть, що коливання ціни зростає.

Розділ 8. РЯДИ

Поняття суми скінченої кількості чисел і її властивості відомі ще з давніх часів. Шукаючи суму геометричної прогресії, математик і механік Стародавньої Греції Архімед зустрівся з нескінченними рядами.

Для детального вивчення функції рядами систематично користувались англійський математик, механік, фізик, астроном І.Ньютон та великі німецькі вчені Г.Лейбніц і К. Гаусс.

Однак точна теорія рядів, в основі якої лежали поняття границі послідовності, була побудована на початку 19 ст. французьким математиком О.Коші. З цього часу ряди стали основним джерелом дослідження в математиці. З'явились цілі розділи математики, повністю побудовані на теорії рядів.

Методи цього розділу застосовуються для знаходження наближених значень інтегралів, які часто зустрічаються в теорії ймовірностей та у страховій справі, і не можуть бути виражені елементарними функціями; при розв'язуванні диференціальних рівнянь; при знаходженні наближених значень функцій, які використовуються при розв'язуванні економічних задач.

§1. Числовий ряд та його збіжність. Ряд геометричної прогресії

Нехай задана нескінченна послідовність чисел

$u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ ....

<u>Означення.</u> Нескінченна сума чисел виду
$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ ***називається числовим рядом, а*** $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ ***- членами ряду.***

Коротко ряд записується так: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Вираз для $n -$ го члена ряду при довільному натуральному n, називається загальним членом цього ряду і позначається u_n.

Ряд вважається заданим, якщо відомо правило , за яким для довільного номера n можна записати відповідний член ряду. Загальний член ряду можна задати формулою $u_n=f(n)$, з допомогою якої записується довільний член ряду.

Наприклад, якщо $u_n = \frac{1}{3^n}$, то ряд матиме відповідно вигляд

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots.$$

Якщо ряд записано у вигляді $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то легко записати декілька його членів.

Наприклад, якщо задано ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n$, то в іншій формі він матиме вигляд $1 + \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{5}{4}\right)^n + \ldots.$

Якщо відомо декілька членів числового ряду, то зрозумівши закономірність їх утворення, можна записати загальний член ряду.

Наприклад, задано чотири перших члени ряду

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \ldots.$$

Як бачимо, чисельники кожного члена ряду є натуральними числами. Знаменник першого члена ряду $\boldsymbol{10^0 = 1}$. Кожен знаменник наступного члена більший від попереднього в 10 разів. Таким чином, загальний член ряду записуємо $u_n = \frac{n}{10^{n-1}}$.

Нехай задано ряд
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots. \tag{8.1}$$

Суму $\boldsymbol{n}$ перших його членів позначимо через $\boldsymbol{S_n}$:
$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \tag{8.2}$$
і назвемо $\boldsymbol{n}$-ою частинною сумою ряду.

Утворимо тепер послідовність частинних сум ряду:

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 + u_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

<u>Означення.</u> Якщо при $n \to \infty$ ***існує границя послідовності частинних сум*** S_n ***членів даного ряду*** $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, ***то ряд називається збіжним, а число S - його сумою***.

Записують це так:

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \qquad (8.3)$$

Якщо послідовність частинних сум S_n не має границі, то ряд називається розбіжним.

Ряд може розбігатися у двох випадках:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$;

2) Послідовність S_n коливається.

Як приклад розглянемо ряд нескінченної геометричної прогресії:

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... \qquad (8.4)$$

Сума n перших членів прогресії рівна $S_n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}a.$

Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ і тому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}.$$

Отже, якщо $|q| < 1$,то нескінченна геометрична прогресія утворює збіжний ряд, сума якого $S = \dfrac{a}{1 - q}.$

Якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty,$ тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, і ряд геометричної прогресії розбігається.

При $q = 1$ одержимо ряд $a + a + a + a + ...(a \neq 0)$, який має частинну суму $S_n = na$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty.$

Якщо $q = -1$, одержимо ряд $a - a + a - a + ...$

Його частинні суми набирають таких значень: $S_1 = a,\ S_2 = 0,$ $S_3 = a,\ S_4 = 0, ...$, тобто $S_n -$ коливна послідовність, яка не має границі.

Наслідок. Якщо ряд (8.1) збігається, то різниця між сумою S і частинною сумою S_n його

$$R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + ... \qquad (8.5)$$

називається n-им залишком ряду.

Залишок R_n ряду являє собою ту похибку, яка одержиться, якщо замість наближеного значення суми ряду S взяти суму S_n перших n членів цього ряду. Але оскільки S є границя змінної S_n, то очевидно , $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$

А тому, взявши достатньо велике число членів збіжного ряду, можна суму цього ряду обчислити з любою точністю.

Звідси випливає, що основною задачею теорії рядів є дослідження збіжності ряду.

В наступному прикладі покажемо застосування ряду нескінченно спадної геометричної прогресії в економічних дослідженнях.

Приклад. Нехай I_0- початкові інвестиції, вкладені в замкнуту економічну систему, а q- доля національного доходу, яка йде на споживання, то в моделі Кейнса $[23]$ вартість національного прибутку Y виражається формулою

$$Y = \frac{1}{1-q} I_0 . \tag{8.6}$$

Права частина рівності (8.6) є не що інше як сума ряду нескінченно спадної геометричної прогресії із знаменником $q < 1$ і

$$Y = (1 + q + q^2 + ... + q^n + ...)I_0 . \tag{8.7}$$

Ця формула може бути використана для знаходження зміни вартості національного прибутку в залежності від початкових інвестицій I_0 та її долі q, що йде на споживання.

§2. Гармонічний ряд

Ряд $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... \tag{8.8}$$

називається гармонічним.

Доведемо розбіжність цього ряду. Скористаємося тим, що змінна $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при необмеженому зростанні n прямує до неперового числа e, залишаючись меншим своєї границі. Тому при любому цілому додатному n маємо $e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Звідси $\ln e > n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, або $1 > n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, або $\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}$.

Підставляючи в останню нерівність замість n числа 1,2,3,... одержимо нерівності:

$$1 > \ln 2 - \ln 1,$$

$$\frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2,$$

$$\frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Додавши почленно ці нерівності, одержимо

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$ або $S_n > \ln(n+1)$.

Але $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, а тому і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; тобто ряд (8.8) розбігається.

§3. Необхідна ознака збіжності числового ряду

ТЕОРЕМА. Якщо ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \qquad (8.9),$$

збігається, то його n-ий член u_n при необмеженому зростанні номера n прямує до нуля.

Доведення. Ми маємо $S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}$ і $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$. Звідси $u_n = S_n - S_{n-1}$. Оскільки даний ряд збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Звідси

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$, що і потрібно було довести.

Приклад. Дослідити збіжність числового ряду

$$\frac{5}{102} + \frac{10}{202} + \frac{15}{302} + \dots + \frac{5n}{100n+2} + \dots\ .$$

Розв'язування. Загальний член ряду $u_n = \frac{5n}{100n+2}$. Знайдемо при $n \to \infty$ його границю :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{100n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{100+\frac{2}{n}} = \frac{1}{20} \neq 0.$$

Отже, даний ряд є розбіжним.

Відмітимо, що $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ є лише необхідною умовою збіжності числового ряду, але не достатньою. Це означає, що дана умова може виконуватися, але відповідний числовий ряд може бути розбіжним.

Прикладом є гармонічний ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....+\frac{1}{n}+...$.

Як бачимо, необхідна умова для цього ряду виконується:

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, однак він є розбіжним .

Існує декілька ознак, які дозволяють стверджувати збіжність або розбіжність числових рядів.

§4. Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами

4.1. Ознака порівняння рядів

ТЕОРЕМА. Якщо кожний член ряду

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \tag{8.10}$$

з додатними членами менший (або рівний) відповідного члена

збіжного ряду

$$v_1 + v_2 + ... + v_n + ... \tag{8.11}$$

з додатними членами, то ряд (8.10) збігається.

Якщо кожний член ряду (8.10) більший (або рівний) відповідного члена розбіжного ряду (8.11), то ряд (8.10) розбігається.

Доведення. Нехай $u_n \leq v_n$ і ряд (8.11) збігається. Складемо суми перших n членів рядів (8.10) і (8.11):

$$S_n^{(1)} = u_1 + u_2 + ... + u_n,$$
$$S_n^{(2)} = v_1 + v_2 + ... + v_n.$$

Оскільки $u_1 \le v_1, u_2 \le v_2, ..., u_n \le v_n, ...,$ то $S_n^{(1)} \le S_n^{(2)}.$

Ряд (8.11) збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S^{(2)}.$ Звідси випливає, що $S_n^{(1)} < S^{(2)}.$ При необмеженому зростанні номера n послідовність сум $S_n^{(1)} (n = 1,2,3,..,),$ як зростаюча послідовність і обмежена зверху числом $S^{(2)}$, має границю $S^{(1)} \le S^{(2)},$ тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = S^{(1)} \le S^{(2)},$ а тому ряд (8.10) також збігається.

Нехай $u_n \ge v_n$ і ряд (8.11) розбігається. Тоді в силу нерівностей $u_1 \ge v_1, u_2 \ge v_2, ..., u_n \ge v_n$ випливає, що $S_n^{(1)} \ge S_n^{(2)}.$ Але оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \infty,$ то $S_n^{(1)}$ також буде необмежено зростати , тобто ряд буде розбігатися.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^2} + \frac{1}{4\cdot 3^3} + ... + \frac{1}{n\cdot 3^{n-1}} + ...$$

Розв’язування. Порівняємо даний ряд з нескінченно спадною геометричною прогресією

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n-1}} + ...$$

Оскільки $\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}} \le \frac{1}{3^{n-1}}$ для довільного n, а ряд нескінченно спадної геометричної прогресії є збіжним рядом, то згідно з ознакою порівняння рядів вихідний ряд буде збіжним.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ...$$

Розв’язування. Даний ряд порівняємо з гармонічним рядом. Для довільного n виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}.$

Як було показано вище, гармонічний ряд розбігається, отже даний ряд розбігається також.

4.2. Ознака Даламбера

ТЕОРЕМА. Нехай всі члени ряду $u_1+u_2+...+u_n+...$ додатні і нехай при необмеженому зростанні номера n границя відношення $(n+1)-$ го члена до n-го існує і дорівнює деякому числу l, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$.

Тоді :

1. Якщо $l<1$, то ряд збіжний.
2. Якщо $l>1$, то ряд розбіжний.
3. Якщо $l=1$, то ознака не дає відповіді на питання про збіжність або розбіжність ряду, тобто ряд в даному випадку може як збігатися , так і розбігатися.

Доведення. Нехай маємо ряд

$$u_1+u_2+...+u_n+... \tag{8.12}$$

складений із додатних чисел, і нехай

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l. \tag{8.13}$$

Тоді при достатньо великому *n*, тобто при *n* не меншому деякого числа *N* маємо:

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon$, де ε - як завгодно мале додатне число. Звідси

$l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon$ як тільки $n\ge N$.

а) Нехай $l<1$. Ми зможемо вибрати число ε настільки малим, що l+ε також буде менше одиниці, тоді, поклавши $l+\varepsilon=q$, одержимо:

$$0<q<1,\ \frac{u_{N+1}}{u_N}<q,\ \ \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}<q,\quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}}<q \text{ і т.д.}$$

Отже,

$$u_{N+1}<qu_N, u_{N+2}<u_{N+1}q<q^2u_N, u_{N+3}<u_{N+2}q<q^3u_N,... .$$

Звідси випливає, що члени ряду $u_{N+1}+u_{N+2}+....$., які представляють *N*- ий залишок ряду (8.12), менші відповідних членів нескінченно спадної геометричної прогресії

$$qu_N+q^2u_N+q^3u_N+... \text{ (знаменник } q<1).$$

Цей ряд збіжний, отже ряд (8.12) збіжний.

б) Нехай $l>1$. Тоді можна підібрати N таким, що при $n \geq N$ буде справедлива нерівність

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \varepsilon = q . \tag{8.14}$$

де ε вибирається настільки малим, щоб величина $q = l - \varepsilon$ залишалась більшою 1. Тоді кожний наступний член ряду буде більшим за попередній, а це суперечить необхідній ознаці збіжності ряду.

Отже, ряд розбігається.

в) В тому випадку, коли границя $l=1$, ознака Даламбера не дає відповіді на питання про збіжність чи розбіжність ряду. Ряди можуть бути як збіжними так і розбіжними.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{n!} + \ldots \ .$$

Розв'язування. Оскільки $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$, то $u_{n+1} = \dfrac{2^n}{(n+1)!}$, а значить,

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} : \frac{2^{n-1}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{2^{n-1}(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n!}{(n+1)!} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Тут $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n; \quad 0! = 1! = 1; \quad (n+1)! = (n+1)n!$

Оскільки $l = 0 < 1$, то згідно з ознакою Даламбера даний ряд збігається.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \ldots + \frac{n!}{10^n} + \ldots \ .$$

Розв'язування. Тут $u_n = \dfrac{n!}{10^n}$, $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}}$.

Тому

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!10^n}{n!10^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!10^n}{n!10^n \cdot 10} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = \infty.$$

Оскільки $l=\infty$, то за ознакою Даламбера числовий ряд розбігається.

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$$

Розв'язування. Знаходимо

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}:\frac{1}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}.$$

Одержану невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$ розкриємо за правилом Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\ln(n+1)]'}{[\ln(n+2)]'}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Тому за ознакою Даламбера збіжність вихідного ряду встановити неможливо. Якщо ознака Даламбера не дає відповіді на питання про збіжність ряду (при $l=1$), потрібно використати інші ознаки дослідження збіжності даного ряду.

4.3. Інтегральна ознака Коші

ТЕОРЕМА. Нехай $y=f(x)$ - неперервна, монотонно спадна і додатна в інтервалі $[1,\infty)$ функція, значення якої $f(1),f(2), f(3)$, $\ldots,f(n),\ldots$ співпадають з відповідними додатними членами ряду

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (8.15)$$

Тоді для збіжності ряду необхідно і достатньо, щоб невласний інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ мав скінчену величину.

Доведення. Розглянемо криволінійну трапецію , обмежену лінією $y=f(x)$, з основою від $x=1$ до $x=n$, де n- довільне ціле додатне число (мал. 1)

Площа фігури, обмежена даними лініями обчислюється за формулою

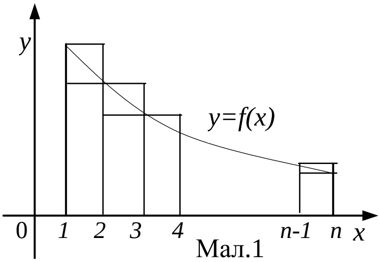
$$I_n=\int_1^n f(x)dx \qquad (8.16)$$

Позначимо цілі точки основи $x=1, x=2,\ldots, x=n-1, x=n.$ Розглянемо дві ступінчаті фігури: одна з них (внутрішня) має площу, яка дорівнює $f(2)+f(3)+\ldots+f(n)=S_n-u_1$, а друга

(зовнішня) - площу, що дорівнює
$f(1)+f(2)+...+f(n-1)=S_n-u_n$, де $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

Площа першої фігури менша за площу криволінійної трапеції, а площа другої більша за неї. Отже, маємо:

$$S_n-u_1<I_n<S_n-u_n. \qquad (8.17)$$



Мал.1

Звідси одержимо дві нерівності :

$$S_n<I_n+u_1, \qquad (8.18)$$

$$S_n>I_n+u_n. \qquad (8.19)$$

Оскільки функція $f(x)$ додатна, то інтеграл I_n зростає разом з n. Можливі два випадки:

1)Невласний інтеграл збігається, тобто $I=\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ існує. Тоді $I_n<I$ і з нерівності (8.18) при довільному n знаходимо $S_n\le u_1+I$. Оскільки, частинні суми S_n, обмежені і зростають з ростом n, то згідно з відомою теоремою аналізу, існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S<u_1+I$, тобто ряд збіжний.

2)Інтеграл розбігається. Тоді $I_n\to\infty$, при $n\to\infty$ і із нерівності (8.19) випливає, що S_n також необмежено зростає, а це означає, що ряд розбігається.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+...+\frac{n}{(n\ +1)^3}+... \ .$$

<u>*Розв'язування.*</u> Функція $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^3}$ (вигляд її встановлюємо із загального члена заміною n на x) набуває лише додатних значень, монотонно спадає на інтервалі $[1,\infty)$. Значення

$$f(1)=\frac{1}{2^3},\ f(2)=\frac{2}{3^3},\ f(3)=\frac{3}{4^3},...,\ f(n)=\frac{n}{(n+1)^3}$$

співпадають з членами заданого ряду. Отже функція $f(x)$ задовольняє умовам ознаки Коші.

Питання про збіжність даного ряду зводиться до питання про збіжність невласного інтеграла $\int_1^{\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx.$

Обчислимо даний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{x}{(x+1)^3} dx = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{x+1-1}{(x+1)^3} dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right] dx = \lim_{N\to\infty} \left[\int_1^{N} \frac{dx}{(x+1)^2} - \int_1^{N} \frac{dx}{(x+1)^3} \right] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{1}{x+1}\Big|_1^N + \frac{1}{2(x+1)^2}\Big|_1^N \right] = \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(N+1)^2} - \frac{1}{8} \right] = \frac{3}{8}.$$

Невласний інтеграл збігається, а тому збігається і вихідний ряд.

Приклад 2. Дослідити збіжність гармонічного ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \ .$$

Розв'язування. Функція $f(x) = \frac{1}{x}$ задовольняє умовам ознаки Коші:

а) набуває додатних значень і монотонно спадає на інтервалі $[1, \infty)$;

б) значення $f(1) = 1,\ f(2) = \frac{1}{2},\ f(3) = \frac{1}{3}, \ldots, f(n) = \frac{1}{n} \ldots$ співпадають з відповідними членами гармонічного ряду.

Обчислюємо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \ln|x|\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty} (\ln N - \ln 1) = \infty.$$

Даний невласний інтеграл розбігається, отже гармонічний ряд теж розбігається.

§5. Знакопереміжні ряди. Ознака збіжності Лейбніца

Згадані ознаки збіжності числових рядів відносились до рядів з додатними членами. Розглянемо тепер ряди, частина членів яких додатна, а частина – від'ємна або рівна нулю.

Якщо члени числового ряду мають різні знаки, то ряд називається знакозмінним.

Якщо два підряд члени ряду мають різні знаки, то знакозмінний ряд називають знакопереміжним. Він має вигляд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n + ...$$

Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ - додатні. На питання про збіжність або розбіжність такого ряду дає відповідь ознака Лейбніца, яка формулюється у вигляді теореми.

ТЕОРЕМА. Якщо із зростанням номера n члени ряду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n + ... \qquad (8.20)$$

за абсолютною величиною спадають, а загальний член u_n прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд (8.20) **збігається.**

Доведення. Просумуємо парне число членів ряду (8.20):

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + u_{2n-1} - u_{2n}.$$

Тоді $S_{2n+2} = S_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2})$.

Оскільки за умовою теореми $u_{2n+1} \geq u_{2n+2}$, то $S_{2n+2} \geq S_{2n}$, тобто із зростанням n суми з парними індексами також зростають.

Запишемо тепер часткову суму S_{2n} в іншому вигляді:

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - ... - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

Оскільки згідно з умовою теореми $u_n \geq u_{n+1}$ при будь-якому n, то із останньої рівності випливає, що $S_{2n} \leq u_1$.

Таким чином, послідовність $S_{2n} (n = 1, 2, ...)$ зростає із зростанням n, і залишається обмеженою, а тому прямує до визначеної границі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq u_1$.

Тепер просумуємо непарне число членів ряду (8.20)

$$S_{2n+1} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}.$$

Але тому що за умовою теореми $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$ то

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Таким чином, доведено, що при даних умовах, ряд (8.20) збігається і $0 \leq S \leq u_1$.

Наслідок. Якщо ряд (8.20) збігається, то залишок ряду також представляє собою збіжний ряд і його сума дорівнює $R_n = S - S_n$.

Залишок ряду, який задовольняє умовам тільки що доведеної теореми, рівний $R_n = (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1} u_{n+2} + ...$

Звідси $(-1)^n R_n = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$ і ряд в правій частині задовольняє умовам теореми. Тому $0 \le (-1)^n R_n \le u_{n+1}$, тобто $|R_n| \le u_{n+1}$.

Ця формула дає оцінку величини похибки в тому випадку, якщо замість суми ряду (8.20) береться сума n перших його членів. Як видно, що для знакозмінних рядів із спадними членами ця похибка не перевищує абсолютної величини першого із відкинутих членів.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dots .$$

Розв'язування. Абсолютні величини членів знакопереміжного ряду спадають: $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots$ і границя загального члена рівна нулю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Обидві умови ознаки Лейбніца виконуються, тому заданий ряд збігається.

Якщо хоч одна із умов ознаки Лейбніца не виконується, то знакопереміжний ряд буде розбіжним.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n} + \dots .$$

Розв'язування. Оскільки

$\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1 \ne 0,$ то даний ряд розбіжний.

Тут не виконується одна з умов ознаки Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

§ 6. Абсолютна та умовна збіжність ряду

Розглянемо знакозмінний ряд, у якому члени з додатними і від'ємними знаками не обов'язково чергуються. Позначимо такий ряд $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots$, де $u_i (i = 1,2,3,\dots,n)$ - числа як додатні, так і від'ємні.

Складаємо ряд з абсолютних величин його членів:

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+...+|u_n|+... .$$

Якщо ряд з абсолютних величин збігається, то знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним. Якщо знакозмінний ряд збігається, а ряд, складений з абсолютних величин, розбігається, то знакозмінний ряд називається неабсолютно збіжним (або умовно збіжним).

ТЕОРЕМА. Якщо ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду, збігається, то збігається і даний ряд.

Доведення. Позначимо через S_n суму n перших членів ряду

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+... \tag{8.21}$$

через S_n^+ - суму всіх додатних членів, а через S_n^- - суму абсолютних величин всіх від'ємних членів серед перших n членів ряду.

Тоді $S_n = S_n^+ - S_n^-$ і $\sigma_n = S_n^+ + S_n^-$, (8.22)

де $\sigma_n = |u_1|+|u_2|+|u_3|+...+|u_n|$.

Оскільки згідно з умовою σ_n має границю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$, а S_n^+ і S_n^- - додатні і зростаючі функції від n, причому $S_n^+ \le \sigma_n \le \sigma$ і $S_n^- \le \sigma_n \le \sigma$, то і вони мають границі. А отже і $S_n = S_n^+ - S_n^-$ при $n\to\infty$ прямує до границі, що і потрібно було довести.

Це достатня ознака, але не є необхідною, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ може збігатися і тоді, коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ розбігається.

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+... .$$

Розв'язування. Даний ряд називають рядом Лейбніца. Оскільки $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...>\frac{1}{n}>...,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то даний ряд збігається (згідно з ознакою Лейбніца). Ряд, складений із абсолютних величин $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...,$ є гармонічним, який, як відомо, розбіжний. Отже, даний ряд Лейбніца умовно збіжний.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+... .$$

Розв'язування. Складемо ряд з абсолютних величин

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...$$

Він збігається як ряд нескінченно спадної геометричної прогресії із знаменником $q=\frac{1}{2}.$ Отже заданий ряд збігається абсолютно.

§ 7. Поняття про степеневий ряд та його збіжність

Ряд, членами якого є функції змінної x, називається функціональним.

Це ряд вигляду

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+...+f_n(x)+... \qquad (8.23)$$

Якщо x набуває будь-якого числового значення, то ряд (8.23) стає числовим.

Сукупність всіх значень змінної x, при яких функціональний ряд збігається, називається областю збіжності цього ряду. Будемо розглядати ряди, областями збіжності яких служать різні інтервали осі *Ox*.

Якщо для всякого значення x із інтервалу (a,b) функціональний ряд збігається, то його сума є функція

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+...+f_n(x)+... \qquad (8.24)$$

Інакше кажучи, функція $f(x)$ в інтервалі (a,b) розкладається в ряд.

Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду $$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... , \qquad (8.25)$$

де $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ - постійні числа.

Іноді розглядають степеневий ряд більш загального вигляду:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+..., \qquad (8.26)$$

де a - деяке постійне число. Останній ряд легко приводиться до попереднього степеневого ряду, якщо перепозначити $x-a=x'$.

Доведемо досить важливу теорему на якій буде базуватися вивчення степеневих рядів.

ТЕОРЕМА Абеля. Якщо степеневий ряд (8.25) збігається в точці $x_0 \neq 0$, то він збігається абсолютно в інтервалі $(-|x_0|,|x_0|)$, тобто при всякому x, що задовольняє умові $|x|<|x_0|$.

Доведення. Із збіжності ряду (8.25) в точці x_0 випливає, що його загальний член $a_n x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$. А тому всі члени цього ряду є обмежені, тобто існує таке постійне додатне число M, що для всякого n має місце нерівність

$$|a_n x_0^n|<M. \qquad (8.27)$$

Запишемо ряд (8.25) так:

$$a_0+a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right)+a_0x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+...+a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n+... \qquad (8.28)$$

і складемо ряд із абсолютних величин членів цього ряду:

$$|a_0|+|a_1x_0|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|+|a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+...+|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+... \qquad (8.29)$$

В силу установленої нерівності (8.27) кожний член ряду (8.29) менший відповідного члена геометричної прогресії із знаменником

$\left|\dfrac{x}{x_0}\right|$:

$$M+M\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+...+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+... \qquad (8.30)$$

Якщо $|x|<|x_0|$, то $\left|\dfrac{x}{x_0}\right|<1$ і ряд (8.30) збігається; а тому збігається і ряд абсолютних величин (8.29), а значить, абсолютно збігається сам ряд (8.25). Теорема доведена.

Наслідок. Якщо степеневий ряд (8.25) розбігається при $x = x_0$, то він розбігається і при всякому $x,$ більшому за абсолютною величиною, ніж x_0, тобто при $|x| > x_0$.

Таким чином можна стверджувати, що для будь-якого степеневого ряду, який має як точки збіжності так і точки розбіжності, існує таке додатне число R, що для всіх x, по модулю менших $R(|x| < R),$ ряд абсолютно збігається, а для всіх x, по модулю більших $R(|x| > R$ ряд розбігається. Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду (8.25). Інтервал $(-R, R)$ називається інтервалом збіжності. Якщо $R = 0,$ то інтервал збіжності вироджується в точку, а при $R = \infty$ - у всю числову вісь.

Для степеневих рядів (8.26) все сказане вище залишається в силі, лише з тією різницею, що тепер центр інтервалу збіжності буде лежати не в точці $x = 0$, а в точці $x = x_0$. А отже, інтервалом збіжності буде $(x_0 - R, x_0 + R)$.

В наступній теоремі буде дано спосіб відшукання радіуса збіжності степеневого ряду.

ТЕОРЕМА . Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то радіус збіжності степеневого ряду знаходиться за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{8.31}$$

Доведення. Складемо ряд із абсолютних величин членів ряду (8.25):

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \ldots + |a_n||x|^n + |a_{n+1}||x|^{n+1} + \ldots \tag{8.32}$$

З попереднього параграфа відомо, що якщо збігається ряд (8.32), то збігається ряд (8.25) абсолютно. Припустивши, що $n \to \infty$, одержимо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\,\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|.$$

Згідно з ознакою Даламбера, ряд (8.32) збігається, якщо

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$, тобто , якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| < 1$, і розбігається, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| > 1.$$

Отже, степеневий ряд (8.25) збігається, для всіх тих значень x, для яких $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, і розбігається для тих значень x, для яких $$|x| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Таким чином, для ряду (8.25), радіус збіжності знаходиться за формулою $$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Приклад 1. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $1+\frac{x}{2\cdot 2}+\frac{x^2}{2^2\cdot 3}+\frac{x^3}{2^3\cdot 4}+\ldots$ і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

Розв'язування. Тут $a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+2)}$.

Знаходимо радіус збіжності ряду
$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n(n+1)} : \frac{1}{2^{n+1}(n+2)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+2)}{2^n(n+1)} =$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2.$$

Отже, ряд збігається в інтервалі $(-2,2)$. Щоб вирішити питання про збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу, покладемо спочатку $x=2$. Отримаємо гармонічний ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, який, як відомо, розбігається. При $x=-2$ одержимо знакозмінний ряд Лейбніца:
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots .$$

Цей ряд збігається умовно. Таким чином, степеневий ряд збігається для $x\in[-2,2)$.

Приклад 2. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+...+\frac{x^n}{n^2}+...$ і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

Розв'язування. Оскільки $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$, радіус збіжності

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1.$$

Отже , даний ряд абсолютно збігається в інтервалі $(-1,1)$.

Дослідимо степеневий ряд на кінцях інтервалу, тобто в точках $x=-1,\ x=1.$

При $x=1$ отримуємо числовий ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$.

Для дослідження збіжності ряду використаємо інтегральну ознаку Коші. Для цього обчислимо інтеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N\frac{dx}{x^2}=\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^N=-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{x}\Bigg|_1^N=-\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}-1\right)=1.$$

Невласний інтеграл збігається , значить, і числовий ряд теж збігається, тобто правий кінець входить в інтервал збіжності.

При $x=-1$ одержимо числовий ряд

$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{(-1)^n}{n^2}+...,$ який збігається абсолютно, тому що

виконуються умови ознаки Лейбніца: $1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>...$;

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ і збігається ряд , складений з абсолютних величин. Таким чином, вихідний степеневий ряд абсолютно збігається на відрізку $[-1,1]$.

Приклад 3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$1+\frac{1!}{10}x+\frac{2!}{10^2}x^2+\ldots+\frac{n!\,x^n}{10^n}+\ldots\ .$$

Розв'язування. Оскільки $a_n=\frac{n!}{10^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$,

то $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{10^n}:\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}n!}{10^n(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0.$

Це означає, що ряд збігається тільки при $x=0$ і розбігається при інших значеннях.

Приклад 4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$(x-3)+\frac{1}{2^2}(x-3)^2+\frac{1}{3^2}(x-3)^3+\ldots+\frac{1}{n^2}(x-3)^n+\ldots\ .$$

Розв'язування. Тут $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2=1.$$

Значить, ряд збігається, якщо $-1<x-3<1$, тобто інтервал збіжності степеневого ряду $2<x<4$.

Дослідимо збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x=4$ одержимо ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$.

Даний ряд збігається, оскільки, згідно з інтегральною ознакою Коші, невласний інтеграл

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}=\lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-2}dx=\lim_{N\to\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_1^N=-\lim_{N\to\infty}(\frac{1}{N}-1)=1$$

є збіжним.

Якщо $x=2$, то одержимо знакозмінний ряд $-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+(-1)\frac{1}{n^2}+\ldots$.

Цей ряд збігається, оскільки виконуються умови ознаки Лейбніца:

1) $1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\ldots$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

Крім цього, знакозмінний ряд збігається абсолютно, тому що збігається ряд з абсолютних величин його членів.

Приклад 5. Дослідити збіжність ряду

$$1!(x-10)+2!(x-10)^2+3!(x-10)^3+...+n!(x-10)^n+... \,.$$

Розв'язування. Оскільки $a_n = n!,\ a_{n+1}=(n+1)!$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Це означає, що ряд збігається тільки при $x-10=0,$ тобто в точці $x=10.$

§8. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів. Розклад деяких функцій в степеневі ряди

Приведемо дві важливі теореми (без доведення).

ТЕОРЕМА 1. Степеневий ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (8.33)$$

і одержаний із нього почленним диференціюванням ряд

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+...+na_nx^{n-1}+... \qquad (8.34)$$

мають один і той же інтервал збіжності $(-R,R).$ Сума ряду (8.34) дорівнює похідній $S'(x)$ суми $S(x)$ ряду (8.33) при всіх значеннях x , для яких $|x|<R$.

ТЕОРЕМА 2. Степеневий ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (8.35)$$

і ряд

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+...+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+... \qquad (8.36)$$

одержаний із ряду (8.35) почленним інтегруванням, мають однаковий інтервал збіжності. Сума ряду (8.36) дорівнює

$$F(x)=\int_0^x S(x)dx, \quad \text{де} \quad S(x) \text{ - сума ряду (8.35).}$$

Для практики важливо вміти дану функцію $f(x)$ розкласти в степеневий ряд, тобто функцію $f(x)$ представити у вигляді степеневого ряду, що дає можливість досить просто обчислювати значення цієї функції.

Спочатку розглянемо деякі часткові випадки. Розглянемо степеневий ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots . \qquad (8.37)$$

Цей ряд являє собою ряд геометричної прогресії із знаменником x, який збіжний при $|x| < 1$ і його сума рівна $\frac{1}{1-x}$.

Отже, ми можемо записати:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (8.38)$$

На останню рівність можна дивитися як на розклад функції $\frac{1}{1-x}$ в степеневий ряд. Із розкладу (8.38) можна легко одержати інші розклади функцій.

Розклад функції $f(x) = ln(1+x)$.

Замінивши в розкладі (8.38) x на $(-y)$, будемо мати:

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \ldots (-1)^n y^n + \ldots . \qquad (8.39)$$

Якщо $0 \le |y| \le |x| < 1$, то рівність (8.39), як було сказано в попередньому параграфі, можна проінтегрувати почленно по y в межах від 0 до x, тобто $\int_0^x \frac{dy}{1+y} = \int_0^x dy - \int_0^x yd + \ldots + (-1)^n \int_0^x y^n dy + \ldots$

Звідси маємо: $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$, $|x|$ <1.

Такий розклад справедливий також для $x = 1$ і відповідно ряд $ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ є збіжним. Область збіжності буде множина $x \in (-1,1]$.

Розклад функції $f(x) = arctgx$

Покладемо в розкладі (8.38) $x = -y^2$.

$$\frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - \ldots + (-1)^n y^{2n} + \ldots \qquad (8.40)$$

Помноживши останню рівність на dy і проінтегрувавши почленно в межах від 0 до x, де $|x| < 1,$ одержимо:

$$\int_0^x \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^x dy - \int_0^x y^2 dy + \int_0^x y^4 dy - ... + (-1)^n \int_0^x y^{2n} dy + ... \text{ або}$$

$$arctgy\Big|_0^x = y\Big|_0^x - \frac{y^3}{3}\Big|_0^x + \frac{y^5}{5}\Big|_0^x - ... + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x + ... \ .$$

Оскільки $arctg0 = 0,$ то маємо:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., \text{ якщо } |x| < 1. \qquad (8.41)$$

Можна довести, що цей розклад є справедливим при $x = -1$ і $x = 1.$

При $x = 1$ маємо: $\quad arctg1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$.

При $x = -1$ маємо: $\quad arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - ...$.

Отже, область збіжності даного степеневого ряду буде відрізок $[-1;1]$.

Ми бачимо, що деякі функції, як, наприклад $ln(1+x)$, $arctgx$ і тому подібні, допускають розклад в степеневий ряд відносно аргументу x. Природно поставити загальне питання про розклад даної функції $f(x)$ по зростаючим цілим додатнім степеням x. Цим питанням ми займемось в наступному параграфі.

§ 9. Розклад функції в ряд Маклорена

Припустимо, що дана функція $f(x)$ може бути розкладена в степеневий ряд $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$, (8.42) де $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ - невизначені коефіцієнти, причому інтервал збіжності $(-R, R)$ не зводиться до точки, тобто $R > 0$.

Як було сказано вище, степеневий ряд (8.42) в його інтервалі збіжності можна диференціювати почленно будь-яке число раз, причому всі одержані ряди будуть збігатися і їх суми будуть дорівнювати відповідним похідним від суми даного ряду $f(x).$

Продиференціювавши почленно ряд (8.42) n раз , будемо мати:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}+... ,$$

$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+...+(n-1)na_nx^{n-2}+...$$

$$f'''(x)=2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+3\cdot 4\cdot 5a_5x^2+...+(n-2)(n-1)na_nx^{n-3}+...$$

$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3...a_n+1\cdot 2...n\cdot(n+1)a_{n+1}x+... .$$

Поклавши в рівностях, включаючи (8.42), $x=0$ одержимо:

$$f(0)=a_0; \qquad f'(0)=a_1; \qquad f''(0)=2a_2; \qquad f'''(0)=2\cdot 3a_3;$$

$$f^{(n)}(0)=1\cdot 2\cdot 3...n\cdot a_n.$$

Звідси $a_0=f(0);\quad a_1=\dfrac{f'(0)}{1!};\ a_2=\dfrac{f''(0)}{2!};\ a_3=\dfrac{f'''(0)}{3!};...$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Підставивши значення коефіцієнтів $a_0,a_1,...,a_n$ в (8.42), одержимо формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x), \quad (8.43)$$

де $R_n(x)=f^{(n)}(\bar{x})\dfrac{x^n}{n!}$ $(0<\bar{x}<x)$ – залишковий член у формі Лагранжа. Число $\bar{x}$ можна записати у вигляді $\bar{x}=\theta x,\ 0<\theta<1.$

Якщо при необмеженому зростанні n, тобто при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0, \quad (8.44)$$

то із формули Маклорена одержимо розклад функції $f(x)$ в ряд по степенях x, який називається рядом Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \quad (8.45)$$

А умова (8.44) являє собою необхідні і достатню умову того, що ряд Маклорена для функції $f(x)$, яка диференційована необмежене число разів, збігається до цієї функції.

Приведемо приклади на застосування ряду Маклорена до розкладу деяких елементарних функцій в степеневі ряди.

Розклад функції $f(x)=e^x$.

Нехай $f(x)=e^x$. Тоді $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, … $f^{(n)}(x)=e^x$.

Поклавши $x=0$, одержимо:

$$f(0)=e^0=1;\ f'(0)=1;\ f''(0)=1;\ \dots\ f^{(n)}(0)=1.$$

Підставивши ці значення в формулу Маклорена (8.43) , будемо мати:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

де $R_n(x)=f^{(n)}(\bar{x})\frac{x^n}{n!}=f^{(n)}(\theta x)\frac{x^n}{n!}$.

Оскільки $f^{(n)}(\theta x)=e^{\theta x}$ - величина обмежена при обмеженому x, то, для того, щоб довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$, потрібно показати,що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$. Для того зафіксуємо x і розглянемо ряд

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots.$$

Якщо він збігається, то його загальний член $u_n=\frac{x^n}{n!}$ при $n\to\infty$ прямує до нуля. Використаємо ознаку Даламбера до ряду абсолютних величин:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!}:\frac{\left|x^n\right|}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.

Таким чином $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\theta x}\frac{x^n}{n!}=0$ і функція $f(x)=e^x$ розкладається в інтервалі $(-\infty,\infty)$ в слідуючий ряд Маклорена

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \qquad (8.46)$$

Розклад функцій $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$

Нехай $f(x)=\sin x$; звідси

$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{IV}(x)=\sin x, \ldots$

Поклавши $x=0$, маємо :

$f(0)=0;\ f'(0)=1;\ f''(0)=0;\ f'''(0)=-1;\ f^{1v}(0)=0; \ldots$

Підставивши ці значення у формулу (8.45), одержимо:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots. \qquad (8.47)$$

Можна легко переконатися, що ряд збігається для будь-якого $x\in(-\infty,\infty)$.

Зробивши аналогічні викладки, можна знайти розклад функції $f(x)=\cos x$ в ряд:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \text{ для } x\in(-\infty,\infty) \qquad (8.48).$$

Розклад бінома Ньютона $f(x)=(1+x)^m$

Нехай $f(x)=(1+x)^m$, де $m-$число ціле або дробове, додатне або від'ємне.

Тоді маємо: $f'(x)=m(1+x)^{m-1}$,

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},$$

$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},$$

………………………………………………………

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

………………………………………………………………

Поклавши $x=0$ у всіх цих формулах, одержимо:

$f(0)=1;\ f'(0)=m;\ f''(0)=m(m-1);\ f'''(0)=m(m-1)(m-2)$

$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1),\ldots$.

Підставивши вирази для $f(0), f'(0),\ldots f^{(n)}(0)$ в ряд Маклорена (8.45) будемо мати

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (8.49)$$

Користуючись формулою $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, знайдемо інтервал збіжності $(-R,R)$ ряду (8.49).

Ми маємо:

$$a_n=\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n},$$

$$a_{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)}{1\cdot 2\cdot ...n\cdot (n+1)}.$$

Звідси $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\dfrac{n+1}{m-n}\right|$, і відповідно

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right|=\left|\frac{1}{-1}\right|=1. \tag{8.50}$$

Таким чином, біноміальний ряд збігається для $x\in(-1,1)$ і розбігається зовні. Чи збігається цей ряд в точках $x=-1$ і $x=1$, необхідно досліджувати для кожного випадку окремо.

§10. Розклад функції в ряд Тейлора

В деяких випадках функція $f(x)$ або її похідні втрачають зміст в точці $x=0$, як, наприклад $f(x)=\ln x$ або $f(x)=\sqrt{x}$.

Такі функції не можуть бути розкладені в ряд Маклорена. Для розкладу такого роду функцій можна скористатись більш загальними степеневими рядами, розкладеними за степенями $(x-a),$ де $a-$ підібране, в конкретному випадку, постійне число.

В розділі 4 було доведено, що якщо функція $f(x)$ диференційована n раз в інтервалі (a,x),то має місце формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n, \tag{8.51}$$

де $R_n = f^{(n)}(c)\dfrac{(x-a)^n}{n!}$ ($a < c < x$) – залишковий член у формі Лагранжа. Число c можна записати у вигляді $c = a + \theta(x-a)$, де $0 < \theta < 1$.

Якщо при необмеженому зростанні n, тобто при $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0, \qquad (8.52)$$

то із формули Тейлора одержимо розклад функції $f(x)$ в ряд по степенях $(x-a)$, який називається рядом Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (8.53)$$

Умова (8.52) служить необхідною і достатньою умовою того, що ряд Тейлора для функції, яка необмежене число раз диференційована, збігається до цієї функції.

Приклад. Розкласти в ряд за степенями $(x-a)$ функцію

$$f(x) = e^{\frac{x}{a}}.$$

Розв'язування. Продиференціюємо функцію $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}},\ f''(x) = \frac{1}{a^2}e^{\frac{x}{a}},\ f'''(x) = \frac{1}{a^3}e^{\frac{x}{a}},\ldots,\ f^{(n)}(x) = \frac{1}{a^n}e^{\frac{x}{a}},\ldots$$

Підставивши $x = a$ в попередні формули, одержимо:

$$f(a) = e,\ f'(a) = \frac{e}{a},\ f''(a) = \frac{e}{a^2},\ f'''(a) = \frac{e}{a^3},\ldots f^{(n)}(a) = \frac{e}{a^n},\ldots$$ Використовуючи ряд Тейлора (8.53), одержимо такий розклад функції $f(x)$ по степенях $(x-a)$:

$$f(x) = e + \frac{e}{1!}(x-a) + \frac{e}{2!a^2}(x-a)^2 + \frac{e}{3!a^3}(x-a)^3 + \ldots + \frac{e}{n!a^n}(x-a)^n + \ldots$$

Знаходимо радіус збіжності даного ряду: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Тут

$$a_n = \frac{e}{n!\,a^n}, \quad a_{n+1} = \frac{e}{(n+1)!\,a^{n+1}}.$$

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e}{n!\,a^n} \cdot \frac{(n+1)!\,a^{n+1}}{e} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\cdot a = \infty,$ при будь-якому $a \neq 0.$

Отже, область збіжності ряду буде $(-\infty, \infty)$

§11. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Одержані розклади деяких функцій в степеневі ряди в §10,11 дають можливість наближено обчислювати значення функції, визначені інтеграли, границі функції і т.д.

Приклад 1. Обчислити $\cos 5^\circ$, обмежившись двома членами розкладу.

Розв'язування. Використаємо формулу розкладу $\cos x$ в ряд за зростаючими степенями x: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$.

Переведемо 5° в радіанну міру: $5^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 5^\circ = \frac{\pi}{36}.$

Тоді $\cos 5^\circ \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2$. Підставивши замість $\pi \approx 3{,}14159,$ одержимо $\cos 5^\circ \approx 0{,}9962.$

Приклад 2. Обчислити число e .

Розв'язування. Використаємо розклад функції e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Поклавши $x = 1$, одержимо $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$. Якщо за наближене значення числа e взяти суму перших семи членів цього ряду $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720},$ то одержимо $e \approx 2{,}718.$

Приклад 3. Обчислити $\sqrt[5]{1,1}$ з точністю до 0,001.

Розв'язування. Використаємо формулу біноміального ряду

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots .$$

Якщо $x = 0,1$, $m = \frac{1}{5}$, то одержимо

$$\sqrt[5]{1,1} = (1+0,1)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0,1 + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{2!}0,01 + \dots = 1 + 0,02 - 0,0008 \approx$$

$\approx 1,019.$

Оскільки в знакопереміжному ряді із спадними по абсолютній величині членами $|R_n| < u_{n+1}$, то похибка в наших обчисленнях не перевищує *0,0008,* що забезпечує необхідну точність.

Приклад 4. Обчислити $\sqrt[3]{130}$, обмежившись двома членами розкладу.

Розв'язування. Запишемо число $\sqrt[3]{130}$ у вигляді

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5(1+\frac{1}{25})^{\frac{1}{3}}.$$

У нашому випадку , поклавши в біноміальному ряді $x = \frac{1}{25}$,

$m = \frac{1}{3}$, матимемо $\sqrt[3]{130} \approx 5(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25}) = 5\frac{1}{15}$.

Приклад 5. Обчислити $\ln 10$, обмежившись трьома членами розкладу.

Розв'язування. Число $\ln 10$ представимо так:,

$\ln 10 = \ln(2^3 + 2) = \ln 2^3(1+\frac{1}{4}) = 3\ln 2 + \ln(1+\frac{1}{4)}$. Поклавши у формулі $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ значення $x = 1, x = \frac{1}{4}$, одержимо

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \approx 0,693,\ \ln(1+\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\cdot 4^2} + \frac{1}{3\cdot 4^3} - \dots \approx 0,219.$$

Тоді $\ln 10 = 2,019 + 0,219 = 2,298.$

Приклад 6. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx,$ обмежившись чотирма членами розкладу функції $\sin x$.

Розв'язування. Оскільки невизначений інтеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx,$ не може бути виражений в елементарних функціях і формулу Ньютона-Лейбніца не можна використати, даний інтеграл обчислимо наближено, використовуючи теорію рядів. Розділимо праву частину розкладу функції $\sin x$ в ряд

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$ на x і проінтегруємо одержаний вираз:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots) dx = \int_0^1 dx - \frac{1}{3!}\int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{5!}\int_0^1 x^4 dx -$$

$$- \frac{1}{7!}\int_0^1 x^6 dx + \ldots = x\Big|_0^1 - \frac{1}{3!3} x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{5!5} x^5\Big|_0^1 - \frac{1}{7!7} x^7\Big|_0^1 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \ldots \approx 0{,}9461.$$

Приклад 7. Обчислити $\int_0^{0,3} e^{-x^2} dx.$

Розв'язування. Замінивши в рівності $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

x на "- x^2" і проінтегрувавши в межах від 0 до $0{,}3$, одержимо

$$\int_0^{0,3} e^{-x^2} dx = \int_0^{0,3} (1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \ldots) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} \right]\Bigg|_0^{0,3} \approx 0{,}291.$$

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - arctgx}{x^3}.$

Розв'язування. Оскільки $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$

$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$ то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - arctgx}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}) - (\frac{1}{5} - \frac{1}{5!})x^2 + \ldots \right] = \frac{1}{6}.$$

Приклад 9. Знайти розв’язок диференціального рівняння

$$y'' + xy' + y = x\cos x, \qquad (8.54)$$

який задовольняє початковим умовам

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 1. \qquad (8.55)$$

Розв’язування. Шукаємо розв’язок y у вигляді ряду

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \qquad (8.56)$$

Знайшовши похідну y' і використавши (8.55), одержимо $a_0 = 0;\ a_1 = 1.$ Тоді $y = x + a_2 x^2 + + a_n x^n + \ldots$

Продиференціювавши розклад y два рази, одержимо:

$$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots$$

Підставивши y, y', y'' в (8.54) і замінивши $\cos x$ його розкладом (8.48), знаходимо:

$$2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 + \ldots + x(1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots) +$$

$$+ x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = x(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots).$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо:

$$\begin{array}{c|l}
1 & 2a_2 = 0 \\
x & 2\cdot 3a_3 + 2 = 1 \\
x^2 & 3\cdot 4a_4 + 2a_2 + a_2 = 0 \\
x^3 & 4\cdot 5a_5 + 3a_3 + a_3 = -\dfrac{1}{2!} \\
x^4 & 5\cdot 6a_6 + 4a_4 + a_4 = 0 \\
x^5 & 6\cdot 7a_7 + 5a_5 + a_5 = \dfrac{1}{4!}
\end{array}$$

Звідси випливає, що $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = \ldots = 0;$

$$a_3 = -\frac{1}{3!}, \quad a_5 = \frac{1}{4\cdot 5}\left(-\frac{1}{2!} - 4a_3\right) = \frac{1}{5!},$$
$$a_7 = \frac{1}{6\cdot 7}\left(\frac{1}{4!} - 6a_5\right) = -\frac{1}{7!}, \quad a_9 = \frac{1}{9!}, \ldots \tag{8.57}$$

Підставивши постійні (8.57) в розклад (8.56) маємо:

$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$, що відповідає розкладу функції $y = \sin x$ по степенях x.

Перевірка. Підставимо $y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x$ у рівняння (8.54):

$$-\sin x + x\cos x + \sin x = x\cos x, \quad x\cos x = x\cos x.$$

Розв’язок рівняння (8.54) знайдено правильно.

ДЕЯКІ ОЗНАЧЕННЯ І ФОРМУЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Алгебра

Формули скороченого множення і розклад на множники

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,\ (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),\ \ a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right),$$

$$x^n - a^n = (x-a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}\right).$$

Для квадратного тричлена $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 - корені рівняння: $ax^2 + bx + c = 0$.

Степені й корені

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $a^p : a^q = a^{p-q}$, $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$,

$\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$, $\sqrt[p]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$, $a^p \cdot b^p = (ab)^p$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$,

$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$, $\sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}$, $\sqrt[pk]{a^{qk}} = \sqrt[p]{a^q}$, $\sqrt[p]{a^q} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^q$,

$a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$, $\sqrt[p]{a^q} = a^{q/p}$.

Квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0;\ (a \neq 0);\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ D = b^2 - 4ac.$$

$D > 0 \to x_1 \neq x_2$; $D = 0 \to x_1 = x_2$ $D < 0 \to$ немає коренів в R.

Теорема Вієта: якщо x_1 і x_2 - корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -b/a$; $x_1 \cdot x_2 = c/a$.

Зведене квадратне рівняння:

a=1, $x^2 + px + q = 0$, якщо x_1 і x_2 - корені, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Якщо $p = 2k$ (p - парне число) і $x^2 + 2kx + q = 0$, то $x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - q}$.

Логарифми

$\log_a x = b \Rightarrow a^b = x$; $a > 0$ $a \neq 1$; $a^{\log_a x} = x$; $\log_a a = 1$;

$\log_a 1 = 0$, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\log_a x^k = k\log_a x$

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $(x>0)\ (y>0)$; $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$; $(x>0)$

$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$; $(c>0, c\neq 1)$ $\log_{10} x = \lg x$; $\log_e x = \ln x$

Прогресії

Арифметична $\{a_n\}\div$

$a_n = a_{n-1} + d$, $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, $a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$,

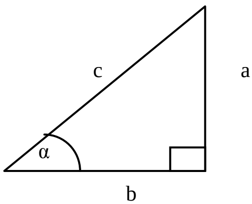
$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Геометрична $\div\div\{b_n\}$

$b_n = b_{n-1}\cdot q$, $b_n^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, $b_n = b_1\cdot q^{n-1}$,

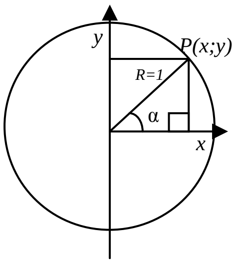
$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$, $S_n = \frac{b_1\cdot(q^n - 1)}{q-1}$, якщо $|q|<1$, $n\to\infty$, $S_n = \frac{b_1}{1-q}$.

Тригонометрія



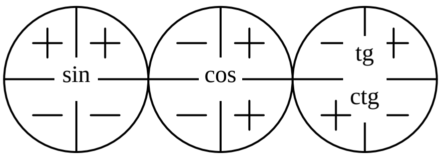
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$;

$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;



$\sin\alpha = y$,

$\cos\alpha = x$



Значення тригонометричних функцій

	0° 0	30° $\pi/6$	45° $\pi/4$	60° $\pi/3$	90° $\pi/2$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує
ctg	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Формули зведення

β	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\mp\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\mp\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\pi$	$\mp\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$ctg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Формули перетворення

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$;

$1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha$; $1+ctg^2\alpha=\cos\sec^2\alpha$;

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$; $ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp 1}{ctg\alpha\pm ctg\beta}$;

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$;

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$;

$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$; $ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$;

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,;\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,;$$

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}\,;$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,;$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,;$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\,;ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\,;$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

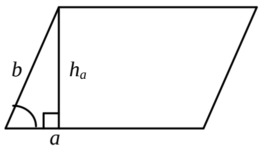
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\,;\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\,;$$

Тригонометричні рівняння

$\underline{\sin x=a}\,;$	$\lvert a\rvert\le 1\,;k\in z$	$\underline{\cos x=a}\,;$
$x=(-1)^k\times\arcsin a+k\pi\,;$ $a=0\to x=k\pi\,;$ $a=1\to x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,;$ $a=-1\to x=-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;$ $\lvert a\rvert>1\to x\in\varnothing$		$x=\pm\arccos a+2k\pi\,;$ $a=0\to x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,;$ $a=1\to x=2k\pi\,;$ $a=-1\to x=\pi+2k\pi\,;$ $\lvert a\rvert>1\to x\in\varnothing$
$\underline{tgx=a}\,;$	$m\in R\,;k\in z$	$\underline{ctgx=a}\,;$
$x=arctga+k\pi\,;$ $a=0\to x=k\pi\,;$ $a=\pm1\to x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\,;$		$x=arctga+k\pi\,;$ $a=0\to x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,;$ $a=1\to x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,;$

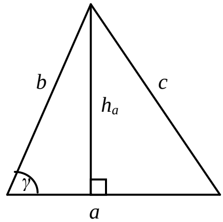
Формули площ фігур

Паралелограм



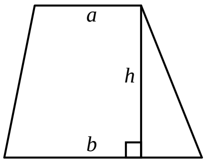
$S = ah_a$; $S = ab\sin\alpha$.
(для ромба ще і $S = d_1 \times d_2 / 2$, де d_1 і d_2 - його діагоналі).

Трикутник



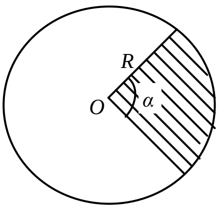
$S = ah_a / 2$; $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;
$S = abc / 4R$; $S = pr$;
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
$p = \frac{a+b+c}{2}$.

Трапеція



$$S = \frac{a+b}{2} \times h$$

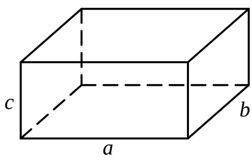
Круг



$S = \pi R^2$ - площа круга;
$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ - площа сектора.

Стереометрія

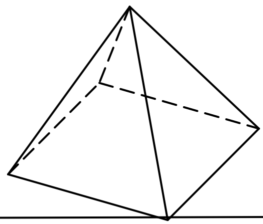
Паралелепіпед



$V = S_{осн} \times H$;
прямокутний: $V = abc$;

$$S_{повн} = 2(ab + bc + ac).$$

Піраміда



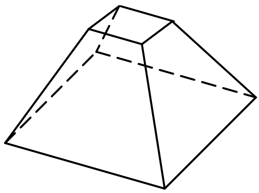
$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \times H;$$

$$S_{повн} = S_{біч} + S_{осн};$$

Правильна:

$$S_{біч} = p_{осн} \times A.$$

Зрізана піраміда



$$V = \frac{H}{3} \times \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right);$$

S_1, S_2 - площі основ;

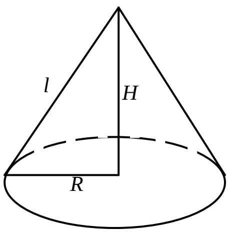
$$S_{повн} = S_{біч} + S_1 + S_2.$$

Правильна:

$S_{біч} = (P_1 + P_2) \times \frac{A}{2}$, де

P_1, P_2 - параметри основи.

Конус

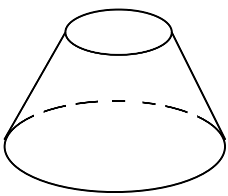


$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H;$$

$$S_{біч} = \pi R l;$$

$$S_{повн} = \pi R(R + l).$$

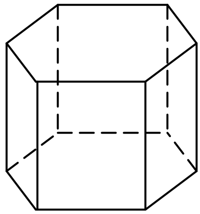
Зрізаний конус



R_1 и R_2 - радіуси основ;

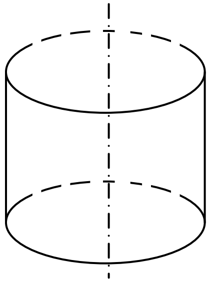
$$S_{біч} = \pi l(R_1 + R_2);$$
$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right).$$

Призма



$V = S_{осн} \times H$;
пряма: $S_{біч} = P_{осн} \times H$;
$S_{повн} = S_{біч} + 2S_{осн}$; похила:
$S_{біч} = P_{пп} \times a$;
$V = S_{пп} \times a$, де a - бічне ребро,
$P_{пп}$ - периметр, $S_{пп}$ - площа перпендикулярного перерізу.

Циліндр

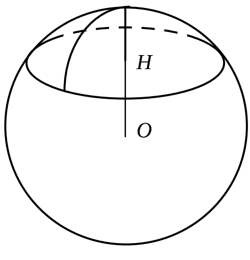


$V = \pi R^2 H$;
$S_{біч} = 2\pi RH$;
$S_{повн} = 2\pi R(H + R)$.

Сфера і куля

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ - об’єм кулі; $S = 4\pi R^2$ - площа сфери.

Кульовий сегмент



$V = \pi H^2\left(R - H/3\right)$;
$S = 2\pi RH$.

Комплексні числа. Коротка довідка

Комплексним числом називається число виду $a+bi$, де $a,b\in R$, і $i^2=-1$. Число a називається дійсною частиною, а число b уявною частиною комплексного числа. Число “ i ” таке, що $i^2=-1$ називається уявною одиницею.

Числа $a+bi$ та $c+di$ називаються **рівними**, якщо $a=c$ і $b=d$.

Сумою двох комплексних чисел $a+bi$ і $c+di$ є число $(a+c)+(b+d)i$.

Різницею двох комплексних чисел $a+bi$ і $c+di$ є комплексне число $(a-c)+(b-d)i$.

Добутком двох комплексних чисел $a+bi$ і $c+di$ є комплексне число $(ac-bd)+(ad+bc)i$.

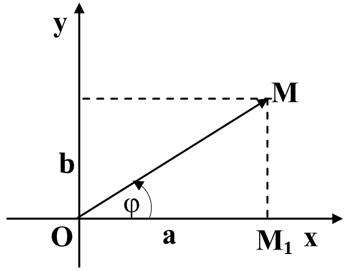
Числа $a+bi$ та $a-bi$ називаються **комплексно-спряженими** і добуток $(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-b^2$ є дійсне число.

Часткою двох комплексних чисел $a+bi$ і $c+di$ є комплексне число

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{cb-ad}{c^2+d^2}i\,.$$

Вираз $\sqrt{a+bi}$ називається **модулем** комплексного числа і позначається $|a+bi|$ або r. На малюнку $r=|a+bi|=|OM|$.

Комплексні числа зображаються на координатній площині.



Кут φ між віссю Ox і відрізком OM, де точка M зображає комплексне число $a+bi$, називається аргументом комплексного числа $a+bi$.

З прямокутного трикутника OM_1M запишемо $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$, і тоді комплексне число $a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Такий запис називається тригонометричною формою комплексного числа.

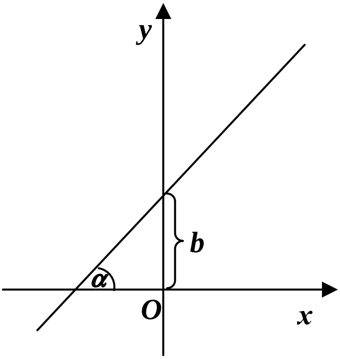
З означення добутку комплексних чисел та враховуючи тригонометричну форму комплексного числа, виводиться формула для степеня комплексного числа $(a+bi)^m=r^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)$.

В випадку, якщо m – ціле число і $r=1$ одержуємо формулу Муавра: $(a+bi)^m=\cos m\varphi+i\sin m\varphi$.

Комплексне число можна подати і в показниковій формі, використовуючи формулу Ейлера ($e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$):

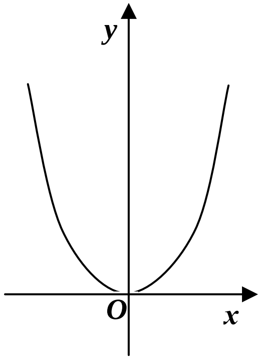
$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}\,.$$

Графіки деяких елементарних функцій

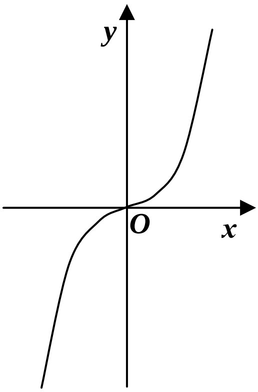


1. Графік функції $\boldsymbol{y=kx+b}$

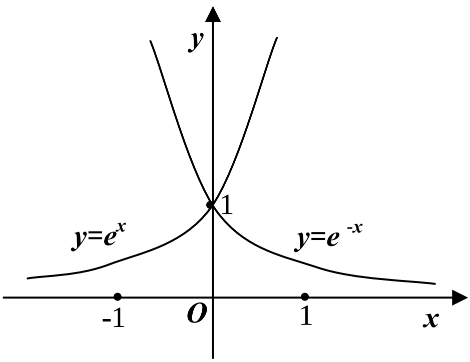
$\boldsymbol{k=tg\alpha}$



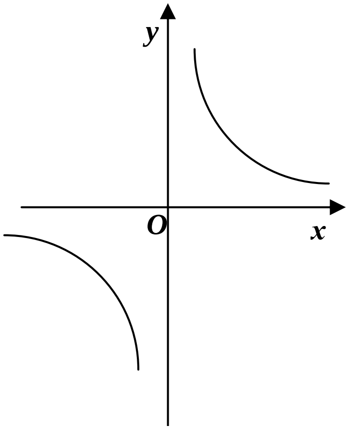
2. Парабола

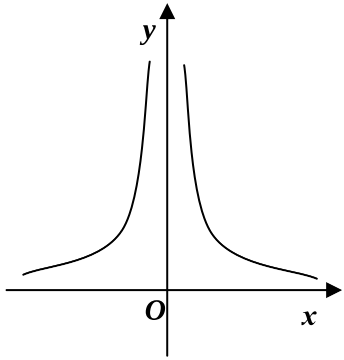


3. Кубічна парабола

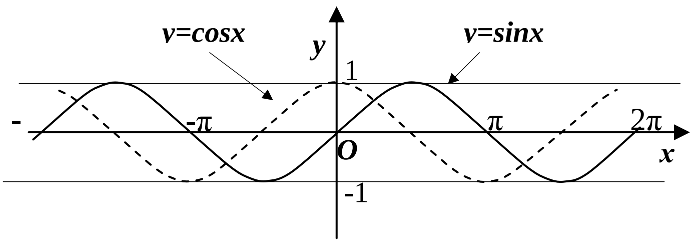


4. Графіки показникових функцій $\boldsymbol{y=e^x}$ і $\boldsymbol{y=e^{-x}}$

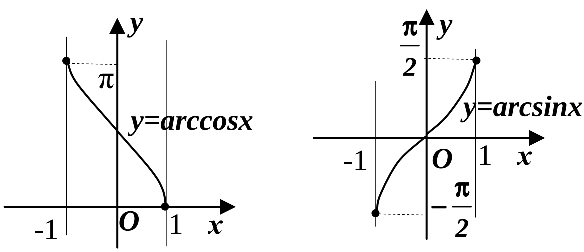




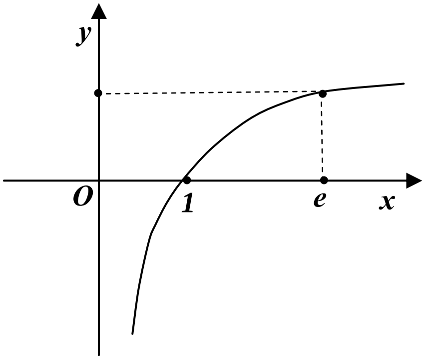
5. Гіпербола $y=\frac{1}{x}$ 6. Графік функції $y=\frac{1}{x^2}$



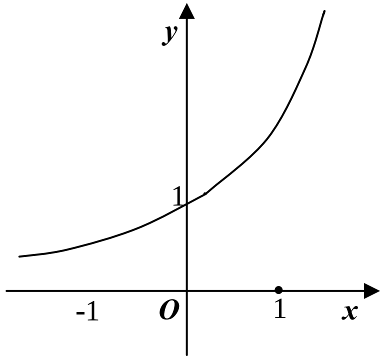
7. Графіки тригонометричних функцій
y=sinx і ***y=cosx***



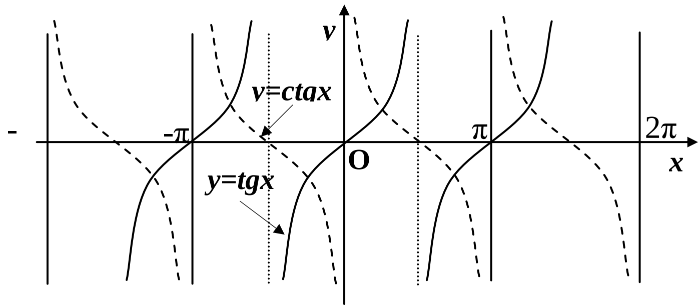
8. Графіки обернених тригонометричних
функцій ***y=arcsinx*** і ***y=arccosx***



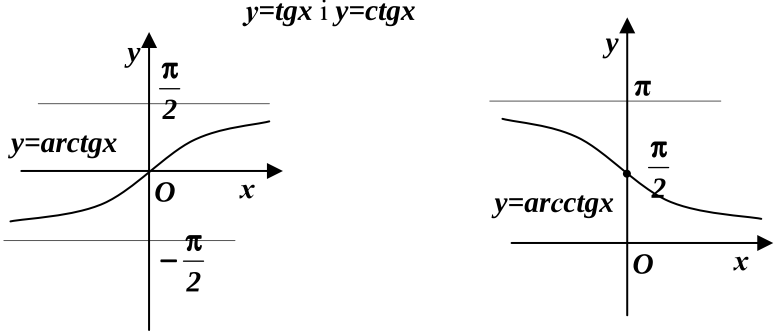
9. Логарифмічна крива ***y=lnx***



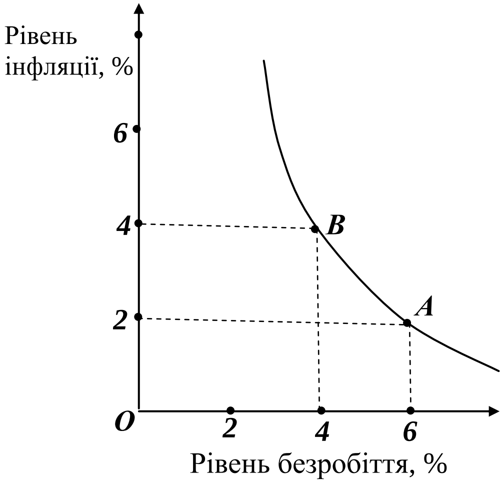
10. Графік степеневої функції ***y=2^x***



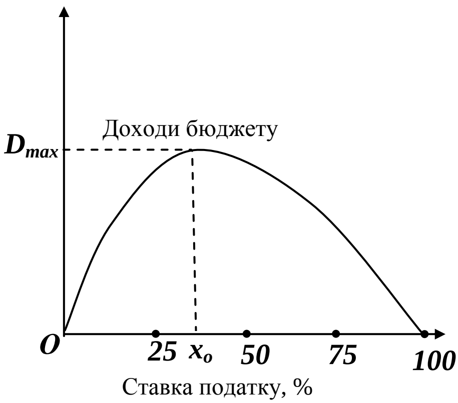
11. Графіки тригонометричних функцій ***y=tgx*** і ***y=ctgx***



12. Графіки обернених тригонометричних функцій ***y=arctgx*** і ***y=arcctgx***



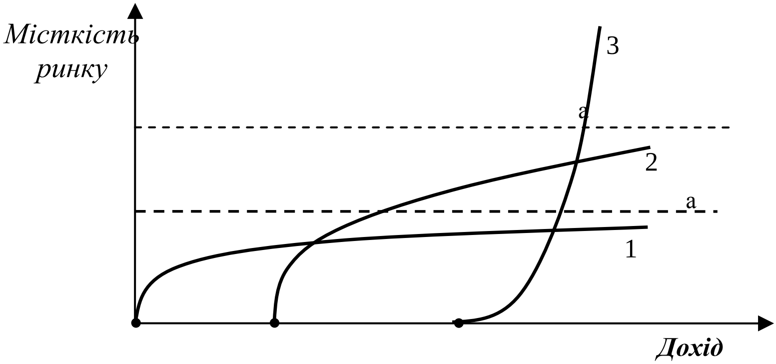
Крива Філіпса показує компроміс між інфляцією і безробіттям. Держава може певними заходами знизити рівень безробіття, але, як наслідок, розширюючи загальний попит. Проте напруга, яка виникає на ринку праці і товарів, створює умови росту заробітної плати і росту цін, а відповідно і росту інфляції.



Крива Лаффера. Показує залежність між ставками податку і надходженнями в бюджет
Ідея: По мірі зростання податкової ставки від 0 до 100% податкові надходження будуть зростати від нуля до певного максимального рівня, а потім зменшуватимуться до нуля.

Криві Торнквіста та Енгеля

Криві Торнквіста, засновані на законі Енгеля **прогнозують місткість ринку в залежності від рівня середніх доходів на людину. Відповідно до даного підходу вся сукупність товарів і послуг може бути класифікована на 3 основні групи.**



I) Залежність місткості ринку від рівня доходів по групі товарів першої необхідності має вигляд: $E = E_1 - ae^{-bI}$ (крива 1);
де E - місткість ринку досліджуваної групи товарів чи послуг;
E_I - верхня межа споживання товарів першої необхідності;

II) Залежність місткості ринку від середнього доходу на людину для товарів другої групи необхідності має вигляд: $E = E_{II} - ae^{-b(I-I_2)}$ (крива 2). При цьому попит на дану групу товарів виникає після того, як дохід досягає визначеного розміру, після якого виникає можливість придбання товарів даної групи.
де E_{II} - верхня межа споживання товарів другої необхідності;
I_2- граничне значення доходу; ***a*, *b*** - параметри регресії; $a > 0, b > 0$.

III) Предмети розкоші, споживання яких не має верхньої межі, у міру зростання доходів зростає більш швидкими темпами і виникає після того, як дохід перевищує нижнє граничне значення, до досягнення якого можливість здобувати товари даної групи відсутня. Крива місткості ринку товарів розкоші має опуклу форму й описується функціональною залежністю: $E = a(I - I_3)^n$ (крива 3);

де I_3 - граничне значення доходу; при $I > I_3$ місткість ринку $E=0$;
n - показник ступеня, $n > 2$; а - параметр регресії, $a > 0$.

Таблиця значень експоненціальних функцій

x	e^{x}	e^{-x}	*x*	e^{x}	e^{-x}
0	1	1	1,7	5,4739	0,1827
0,02	1,0202	0,9802	1,8	5,0496	0,1653
0,04	1,0408	0,9608	1,9	6,6859	0,1496
0,06	1,0618	0,9418	2,0	7,3891	0,1353
0,08	1,0833	0,9231	2,1	8,1662	0,1225
0,1	1,1052	0,9048	2,2	9,0250	0,1108
0,2	1,2214	0,8187	2,3	9,9742	0,1003
0,3	1,3499	0,7408	2,4	11,023	0,0907
0,4	1,4918	0,6703	2,5	12,182	0,0821
0,5	1,6487	0,6065	2,6	13,464	0,0743
0,6	1,8221	0,5488	2,7	14,880	0,0672
0,65	1,9155	0,5220	2,8	16,445	0,0608
0,7	2,0138	3,4966	2,9	18,174	0,055
0,75	2,1170	0,4724	3,0	20,086	0,0498
0,8	2,2255	0,4493	3,25	25,79	0,0388
0,85	2,3396	0,4274	3,5	33,115	0,0302
0,9	2,4596	0,4066	3,75	42,521	3,0235
0,95	2,5857	0,3867	4,0	54,598	0,0183
1,0	2,7183	0,3679	4,5	90,017	0,0111
1,1	3,0042	0,3329	5,0	148,41	0,067
1,2	3,3201	0,3012	6,0	403,43	0,0025
1,3	3,6693	0,2725	7,0	1096,6	0,0009
1,4	4,0552	0,2466	8,0	2981,0	0,0001
1,5	4,4817	0,2231	9,0	8103,1	0,0001
1,6	4,9530	0,2019	10,0	22026	0,00005

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^{n}-1\right]}{i} \quad \textit{та ренти}\ a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

i=0,5%= 0,05				***i=1%= 0,01***			
n	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,005	0,99502	1,0	1	1,01	0,990099	1,0
2	1,0010025	1,98509	2,005	2	1,0201	1,970395	2,01
3	1,015075	2,97024	3,015025	3	1,030301	2,940985	3,0301
4	1,020151	3,95049	4,0301	4	1,040604	3,901966	4,060401
5	1,025251	4,925866	5,050251	5	1,05101	4,853431	5,101005
6	1,030378	5,896384	6,075502	6	1,06152	5,795476	6,152015
7	1,035529	6,862074	7,105879	7	1,072135	6,728195	7,2133535
8	1,040707	7,822959	8,141409	8	1,082857	7,651678	8,285671
9	1,045911	8,779064	9,182116	9	1,0933685	8,566018	9,368527
10	1,04114	9,730412	10,228026	1	1,104622	9,471305	10,462213
11	1,0563396	10,677027	11,279167	1	1,115668	10,367628	11,566835
12	1,061678	11,061893	12,335562	1	1,126825	11,255077	12,682503
13	1,066986	12,556151	13,339724	1	1,138093	12,13374	13,809328
14	1,072321	13,488708	14,464226	1	1,149474	13,003703	14,947421
15	1,077683	14,416625	15,536548	1	1,160969	13,865053	16,096896
16	1,083071	15,339925	16,61423	1	1,172579	14,717874	17,257864
17	1,088487	16,258632	17,697301	1	1,184304	15,562251	18,430443
18	1,093929	17,172768	18,785788	1	1,196147	16,398269	19,614748
19	1,099399	18,082335	19,879717	1	1,208109	17,226008	20,810895
20	1,104896	18,987419	20,979113	2	1,22019	18,045553	22,019004
21	1,11042	19,887979	22,084011	2	1,232392	18,856983	23,239194
22	1,115972	20,784059	23.194431	2	1,244716	19,660379	24,471586
23	1,121552	21,675681	24,310403	2	1,257163	20,455821	25.716302
24	1,12716	22,562866	25,431955	2	1,269735	21,243387	26,973405

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=2%= 0,02				***i=3%= 0,03***			
n	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
1	1,02	0,980392	1,0	1	1,03	0,970874	1,0
2	1,0404	1,941561	2,02	2	1 ,0609	1,91347	2,03
3	1,061208	2,883883	3,0604	3	1,092727	2,828611	3,0909
4	1,082432	3,807729	4,121608	4	1,125509	3,717098	4,183627
5	1,104081	4,7134	5,20404	5	1,592274	4,579707	5,309136
6	1,126162	5,601431	6,308121	6	1,194052	5,417191	5,46841
7	1,148686	6,471991	7,434283	7	1,229874	6,230283	7,662462
8	1,171659	7,325481	8,582969	8	1,26677	7,019692	8,892236
9	1,195093	8,1622337	9,754628	9	1,304773	7,786109	10,159106
10	1,218994	8,982585	10,949721	1	1,343916	8,530203	11,463879
11	1,243374	9,786848	12,168715	1	1,384234	9,252624	12,807796
12	1,268242	10,575341	13,41209	1	1,425761	9,954004	14,19203
13	1,293607	11,348374	14,680332	1	1,468534	10,634955	15,61779
14	1,319479	12,106249	15,973938	1	1,51259	11,296073	17,086324
15	1,345868	12,849264	17,293417	1	1,557967	11,937935	18,598914
16	1,372786	13,57770	18,639285	1	1,604706	12,561102	20,156881
17	1,400241	14,291872	20,012071	1	1,652848	13,166118	21,761588
18	1,428246	14,992031	21,412312	1	1,702433	13,753513	23,414435
19	1,456811	15,678462	22,840559	1	1,753506	14,323799	25,116868
20	1,485947	16,351433	24,29737	2	1,806111	14,877475	26,870374
21	1,515666	17,011209	25,783317	2	1,860295	15,415024	28,676486
22	1,54598	17,658048	27,298984	2	1,916103	15,936917	30,53678
23	1,576899	18,292204	28,844963	2	1,973587	16,443608	32,452884
24	1,608437	18,913926	30,421852	2	2,032794	16,935542	34,42647

Таблиця відсотків рахунків накопичення

$$S_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \text{ та ренти } a_{\frac{n}{i}} = \frac{\left[1-(1+i)^{-i}\right]}{i}$$

(продовження)

i=5%= 0,05				*i=8%= 0,08*			
n	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$	***n***	***(1+i)^n***	$a_{\frac{n}{i}}$	$S_{\frac{n}{i}}$
I	1,05	0,95238 1	1,0	1	1,08	0,925926	1,0
2	1,1025	1,85941	2,05	2	1,664	1,783265	2,08
3	1,157625	2,723248	3,1525	3	1,259712	2,577097	3,2464
4	1,215506	3,545951	4,310125	4	1,360489	3,312127	4,506112
5	1,276282	4,329477	5,525631	5	1,469328	3,99271	5,866601
6	1,340096	5,075692	5,801913	6	1,586874	4,62288	7,335929
7	1,4071	5,786373	8,142008	7	1,713824	5,20637	8,922803
8	1,477455	6,463213	3,549109	8	1,85093	5,746639	10,636628
9	1,551328	7,107822	11,026564	9	1,999005	5,246888	12,487558
10	1,628895	7,721735	12,577893	10	2,158925	5,710081	14,486562
11	1,710339	8,306414	14,206787	11	2,331639	7,138964	16,645487
12	1,795856	8,863252	15,917127	12	2,51817	7,536078	18,977126
13	1,885649	9,393573	17,712983	13	2,719624	7,903776	21,495297
14	1,979932	9,898641	19,598632	14	2,937194	8,244237	24,21 492
15	2,078928	10,379658	21,578564	15	3,172169	8,559479	27,152114
16	2,182875	10,83777	23,657492	16	3,425943	8,531369	30,324283
17	2,292018	11,274066	25,840366	17	3,700018	9,121638	33,750226
18	2,406619	11,689587	28,132385	18	3,996019	9,373887	37,450244
19	2.52695	12,085321	5Ь,539004	19	4,33570!	9,603599	41,446263
20	2,653298	12,46221	33,065954	20	4,660957	9,818147	45,761964
21	2,785963	12,821153	35,719252	21	5,033834	10,016803	50,422921
22	2,925261	13,163003	38,505214	22	5,43654	10,200744	55,456755
23	[3,071524	13,488574	41,430475	23	5,871464	10,371059	60,893296
24	3,1251	13.798642	44,501999	24	6,341181	10,528758	66,764759

Таблиця значень натуральних логарифмів

Десятки \ одиниці	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	0,0	0,693	1,095	1,386	1,609	1,791	1,945	2,079	2,197
1	2,302	2,397	2,484	2,564	2,639	2,708	2,772	2,833	2,890	2,944
2	2,995	3,044	3,091	3,135	3,178	3,218	3,258	3,295	3,332	3,367
3	3,401	3,434	3,465	3,496	3,526	3,555	3.583	3,610	3,637	3,663
4	3,688	3,713	3,737	3,761	3,784	3,806	3,828	3,850	3,871	3,891
5	3,912	3,931	3,951	3,970	3,989	4,007	4,025	4,043	4,060	4,077
6	4,094	4,110	4,127	4,143	4,158	4,174	4,189	4,204	4,219	4,234
7	4,248	4,262	4,276	4,290	4,304	4,317	4,330	4,343	4,356	4,369
8	4,382	4,394	4,406	4,418	4,430	4,442	4,454	4,465	4,477	4,488
9	4,499	4,510	4,521	4,532	4,543	4,553	4,564	4,574	4,585	4,595
10	4,605	4,615	4,625	4,634	4,644	4,654	4,663	4,672	4,682	4,691

КОРОТКИЙ СЛОВНИК ЕКОНОМІЧНИХ ТЕРМІНІВ

Валовий внутрішній продукт (ВВП) – макроекономічний показник економічної статистики, який відбиває сукупну вартість кінцевих продуктів і послуг, вироблених у даній країні за певний проміжок часу, в поточних ринкових цінах без урахування сальдо платіжного балансу.

Валовий національний продукт (ВНП) – макроекономічний показник економічної статистики, який відбиває сумарну вартість товарів та послуг (у цінах реалізації), що надходять у розпорядження даної країни за певний проміжок часу.

Вартість – виражена у грошах цінність чогось або величина витрат на щось.

Вартість ринкова – вартість товарів, послуг, цінних паперів, валюти, що формується у процесі вільного продажу на ринку.

Відтворення – виробництво, що розглядається не як одноразовий акт, а як безперервний процес, який постійно і послідовно повторюється.

Відтворення просте – це відтворення за незмінних масштабів виробництва.

Відтворення розширене – це відтворення при зростаючих масштабах виробництва.

Вклад – кошти, передані власником або третьою особою за дорученням і за рахунок власника до банку для зберігання на певних умовах.

Вклад безтерміновий – вклад, зберігання якого не обмежене жодними заздалегідь визначеними термінами.

Вклад до запитання – вклад, призначений для здійснення поточних розрахунків.

Вклад на пред'явника – вклад, при внесенні якого в ощадній книжці не вказується прізвище власника.

Вклад нагромаджувальний – ощадний вклад, за умовами якого вкладник має право і зобов'язаний поповнювати його, вносячи додаткові суми.

Вклад строковий (терміновий) - кошти, розміщені в банку на конкретно застережений (зазначений) термін.

Гроші – економічна категорія, що означає специфічний товар, який виконує в суспільстві роль загального еквівалента під час обміну товарів.

Гроші електронні – умовна назва грошових засобів, які використовуються їх власниками в електронній системі банківських послуг.

Гроші паперові – грошові знаки, номінальні знаки вартості, які мають примусовий курс, випускаються державою для покриття її видатків.

Грошова одиниця – встановлений законодавчо грошовий знак, один з елементів грошової системи, який служить для вимірювання і вираження цін усіх товарів.

Грошова реформа - зміни в галузі грошового обігу, що мають за мету впорядкування і зміцнення грошової системи.

Грошова система – форма організації монетної справи і грошового обігу, яка історично склалася в різних країнах і закріплена законодавством.

Депозит – 1) кошти, цінні папери, внесені до банку на зберігання; 2) початкова сплата за товар чи послугу; 3) запис у банківських книгах, що підтверджує певну вимогу клієнта до банку; 4) внески до митниці як забезпечення плати мита; 5) грошова сума чи цінні папери, внесені боржником до судової установи для перерахування кредиторові.

Де-факто – те, що існує в дійсності, фактично, але юридично не оформлено.

Де-юре – юридично, згідно із законом.

Дохід – 1) різниця між виторгом від реалізації продукції, робіт чи послуг і вартістю матеріальних витрат на виробництво і збут цієї продукції; 2) гроші чи матеріальні цінності, одержані від виробничої, комерційної, посередницької чи іншої діяльності (виторг).

Дохід валовий – сукупний грошовий виторг підприємства, одержуваний від діяльності основного, допоміжних, обслуговуючих виробництв підприємства та від реалізації додаткових послуг.

Дохід національний –1)новостворена у сфері матеріального виробництва вартість, що характеризує обсяг вироблених та використаних матеріальних благ і послуг за певний період часу; 2) частина сукупного (валового) суспільного продукту, що залишається після вирахування вартості засобів виробництва, використаних на його створення.

Дохід сукупний оподатковуваний –дохід, одержуваний громадянином за певний період часу (місяць, рік) як у грошовій (національною чи іноземною валютою), так і в натуральній формах.

Закон попиту – твердження, що за інших рівних умов ріст ціни товару означає зменшення пропонованого обсягу пропозиції.

Закон попиту і пропозиції – твердження, що ціна будь-якого товару змінюється, щоб попит і пропозиція перебували у стані рівноваги.

Закон пропозиції – твердження, що за інших рівних умов обсяг пропозиції товару зростає при збільшенні його ціни.

Збитки – перевищення витрат підприємства над його доходами.

Інвестиції – грошові, майнові, інтелектуальні цінності, що вкладаються в об'єкти підприємницької та інших видів діяльності з метою одержання прибутку або досягнення соціального ефекту; капітальні вкладення у розвиток виробництва чи невиробничу сферу.

Індексація доходів – механізм підвищення грошових доходів громадян, який дає змогу частково або повністю компенсувати їм подорожчання споживчих товарів і послуг

Індекс Доу-Джонса – середній показник курсів акцій групи найбільших компаній США; обчислюється як середнє арифметичне щоденних курсів акцій.

Індекс концентрації доходів (коефіцієнт Джіні) – статистичний макроекономічний показник, який використовують для часової оцінки динаміки рівня доходів населення.

Інтелектуальна власність - продукт інтелектуальної праці. Об єктами інтелектуальної власності є: твори науки і техніки, літератури і мистецтва, винаходи, відкриття та інші види творчої діяльності.

Інфляція - знецінення паперових грошей, що супроводжується зростанням цін на товари і послуги.

Капітальні витрати – грошові видатки, пов'язані із вкладеннями в основний капітал чи в приріст виробничих запасів.

Капітальні вкладення – витрати на будівництво нових, розширення, реконструкцію і технічне переобладнання наявних основних фондів виробничого і невиробничого призначення.

Капітальні вкладення в обладнання - витрати на придбання технологічного, енергетичного, підіймально-транспортного та іншого обладнання, а також інструменту й інвентаря.

Капітальні вкладення валові – загальні капітальні вкладення в економіку протягом певного часу, здебільшого – року. Включають як безпосередньо капітальні вкладення (чисті капітальні вкладення), так і інвестиції в реновацію основних фондів.

Капітальні вкладення державні – витрати на створення та вдосконалення основних фондів державних підприємств і організацій. К.в.д. здійснюються за рахунок централізованих і нецентралізованих джерел фінансування. До К.в.д. не належать капітальні вкладення громадських, кооперативних і приватних організацій, а також капітальні вкладення, здійснені за рахунок коштів населення.

Капітальні вкладення державні централізовані – капітальні вкладення, здійснювані з коштів державного бюджету та бюджетних позик. Як правило, їх включають до державного замовлення.

Комівояжер – роз'їзний представник торгової фірми, який пропонує покупцям товари, представляючи зразки і каталоги.

Кон'юнктура ринку – сукупність економічних умов, які формуються на ринку у кожен даний момент часу, при яких відбувається процес реалізації (рівень цін, стан товарних запасів).

Кошик споживчий - розрахунковий набір, асортимент товарів, що характеризує типовий рівень і структуру місячного (річного) споживання людини чи сім'ї.

Кредит - позичка в грошовій або товарній формах на умовах повернення , що надається банком чи юридичною (або фізичною) особою –кредитором –іншій особі –позичальникові.

Крива Енгеля,Торнквіста– графік, який прогнозує місткість ринку в залежності від рівня середніх доходів на людину.

Крива Лаффера – крива, що характеризує співвідношення між ставками оподаткування та величиною податкових надходжень до бюджету: при підвищенні ставок оподаткування сума податкових надходжень у бюджет зростає тільки до певної величини, а потім знижується внаслідок спаду виробництва й ухиляння від плати податків.

Крива попиту –графік залежності між ціною товару та об'ємом попиту на товар.

Крива пропозиції – графік, який відображає залежність між ціною товару та обсягом його пропозиції.

Крива сукупного попиту – графік, який показує кількість товарів і послуг, які домашні господарства, фірми та уряд хотіли б

Придбати при кожному даному рівні цін.

Крива сукупної пропозиції – графік, який відображає об'єм товарів і послуг, що виробляються і реалізуються фірмами при кожному даному рівні цін.

Крива Торнквіста, Енгеля – графік, який прогнозує місткість ринку в залежності від рівня середніх доходів на людину.

Крива Філіпса – графік, який демонструє зворотну залежність між інфляцією та безробіттям у короткотерміновий період.

Лаг – показник, що відбиває часове відставання чи випередження одного з двох пов'язаних між собою економічних явищ, одне з яких є причиною, інше - наслідком.

Лаж – 1) різниця між курсами валют або комісійний збір, що стягується за обмін паперових грошей на моменти чи за обмін слабких валют на сильні; 2) зростання ринкового курсу валюти чи цінних паперів щодо їх номінальної вартості; 3) підвищення ринкової ціни золота у грошовому еквіваленті.

Лібералізація цін – державна політика ціноутворення, що полягає у збільшенні найменувань товарів, ціна на які формується на вільному ринку, тобто без регулювання державою.

Ліміт – максимально допустима величина.

Маржиналізм – один з напрямів економічної думки та її методологічний принцип, який ґрунтується на теорії граничної корисності.

Маржинальна вартість – гранично можлива вартість в умовах хоча б постійного відтворення виробництва відповідної продукції.

Модель сукупного попиту і сукупної пропозиції – модель, яка використовується більшістю економістів для пояснення короткотермінових коливань економічної активності відповідно до довготермінової тенденції розвитку.

Обсяг (об'єм) попиту –кількість товару, яку покупці хочуть і можуть придбати.

Обсяг (об'єм) пропозиції – кількість будь-яких товарів чи послуг, які продавці хочуть, але не мають можливості продати.

Податок – обов язковий платіж, збір, що стягується державою або місцевим органом з громадян (фізичних осіб) або підприємств (юридичних осіб) на основі законодавства.

Попит – забезпечена коштами покупців частина їх потреби в товарах і платних послугах.

Прибуток – узагальнюючий показник діяльності підприємства; визначається як різниця між виручкою від реалізації продукції, робіт і послуг та сумою всіх затрат підприємства на виробництво і збут.

Продуктивність праці – характеризує кількість продукції, виробленої в одиницю часу, або витрати часу на виробництво одиниці продукції.

Прожитковий мінімум – величина вартості фінансових коштів і майна, необхідних для підтримки нормального фізичного існування працівника й непрацюючих членів його сім'ї.

Пропозиція – обов'язковий компонент ринкових відносин, суть якого полягає у кількості та вартості товарів і платних послуг, представлених до реалізації товаровиробниками, торгівлею чи комерційними посередниками.

Рентабельність – відносний показник прибутковості, виражений у відсотках, який характеризує ефективність витрат підприємства загалом або ефективність виробництва окремих видів продукції.

Ставка процентна (відсоткова) – ціна грошової позики, що визначається як відношення річного доходу, одержаного на позиковий капітал, до суми позики.

Ціна рівноваги – ціна, яка урівноважує попит і пропозицію.

Чистий дохід – прибуток після відрахування витрат, сплати податків і всіх боргових зобов'язань.

Алфавітно-предметний покажчик

Латинський алфавіт

Друковані букви	Рукописні букви	Назви букв	Друковані букви	Рукописні букви	Назви букв
Aa	*Aa*	а	Nn	*Nn*	ен
Bb	*Bb*	бе	Oo	*Oo*	о
Cc	*Cc*	це	Pp	*Pp*	пе
Dd	*Dd*	де	Qq	*Qq*	ку
Ee	*Ee*	е	Rr	*Rr*	ер
Ff	*Ff*	еф	Ss	*Ss*	ес
Gg	*Gg*	же(ге)	Tt	*Tt*	те
Hh	*Hh*	аш	Uu	*Uu*	у
Ii	*Ii*	і	Vv	*Vv*	ве(фау)
Jj	*Jj*	йот	Ww	*Ww*	ве
Kk	*Kk*	ка	Xx	*Xx*	ікс
Ll	*Ll*	ель	Yy	*Yy*	ігрек
Mm	*Mm*	ем	Zz	*Zz*	зет(цет)

Грецький алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
Αα	альфа	Νν	ні
Ββ	бета	Ξξ	ксі
Γγ	гама	Οο	омікрон
Δδ	дельта	Ππ	пі
Εε	епсілон	Ρρ	ро
Ζζ	дзета	Σσ	сигма
Ηη	ета	Ττ	тау
Θθ	тета	Υυ	іпсилон
Ιι	йота	Φφ	фі
Κκ	капа	Χχ	хі
Λλ	ламбда	Ψψ	псі
Μμ	мі	Ωω	омега

ЛІТЕРАТУРА

1. Банах Стефан. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.:Наука,1966.- 436 с.
2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів: Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1997. – 397 с.
3. Бермант А.Я., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. М.: Наука. -1966. – 736 с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М.: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит-ры, 1980.-176 с.
5. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навчальний посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч.1. – 546 с.
6. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навчальний посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2002. – Ч.2. – 451 с.
7. Васильченко І. П. Вища математика дляч економістів. Підручник. – К.: Знання – Прес, 2002. – 454 с.
8. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самостійного вивчення дисципліни / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – К.: КНЕУ, 1999. – 396 с.
9. Гальперин В.М., Игнатьєв С.М., Моргунов В.И. Микро Экономыка. С.-П.:Высшая школа экономики, 1998.-т.1,352 с.
10. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микро Экономыка. С.П.: Высшая школа економики, 1998.-т.2,513 с.
11. Глаголев А. А., Солнцева Т. В. Курс высшей математики. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1971. – 656 с.
12. Гудименко Ф. С. Вища математика: -Київ: В-во Київського університету.- 377 с.
13. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. - Київ: А.С.К., 2001.- 648 с.
14. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2 ч.- М.: Наука. – Ч.1.- 1971; Ч. 2.-1973.
15. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ.- М.: Изд-во МГУ, 1987.

16. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике: Учеб. пособие. – ч.V– Харьков: Изд-во ХГУ, 1968. – Ч. I, II.– 412 с.
17. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для економических вузов. – Ч. II. Теория вероятностей и математическая статистика. Линейное программирование: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1982.– 320 с.
18. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб.- 2-е изд., испр.-М.: Дело, 2001. –688с.
19. Крыньский Х. Э. Математика для економистов: Пер. с польск. Меникера В. Д. Под ред. Баренгольца М. И. – М.: Статистика, 1970. – 584 с.
20. Кудрявцев В.А. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.Учебное пособие. М.: Наука,1986.-576 с.
21. Ляшко И.И., Боярчук А. К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах.ч.1 Введение в анализ, производная, интеграл. «Вища школа»,1974,680 с.
22. Ляшко И.И., Боярчук А. К., та ін. Диференціальні рівняння. К.: Вища школа., 1981, - 504 с Малыхин В.И. Математика в экономике: Учебное пособие.- М.: ИНФРА-М,2000.-356 с.
23. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика.- М.: Мир, 1972. – 517с.
24. Неміш В.М., Процик А.І., Березька К.М. Вища математика (практикум):Навчальний посібник.- Тернопіль: Економічна думка, 2001.-266с.
25. Сирл С., Госман У. Матричная алгебра в экономике: Пер. с англ. / Науч. Ред. Е. М. Четыркина и Р. М. Энтона. – М.: Статистика, 1974. – 376 с.
26. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т.-М.: Наука, 1969-1970.-т.1-3.
27. Шиманський І.Є. Математичний аналіз. - Київ: Вища математика, 1972.-632 с.
28. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика:Підручник: У 3 кн.,Кн.3.-Київ: Либідь, 1994.-352 с.
29. Beckmann M.,I.,Künzi H.P. Mathematik für Ökonomen I, II. – Berlin Heidelverg: Springer Verlag.-New York? 1969.

30. Chiang Upha C. Fundamental methods of mathematical economics.- McGRAW – HIU BOOK COMPANY, 1984.
31. R.G.D. Allen. Mathematical Economics. Macmillan. ST MARTINS PRESS, 1970, 812 p.
32. By FRANK AYRES, JR. Theory and problems of diffirential and integral CALCULUS. Schanm’s outline serics McGRAW-HILL Book Company, 1964, 345 p.
33. A. Clyde Schock, Bernard S. Warshaw. Analytic geometry and an introduction to calculus. Prenfice-hall, inc., 1965, 167 p.
34. Budnik,Franks S. Applied Mathematisk for business, economiks, and social sciences.-N.Y., … : McGraw-Hill book company, 1988.
35. Rommelfanger Henrich. Mathematik fur Wirschaftswissenschaftler.- Mancheim; Leipzig; Wien; Zurich:BI-Wiss.-Verl, 1992.

ЗМІСТ

Розділ 3. ВСТУП У МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Розділ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Розділ 5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Розділ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Розділ 7. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ І РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ

Розділ. 8. РЯДИ

ДОДАТКИ

Навчальне видання

Домбровський Василь Андрійович,
Крижанівський Ігор Михайлович,
Мацьків Роман Степанович,
Мигович Федір Михайлович,
Неміш Василь Миколайович,
Окрепкий Богдан Степанович,
Хома Григорій Петрович,
Шелестовська Марія Яківна,
Шинкарик Микола Іванович.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ПІДРУЧНИК

За редакцією **Шинкарика М.І.**

Редактор - **Крижанівський І.**
Технічний редактор - **Полиняк В.**
Комп’ютерна верстка - **Крижанівський І.**
Комп’ютерний набір - **Мачула Л.**, **Шабдінова І.**

Здано до набору 9.06.03. Підписано до друку 20.06.2003 р.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Папір офсетний. Друк офсетний. Гарнітура Times.
Умовно-друк. арк. 30. Тираж 2000 прим.
Зам. №4

Видавництво Карп'юка,
46001, м.Тернопіль, вул. Крушельницької, 18.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 392 від 30.03.2001.