Л.С. Файнзільберг
О.А. Жуковська
В.С. Якимчук

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**Л.С. Файнзільберг,
О.А. Жуковська, В.С. Якимчук**

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для студентів, які навчаються за спеціальністю
«Комп'ютерні науки та інформаційні технології»,
спеціалізацією «Інформаційні технології в біології та медицині»*

Київ
Освіта України
2018

УДК 519.816:159.947.2(075.8)

Рецензенти: *Новицький В.В.*, професор, доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник інституту математики НАН України

Степашко В.С., професор, доктор технічних наук, зав. відділом Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН України та МОН України

Відповідальний редактор *Носовець О.К.*, кандидат технічних наук, доцент кафедри біомедичної кібернетики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Гриф надано Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 12 лютого 2018 р.)

Файнзільберг Леонід Соломонович, д-р техн. наук, професор
Жуковська Ольга Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Якимчук Вікторія Сергіївна, канд. техн. наук

Теорія прийняття рішень : підручник для студентів спеціальності «Комп’ютерні науки та інформаційні технології», спеціалізації «Інформаційні технології в біології та медицині» / Л.С. Файнзільберг, О.А. Жуковська, В.С. Якимчук. – Київ : Освіта України, 2018. – 246 с.

Викладено основи теорії прийняття рішень, наведено базові поняття, означення та сучасні методи прийняття рішень, які ґрунтуються на критеріях та мові бінарних відношень, охоплено теоретичні засади та практичні рекомендації пошуку оптимальних рішень в умовах конфлікту, ризику та апріорної невизначеності, а також традиційні та оригінальні математичні моделі колективних рішень. Містить приклади та завдання для комп’ютерних практикумів.

Для студентів, аспірантів та викладачів вищих навчальних закладів з напряму біомедичної інженерії.

ISBN 978-617-7480-99-9

ЗМІСТ

ВСТУП

На сучасному етапі розвитку суспільства постійно підвищується ціна від неправильно прийнятих рішень в різних сферах професійної діяльності та в повсякденному житті людини. Неправильно встановлений медичний діагноз, ризиковане взяття кредитів та вкладання інвестицій, несвоєчасно виявлений аварійний стан обладнання – це далеко не повний перелік хибних рішень в медицині, економіці та техніці, негативні наслідки яких добре відомі.

Теорія прийняття рішень – це математична дисципліна, яка забезпечує науково обґрунтований підхід до вибору найкращого, в деякому розумінні, варіанту (варіантів) поведінки в умовах неповної інформації щодо зовнішнього середовища. Важливість наукового підходу для прийняття рішень полягає в тому, що рішення, які людина приймає інтуїтивно, не завжди є раціональними. Саме тому «Теорія прийняття рішень» входить до обов'язкового переліку навчальних дисциплін, які викладаються студентам різних напрямів.

Науково обґрунтований вибір альтернатив базується на різних математичних постановках та відповідних методах, які залежать від змісту конкретної прикладної задачі прийняття рішень.

В одних випадках задача може бути зведена до пошуку найкращої альтернативи за сукупністю критеріїв і тоді її розв'язування ґрунтується на методах багатокритеріальної оптимізації. В інших адекватною моделлю задачі є прийняття рішень в умовах конфлікту в припущенні активної протидії супротивників, і тоді оптимальна стратегія ґрунтується на теорії ігор. Якщо ж прийняття рішень здійснюється в, так званій, «грі з природою», яка байдужа до наслідків прийнятих рішень, то вибір оптимальної альтернативи ґрунтується на методах теорії статистичних рішень (рішення в умовах ризику та невизначеності). Слід також враховувати практичні ситуації, коли розв'язування задачі ґрунтується на інтеграції індивідуальних рішень членів групи експертів, і тоді для пошуку остаточної альтернативи використовують спеціальні методи колективних рішень.

Досвід викладання дисципліни «Теорія прийняття рішень», студентам з біомедичної інженерії, доводить, що наявні підручники і навчальні посібники не повною мірою враховують специфіку студентів з біомедичного напряму.

Насамперед, опис наукових методів прийняття оптимальних рішень дається на достатньо глибокому математичному рівні, орієнтованому на математиків, що ускладнює розуміння цих методів студентами нематематичних спеціальностей. Практично немає підручника, який був би доступний студенту, що володіє математикою лише в обсязі програми вищого технічного навчального закладу.

Крім того, в більшості підручників детально зображують лише окремі напрями з вище описаних підходів для прийняття рішень, наприклад, методи теорії ігор або теорії статистичних рішень. Відсутність порівняльного аналізу з іншими методами створює у студента помилкове уявлення, що саме наведений підхід є найкращим.

Мета підручника – заповнити цю прогалину та на єдиних методологічних позиціях викласти основні математичні засади методів, що склалися в теорії прийняття рішень.

Для кожного зі згаданих вище методів чітко сформульовано змістовну та математичну постановки задачі, виокремлено область застосування методу та визначено його переваги та недоліки порівняно з іншими. Розглянуто специфічні питання для студентів і спеціалістів з біомедичної інженерії, зокрема, методи оцінювання корисності діагностичних тестів в задачах скринінгу. Подано багато прикладів, близьких до практичних задач прийняття рішень в біології та медицині.

Автори свідомо прагнули приділити більше уваги змістовним аспектам задач для уникнення деталізації математичного апарату, строгих формулювань і доведення деяких теорем, які можна знайти в доступній літературі.

Підручник складається з десяти розділів.

У першому розділі розглянуто загальні основи теорії прийняття рішень, введено базові поняття та означення. Наведено формальну постановку та послідовність розв’язування узагальненої задачі прийняття рішень. Визначено особливість розв’язування задачі прийняття рішень в умовах неповної інформації, надано формальну постановку такої задачі та наведено конкретний приклад отримання оптимального рішення в умовах ризику.

У другому розділі розглянуто задачу вибору найкращої альтернативи з точки зору одного або декількох показників (критеріїв), які однозначно характеризують наслідки такого вибору (вибір в умовах визначеності). Наведено приклади, з яких випливає, що на перший погляд нескладна задача пошуку оптимальної альтернативи за одним критерієм не завжди є простою і потребує застосування додаткових засобів. Показано, що задача суттєво ускладнюється, коли альтернативи оцінюються за сукупністю критеріїв, що призводить до неоднозначного, а інколи, й парадоксального вибору. Розглянуто конструктивні методи звуження множини можливих альтернатив, зокрема, формування підмножини ефективних альтернатив за Парето.

У третьому розділі розглянуто альтернативний підхід до вибору альтернатив, заснований на бінарних відношеннях, які визначають переваги або еквівалентності для попарного порівняння альтернатив. Подано основні властивості бінарних відношень та методи структурування альтернатив, які забезпечують перехід від попарного порівняння до ранжування всіх альтернатив. Описано метод ELECTRE, який дає змогу особі, що приймає рішення, в інтерактивному режимі, вибрати одну або декілька ефективних альтернатив на основі визначення, так званих, індексів згоди та незгоди.

У четвертому розділі розглянуто специфіку задачі прийняття рішень за сукупністю критеріїв. Показано недоліки та неефективність деяких методів переходу від багатокритеріальної до однокритеріальної задачі (методів скаляризації критеріїв). Надано інформацію щодо найбільш відомих методів багатокритеріальної оптимізації – метод головного критерію та метод послідовник поступок. На конкретних прикладах продемонстровано особливості розв'язування задач за допомогою цих методів.

У п'ятому розділі розглянуто метод аналізу ієрархій, який дає змогу особі, що приймає рішення, структурувати складну проблему та в інтерактивному режимі знайти таку альтернативу, яка найкращим чином узгоджується з оцінками, наданими окремими експертами. Обґрунтовано аксіоми та детально описано математичні основи методу. Розв'язано прикладну задачу, яка демонструє послідовність обчислень, за якими здійснено ранжування альтернатив.

У шостому розділі розглянуто задачу оптимальної зупинки. Особливість задачі полягає в тому, що особа, яка приймає рішення, у випадковому порядку, послідовно (без повернення) оцінює альтернативи та на деякому кроці має здійснити свій остаточний вибір. Подано засади методу динамічного програмування, за допомогою якого знаходиться розв'язок задачі – визначення оптимального кроку, що максимізує імовірність пошуку найкращої альтернативи зі скінченої множини.

У сьомому розділі розглянуто задачу прийняття рішень в умовах антагоністичного конфлікту, коли супротивник намагається мінімізувати наш виграш. Наведено основи теорії ігор в нормальній (стратегічній) формі, введено означення нижньої та верхньої цін матричних ігор. Описано особливості ігор в чистих та змішаних стратегіях. Наведено графоаналітичний, наближений та аналітичний методи розв'язування матричних ігор.

У восьмому розділі розглянуто елементи теорії статистичних рішень в умовах неповної апріорної інформації щодо зовнішнього середовища. Надано інформацію про особливості методів прийняття рішень в умовах ризику та в умовах невизначеності. Описано методи вибору найкращої альтернативи за критеріями Лапласа, Вальда, Гурвіца і Севіджа та продемонстровано відмінності рішень, що засновані на цих методах.

У дев'ятому розділі розглянуто елементи раціонального вибору, що ґрунтуються на деревах вибору та лотереї. Описано основні означення та аксіоми. Сформовано основну теорему раціонального вибору. Описано та продемонстровано, на конкретних даних, метод вибору оптимальної альтернативи, що заснований на процедурі згортання дерева рішень. Продемонстровано переваги методів раціонального вибору у порівнянні з інтуїтивним прийняттям рішень. Розглянуто основну ідею теорії перспектив, що розвиває теорію раціонального вибору.

У десятому розділі розглянуто методи колективних рішень. Надано інформацію про метод голосування, показано недоліки цього методу, які отримали назву парадокси Борда і Кондорсе. Сформульовано постановку задачі інтеграції особистих рішень незалежних експертів, що заснована на байєсових моделях. Розглянуто схему оцінювання невідомих імовірнісних характеристик моделі за вказівками зовнішнього вчителя. Проведено узагальнення байєсових моделей колективних рішень на основі методів інтервального аналізу.

Автори висловлюють велику вдячність рецензентам – д-ру фіз.-мат. наук, професору В.В. Новицькому і д-ру техн. наук, професору В.С. Степашку за цінні поради, які сприяли покращенню підручника.

РОЗДІЛ 1

ЗАГАЛЬНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

1.1. Базові поняття та означення

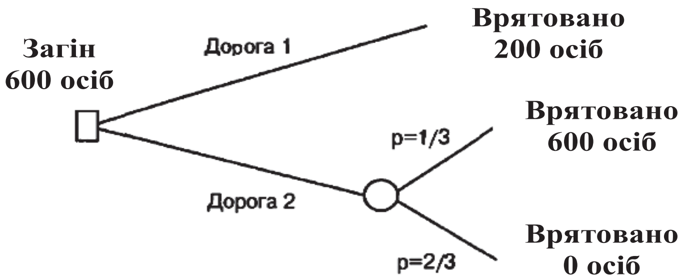
Будь-яка цілеспрямована діяльність пов'язана з процесом прийняття рішень, під яким розуміють задачу пошуку окремого варіанта $d \in D$ з множини D альтернатив. Теорія прийняття рішень – це математична дисципліна, яка спрямована на вибір, в деякому розумінні, найкращого (найкращих) з можливих варіантів з урахуванням наявних обмежень.

Слід зауважити, що в українській мові термін «рішення» (*decision*) використовують саме для позначення процесу пошуку придатного варіанту поведінки, на відміну від російської мови, в якій термін «решение» має не тільки такий сенс, а й визначає знаходження правильної відповіді на питання або задачу, саму відповідь, отриману в ході пошуку, а також застосовують для позначення постанов та актів органів законодавчої, виконавчої або судової влади.

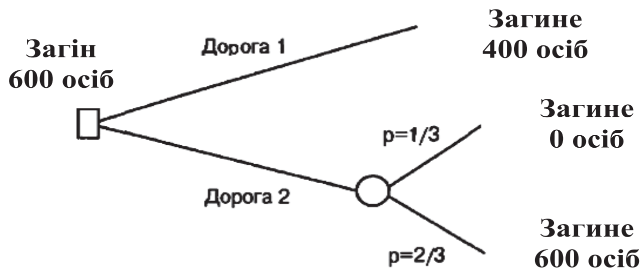
В українській та англійській мовах для позначення таких термінів вживають інші терміни – розв'язування задачі (*solving, choice*), розв'зок задачі (*solution, resolution, answer*), ухвала або постанова суду (*degree, order*).

Теорія прийняття рішень використовує різні математичні методи, які дозволяють науково обґрунтувати вибір найкращої альтернативи не вдаючись до їх повного перебору. Важливість наукового підходу до прийняття рішень полягає в тому, що рішення, які приймає людина інтуїтивно, часто не є оптимальними, що призводить до негативних наслідків.

Опишемо один з найбільш відомих прикладів нераціональної поведінки людей – «дилему генерала». Генерал зазнав поразки у війні і хоче вивести свої війська (600 осіб) з території противника. У нього є дві можливі дороги, і розвідка дала оцінки імовірності можливих втрат під час вибору кожної з них. Дані щодо доріг і можливі втрати подано на рис. 1.1.



а



б

Рис. 1.1. Дилема генерала: яку дорогу краще обрати

Дослідження показали, що більшість людей обирають першу дорогу, намагаючись уникнути лотереї, коли в одному з випадків може загинути весь особовий склад (рис. 1.1, *а*). Але ця ж дилема була представлена в іншому вигляді (рис. 1.1, *б*). Тепер уже більшість випробовуваних обирає другу дорогу, так як на ній з імовірністю $p = 1/3$ можна врятувати весь загін.

Водночас легко побачити, що обидві лотереї еквівалентні! Просто одна з них (рис. 1.1, *а*) представлена у вигляді виграшів, а інша (рис. 1.1, *б*) – у вигляді втрат, що впливає на інтуїтивний вибір людини.

Численні експерименти продемонстрували відхилення поведінки людей від раціонального підходу, які використовують евристики для прийняття рішень. Перелічимо найбільш відомі з них.

1. Люди часто судять про імовірність того, що об'єкт A належить до класу B тільки за подібністю A до типового об'єкту класу B. Вони майже не враховують апріорні імовірності, що впливають на цю належність.

2. Люди часто визначають імовірності подій за тим, як часто вони стикалися з такими подіями. Так, в одному з дослідів випробовувані порівнювали імовірність знаходження букви k на першому і третьому місці в англійських словах. Більшості людей було легше згадати слова з буквою k на першому місці, і вони визначили відповідну імовірність як велику, хоча в дійсності навпаки частота знаходження букви k на третьому місці значно вище.

3. Якщо для визначення імовірності використовують початкову інформацію як точку відліку, то вона суттєво впливає на результат. Групам людей давали завищені та занижені початкові значення і просили їх скорегувати. Середні в групах суттєво різнилися.

4. В експериментах показано, що люди надмірно довіряють своїм судженням, особливо судженням про минулі події. Вони переоцінюють можливості рідкісних явищ природи, наприклад, змін курсу акцій на біржі тощо.

5. Численні роботи показують, що люди прагнуть виключити альтернативи, пов'язані з ризиком. Вони погоджуються на середні або гірші за середні альтернативи, тільки щоб уникнути ситуацій можливих великих втрат навіть з дуже малою імовірністю.

Задача прийняття рішень стає тривіальною, коли вибір однієї з альтернатив є очевидним. Так у відомому радянському фільмі «Подкидыш» героїня Фаїни Ранєвської спитала дитину: «Дівчина, що ти хочеш: щоб тобі відрубали голову або їхати на дачу?». У таких ситуаціях вибір очевидний.

Суттєво складніше прийняти правильне рішення богатирю на роздоріжжі з написом на камені: «Ліворуч підеш – коня втратиш, направо підеш – життя втратиш, прямо підеш – живий будеш, але себе забудеш» (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Богатир на перехресті доріг

Задача прийняття рішень (**ЗПР**) може бути сформульована в термінах мети, способів її досягнення (альтернатив) та отриманих результатів (рис. 1.3).

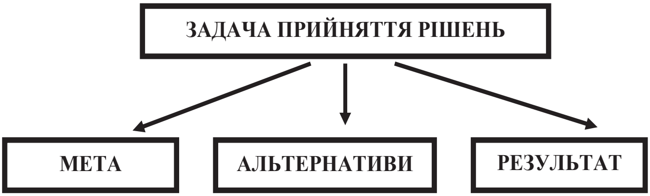


Рис. 1.3. Три складові задачі прийняття рішень

Узагальнену задачу прийняття рішень формально можна записати у вигляді:

$$\text{ЗПР} = \langle F, D, X, G, P \rangle,$$

де

- F – *формулювання* задачі, яка включає змістовний опис проблеми та за необхідністю її модельне представлення, визначення мети або сукупність цілей, які мають бути досягнуті, а також вимоги до вигляду кінцевого результату;
- D – сукупність можливих варіантів (*альтернатив*), з котрих проводиться вибір. Це можуть бути реально наявні варіанти (об'єкти, кандидати, способи досягнення мети, дії тощо), або гіпотетична мно-

жина всіх теоретично можливих варіантів, яка може бути навіть нескінченою;

- X – сукупність *ознак* (атрибутів), які описують варіанти та їх відмінності (особливості). В якості ознак виступають об'єктивні або суб'єктивні (експертні) показники, що характеризують альтернативи;
- P – переваги, які є основою для оцінювання та порівняння можливих варіантів рішення проблеми, відбору допустимих варіантів і пошуку найкращого або прийнятного варіанту;
- G – сукупність умов, що обмежують область допустимих варіантів розв'язку задачі. Обмеження можуть бути описані як змістовним чином, так і задані у вигляді деяких формальних вимог до варіантів або їх ознак. Наприклад, обмеження на значення будь-якої ознаки або неможливість одночасного поєднання певних значень ознак для реальних варіантів.

Задачу прийняття рішень можна формулювати у спрощеному вигляді

$$\text{ЗПР} = < D, O >,$$

де D – множина варіантів (альтернатив), O – принцип оптимальності, який дає уявлення про якість варіантів або правило переваги варіантів. Тоді розв'язком задачі є множина

$$D^{opt} \subset D,$$

отримана за допомогою принципу оптимальності O.

Узагальнена схема прийняття рішень зводиться до виконання таких кроків:

Крок 1. Аналіз поточної ситуації, тобто проблеми, яка потребує прийняття оптимального рішення.

Крок 2. Прогноз розвитку цієї ситуації.

Крок 3. Постановка задачі прийняття рішень (змістовна або формальна).

Крок 4. Формування множини $D = \{d\}$ можливих варіантів d (альтернатив).

Крок 5. Формування принципу O оптимальності рішень, зокрема, критеріїв для оцінки рішень.

Крок 6. Розробка індикаторів для моніторингу реалізації окремих рішень d .

Крок 7. Моделювання та порівняльна оцінка рішень d .

Крок 8. Вибір найкращого (оптимального) рішення d^* .

Крок 9. Реалізація прийнятого рішення та його моніторинг.

Крок 10. Загальне оцінювання результату вирішення проблеми.

У процесі прийняття рішень беруть участь особа (особи), яка приймає рішення, експерти та консультанти.

Особа, що приймає рішення (**ОПР**) – людина (або група людей), для якої вибір найкращої альтернативи слугує мотивом постановки задачі. ОПР має необхідні повноваження і *несе відповідальність* за прийняте рішення.

Експерт – фахівець, який має інформацію про задачу, але безпосередньо *не несе відповідальність* за результат її вирішення. Експерт дає оцінки, необхідні для формування вихідної множини альтернатив і рішення задачі вибору.

Консультант – фахівець з теорії вибору та прийняття рішень. Він розробляє модель задачі, процедуру прийняття рішень, організовує роботу ОПР і експертів під час пошуку рішення. Консультантів також називають дослідниками, аналітиками або членами робочої групи.

Множина $D=\{d\}$ можливих альтернатив d може включати як незалежні, так і залежні альтернативи. Незалежними є ті альтернативи, будь-які дії з якими, наприклад, видалення з множини D, не впливають на якість інших альтернатив. У випадку залежних альтернатив оцінки одних з них впливають на якість інших.

Теорія прийняття рішень вивчає закономірності способів досягнення бажаного результату (мети) в умовах невизначеності різного типу, коли необхідно діяти в ситуації, що відома не повністю.

Можна виділити три групи невизначеностей:

- невизначеність *середовища*, в якому приймають рішення;
- невизначеність *особи, що приймає рішення* (ОПР), яка в загальному випадку може поводити себе непослідовно, бути суперечливою, допускати помилки, залежати від інших осіб (партнерів, суперників тощо), дії яких неможливо передбачити та повністю враховувати;
- невизначеність *цілей*, які можуть не співпадати одна з одною.

Основна трудність полягає в тому, що наслідки, пов’язані з прийняттям того чи іншого рішення, залежать від невідомої ситуації. Ступінь неприйнятності цих наслідків прийнято вимірювати в умовних одиницях – *втратах*, які може зазнати особа, що приймає рішення.

Основною вихідною інформацією, необхідною для розв'язування задачі прийняття рішень, є функція втрат $\varphi(d,S)$, що являє собою залежність втрат від двох аргументів: рішення d та ситуації S, в якій це рішення приймають.

Основний крок під час розв'язування задачі полягає в перетворюванні функції втрат у функцію ризику, яка залежить тільки від одного аргументу – рішення, яке приймають. Спосіб такого перетворювання неоднозначний і залежить від обраного критерію ризику. Від цього критерію залежить і зміст виразу «найкраще рішення»: найкращим називають рішення, яке мінімізує ризик.

Застосовність різних критеріїв ризику залежить від характеру невизначеності ситуації. Докладно вивчено два типи невизначеності:

- невизначеність цілеспрямованої протидії.
- невизначеність стану природи;

Задачі, пов'язані з невизначеністю зазначених типів, вивчає відповідно теорія ігор (розділ 7) та теорія статистичних рішень (розділ 8).

Тут же коротко наведемо формальну постановку задачі прийняття рішень в умовах ризику.

Нехай D – множина допустимих рішень, $\mathbf{\Theta}$ – множина можливих ситуацій, $\varphi(d,S)$ – функція втрат, яка визначена на множині $D\times\mathbf{\Theta}$ всіх пар (d,S), де $d\in D$ – рішення, $S\in\mathbf{\Theta}$ – ситуація.

Функція $\varphi(d,S)$ характеризує втрати (наслідки), що супроводять рішення d в ситуації S.

Якщо зафіксувати деяке певне рішення $d\in D$, то функція $\varphi(d,S)$ вироджується у функцію $\varphi_d(S)$ одного аргументу, визначену на множині $\mathbf{\Theta}$, і ця функція відображує залежність втрати від ситуації з заданим й фіксованим рішенням d.

Результат $R(d)=\sum[\varphi_d(S)]$ застосування деякого функціоналу Σ до функції $\varphi(d,S)$ називають ризиком, пов'язаним з фіксованим рішенням $d\in D$. Найкращим рішенням, якщо воно існує, називають таке $d^*\in D$, яке мінімізує ризик на множині рішень D, тобто задовольняє вимогу

$$R(d^*)=\inf_{d\in D}R(d).$$

Якщо правомірна гіпотеза про те, що стани середовища – випадкові події з розподілом імовірностей $P(S)$, то ризик $R(d)$ визначають за формулою

$$R(d) = \sum_{S \in \Theta} P(S) \varphi(d, S)$$

та розв'язування задачі полягає в визначені рішення, яке мінімізує такий ризик.

Приклад. Власник невеликого магазину на початку кожного дня за ціною 50 грн закуповує для реалізації продукт, який має термін зберігання всього одну добу, наприклад, торт. Для отримання прибутку власник встановлює ціну реалізації цього продукту 60 грн за одиницю. Якщо ж протягом дня продукт не розпродано, то в кінці дня власник встановлює знижену ціну 30 грн за одиницю, за якою продукт завжди купують.

З попередніх спостережень власнику відомо, що попит на продукт за один день може складати 1, 2, 3 або 4 одиниці, причому попит 1 одиниці спостерігався 15 разів, попит 2-х одиниць – 30 разів, попит 3-х одиниць – 30 разів, попит 4-х одиниць – 25 разів.

Питання: скільки одиниць продукту має закупати власник магазина на кожен день?

Розв'язок задачі. Складемо таблицю (табл. 1.1), в якій буде чотири рядки можливих рішень (власник закуповує 1, 2, 3 або 4 одиниці продукту) і чотири стовпчика можливих сценаріїв розвитку (попит – 1, 2, 3 або 4 одиниці товару).

У клітинках таблиці вказані фінансові наслідки (прибуток або втрати власника магазину) для кожного рішення та конкретного сценарію розвитку.

Наслідки розраховано за формулою

$$S = N_1 \cdot 60 + N_2 \cdot 30 - N_3 \cdot 50, \tag{1.1}$$

де N_1 – кількість одиниць продукту, реалізованих за ціною 60 грн, N_2 – кількість одиниць продукту, реалізованих за ціною 30 грн, а $N_3 = N_1 + N_2$ – загальна кількість закуплених одиниць товару за ціною 50 грн.

Наприклад, якщо обсяг закупівлі склав 3 одиниці, а попит буде лише 2 одиниці, то прибутку не буде $(S = 0)$, оскільки згідно з (1.1) маємо

$$S = 2 \cdot 60 + 1 \cdot 30 - 3 \cdot 50 = 0.$$

Таблиця 1.1. **Таблиця можливих рішень та наслідків**

Обсяг закупівлі в день	**Попит продукту протягом дня**			
	1 од.	**2 од.**	**3 од.**	**4 од.**
1 од.	10 грн	10 грн	10 грн	10 грн
2 од.	– 10 грн	20 грн	20 грн	20 грн
3 од.	– 30 грн	0 грн	30 грн	30 грн
4 од.	– 50 грн	– 20 грн	10 грн	40 грн

За умовами задачі легко оцінити імовірність (відносну частоту) попиту товару протягом дня:

$$p(1) = \frac{15}{15 + 30 + 30 + 25} = 0{,}15,$$

$$p(2) = \frac{30}{15 + 30 + 30 + 25} = 0{,}30,$$

$$p(3) = \frac{30}{15 + 30 + 30 + 25} = 0{,}30,$$

$$p(4) = \frac{25}{15 + 30 + 30 + 25} = 0{,}25.$$

Використовуючи дані з табл. 1.1 та згадані вище оцінки імовірності $p(j)$, $j = 1,...,4$, обчислимо математичне сподівання очікуваного прибутку для кожного можливого варіанту рішення власника магазину (табл. 1.2).

Легко побачити, що максимум очікуваного прибутку складає 15,5 грн і відповідає другому варіанту рішення – закупівлі 2 одиниць товару в день. Саме це рішення і буде оптимальним.

Розв’язок задачі розглянуто у припущені відомих (оцінених) імовірностей можливих ситуацій, в яких приймається рішення. Якщо ж така інформація невідома, то застосовують інші підходи для прийняття рішення в умовах невизначеності, які ґрунтуються на критеріях Вальда, Гурвіца, Лапласа, Севіджа. Такі підходи будуть розглянуті в розділі 8.

Таблиця 1.2. **Очікувані прибутки власника магазину**

Варіанти рішень	**Результат,** x	**Імовірність,** p	$x \cdot p$
Закупівля 1 од. в день	10 грн	0,15	1,5
	10 грн	0,30	3,0
	10 грн	0,30	3,0
	10 грн	0,25	2.5
		Загалом $\sum xp$	**10 грн**
Закупівля 2 од. в день	– 10 грн	0,15	– 1,5
	20 грн	0,30	6,0
	20 грн	0,30	6,0
	20 грн	0,25	5,0
		Загалом $\sum xp$	**15,5 грн**
Закупівля 3 од. в день	– 30 грн	0,15	– 4,5
	0 грн	0,30	0
	30 грн	0,30	9,0
	30 грн	0,25	7,5
		Загалом $\sum xp$	**12,0 грн**
Закупівля 4 од. в день	– 50 грн	0,15	– 7,5
	– 20 грн	0,30	– 6,0
	10 грн	0,30	3,0
	40 грн	0,25	10,0
		Загалом $\sum xp$	**– 0,5 грн**

Прийняття рішень в умовах стохастичної невизначеності передбачає, що середовище, в якому вирішують задачу, байдуже до особи, яка приймає рішення. Водночас існує широке коло задач, для яких таке припущення не правомірне. Наприклад, особі, що приймає рішення, можуть протидіяти конкуренти або вороги. Математичним підґрунтям для вирішення таких задач є теорія ігор, яка буде детально розглянута в розділі 7.

Підсумовуючи, можна сказати, що проблема вибору альтернатив $d \in D$ допускає різні математичні постановки задач залежно від таких умов:

- множина альтернатив $D = \{d\}$ є скінченою, зліченою або континуум;
- оцінка альтернативи здійснюється за одним або кількома критеріями (багатокритеріальний вибір);
- альтернативи, що входять в множину можливих, є незалежні або залежні;
- критерії є кількісними або якісними;
- вибір альтернативи може бути однократним або повторюваним, який допускає навчання за вибіркою спостережень;
- наслідки вибору точно відомі (вибір в умовах визначеності), мають стохастичний характер при відомих імовірностях можливих наслідків зробленого вибору (вибір в умовах ризику), або мають непередбачуваний результат;
- вибір є індивідуальним або приймається групою експертів;
- груповий вибір ґрунтується на узгодженості інтересів сторін (кооперативний вибір) або на протиріччях (вибір в конфліктних ситуаціях).

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте базові означення теорії прийняття рішень.
2. Наведіть класифікацію задач прийняття рішень.
3. Опишіть суть узагальненої схеми прийняття рішень.
4. Охарактеризуйте кроки виконання узагальненої схеми прийняття рішень.
5. Назвіть особу, яка приймає рішення, та охарактеризуйте обов'язки, які вона має.
6. Опишіть суть задачі прийняття рішень в умовах невизначеності.
7. Опишіть умови прийняття рішень, в яких варто використовувати теорію статистичних рішень, а в яких – теорію ігор.

РОЗДІЛ 2

КРИТЕРІАЛЬНА МОВА ОПИСУ АЛЬТЕРНАТИВ

2.1. Загальні відомості

Критеріями називають показники привабливості (або непривабливості) альтернатив для учасників процесу вибору, зокрема ОПР. У професійній діяльності вибір критеріїв часто визначається багаторічною практикою та досвідом.

Розглянемо спочатку найпростіший випадок, коли *кожну* альтернативу можна оцінити одним числом (значенням критерію). Тоді порівняння альтернатив зводиться до порівняння відповідних їм чисел.

Нехай $d \in D$ – деяка альтернатива з множини D можливих альтернатив. Вважається, що $\forall d$ може бути задана функція $q(d)$, така, що

$$q(d_1) > q(d_2), \text{ якщо } d_1 \succ d_2,$$

де знак $\succ$ означає перевагу альтернативи d_1 над d_2.

Критеріальну функцію $q(d)$ називають також цільовою функцією, функцією переваги або функцією корисності.

Якщо припускати, що вибір альтернативи призводить до однозначних наслідків (вибір в умовах визначеності), а критерій чисельно виражає оцінку цих наслідків (переваг), то найкращою альтернативою є та, яка задовольняє умову

$$d^* = \arg\max_{d \in D} q(d).$$

Часто проста за постановкою задача пошуку оптимальної альтернативи d^* за одним критерієм виявляється складною, оскільки метод її розв'язування визначають як специфікою множини $D = \{d\}$, так і видом критерію $q(d)$.

Покажемо це на простому прикладі побудови лінійної регресії

$$y = k_1 x + k_0, \tag{2.1}$$

яка може бути сформульована як задача пошуку оптимального вектору $k^* = (k_1, k_2)$ коефіцієнтів прямої (2.1), що забезпечує найбільш точне прогнозування значень залежної змінної y, як лінійної функції від незалежної змінної x.

Зазвичай для визначення оптимального значення вектору k^* використовують метод найменших квадратів (МНК), згідно з яким серед можливих значень $k = (k_1, k_2) \in K$ обирають вектор, який задовольняє умову

$$k^* = \arg\min_{k \in K} q(k),$$

де критерій $q(k)$ визначається як сума квадратів

$$q(k) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - k_1 x_i - k_0)^2$$

відхилень значень y_i залежної змінної y, що спостерігалися в експериментальній вибірці з N спостережень, від значень функції (2.1) при $x = x_i$ (рис. 2.1).

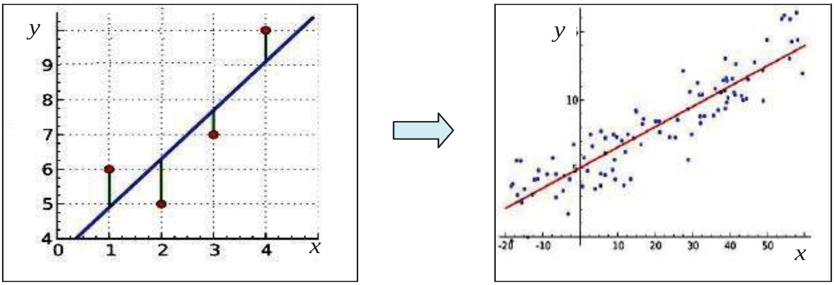


Рис. 2.1. Визначення лінії регресії за методом найменших квадратів

Водночас відомо, що визначення значення вектору $k^* = (k_1, k_2)$ за вибіркою спостережень на основі МНК не завжди призводить до побудови оптимальної лінійної регресії (рис. 2.2). Це може статися, наприклад, коли серед точок x_i, y_i експериментальної вибірки присутня всього одна точка – викид, який суттєво відхиляється від інших точок та викликає зміщення оцінок регресійних коефіцієнтів. У результаті замість прийнятної буде побудована хибна лінія регресії, яка не забезпечує найкращу точність апроксимації основних точок вибірки (рис. 2.2, *а*).

Можна описати ще один приклад, який веде до побудови «хибної регресії» (рис. 2.2, *б*). Така ситуація виникає тоді, коли експериментальні точки x_i, y_i спочатку групувались в області 1, а потім у результаті систематичної помилки вимірювань, змістилися в область 2. Зрозуміло, що рішення МНК окремо за першими та другими даними є нестійким.

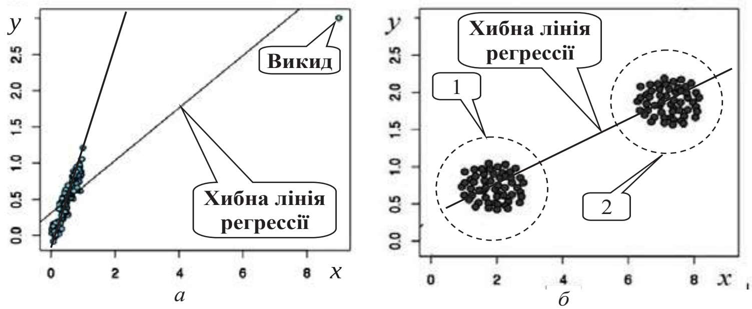


Рис. 2.2. Проблеми застосування МНК в реальних ситуаціях

Можна викласти інші приклади неефективного застосування МНК, які також, як і розглянуті, потребують застосування додаткових процедур оброблення даних експериментів.

У переважній більшості задач існує досить багато критеріїв, за якими можуть бути оцінені альтернативні рішення. Тому на практиці для більш повної оцінки альтернатив застосовують не один, а декілька критеріїв, що з різних сторін характеризують кожну альтернативу. В такому випадку виникає задача *багатокритеріальної оптимізації*, яка буде детально розглянута в розділі 4. Тут згадаємо лише основні особливості цієї задачі.

Нехай для оцінювання альтернатив використовують декілька критеріїв $q_j(d)$, $j = 1,..., p$. Одним зі способів розв'язування багатокритеріальної задачі є її зведення до однокритеріальної шляхом застосування *суперкритерію*, тобто скалярної функції векторного аргументу

$$q_0(d) = q_0[q_1(d),...,q_p(d)], \tag{2.2}$$

Тоді найкращою вважають альтернативу, яка максимізує суперкритерій, тобто

$$d^* = \arg\max_{d \in D} q_0(d) = \arg\max_{d \in D} q_0[q_1(d),...,q_p(d)]. \tag{2.3}$$

Зауважимо, що в деяких задачах замість (2.3) використовують умову

$$d^* = \arg\min_{d \in D} q_0(d) = \arg\min_{d \in D} q_0[q_1(d),...,q_p(d)].$$

Конкретний вид функції $q_0(d)$ визначає вклад кожного окремого критерію $q_j(d)$, $j = 1,..., p$ у суперкритерій. Зазвичай використовують адитивні

$$q_0(d) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j q_j(d)$$

або мультиплікативні функції

$$q_0(d) = 1 - \prod_{j=1}^{p} \beta_j q_j(d) \ ,$$

у яких вагові коефіцієнті α_j та β_j визначають відносний внесок окремого j-го критерія у суперкритерій, а також узгоджують розмірності критеріїв.

Зауваження. Об’єднання декількох критеріїв в один суперкритерій призводить до низки труднощів і недоліків. Впорядкування точок у багатовимірному просторі принципово не може бути однозначним. Тому навіть «невелика» зміна суперкритерію може призвести до того, що нова «оптимальна» альтернатива дуже сильно відрізнятиметься від старої.

Крім того, об’єднання окремих критеріїв у суперкритерій за допомогою адитивної згортки не завжди є правомірним та може призвести до парадоксальних рішень.

Продемонструємо це на жартівливому прикладі.

Приклад 2.1. Нехай для вибору якісного телевізору застосовують два критерії: якість звуку та якість зображення, які оцінюють інтервальними величинами $q_1 \in [0,1]$ і $q_2 \in [0,1]$ відповідно.

Зрозуміло, що можна окремо оцінювати якість звуку і зображення пороговими правилами, наприклад, так:

$$\text{ЗВУК} = \begin{cases} \text{Поганий}, & \text{якщо } q_1 \le 0{,}5, \\ \text{Гарний}, & \text{якщо } q_1 > 0{,}5, \end{cases}$$

$$\text{ЗОБРАЖЕННЯ} = \begin{cases} \text{Погане}, & \text{якщо } q_2 \le 0{,}5, \\ \text{Гарне}, & \text{якщо } q_2 > 0{,}5. \end{cases}$$

Водночас очевидно, що неможливо компенсувати поганий звук гарним зображенням та навпаки, тобто область поганого телевізора не є опуклою (рис. 2.3).

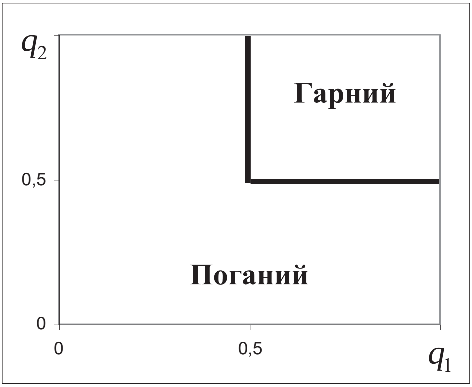


Рис. 2.3. Області поганих та гарних телевізорів

Тому *з будь-якими* ваговими коефіцієнтами α_1 і α_2 суперкритерій

$$q_0 = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$$

не має сенсу: використання двокритеріального правила

$$\text{ТЕЛЕВІЗОР} = \begin{cases} \text{Поганий}, & \text{якщо } \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 \le h_0, \\ \text{Гарний}, & \text{якщо } \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 > h_0. \end{cases}$$

з будь-яким пороговим значенням h_0 веде до абсурдних рішень.

Наприклад, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5$ та $h_0 = 0{,}5$ телевізор з огидним звуком ($q_1 = 0{,}3$), але виключно гарним зображенням ($q_2 = 0{,}95$) буде визнаний гарним (рис. 2.4) тільки лише тому, що виконується умова

$$q_0 = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = 0{,}625 > 0{,}5.$$

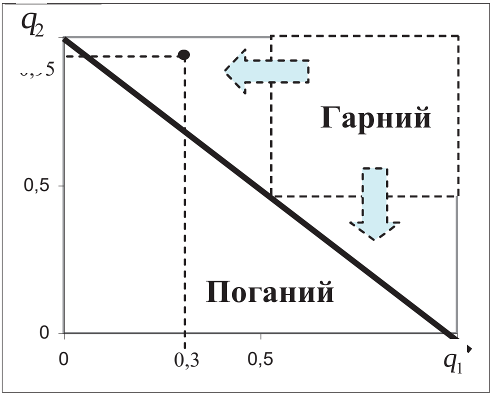


Рис. 2.4. Неправомірне використання двокритеріального правила

Згаданий вище парадоксальний результат має цілком конкретне математичне пояснення. Вже давно доведено, що застосування адитивної згортки критеріїв правомірно лише в тих випадках, коли критерії незалежні за перевагами (див. монографію Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М. : Радио и связь, 1981, с. 116).

У теорії прийняття рішень критерії $q_i(d)$ та $q_j(d)$ вважають *залежними*, якщо порівняння альтернативи за одним критерієм, наприклад, за критерієм $q_i(d)$, змінює *переваги* ОПР в умовах *однакових* оцінок за другим критерієм $q_j(d)$.

Наведемо наочний приклад залежності критеріїв. Припустимо, що купуючи автомобіль людина враховує три критерії:

- q_1 – ціну (чим менше, тим краще);
- q_2 – розмір (чим більше, тим краще);
- q_3 – конструкцію коробки передач (автоматична краще механічної).

Нехай відповідно до критерію q_1 автомобілі, що порівнюють, мають *однакову* оцінку. Тоді, якщо ОПР бажає купити автомобіль з автоматичною коробкою передач, то він віддає переваги великій машині. Але його переваги можуть змінитися на зворотні для автомобіля з механічною коробкою передач через труднощі в керуванні великою машиною. Саме тому в згаданому вище прикладі критерії q_1 і q_2 є *залежними* від критерію q_3.

Зрозуміло, що порушення умов незалежності за перевагами істотно ускладнює задачу прийняття рішення. До того ж для повної перевірки умови незалежності слід розглянути *всі* пари критеріїв. Однак на практиці зазвичай застосовують спрощену перевірку: обирають один або два найбільш істотних критерія, а інші розглядають тільки в парі з ними. Або просто припускають, що умови незалежності виконуються.

Взагалі на складність задач прийняття рішень впливає кількість альтернатив та кількість критеріїв. Для невеликого числа критеріїв (два – три) задача порівняння декількох альтернатив відносно проста і прозора: якості альтернатив за критеріями можуть бути безпосередньо зіставлені.

При великій кількості критеріїв задача суттєво ускладнюється. З метою спрощення зазвичай критерії поєднують в певні групи, що мають конкретне змістовне значення та незалежні за перевагами.

Підставою для природного угруповання критеріїв є можливість визначити плюси та мінуси альтернатив для груп критеріїв та оцінити їх переваги та недоліки. Таке угруповання критеріїв робить процес прийняття рішень значно більш усвідомленим й ефективним.

Використання критеріїв для оцінки альтернатив вимагає визначення градацій якості: кращих, гірших і проміжних оцінок. Інакше кажучи, існують різні шкали оцінок за критеріями.

Розрізняють шкали неперервних і дискретних оцінок, а також шкали кількісних і якісних оцінок. Так, для критерію «вартість» може бути використана неперервна кількісна шкала оцінок (у грошових одиницях). Для критерію «наявність дачі» може бути використана якісна двійкова шкала: є або немає.

Крім категорій «якісні – кількісні», «неперервні – дискретні», в теорії прийнятті рішень розрізняють наступні типи шкал:

1. *Шкала порядку* – оцінки впорядковані за зростанням або спаданням переваг ОПР. Прикладом може слугувати шкала екологічної чистоти району біля місця проживання:

• дуже чистий район;

• цілком задовільний за ступенем чистоти;

• екологічне забруднення велике.

2. *Інтервальна шкала*, для якої визначають рівні відстані за зміною якості між оцінками. Наприклад, шкала додаткового прибутку підприємця може бути 1 млн, 2 млн, 3 млн грн тощо. Для інтервальної шкали характерно, що початок відліку вибирають довільно, так само, як і крок (відстань між оцінками) шкали.

3. *Шкала пропорційних оцінок* – ідеальна шкала. Прикладом є шкала оцінок згідно з критерієм вартості, відлік у якій починається з встановленого значення (наприклад, з нульовою вартістю).

Слід зауважити, що прийняття рішень за сукупністю критеріїв $q_j(d),\ j=1,...,p$ не обов'язково зводиться до формування суперкритерію (2.2).

Один з таких альтернативних підходів ґрунтується на пошуку альтернативи з заданими якостями. Задача полягає у тому, щоб серед множини можливих альтернатив D знайти таку альтернативу, яка в просторі окремих критеріїв найближча до опорної точки з заданими якостями.

Простим прикладом такого методу є пошук роботи, яка влаштовує ОПР, за двома критеріями: q_1 – відстань від дому до офісу та q_2 – рівень зарплати (рис. 2.5).

Зауважимо, що цей метод не завжди є обґрунтованим. Крім цього він потребує нормування критеріїв, для чого застосовують різні підходи.

Якщо діапазон значень критерію q_j не дорівнює нулю, тобто $\Delta_{q_i} = \max q_j - \min q_j \neq 0$, то перехід від q_j до нормованих значень $q_j^{\text{норм}} \in [0,1]$ може бути здійснений за формулою

$$q_j^{\text{норм}} = \frac{q_j - \min q_j}{\max q_j - \min q_j}, \; j = 1, ..., p. \tag{2.4}$$

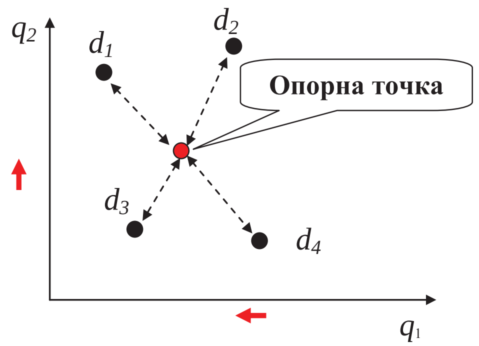


Рис. 2.5. Простір критеріїв: q_1 – відстань до роботи, q_2 – зарплата

Нормування за формулою (2.4) здійснюють, якщо значення критерію q_j щільно заповнюють інтервал

$$\Delta_{q_i} = \max q_j - \min q_j.$$

Якщо ж для оцінювання деяких альтернатив значення q_j можуть включати відносно рідкісні викиди, які набагато перевищують типові значення, то за (2.4), саме такі викиди визначать масштаб нормування. Це призведе до того, що основна маса нормованих значень $q_j^{\text{норм}}$ критерію q_j зосередиться поблизу нуля.

У таких випадках набагато надійніше орієнтуватися на статистичні характеристики критерію, такі як середнє M_{q_j} і середнє квадратичне відхилення σ_{q_j} та для нормування критеріїв замість (2.4) застосовувати формулу

$$q_j^{\text{норм}} = \frac{q_j - M_{q_j}}{\sigma_{q_j}}, \qquad j = 1, ..., p.$$

2.2. Множина Парето

Якщо уважно подивитись на рис. 2.5, то можна зробити такі висновки.

1. Альтернатива d_3 має найменшу відстань від опорної точки, тобто саме цю альтернативу слід визнати оптимальною за розглянутим методом. Водночас з точки розу здорового глузду альтернатива d_1 більш приваблива: обравши такий варіант роботи ОПР буде ближче до офісу (критерій q_1) та мати більшу платню (критерій q_2).

2. Альтернатива d_4 є найгірша (аутсайдер) серед можливих альтернатив $d_1,\dots,d_4$: відстань до офісу найбільша (критерій q_1), а платня найменша (критерій q_2).

Таким чином, якщо не застосовувати додаткових засобів, то досить привабливий метод пошуку альтернативи з заданими якостями, який ґрунтується на аналізі відстаней до опорної точки в просторі окремих критеріїв, має суттєві недоліки.

Розглянемо один з таких додаткових засобів.

Зрозуміло, що при розв'язуванні задачі прийняття рішень за сукупністю критеріїв розумно звузити початкову множину D допустимих альтернатив, тобто побудувати множину $D_0 \subseteq D$, якій заздалегідь належить оптимальна альтернатива d^*.

Якщо виявиться, що $D_0 \subset D$, тобто можна наперед видалити з розгляду неефективні альтернативи ($D / D_0 \neq \varnothing$), то пошук оптимальної альтернативи буде спрощений.

Один з популярних методів звуження множини D ґрунтується на багатокритеріальній оптимізації за Парето. Згідно з цим методом вважається, що альтернатива d_i має переваги порівняно з альтернативою d_j у тому випадку, коли d_i не гірша ніж d_j за всіма критеріями і краща d_j хоча б за одним критерієм.

Якщо ж існує розбіжність переваг d_i і d_j хоча б за одним критерієм, то такі альтернативи вважають непорівняними.

У результаті попарного порівняння, гірші за всіма критеріями альтернативи (аутсайдери) відкидають, а альтернативи, що залишились утворюють підмножину Pa альтернатив, оптимальних за Парето.

У множину Парето Pa входять тільки ті альтернативи, які не домінують одна над іншою, але домінують над варіантами, що не входять у цю множину. Якщо $D / Pa \neq \varnothing$, тобто множина неефективних альтернатив не порожня, то в множині Парето обов'язково знайдеться альтернатива, яка домінує над деякою альтернативою з неефективної множини *за всіма критеріями*.

Нехай $D = \{d_1, ..., d_M\}$ – множина з M можливих альтернатив, а

$$q_i(d_j) \ , \ i = 1,..., p \, , \ j = 1,..., M$$

– сукупність значень p різних критеріїв, за якими оцінюють кожну з цих альтернатив, причому чим більше значення критерію, тим краща відповідна властивість альтернативи з точки зору ОПР.

Формально множину Парето Pa визначають таким чином.

Припустимо, що для двох альтернатив d_α і d_β ($1 \leq \alpha \leq M$, $1 \leq \beta \leq M$, $\alpha \neq \beta$) виконується нерівність

$$q_i(d_\alpha) \geq q_i(d_\beta) \ \ \forall i = 1,..., p \, , \tag{2.5}$$

і, крім цього, існує хоча б один критерій, для якого (2.5) переходить до *строгої нерівності*.

У такому випадку альтернатива d_α заздалегідь краща за альтернативу d_β, яку можна видалити з розгляду, тобто

$$d_\beta \notin Pa \, .$$

Таким чином, найпростіший алгоритм визначення множини Pa полягає у почерговому виборі альтернатив вихідної множини $D = \{d_1, ..., d_M\}$ і порівняні обраної альтернативи з рештою альтернатив.

Якщо знайдеться альтернатива, яка домінує над обраною, то переходимо до аналізу наступного варіанту, оскільки обрана альтернатива свідомо не належить до множини Парето. Якщо ж жодна з альтернатив множини $D = \{d_1, ..., d_M\}$ не домінує над обраною альтернативою, то вважають, що обрана альтернатива належить до множини Pa.

Потім обирається наступний елемент вихідної множини і так до тих пір, поки не будуть перевірені всі можливі варіанти.

Приклад 2.2. Нехай треба вибрати мобільний телефон за двома критеріями: q_1 – термін роботи акумулятора та q_2 – ємність оперативної пам’яті.

Покажемо, як можна просто визначати множину Парето графічним способом (рис. 2.6).

Зобразимо альтернативи телефонів з конкретними значеннями критеріїв точками на площині (рис. 2.6, *а*). Для кожного з варіантів визначимо альтернативи, які гірші одразу за двома критеріями. Для цього потрібно через точку, що аналізується, провести горизонтальну та вертикальну лінії та видалити всі альтернативи, які належать області, що ліворуч та нижче даної точки.

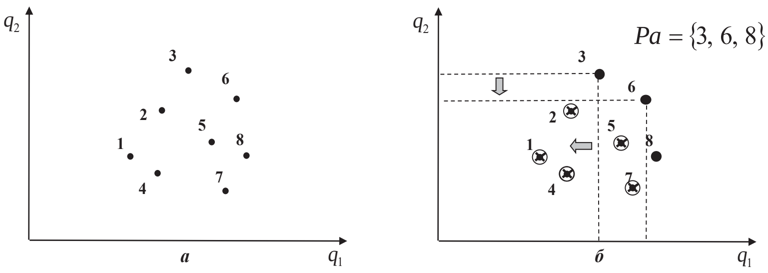


Рис. 2.6. Визначення множини Парето

Наприклад, для точки 3 видаляють альтернативи 1, 2, 4, а для точки 6 – альтернативи 5, 7. У результаті визначаємо, що множину Парето утворюють точки 3, 6, 8.

Приклад 2.3. Змінимо тепер один з критеріїв вибору телефону та будемо його обирати згідно з критеріями: q_1 – термін роботи акумулятора та q_2 – ціна.

У такому випадку, на відміну від попереднього, критерії мають протилежний напрямок: критерії q_1 бажано збільшувати, а критерій q_2 зменшувати. Продемонструємо порядок визначення множини Парето Pa.

Нехай альтернативи телефонів з конкретними значеннями q_1 та q_2 зображено точками на площині (рис. 2.7, *а*). Для побудови множини Парето, тепер уже для кожної точки, що аналізується, потрібно видаляти неефективні альтернативи, які знаходяться ліворуч та вище даної точки. Тобто видаляти альтернативи, у яких термін роботи акумулятора менше, а ціна більше.

Наприклад, для точки 5 видаляють неефективні за двома критеріями альтернативи 2, 3, для точки 7 – альтернативи 1, 4, 5, а для точки 8 – альтернатива 6. У результаті множину Парето утворюють лише точки 7 і 8 (рис. 2.7).

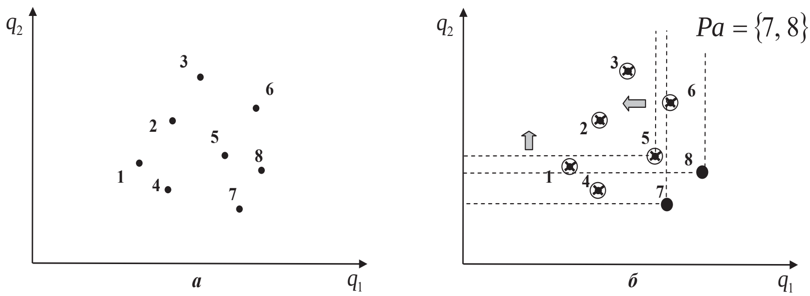


Рис. 2.7. Визначення множини Парето

Зрозуміло, що коли множина Парето включає декілька альтернатив, то остаточний вибір ґрунтується на пораді експерта або застосовується додатковий критерій.

Розглянемо ще раз альтернативи, що зображені на рис. 2.5. Після переходу від початкової множини альтернатив d_1, d_2, d_3, d_4 (рис. 2.8, *а*) до підмножини Парето (рис. 2.8, *б*) будуть видалені неефективні альтернативи d_3, d_4. Якщо тепер серед альтернатив d_1, d_2, які належать до множини Парето Pa, вибрати альтернативу d_1, яка знаходиться на мінімальній відстані від опорної точки, то така альтернатива і може вважатися оптимальною.

Зауважимо, що для реалізації методу пошуку альтернативи з заданими якостями можуть застосовуватись не тільки декартові відстані, а й манхеттенська метрика, відстані Хемінга, Левенштейна, Мінковського та інші.

Розглянемо ще один приклад побудови множини Парето альтернатив, що характеризуються трьома критеріями.

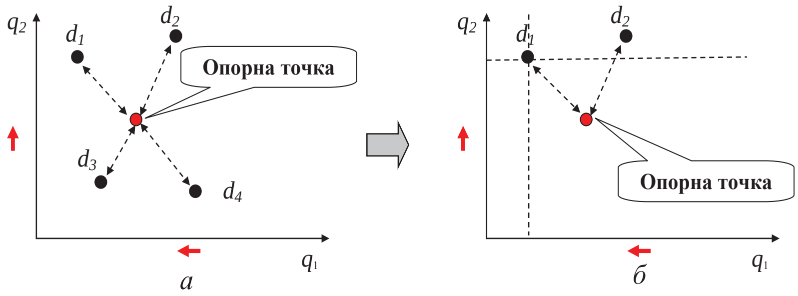


Рис. 2.8. Визначення оптимальної альтернативи на множині Парето

Приклад 2.4. Треба вибрати місце роботи з варіантів, викладених у табл. 2.1, ґрунтуючись на критеріях q_1 – зарплата, q_2 – термін відпустки, q_3 – термін поїздки до офісу.

Таблиця 2.1. **Варіанти альтернатив місця роботи**

Варіанти	**Критерії**		
	Зарплата (грн)	**Відпустка (днів)**	**Термін поїздки (хв)**
1	9000	20	60
2	5000	30	20
3	**7000**	**36**	**40**
4	8000	40	50
5	4000	60	15
6	**6000**	**30**	**10**
7	9000	35	60
8	6000	24	10
9	6500	35	40

Зрозуміло, що критерії q_1 та q_2 бажано максимізувати, а критерій q_3 – мінімізувати.

Аналізуючи табл. 2.1, визначимо спочатку Парето оптимальну множину. Легко бачити, що за трьома критеріями можна заздалегідь видалити неефективні варіанті 1, 2, 8 і 9.

Таким чином, множина Парето включає п'ять альтернатив:

$$Pa = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Для того, щоб звузити множину Парето введемо додаткові обмеження на критерії:

- зарплата – не менше ніж 6000 грн на місяць;
- термін відпустки – не менше ніж 30 днів;
- термін поїздки – не більше ніж 40 хв.

Таким обмеженням задовольняють вже тільки два варіанти з множини Парето – альтернативи 3 та 6, між якими потрібно зробити остаточний вибір на основі неформальних міркувань.

Розглянемо ще один підхід до визначення оптимального варіанту за даними табл. 2.1, а саме оптимізацію на основі критеріїв, що мають *пріоритети*.

Для цього впорядкуємо критерії за їх важливістю для ОПР, наприклад, так

$$q_1 \succ q_3 \succ q_2,$$

тобто будемо вважати, що для ОПР найбільш важливим є розмір зарплати, а найменш важливим – термін відпустки.

Тоді, відповідно до даних у табл. 2.1 максимальному значенню зарплати ($q_1 = 7000$ грн) відповідають варіанти 1 та 7. Далі, порівнюємо ці варіанти за терміном поїздки від дому до офісу. Оскільки значення цього критерію однакові ($q_3 = 60$ хв), то порівнюємо термін відпустки.

Звідси випливає, що оптимальним є варіант 7, для якого зарплата $q_1 = 7000$ грн, відпустка $q_2 = 35$ днів і термін поїздки до роботи $q_3 = 60$ хв.

Розглянуті приклади показують, що оптимальне рішення за багатьма критеріями не є однозначним і залежить від методу, який застосовують для розв'язування конкретної задачі.

Слід також зауважити, що вище згадані приклади є відносно простими. В реальних же ситуаціях прийняття рішень за багатьма критеріями, кількість яких може бути великою, отримати обґрунтований розв'язок задачі суттєво складніше, а іноді й практично не можливо.

Методологія прийняття рішень у задачах багатокритеріальної оптимізації досі активно розвивається, про що свідчать чисельні публікації у науковій літературі.

Деякі сучасні підходи до розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації будуть розглянуті в наступних розділах.

Завдання для комп’ютерного практикуму

Завдання 2.1. Необхідно навчитись визначати найбільш стабільний медичний показник за тривалий період вимірювання електрокардіограми у пацієнта та обчислювати значення критерію кожної альтернативи з визначенням «найкращого» показника.

Вхідні дані мають вигляд табл. 2.2.

Таблиця 2.2. **Результати вимірювань медичних показників**

Показники					
Прод Q	**Прод R**	**Прод S**	**Прод T**	**Ампл P**	**Ампл Q**
0,094121	0,036663	0,125455	0,168038	0,061153	– 0,34587
0,111888	0,033301	0,145883	0,168638	0,033689	– 0,35651
0,09828	0,035543	0,126548	0,188533	0,05549	– 0,3647
0,104476	0,036893	0,135277	0,199398	0,050458	– 0,27841
0,094815	0,038236	0,100535	0,241651	0,058058	– 0,34326
0,091151	0,043628	0,084299	0,255859	0,049504	– 0,19461
0,075253	0,041367	0,065025	0,285156	0,062818	– 0,23342
0,090119	0,037535	0,075728	0,241452	0,076002	– 0,28786
0,078873	0,040461	0,071966	0,277344	0,066604	– 0,23529
0,093408	0,040878	0,063294	0,267578	0,057883	-0,25593
0,108894	0,040845	0,10498	0,244515	0,050969	-0,25567
0,087762	0,039951	0,072191	0,263672	0,056159	-0,22945

У колонках табл. 2.2 містяться результати вимірювання 6 показників електрокардіограм, які зареєстровані в одного пацієнта за деякий проміжок часу. Необхідно визначити, який із показників (альтернатив) був найбільш стабільним за період вимірювання.

Тобто необхідно:

– запропонувати критерій, який дає змогу оцінювати та порівнювати між собою стабільність показників;

– обчислити значення критерію для кожного з показників (альтернатив);

– визначити «найкращу» альтернативу відповідно до запропонованого критерію;

– результати порівняння представити у вигляді стовпчикової діаграми: на осі абсцис вказати назву показника, на осі ординат – значення критерію для цього показника.

Треба обґрунтувати вибір критерію для розв'язування задачі та навести його обмеження.

Роботу виконати і представити в електронному вигляді в Excel, MatLab або в іншому програмному середовищі.

Завдання 2.2. Навчитись проводити порівняння альтернатив за декількома критеріями, визначати не конкурентоздатні альтернативи та графічно визначати множину Парето.

Необхідно подати приклади двох таблиць, які включають десять альтернатив, що порівнюють за трьома критеріями.

У першій таблиці викласти приклад, для якого всі критерії мають однаковий «напрям» (наприклад, альтернатива краща, коли критерій збільшується).

У другій таблиці викласти приклад, для якого один з критеріїв має протилежний «напрям» двом іншим (наприклад, альтернатива краща, коли два критерії збільшуються, а один зменшується). Приклади мають включати неконкурентоспроможні альтернативи.

Визначити за таблицями множини Парето та надати формальне означення цього поняття з поясненням на конкретних даних. Таблиці мають бути побудовані таким чином, щоб деякі з альтернатив були неконкурентоспроможні («аутсайдери»).

Подати два приклади графічного визначення множини Парето за двома критеріями (перший приклад – критерії мають однаковий «напрям», другий приклад – критерії мають протилежний «напрям»).

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте означення «критерії».
2. Наведіть приклади оцінки альтернатив за критеріями.
3. Опишіть суть задачі багатокритеріальної оптимізації.
4. Обґрунтуйте недоліки, які виникають у випадку об'єднання декількох критеріїв в один суперкритерій.
5. Охарактеризуйте різні типи шкал оцінок за критеріями.
6. Надайте означення множини Парето.
7. Наведіть варіанти побудови множини Парето.

РОЗДІЛ 3

БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

3.1. Загальні відомості

У реальних ситуаціях часто важко або неможливо дати характеристику окремої альтернативи $d \in D$ у вигляді числового критерія $q(d)$ або сукупності критеріїв $q_1(d),\ldots,q_p(d)$. Але, якщо розглядати альтернативу не окремо, а в парі з іншою, то знаходяться підстави сказати, яка з них краща (переважає за іншу). Не даремно народна мудрість говорить: «Все пізнається у порівнянні».

Можливість порівнювати альтернативи надає змогу їх впорядковувати на основі мови *бінарних відношень*.

У загальному випадку відношення – це взаємозв'язок елементів деяких множин. Бінарні відношення встановлюють такий зв'язок між парами (x, y) елементів $x \in X$ та $y \in Y$, який заданий на прямому добутку $X \times Y$ множин X та Y.

Нас буде цікавити частковий випадок бінарних відношень, який встановлює взаємозв'язок пар елементів, що належать одній і тій же множині, а саме взаємозв'язок пар альтернатив d_i, d_j з множини D.

Основні припущення мови бінарних відношень такі:

1. Окремі альтернативи $d \in D$ не оцінюють.

2. Для кожної пари альтернатив d_i, d_j множини D можна визначити яка з них має перевагу, наприклад, вказати, що $d_i \succ d_j$, або, визначити, що альтернативи рівноцінні $d_i = d_j$ (не можуть бути порівняними).

3. Відношення переваги пари альтернатив d_i, d_j не залежить від порівняної оцінки з будь-якою іншою альтернативою $d_z \in D$.

Математично бінарне відношення задає на множині альтернатив D деяку підмножину впорядкованих пар $(d_i, d_j) \in D \times D$, для яких виконується певне відношення (*relation*) R.

Якщо d_i, d_j перебувають у відношенні R, то це записують так: $d_i R d_j$, а якщо d_i, d_j не знаходяться у відношенні R, то записують – $d_i \overline{R} d_j$.

Визначити бінарне відношення R означає, що тим чи іншим способом вказані всі пари альтернатив, для котрих виконується R. Існує три способи визначення бінарних відношень (рис. 3.1).

Рис. 3.1. Способи визначення бінарних відношень

Перший спосіб передбачає перелік всіх пар d_i, d_j, для яких виконується певне відношення. Наприклад, для трьох альтернатив d_1, d_2 та d_3 можна вказати

$$d_1 \succ d_2,\ d_3 \succ d_2,\ d_1 \succ d_3. \tag{3.1}$$

Другий спосіб передбачає опис бінарних відношень за допомогою таблиці (матриці), елементи якої $r_{ij}(R)$ визначають так:

$$r_{ij}(R) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad d_i R d_j, \\ 0, & \text{якщо} \quad d_i \overline{R} d_j. \end{cases} \tag{3.2}$$

Таблиця 3.1 побудована для бінарних відношень (3.1) за (3.2). Вигляд цієї таблиці обумовлено тим, що

$$d_i R d_j \Rightarrow d_j \overline{R} d_i.$$

Третій спосіб передбачає опис бінарних відношень за допомогою графа, в вершинах якого фігурують позначення альтернатив з множини D. Якщо для вершин d_i, d_j виконується відношення $d_i R d_j$, то їх з'єднують дугою, спрямованою від d_i до d_j. В іншому випадку дуга відсутня або дужки йдуть у двох напрямках.

Таблиця 3.1. **Табличний запис бінарних відношень**

Альтернативи	d_1	d_2	d_3
d_1	–	1	1
d_2	0	–	0
d_3	0	1	–

Для бінарних відношень (3.1) відповідний граф зображено на рис. 3.2.

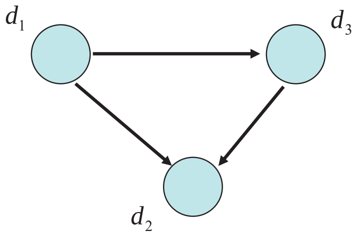


Рис. 3.2. Граф, що відображає бінарні відношення (3.1)

Для багатьох альтернатив граф може мати складний вигляд (рис. 3.3). У такому випадку кращими будуть ті альтернативи, з яких дуги тільки виходять. Тобто, на графі, зображеному на рис. 3.3, кращими є альтернативи 5 і 7.

Зображення переваг у вигляді графів дає змогу наочно оцінювати переваги альтернатив за сукупністю критеріїв. Продемонструємо це на таких прикладах.

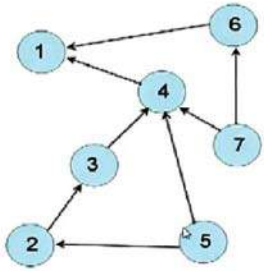


Рис. 3.3. Граф переваг, заданих для семи альтернатив

Приклад 3.1. Нехай три абітурієнти A, B, C склали вступні іспити за трьома дисциплінами (табл. 3.2). Треба порівняти абітурієнтів та знайти кращих у припущенні, що всі дисципліни мають однакову вагу.

Таблиця 3.2. **Оцінки вступних іспитів за п'ятибальною системою**

Абітурієнти	**Дисципліна**		
	Математика	**Фізика**	**Література**
A	5	3	4
B	5	4	3
C	4	5	3

Представимо результати іспитів у вигляді трьох орієнтованих графів (рис. 3.4), вершини яких позначають абітурієнта, а дуги – переваги за іспитами.

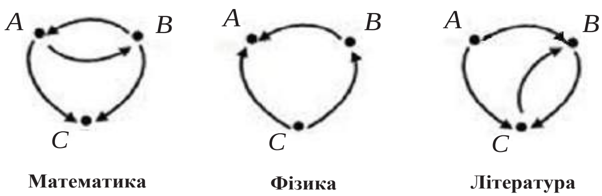


Рис. 3.4. Результати іспитів за трьома дисциплінами

Три графи, які зображені на рис. 3.4, поєднаємо в один узагальнений граф (рис. 3.5), у якому відповідні дуги спрямовані від вершини, яка має перевагу над іншою. Якщо ж такої переваги немає, то відповідна дуга відсутня.

Бачимо, що в даному випадку за результатами іспитів жоден з абітурієнтів немає переваг.

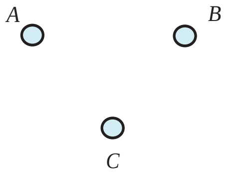


Рис. 3.5. Узагальнений граф за результатами іспитів

Нехай тепер абітурієнти отримали інші оцінки на іспиті з фізики (табл. 3.3).

***Таблиця 3.3.* Змінені оцінки вступних іспитів за п'ятибальною системою**

Абітурієнти	Дисципліна		
	Математика	**Фізика**	**Література**
A	5	5	4
B	5	3	3
C	4	4	3

Таким результатам іспитів відповідають три орієнтованих графи, які зображено на рис. 3.6.

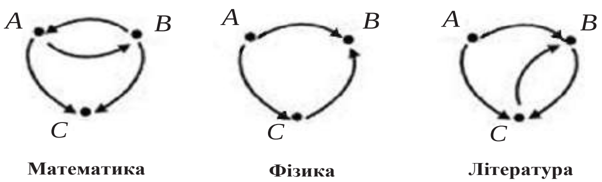


Рис. 3.6. Графи переваг за трьома дисциплінами

Поєднаємо графи, що зображені на рис. 3.6, в один узагальнений граф (рис. 3.7). Тепер абітурієнт *A* має безперечні переваги перед абітурієнтами B і C. Водночас «інтегральні» знання абітурієнтів B і C за результатами іспитів можна визнати рівними.

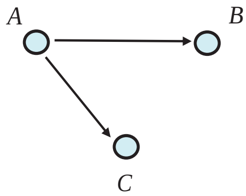


Рис. 3.7. Узагальнений граф переваг за результатами іспитів

3.2. Основні властивості бінарних відношень

Розглянемо основні властивості бінарного відношення R для елементів $d_i, d_j \in D$ на множині D.

Означення 3.1. Бінарне відношення R ***рефлексивне***, якщо

$$d_i R d_i,$$

тобто елемент сам з собою знаходиться у відношенні R.

Означення 3.2. Бінарне відношення R ***антирефлексивне***, якщо

$$d_i \overline{R} d_i,$$

тобто відношення R є вірним *тільки* для елементів, що не співпадають.

Означення 3.3. Бінарне відношення R ***симетричне***, якщо

$$d_i R d_j \Rightarrow d_j R d_i, \ \forall d_i, d_j \in D,$$

тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j випливає, що елемент d_j знаходиться у відношенні R з елементом d_i.

Означення 3.4. Бінарне відношення R ***асиметричне***, якщо

$$d_i R d_j \Rightarrow x_j \overline{R} x_i, \ \forall d_i, d_j \in D,$$

тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j випливає, що елемент d_j не знаходиться у відношенні R з елементом d_i.

Означення 3.5. Бінарне відношення R ***антисиметричне***, якщо

$$(d_i R d_j) \wedge (d_j R d_i) \Rightarrow d_i = d_j,$$

тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j, а елемент d_j знаходиться у відношенні R з елементом d_i випливає, що d_i та d_j.

Означення 3.6. Бінарне відношення R ***транзитивне,*** якщо

$$(d_i R d_j) \wedge (d_j R d_z) \Rightarrow d_i R d_z, \ \forall d_i, d_j, d_z \in D,$$

тобто з того, що елемент d_i знаходиться у відношенні R з елементом d_j, а елемент d_j знаходиться у відношенні R з елементом d_z випливає, що елемент d_i знаходиться у тому ж відношенні R з елементом d_z.

Об'єднання згаданих вище властивостей дає змогу визначити різні типи відношень альтернатив з множини D. Наприклад, R встановлює відношення еквівалентності $d_i \sim d_j$ альтернатив d_i та d_j, якщо R одночасно має три властивості: рефлексивність, симетричність та транзитивність.

3.3. Методи структурування альтернатив

Ґрунтуючись на бінарних властивостях, які визначені для пар альтернатив $d_i, d_j \in D$, можна провести ранжування всіх альтернатив на основі різних методів.

Один з підходів до структурування альтернатив базується на методі рядкових сум. Продемонструємо деталі такого методу на прикладі структурування чотирьох альтернатив d_1, d_2, d_3, d_4, для яких задані бінарні відношення

$$d_1 \succ d_2;\ d_1 \succ d_4;\ d_2 = d_3;\ d_2 \succ d_4;\ d_3 \succ d_1;\ d_4 \succ d_3. \tag{3.3}$$

Запишемо таблицю бінарних відношень для альтернатив d_1, d_2, d_3, d_4 згідно з (3.3) наступним чином:

- якщо альтернатива з ім'ям рядка краще альтернативи з ім'ям стовпця, то у відповідній клітинці ставимо 1;
- якщо альтернатива з ім'ям рядка гірша альтернативи з ім'ям стовпця, то у відповідній клітинці ставимо 0;
- якщо альтернатива з ім'ям рядка рівноцінна альтернативі з ім'ям стовпця, то у відповідній клітинці ставимо 0,5 (табл. 3.4).

***Таблиця 3.4.* Табличний запис бінарних відношень**

	d_1	d_2	d_3	d_4	$\sum$
d_1	–	1	0	1	**2**
d_2	0	–	0,5	1	**1,5**
d_3	1	0,5	–	0	**1,5**
d_4	0	0	1	–	**1**

Запишемо в останньому стовпчику суми значень у відповідних рядках, за якими визначимо ранги кожної з альтернатив (табл. 3.5). Найкраща альтернатива d_1 має ранг 1.

***Таблиця 3.5.* Альтернативи d_1, d_2, d_3, d_4 впорядковані за рангами**

Альтернативи	d_1	d_2, d_3	d_4
№ рангу	1	2	3

Ще одним зручним інструментом структурування альтернатив є побудова так званої *єдиної порядкової шкали*. Продемонструємо його на такому прикладі.

Нехай ставиться завдання впорядкувати студентів за результатами іспитів з двох навчальних дисциплін – математики та охорони праці. Також будемо вважати, що з точки зору їх наступної професії математика більш важлива.

Побудуємо таблицю рангів за отриманими оцінками (табл. 3.6).

Перші два рядки таблиці заповнюють автоматично. А ось, які оцінки поставити у третьому рядку залежить від особистих уподобань ОПР.

Якщо ОПР вважає, що для наступної професії, математика *набагато* важливіша, ніж охорона праці, то в третьому рядку мають стояти оцінка 5 з математики та оцінка 3 з охорони праці.

За умови іншого ставленням ОПР до цих дисциплін у третьому рядку можуть стояти оцінки 4 та 5 відповідно з математики та охорони праці.

Продовжуючи такі міркування, можна заповнити всі рядки таблиці.

Таблиця 3.6. **Ранжування студентів за оцінками з двох предметів**

Ранг	**Математика**	**Охорона праці**
1	5	5
2	5	4
3	5 або (4)	3 або (5)
4	4	4
…	…	…
N	1	1

Зрозуміло, що після заповнення таблиці подальше використання єдиної порядкової шкали дуже зручне: достатньо порівнювати лише ранги альтернатив. Водночас практика показує, що побудова таких таблиць можлива лише в тих випадках, коли число критеріїв не перевищує сімох.

3.4. Метод ELECTRE

Розглянемо ще один метод прийняття рішень, який активно застосовує мову бінарних відношень.

Назва **ELECTRE** походить від літер фрази «**EL**imination **E**t **C**hoix **T**raduisantla **Re**alite», що означає «Виняток і вибір, що відображають реальність».

Метод ґрунтується на визначенні відносної оцінки кожної альтернативи за багатьма критеріями у порівнянні з іншою альтернативою.

Перший варіант методу **ELECTRE** був розроблений наприкінці 60-х років минулого століття групою французьких вчених на чолі з професором Б. Руа. Нині розроблено ряд модифікацій цього евристичного, і водночас, ефективного методу, суть якого полягає у наступному.

Кожному з критеріїв $q_1,...,q_p$ ставиться у відповідність вага – ціле число ω_μ, $\mu = 1,..., p$, яке визначає його відносну важливість з точки зору ОПР або групи експертів. Окремо за кожним критерієм необхідно проводити порівняльну оцінку всіх пар альтернатив $d_i, d_j \in D$.

Далі для кожної пари альтернатив $d_i, d_j \in D$ множину всіх критеріїв $I = \{q_1,...,q_p\}$ розбивають на три підмножини I^+, I^-, $I^=$, що не перетинаються, а саме:

- I^+ – підмножина критеріїв, за якими $d_i \succ d_j$;
- I^- – підмножина критеріїв, за якими $d_i \prec d_j$;
- $I^=$ – підмножина критеріїв, за якими $d_i = d_j$.

На основі парного порівняння альтернатив будують так звані індекси згоди α_{ij} та незгоди β_{ij} з гіпотезою $d_i \succ d_j$.

Індекс згоди α_{ij} з гіпотезою $d_i \succ d_j$ визначають як відношення суми ваги критеріїв $q_1,...,q_p$ з підмножин I^+ та $I^=$ до загальної суми ваги, тобто

$$\alpha_{ij} = \frac{\sum\limits_{\mu \in I^+ \cup I^=} \omega_\mu}{\sum\limits_{\mu=1}^{p} \omega_\mu}, \qquad 0 < \alpha_{ij} < 1. \tag{3.4}$$

З виразу (3.4) безпосередньо випливає, що $\alpha_{ij} = 1$, якщо $I^- = \varnothing$, тобто немає жодного критерію, за яким $d_i \prec d_j$. Зрозуміло також, що значення індексу згоди зберігається, якщо замінити один критерій, за яким $d_i \succ d_j$ або $d_i = d_j$ кількома критеріями з тією ж самою сумарною вагою.

Індекс незгоди β_{ij} з гіпотезою $d_i \succ d_j$ визначають на основі самого «суперечливого» критерію, за яким найбільшою мірою $d_i \prec d_j$:

$$\beta_{ij} = \max_{\mu \in I^-} \left| \frac{z_\mu(d_j) - z_\mu(d_i)}{\Delta_\mu} \right|, \quad 0 < \beta_{ij} < 1, \tag{3.5}$$

де $z_\mu(d_j)$, $z_\mu(d_i)$ – числові оцінки альтернатив d_i та d_j за μ-м критерієм, а Δ_μ – *довжина* шкали (діапазон значень) μ-го критерію.

Довжина шкали забезпечує своєрідне нормування критеріїв, що дає змогу їх порівнювати. Наприклад, якщо значення 1000 грн критерію «вартість» грає таку ж роль, як значення 3 км критерію «відстань», то довжина шкали першого критерію має складати 1000 од., а другого – 3 од.

Альтернативу d_i визнають кращою у порівнянні з альтернативою d_j, якщо виконуються умови

$$\alpha_{ij} \geq \alpha^0 \quad \text{та} \quad \beta_{ij} \leq \beta^0,$$

де α^0 і β^0 – задані порогові рівні.

Таким чином, за методом **ELECTRE** рішення

$$d_i \succ d_j \tag{3.6}$$

приймають у тому випадку, коли індекс згоди вище заданого рівня, а індекс незгоди – нижче, тобто питома вага рішення (3.6) за сукупністю критеріїв, за якими вважають, що $d_i \succ d_j$, достатньо велика, а максимальна перевага $d_j \succ d_i$ за одним з критеріїв достатньо мала. В іншому випадку альтернативи вважають непорівнянними (еквівалентними).

Для реалізації методу **ELECTRE** розроблені спеціальні програми, які забезпечують послідовний пошук рішення в інтерактивному режимі.

Поступово знижуючи необхідний рівень коефіцієнта згоди α^0 і поступово підвищуючи необхідний рівень коефіцієнта незгоди β^0 ОПР може послідовно вилучати з початкової множини неконкурентні альтернативи і в результаті вибрати найбільш привабливі альтернативи.

Отримали розвиток різні модифікації методу – **ELECTRE I, ELECTRE II** та **ELECTRE III.** Відмінність методів полягає у формулах обчислення індексів згоди α_{ij} і незгоди β_{ij}.

Зокрема, на відміну від методу **ELECTRE I,** в якому індекс згоди обчислюють за формулою (3.4), у методі **ELECTRE II** цей індекс обчислюють за формулою

$$\alpha_{ij} = \frac{\sum\limits_{\mu \in I^+} \omega_\mu}{\sum\limits_{\mu \in I^-} \omega_\mu}, \ 0 < \alpha_{ij} < 1.$$

Розглянемо приклад застосування методу **ELECTRE I**.

Приклад 3.2. Нехай результати вступних іспитів абітурієнтів A, B, C за трьома дисциплінами такі ж самі, як подано в табл. 3.2. Будемо також вважати, що додатково задані вагові коефіцієнти, що характеризують важливість цих дисциплін (табл. 3.7). Необхідно визначити найкращого з абітурієнтів.

Таблиця 3.7. **Результати вступних іспитів трьох абітурієнтів**

Абітурієнти	**Вагові коефіцієнти дисциплін**		
	Математика $\omega_1 = 5$	**Фізика** $\omega_2 = 3$	**Література** $\omega_3 = 2$
A	5	3	4
B	5	4	3
C	4	5	3

Обчислимо матриці індексів згоди та незгоди. За формулою (3.4) індекс згоди α_{AB} пари A, B визначають як відношення суми вагових коефіцієнтів дисциплін, за якими абітурієнт A отримав оцінки не гірші, ніж абітурієнт B, до загальної суми вагових коефіцієнтів $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, тобто

$$\alpha_{AB} = \frac{\omega_1 + \omega_3}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} = \frac{5+2}{5+3+2} = 0{,}7.$$

Аналогічним чином, визначають інші індекси згоди, що описані в табл. 3.8.

***Таблиця 3.8.* Матриця індексів згоди**

Абітурієнти	A	B	C
A	–	0,7	0,7
B	0,8	–	
C	0.3	0,5	–

За формулою (3.5) індекс незгоди β_{ij} для пари абітурієнтів $i \in \{A, B, C\}$ і $j \in \{A, B, C\}$, $i \neq j$ визначають за μ-ю дисципліною

$$\mu = \{\text{математика}, \text{фізика}, \text{література}\},$$

яка є найбільш суперечливою для визнання, що $i \succ j$, тобто за тою дисципліною, на екзамені з якої абітурієнт $j \in \{A, B, C\}$ максимально краще здав іспит у порівнянні з абітурієнтом $i \in \{A, B, C\}$. У цьому випадку різницю отриманих балів нормують за діапазоном Δ_μ можливих оцінок за μ-ю дисципліною.

Оскільки на всіх іспитах абітурієнти отримали лише оцінки 3, 4 або 5 балів, то в нашому випадку $\Delta_\mu = 2$ для всіх μ (для всіх дисциплін).

Ґрунтуючись на цих принципах визначимо за результатами іспитів (табл. 3.7), індекси незгоди для різних пар абітурієнтів.

Наприклад, індекс незгоди β_{AB}, який суперечить тому, що $A \succ B$, визначають за оцінками іспитів з фізики і він дорівнює

$$\beta_{AB} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

індекс незгоди β_{AC}, який суперечить тому, що $A \succ C$, теж визначають за оцінками іспитів з фізики, але він вже дорівнює

$$\beta_{AC} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

а індекс незгоди β_{BA}, який суперечить тому, що $B \succ A$, визначають за оцінками іспитів з літератури і він дорівнює

$$\beta_{BA} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Аналогічним чином визначають інші індекси незгоди, які подані в табл. 3.9.

Таблиця 3.9. **Матриця індексів незгоди**

Абітурієнти	A	B	C
A	–	0,5	1
B	0,5	–	0,5
C	0,5	0,5	–

Припустимо, що для індексів згоди та незгоди обрано порогові значення $\alpha^0 = 0{,}8$ і $\beta^0 = 0{,}5$. З цього випливає, що виконуються умови

$$\alpha_{BA} \geq \alpha^0 \quad \text{і} \quad \beta_{BA} \leq \beta^0. \qquad (3.7)$$

Згідно з методом **ELECTRE I** умови (3.7) свідчать про те, що $B \succ A$. Зазначимо, що інші пари абітурієнтів вважаються еквівалентними (рис. 3.8).

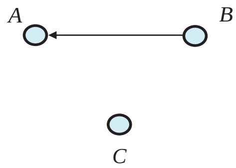


Рис. 3.8. Узагальнений граф за результатами іспитів

Завдання для комп'ютерного практикуму

Під час виконання комп'ютерного практикуму студент здобуває навички побудови графа бінарних відношень та навчається як порівнювати альтернативи, які мають числові та якісні ознаки (атрибути).

Необхідно подати приклад задачі прийняття рішень, в основу якої покладено ранжування альтернатив (не менш 5 альтернатив).

У першій таблиці необхідно представити: в рядках – опис конкретних альтернатив, у стовпчиках – ознаки (атрибути) відповідної альтернативи у вигляді числових або нечислових характеристик.

Альтернативами можуть бути товари, квартири тощо, а атрибутами – їх характеристики, деякі з яких неможливо безпосередньо використовувати для об'єктивного порівняння альтернатив. Такі характеристики визначають лише особисті уподобання конкретної особи (наприклад, довжина підбору або колір жіночого взуття).

У другій таблиці необхідно викласти опис своїх суб'єктивних уподобань для кожного з атрибутів першої таблиці (див. приклад табл. 3.10).

Таблиця 3.10. **Приклад опису суб'єктивних уподобань для жіночого взуття**

Атрибут	**Уподобання ОПР**
Колір	Зелений $\succ$ Червоний $\succ$ Синій = Жовтий $\succ$ Рожевий
Довжина підбору, см	(5.. 10) $\succ$(< 5) $\succ$(>10)
…	…

За одним з атрибутів другої таблиці побудувати граф бінарних відношень для будь яких двох альтернатив, використовуючи позначення рис. 3.9.

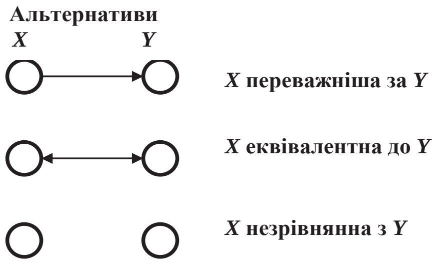


Рис. 3.9. Позначення бінарних відношень між альтернативами X і Y

На основі візуального аналізу побудованого графу, визначити чи не порушена властивість транзитивності бінарних відношень.

Пояснити означення транзитивності та навести приклад графу з трьох альтернатив, де транзитивність переваг порушена.

За побудованим графом створити таблицю бінарних відношень, в клітинках якої поставити:

- 1, якщо альтернатива рядка краща за альтернативу в стовпчику;
- 0, якщо альтернатива рядка гірша за альтернативу в стовпчику;
- 0,5, якщо альтернативи еквівалентні або незрівнянні.

За методом рядкових сум побудувати таблицю «рангів альтернатив» та зробити остаточний висновок.

Питання для самоконтролю

1. Надайте означення терміну «бінарні відношення».
2. Наведіть основні припущення мови бінарних відношень.
3. Наведіть способи визначення бінарних відношень.
4. Надайте означення основних властивостей бінарних відношень.
5. Опишіть суть узагальненого графа переваг за критеріями.
6. Охарактеризуйте суть методів структурування альтернатив.
7. Опишіть порядок ранжування альтернатив за методом рядкових сум.
8. Наведіть приклад побудови єдиної порядкової шкали.
9. Надайте означення індексів згоди та незгоди методу **ELECTRE**.
10. Опишіть методику практичного застосування методу **ELECTRE**.

РОЗДІЛ 4

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИЙ ВИБІР

4.1. Специфіка багатокритеріальної оптимізації

У попередніх розділах було розглянуто деякі методи, спрямовані на розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації: перехід від початкової множини $D\{d\}$ альтернатив d до підмножини Парето Pa, яка включає лише ефективні альтернативи, метод скаляризації сукупності критеріїв (перехід до суперкритерію $q_0(d) = q_0[q_1(d),...,q_p(d)]$), а також деякі евристичні методи ранжування альтернатив, зокрема, метод **ELECTRE**.

Навіть такий, далеко не повний перелік відомих підходів дає змогу визначити загальні особливості задачі багатокритеріальної оптимізації.

1. Жоден з критеріїв $q_1(d),...,q_p(d)$ не може бути обраний в якості єдиного.
2. Одні критерії необхідно максимізувати, а інші – мінімізувати.
3. Рішення може виявитися неоптимальним за жодним з критеріїв, але разом з тим, воно має бути найкращим компромісним рішенням з урахуванням всіх критеріїв одночасно.
4. Виникає необхідність вибору принципу оптимальності: неоднозначність використання різних принципів оптимальності може призводити до вибору різних альтернатив.
5. Виникає неоднозначність впорядкованості критеріїв за важливістю, оскільки ранжування критеріїв залежить від суб'єктивних оцінок ОПР або експертів.
6. Виникає необхідність нормування критеріїв, які вимірюються у різних одиницях і діапазонах.
7. Виникає питання переходу від якісних критеріїв до кількісних.
8. Рішення, оптимальне за одним критерієм, найчастіше не оптимальне за іншими.

Крилата фраза: «Досягти максимальний ефект за умови мінімальних витрат» позбавлена наукового сенсу і може сприйматися швидше за все як гасло!

У деяких випадках задача скаляризації, тобто перехід від окремих критеріїв $q_1(d),...,q_p(d)$ до суперкритерію $q_0(d) = q_0[q_1(d),...,q_p(d)]$, не викликає особливих проблем і може бути здійснена природним чином за допомогою адитивної згортки

$$q_0(d) = \alpha_1 q_1(d) + ... + \alpha_p q_p(d). \tag{4.1}$$

Наприклад, припустимо, що підприємство виготовляє p різних продуктів, інтенсивність виготовлення яких залежить від управлінського рішення $d \in D$. Нехай $q_j(d)$ – кількість вироблених одиниць j-го продукту ($j = 1,..., p$) для фіксованого d, а α_j – продажна ціна цього продукту.

Тоді суперкритерій, обчислений за формулою (4.1), характеризує сумарний прибуток $q_0(d)$ підприємства. Це дає змогу вибрати оптимальне управлінське рішення d^*, максимізуючи $q_0(d)$:

$$d^* = \arg\max_{d \in D} q_0(d).$$

Разом з тим у розділі 2 на жартівливому, але дуже переконливому прикладі з телевізором, було продемонстровано, що адитивна лінійна згортка двох критеріїв (якість зображення та звуку) призводить до парадоксального результату прийняття рішення щодо якості телевізору.

Можна представити інші приклади правдоподібних, але невірних підходів до формування суперкритеріїв. Зокрема, доволі часто при розв'язуванні практичних задач два окремих критерії q_i та q_j замінюють одним суперкритерієм

$$q_0 = \frac{q_i}{q_j}, \tag{4.2}$$

ґрунтуючись на тому, що за умовами задачі q_i бажано максимізувати, а q_j – мінімізувати.

Тоді, здавалося б, визначення оптимального рішення можна істотно спростити: достатньо максимізувати суперкритерій (4.2).

Водночас, суперкритерій у вигляді відношення (4.2), також як і адитивна згортка (4.1), передбачає, що погіршення за одним критерієм можна компенсувати поліпшенням за другим, що не завжди вірно.

Тут доречно згадати критерій письменника Л.М. Толстого, згідно з яким «Людина – це дріб, у чисельнику якого стоять його дійсні гідності, а у знаменнику – його думка про себе». Однак, навряд чи можна високо оцінити людину, яка не має надмірної самовпевненості, але й не має жодної гідності.

Недоліки згортання декількох критеріїв в один суперкритерій змушують шукати інші підходи до вирішення задач багатокритеріального вибору. Один з таких альтернативних напрямів – методи послідовної оптимізації, до яких відносять методи головного критерію, послідовних поступок та інші методи.

4.2. Метод головного критерію

Суть методу головного критерію полягає у наступному:

1. Один з критеріїв $q_1(d),...,q_p(d)$ визначають як головний, наприклад, критерій $q_1(d)$ – зарплата для обраної роботи.

2. Для інших критеріїв $q_j(d)$, $j = 2,..., p$, наприклад, терміну відпустки, відстані до офісу тощо, вводять обмеження.

3. Далі розв'язують однокритеріальну задачу

$$q_1(d) \to \max \tag{4.3}$$

з обмеженнями

$$q_2(d) \le q_2^0,\ q_3(d) \le q_3^0,\ \dots,\ q_p(d) \le q_p^0. \tag{4.4}$$

Таким чином, задача багатокритеріальної оптимізації зводиться до відомої математичної задачі знаходження умовного екстремуму однієї змінної – головного критерію

$$d^* = \arg\max_{d \in D}\{q_1(d) \mid q_j(d) \le q_j^0\},\ j = 2,..., p\}.$$

Основна проблема, яка виникає при реалізації методу головного критерію – вибір прийнятних значень q_j^0, $j = 2,..., p$, які відокремлюють область D^0 обмежень (4.4) на множині D.

Зрозуміло, що при визначенні $q_j^0,\ j=2,...,p$ слід уникати двох крайніх випадків:

- $D/D^0=\varnothing$, коли обмеження (4.4) існують для всіх точок $d\in D$ (у цьому випадку не зрозуміло для чого потрібні додаткові критерії, крім головного);
- $D\cap D^0=\varnothing$, тобто серед точок, для яких існують обмеження (4.4), нема жодної допустимої альтернативи.

Продемонструємо основну ідею методу умовної оптимізації для такого прикладу.

Приклад 4.1. Треба вибрати місце роботи з дев'яти варіантів, представлених у табл. 4.1, ґрунтуючись на критеріях q_1 – зарплата, q_2 – термін відпустки, q_3 – термін поїздки до офісу[1]. Зрозуміло, що критерії q_1 та q_2 бажано максимізувати, а критерій q_3 – мінімізувати.

Таблиця 4.1. **Варіанти альтернатив місця роботи**

Варіанти	**Критерії**		
	Зарплата (грн)	**Відпустка (днів)**	**Термін поїздки (хв)**
1	9000	20	60
2	5000	30	20
3	**7000**	**36**	**40**
4	8000	40	50
5	4000	60	15
6	**6000**	**30**	**10**
7	9000	35	60
8	6000	24	10
9	6500	35	40

Нехай з точки зору ОПР головним критерієм обрано критерій q_1 – зарплата. Задаймо обмеження для інших двох критеріїв:

- термін відпустки – не менше ніж 30 днів;
- термін поїздки – не більше ніж 40 хв.

Відповідно з даними табл. 4.1 таким обмеженням задовольняють лише варіанти {**2, 3, 5, 6, 9**}.

[1] Зауважимо, що дані, подані в табл. 4.1, співпадають з даними табл. 2.1, за якими в розділі 2 демонструвався процес визначення оптимальної підмножини Парето

Тому інші варіанти можуть бути вилучені (табл. 4.2).

Як видно з табл. 4.2 найкращим виявився варіант 3 – місце роботи з максимальною зарплатою $q_1 = 7000$ грн, відпусткою $q_2 = 36$ днів і терміном поїздки до роботи $q_3 = 40$ хв.

Таблиця 4.2. **Варіанти альтернатив, що задовольняють обмеженням**

Варіанти	Критерії		
	Зарплата (грн)	**Відпустка (днів)**	**Термін поїздки (хв)**
2	5000	30	20
3	**7000**	**36**	**40**
5	4000	60	15
6	6000	30	10
9	6500	35	40

4.3. Метод послідовних поступок

На відміну від попереднього метод послідовних поступок передбачає, що всі критерії $q_1(d),...,q_p(d)$ є важливими та їх можна впорядкувати за важливістю для ОПР.

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що на множині D можливих альтернатив d критерії $q_1(d),...,q_p(d)$ впорядковано таким чином

$$q_1(d) \succ q_2(d) \succ ... \succ q_p(d).$$

Спочатку знайдемо найкраще рішення за першим критерієм, тобто знайдемо розв'язок однокритеріальної оптимізаційної задачі

$$q_1^* = \arg\max_{d \in D} q_1(d).$$

Особливість оптимізації за методом послідовних поступок полягає у тому, що відхилення від оптимального рішення за більш важливими критеріями, вимагає поліпшення значень менш важливих таким чином, щоб сумарний виграш за менш важливими критеріями істотно перевищував втрату ефективності за більш важливими.

Формально це означає, що після визначення d_1^* призначаємо допустиму поступку Δ_{q_1} для критерію $q_1(d)$ і розв'язуємо однокритеріальну оптимізаційну задачу з обмеженням

$$q_2^* = \underset{\substack{d \in D \\ q_1(d) \geq q_1^* - \Delta_{q_1}}}{\arg\max}\ q_2(d). \tag{4.5}$$

На наступному кроці призначаємо допустиму поступку Δ_{q_2} для критерію $q_2(d)$ і знов розв'язують однокритеріальну оптимізаційну задачу з додатковим обмеженням, тобто

$$q_3^* = \underset{\substack{d \in D \\ q_1(d) \geq q_1^* - \Delta_{q_1} \\ q_2(d) \geq q_2^* - \Delta_{q_2}}}{\arg\max}\ q_3(d).$$

Такий процес продовжують доки не буде розв'язана однокритеріальна оптимізаційна задача для останнього критерію $q_p(d)$.

Розглянемо два приклади.

Приклад 4.2. За методом послідовних поступок визначимо оптимальний варіант місця роботи згідно з критеріями: q_1 – зарплата, q_2 – термін відпустки, q_3 – термін поїздки до офісу. Вихідні дані будемо брати з табл. 4.1.

Будемо вважати, що за важливістю для ОПР критерії впорядковано таким чином

$$q_1(d) \succ q_2(d) \succ q_3(d),$$

причому критерії q_1 та q_2 бажано максимізувати, а критерій q_3 – мінімізувати.

Для початку знайдемо максимум за першим критерієм q_1 (зарплата), не звертаючи увагу на значення інших двох критеріїв. У результаті визначаємо, що q_1^* = 9000 грн (варіанти 1 та 7).

Призначимо допустиму поступку Δ_{q_1} для критерію $q_1(d)$ у розмірі 1000 грн. Тоді, згідно з (4.5) треба визначити варіант місця роботи, який має максимальний термін відпустки і зарплату не нижче, ніж 8000 грн:

$$q_2^* = \underset{q_1(d) \geq 8000\,\text{грн}}{\arg\max}\ q_2(d).$$

Згідно з табл. 4.1 таким умовам відповідає варіант 4, тобто місце роботи з зарплатою 8000 грн і терміном відпустки 40 днів.

Призначимо тепер допустиму поступку Δ_{q_2} для критерію $q_2(d)$ у розмірі –5 днів, тобто будемо шукати варіант роботи з такими обмеженнями:

- зарплата не нижче за 8000 грн;
- термін відпустки не менше ніж 35 днів.

Легко побачити, що таким обмеженням задовольняють варіант 4 з терміном поїздки до офісу q_3= 50 хв. та варіант 7 з терміном поїздки до офісу q_3= 60 хв. З цих двох варіантів остаточно обираємо варіант 4, тому що він забезпечує менший термін поїздки до офісу.

Приклад 4.3. Необхідно знайти оптимальні значення неперервних змінних x_1, x_2, x_3 за трьома критеріями $q_1 \succ q_2 \succ q_3$, які визначають наступним чином:

$$q_1 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max,$$

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min, \tag{4.6}$$

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max, \tag{4.7}$$

тобто критерії q_1 та q_3 бажано максимізувати, а критерій q_2 – мінімізувати.

Задана система обмежень:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1, \tag{4.8}$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 21,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3. \tag{4.9}$$

Призначимо для всіх критеріїв максимальну поступку в розмірі 10 %.

Подальші обчислення проводились за допомогою функції «*Пошук рішень*» програми MS EXCEL.

Крок 1. Максимізуємо перший критерій

$$q_1 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max \tag{4.10}$$

за обмежень:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 21,$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,3.$$

Оптимальні значення змінних такі

$$x_1 = 8;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0,$$

з якими перший критерій досягає максимального значення

$$q_1^{\max} = 16.$$

Крок 2. Враховуючи максимально допустиму поступку для першого критерію в 10 % максимальне значення (4.11) може бути зменшено від 16 до 14,4.

Тому вводимо додаткове обмеження

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 14{,}4. \qquad (4.11).$$

Приймаючи до уваги (4.6), (4.8), (4.9) мінімізуємо тепер другий критерій з додатковим обмеженням (4.11), тобто розв'язуємо оптимізаційну задачу

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min \tag{4.12}$$

за обмежень

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 21,$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 14{,}4,$$

$$x_i \ge 0,\ i = 1{,}2{,}3.$$

Нові оптимальні значення змінних, що визначені на другому кроці оптимізації за умовою (4.12), такі:

$$x_1 = 7{,}8;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0{,}4. \qquad (4.13)$$

Обчислюємо зміну значення другого критерію q_2:

- при $x_1 = 8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ маємо

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8,$$

- при $x_1 = 7{,}8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}4$ маємо

$$q_2^{\min} = x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7{,}8 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0{,}4 = 7. \qquad (4.14)$$

Тобто на другому кроці значення другого критерію поліпшилось на 12,5 % (зменшилось з 8 до 7), тоді як поступка для першого критерію дорівнювала 10 %.

Крок 3. Враховуючи те, що другий критерій мінімізують, введемо максимально допустиму поступку в 10 % та збільшимо його значення з $q_2^{\min} = 7$ до 7,7. Це дає нам змогу ввести ще одне додаткове обмеження

$$q_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 7{,}7. \qquad (4.15)$$

Приймаючи до уваги (4.7), (4.8), (4.9) та (4.15) переходимо до максимізації третього критерію, тобто розв'язуємо оптимізаційну задачу

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max. \qquad (4.16)$$

за обмежень

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 1,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 16,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 21,$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 14{,}4,$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 7{,}7,$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1{,}2{,}3.$$

За результатами обчислень маємо такі оптимальні значення змінних:

$$x_1 = 7{,}66, \quad x_2 = 0{,}28, \quad x_3 = 0{,}4. \tag{4.17}$$

Визначимо зміни значень третього критерію q_3:

- на другому кроці (коли $x_1 = 7{,}8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}4$) маємо

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7{,}8 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0{,}4 = -6{,}2,$$

- на третьому кроці зі значеннями змінних згідно з (4.17) маємо

$$q_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -7{,}66 + 2 \cdot 0{,}28 + 4 \cdot 0{,}4 = -5{,}5.$$

Тобто на третьому кроці в результаті оптимізації значення третього критерію поліпшилось на 11,29 % (збільшилось з –6,2 до –5,5), тоді як поступка на другий критерій дорівнювала 10 %.

Як це видно з підсумкової табл. 4.3, за рахунок послідовної оптимізації, сумарний виграш склав 13,29 %.

Таблиця 4.3. **Підсумкові результати оптимізації**

<table>
<tr><th>Крок</th><th>$q_1 \to \max$</th><th>Δ, %</th><th>$q_2 \to \min$</th><th>Δ,%</th><th>$q_3 \to \max$</th><th>Δ,%</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$q_1 = 16{,}0$</td><td>–</td><td>$q_2 = 8{,}0$</td><td>–</td><td>$q_3 = 8{,}0$</td><td>–</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$q_1 = 14{,}4$</td><td>–10%</td><td>$q_2 = 7{,}0$</td><td>–12,5%</td><td>$q_3 = -6{,}2$</td><td>–</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$q_1 = 14{,}4$</td><td>–</td><td>$q_2 = 7{,}7$</td><td>+10 %</td><td>$q_3 = -5{,}5$</td><td>+11,29%</td></tr>
<tr><td colspan="3">Втрата 10 %
для q_1</td><td colspan="2">Виграш 2,5%
для q_2 (12,5–10)%</td><td colspan="2">Виграш 13,79 %
для q_2 і q_3
(2,5+11,29)%</td></tr>
</table>

Зрозуміло, що результат оптимізації за методом послідовних поступок залежить від суб'єктивно призначених значень поступок.

Крім цього, слід зауважити, що отриманий результат не обов'язково належить підмножині ефективних рішень за Парето.

Завдання для комп'ютерного практикуму

У середовищі EXCEL за допомогою функції «Пошук рішень» знайти оптимальний розв'язок задачі

$$z_1 = 34x_1 + 24x_2 \to \max ,$$
$$z_2 = -8x_1 - 7x_2 + 328 \to \min ,$$

за обмежень:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 144, \\ 2x_1 + \;\; x_2 \le 64, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 120. \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0 .$$

Задачу розв'язати методом послідовних поступок, враховуючи, що $z_1 \succ z_2$. Величину поступки призначити 1,5 %.

Необхідно сформулювати завдання, коротко описати етапи його розв'язання, викласти результати, що отримані на кожному етапі, та відповідно до таблиці розрахунків надати графічну інтерпретацію розв'язку першого етапу задачі.

Навести кінцевий результат: оптимальні значення величин x_1, x_2 та цільових функцій z_1, z_2, які отримані на двох етапах.

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте загальні особливості задачі багатокритеріальної оптимізації.
2. Наведіть недоліки згортання декількох критеріїв в один суперкритерій.
3. Охарактеризуйте метод головного критерію: недоліки та переваги.
4. Обґрунтуйте основу методу умовної оптимізації.
5. Опишіть особливості методу послідовних поступок.

РОЗДІЛ 5

МЕТОД СААТІ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

5.1. Загальна характеристика методу

На початку 1970 року американський математик Томас Сааті розробив процедуру підтримки прийняття рішень, яку назвав «Analityc hierarchy process». Автори російського видання перевели цю назву як «Метод аналізу ієрархій» (див. книгу: Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М . : Радио и связь, 1993. – 278 с.).

Метод Сааті займає особливе місце завдяки виключно широкому розповсюдженню та сьогоденному активному застосуванню для розв'язання багатьох практичних задач. Тому він заслуговує докладного опису в окремому розділі.

Метод надає змогу:

- виокремити структурні елементи задачі прийняття рішень і формалізувати зв'язки між ними;
- визначити системи переваг ОПР і критеріїв, за якими оцінюють альтернативи;
- синтезувати правило прийняття рішень, яке ґрунтується на перевагах одних альтернатив у порівнянні з іншими.

Основа методу – структуризація задачі прийняття рішень на основі *багаторівневої ієрархії*.

Ієрархія є деякою абстракцією структури системи, яка полегшує вивчення функціональних взаємодій її компонент і їх впливів на систему в цілому. Така абстракція може приймати різні форми, але в кожній з них проводиться рух з вершини, наприклад, від спільної мети до підцілей, далі до сил, які впливають на підцілі, до людей, які впливають на ці сили, до цілей окремих людей, до їх стратегій і, нарешті, до наслідків, що є результатами таких стратегій.

Основні переваги методу:

- наочність моделей;
- простота інтерпретації результатів;

- відносна простота розрахунків;
- відповідність принципам системного аналізу;
- можливість оцінювання альтернатив не тільки за кількісними, але і за якісними критеріями, що суб'єктивно визначаються експертами;
- стійкість до порушення узгодженості суб'єктивних оцінок.

Метод ґрунтується на таких аксіомах:

1. Аксіома *пов'язаності*. Якщо $m(a,b)$ – пріоритет, що визначає у скільки разів деякий елемент ієрархії a має переваги порівняно з іншим елементом b, то виконується умова

$$m(a,b) = 1/m(b,a).$$

Наприклад, якщо a в 2 рази має перевагу над елементом b, то з цього випливає, що b в 0,5 разів має перевагу над a.

2. Аксіома *гомогенності*. На кожному рівні ієрархії діапазон оцінок елементів, що порівнюють, не повинен сильно відрізнятися і має бути однаковим для всіх парних оцінок, наприклад від 1/9 до 9.

3. Аксіома *синтезу*. Оцінки елементів більш високого рівня ієрархії не залежать від оцінок на низьких рівнях.

Метод Сааті узагальнює традиційне поняття транзитивності для будь-якої трійки альтернатив.

Нагадаємо традиційне поняття транзитивності:

$$\text{якщо } a \succ b \text{ і } b \succ c \text{, то } a \succ c.$$

Узагальнене поняття транзитивності формулюють так:

$$\text{якщо } a \succ b \text{ в } m_1 \text{ разів, а } b \succ c \text{ в } m_2 \text{ разів,}$$
$$\text{то } a \succ c \text{ в } m_1 m_2 \text{ разів.}$$

Для порівняння елементів на двох сусідніх рівнях ієрархії використовують різні види відносин верхнього та нижнього рівнів, наприклад:

- цілі – підцілі;
- цілі – критерії;
- цілі – засоби їх досягнення;
- цілі – фактори, які можуть вплинути на їх досягнення;

- узагальнений критерій – окремі критерії;
- критерій – альтернативи.

Головний принцип методу аналізу ієрархій – узагальнення задачі на верхньому рівні та її деталізація на нижніх рівнях ієрархії. Тобто верхній рівень визначає головні цілі, а нижні рівні – способи формування та методи розбиття елементів попереднього рівня (рис. 5.1).

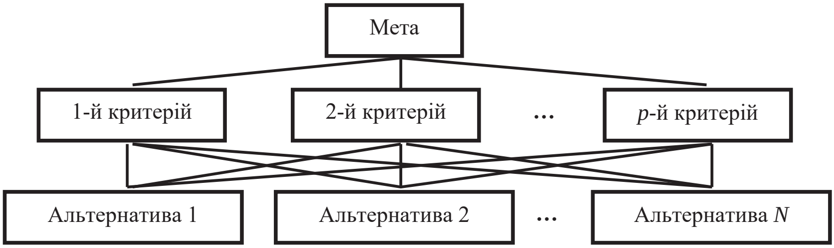


Рис. 5.1. Приклад трирівневої моделі абстрактної задачі

Продемонструємо принцип створення ієрархічної моделі на прикладі конкретної задачі – прийняття рішення про стратегію розвитку фармацевтичної промисловості.

Будемо вважати, що можливі альтернативи такі:

1. Відмова від розвитку вітчизняної промисловості, тобто імпортна закупка всіх ліків.
2. Створення підприємств з випуску обмеженої групи ліків.
3. Створення виробництв основної номенклатури ліків.

Далі визначаємо основних учасників процесу, якими є:

- держава;
- виробники ліків;
- споживачі.

Треба також прийняти до уваги різні інтереси цих сторін. Так мета держави – нові робочі місця, оподаткування, низькі ціни ліків для вирішення соціальних проблем. Основний інтерес виробників – отримання максимальних прибутків, а споживачів – отримання якісних ліків в розумні терміни за прийнятними цінами.

Навіть такий попередній аналіз дає змогу побудувати ієрархію задачі, визначити її структуру та взаємозв’язки між окремими елементами різних рівнів, що в подальшому полегшує розв'язання задачі (рис. 5.2).

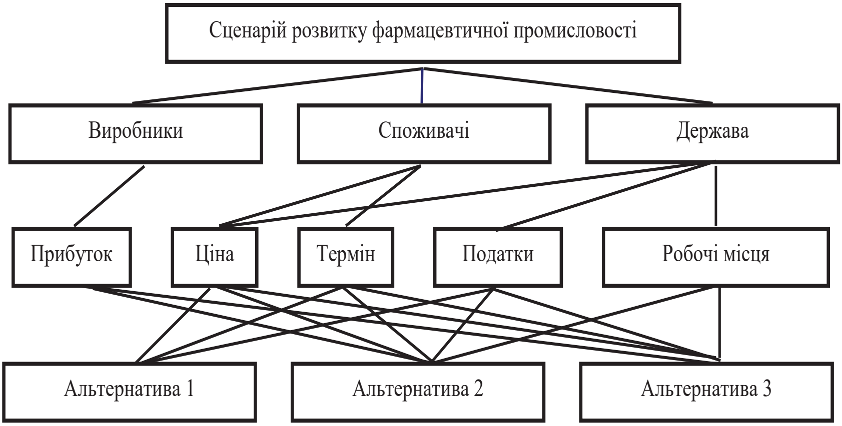


Рис. 5.2. Приклад спрощеної ієрархії конкретної задачі

Число рівнів в ієрархічній моделі може бути довільним. Наприклад, якщо створюють модель для вибору автомобіля, то рівень критеріїв має включати критерій «надійність». Цей критерій можна далі деталізувати наступним рівнем, який включає вже критерії «надійність двигуна», «надійність ходової частини» тощо. У свою чергу надійність ходової частини можна деталізувати критеріями наступного рівня, такими як «надійність гальмівної системи», надійність підвіски тощо.

Подальший крок – створення матриць парних порівнянь елементів кожного рівня ієрархії, тобто визначення пріоритетів m_{ij}, які характеризують відносну важливість i-го елемента проти j-го (з точки зору більш високого рівня ієрархії), зокрема, критеріїв відносно мети, альтернатив відносно окремого критерія тощо.

У табл. 5.1 подано приклад матриці парних порівнянь для трьох абстрактних елементів ієрархії.

Для перевірки узгодженості таблиць парних порівнянь, у яких можуть фігурувати суб'єктивні оцінки пріоритетів елементів, у методі Сааті використовуються елементи матричного аналізу (лінійної алгебри), зокрема, поняття власний вектор і власне число квадратної матриці.

***Таблиця 5.1*. Приклад матриці парних порівнянь**

	Елемент 1	**Елемент 2**	**Елемент 3**
Елемент 1	1	m_{12}	m_{13}
Елемент 2	$m_{21} = 1/m_{12}$	1	m_{23}
Елемент 3	$m_{31} = 1/m_{13}$	$m_{32} = 1/m_{23}$	1

5.2. Математичні основи методу Сааті

Перш за все не зайве нагадати основні означення лінійної алгебри, якими будемо користуватися далі.

Маємо квадратну $n \times n$ матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

і n–вимірний вектор

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Множення зліва матриці A на вектор $\vec{x}$ називають *лінійним перетворенням*, у результаті якого отримаємо інший вектор $\vec{y}$, тобто

$$A\vec{x} = \vec{y}.$$

У загальному випадку довжини та напрями векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ можуть не співпадати.

Нехай, наприклад

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

і

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Тоді, за правилом множення матриць, маємо (рис. 5.3)

$$\vec{y} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{13}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} \\ 5 \cdot \frac{13}{3} - 4 \cdot \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

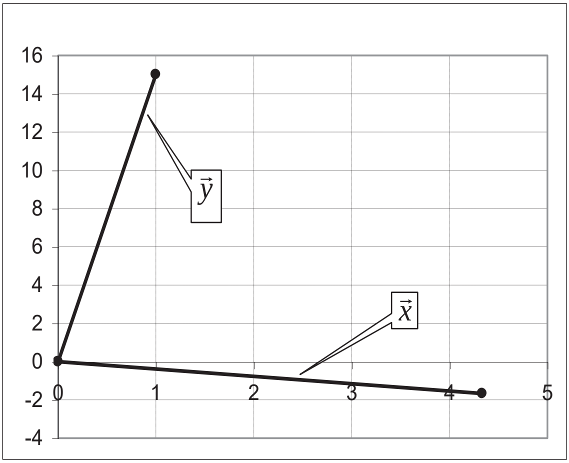


Рис. 5.3. Результат множення матриць (5.1)

Власний вектор матриці A – це такий вектор $\vec{x} = \vec{x}^*$, для якого виконується співвідношення

$$A\vec{x}^* = \lambda\vec{x}^*, \tag{5.2}$$

де λ – власне число.

Співвідношення (5.2) означає, що у випадку множення матриці на власний вектор, він тільки змінює довжину, але не змінює напрям.

Покажемо, що для матриці (5.1) власним є вектор

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad (5.3)$$

а власне число дорівнює $\lambda = 6$.

Для цього визначимо результат добутку (рис. 5.4) матриці (5.1) на вектор (5.3)

$$A\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 5 \\ 5\cdot 2 + 4\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 30 \end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda\vec{x}^*.$$

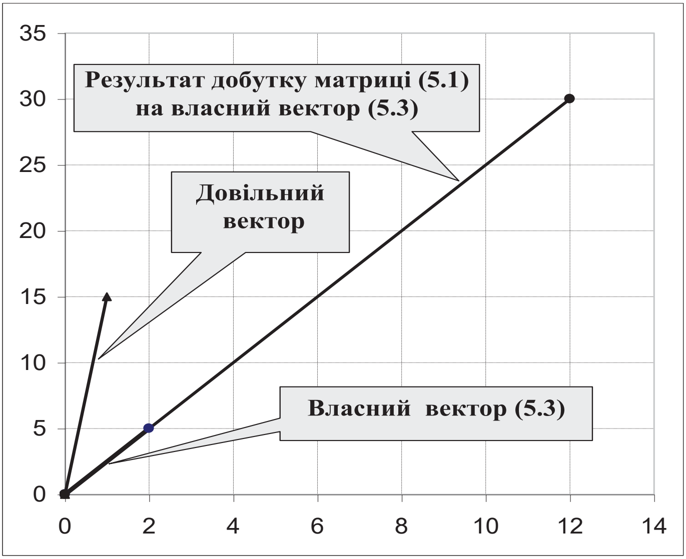


Рис. 5.4. Результат множення матриці на власний вектор

Повернемось до визначення елементів m_{ij} табл. 5.1 парних порівнянь.

Зрозуміло, якщо існують об’єктивні кількісні оцінки ω_i, ω_j якості альтернатив $d_i \in D$ і $d_j \in D$, то визначення ступеня переваги m_{ij} не потребує особливих зусиль:

$$m_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}.$$

Проте на практиці такі об'єктивні оцінки часто відсутні. Можна лише припустити, що ОПР надає якісне попарне порівняння альтернатив d_i і d_j, та для визначення m_{ij} використовує шкалу відносної важливості (табл. 5.2).

***Таблиця 5.2.* Шкала відносної важливості альтернатив**

Якісна характеристика ступеню переваги d_i у порівнянні з d_j	**Числове значення m_{ij}**
Однакова значимість	1
Слабка значимість	3
Істотна значимість	5
Очевидна значимість	7
Абсолютна значимість	9
Проміжні значення між сусідніми судженнями	2, 4, 6, 8

Для реалізації методу Сааті передбачається:

- перевірка узгодженості таблиць бінарних відношень, у яких фігурують суб'єктивні оцінки пріоритетів порівнюваних альтернатив d_i і d_j,
- перехід від матриць парних порівнянь до кількісних оцінок, що дає змогу провести рейтинг альтернатив.

Перевірка узгодженості таблиць ґрунтується на двох властивостях матриці парних порівнянь:

1. Діагональні елементи матриці парних порівнянь дорівнюють 1, а решта – задовольняють умову узгодженості

$$m_{ij} = 1/m_{ji},\ \forall i, j = 1,...,n. \tag{5.4}$$

2. Судження про відносну важливість елементів не суперечні, тобто

$$m_{ik} = m_{ij}m_{jk},\ \forall i, j, k = 1,...,n. \tag{5.5}$$

Зрозуміло, що умови (5.4), (5.5) виконуються автоматично, якщо значення m_{ij} ґрунтуються на об'єктивних кількісних оцінках, коли ваги альтернатив $\omega_1,...,\omega_n$ точно відомі.

Дійсно, в цьому випадку

$$m_{ik} = \frac{\omega_i}{\omega_k}, \qquad m_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}, \qquad m_{jk} = \frac{\omega_j}{\omega_k}.$$

Отже,

$$m_{ij} = \omega_i / \omega_j = \frac{1}{\omega_j / \omega_i} = 1 / m_{ji},$$

звідси

$$m_{ij} m_{jk} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{\omega_i}{\omega_k} = m_{ik}.$$

Із співвідношення $m_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}$ випливає, що

$$m_{ij} \frac{\omega_j}{\omega_i} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \frac{\omega_j}{\omega_i} = 1, \; i, j = 1,...,n,$$

або, що те ж саме,

$$\frac{1}{\omega_i} m_{ij} \omega_j = 1, \; i, j = 1,...,n.$$

Знайдемо суму

$$\frac{1}{\omega_i} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \omega_j = n, \; i = 1,...,n,$$

звідси

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \omega_j = n\omega_i, \; i = 1,...,n. \tag{5.6}$$

Запишемо співвідношення (5.6) у векторно-матричному вигляді

$$\mathbf{M}\vec{\omega} = n\vec{\omega}, \tag{5.7}$$

де

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

– квадратна матриця парних порівнянь, а

$$\vec{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_n)^T$$

– вектор, компонентами якого є пріоритети альтернатив.

З формули (5.7) випливає, що:

- вектор $\vec{\omega}$ – власний вектор матриці парних порівнянь $\mathbf{M}$;
- n – власне число матриці парних порівнянь $\mathbf{M}$.

Таким чином, аналіз властивостей матриці парних порівнянь надає змогу зробити такі висновки:

1. Для визначення вектору пріоритетів $\vec{\omega}$ достатньо знайти власний вектор матриці парних порівнянь $\mathbf{M}$, який відповідає її максимальному власному числу $\lambda_{\max}$.

2. Судження про відносну важливість елементів у матриці порівнянь узгоджені, якщо її порядок n збігається з максимальним власним числом $\lambda_{\max}$, тобто $\lambda_{\max} = n$.

3. Відхилення $\lambda_{\max}$ від n може слугувати мірою узгодженості суб'єктивних суджень про відносну важливість елементів. З цією метою використовують індекс узгодженості

$$\mathrm{I} = \frac{\lambda_{\max} - 1}{n - 1}.$$

На практиці наближені значення компонент вектору пріоритетів $\vec{\omega}$ знаходять як нормоване середнє геометричне елементів матриці (5.8).

Іншими словами, для визначення компонент вектору $\vec{\omega}$ використовують співвідношення:

$$\vartheta_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} m_{ij}}, \tag{5.9}$$

$$\omega_i = \frac{\vartheta_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \vartheta_i}, \ i = 1, ..., n. \tag{5.10}$$

Розглянемо приклад.

Приклад. Необхідно обрати найкращу з трьох альтернатив d_1, d_2, d_3 за трьома критеріями q_1, q_2, q_3, відносна важливість яких надана в матриці порівнянь (табл. 5.3).

Таблиця 5.3. **Парні порівняння важливості критеріїв** q_1, q_2, q_3

Критерії	q_1	q_2	q_3
q_1	1	2	3
q_2	0,5	1	0,5
q_3	0,33	2	1

Згідно з цими даними критерій q_1 у два рази важливіший за критерій q_2 і в три рази важливіший за критерій q_3.

Слід звернути увагу на те, що вище згадані дані задовольняють умову узгодженості (5.4).

Аналогічним чином задаються парні порівняння якостей альтернатив за кожним з критеріїв (табл. 5.4 – 5.6).

Таблиця 5.4. **Парні порівняння якостей альтернатив** d_1, d_2, d_3 **за критерієм** q_1

Альтернативи	d_1	d_2	d_3
d_1	1	4	3
d_2	0,25	1	2
d_3	0,33	0,5	1

Таблиця 5.5. **Парні порівняння якостей альтернатив** d_1, d_2, d_3 **за критерієм** q_2

Альтернативи	d_1	d_2	d_3
d_1	1	0,25	6
d_2	4	1	0,5
d_3	0,17	2	1

Таблиця 5.6. **Парні порівняння якостей альтернатив** d_1, d_2, d_3 **за критерієм** q_3

Альтернативи	d_1	d_2	d_3
d_1	1	3	0,2
d_2	0,33	1	0,33
d_3	5	3	1

Для зручності ведемо такі позначення:

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$$

– вектор пріоритетів критеріїв q_1, q_2, q_3, а

$$\nu_k = (\nu_{1k}, \nu_{2k}, \nu_{3k})^T$$

– вектор *локальних* пріоритетів альтернатив d_1, d_2, d_3 за кожним критерієм q_k, $k = 1,2,3$.

Використовуючи співвідношення (5.9), (5.10) обчислимо наближені значення власних векторів за даними табл. 5.3 – 5.6:

$$\mu = (0{,}55 \quad 0{,}19 \quad 0{,}26)^T,$$

$$\nu_1 = (0{,}63 \quad 0{,}22 \quad 0{,}15)^T,$$

$$\nu_2 = (0{,}37 \quad 0{,}41 \quad 0{,}22)^T,$$

$$\nu_3 = (0{,}22 \quad 0{,}13 \quad 0{,}65)^T.$$

Ранжування альтернатив здійснюють на підставі обчислення *глобальних* пріоритетів так, як показано в табл. 5.7.

***Таблиця 5.7.* Порядок обчислень глобальних пріоритетів альтернатив**

Альтернативи	**Критерії**			**Глобальні пріоритети**
	q_1	q_2	q_3	
	μ_1	μ_2	μ_3	
d_1	ν_{11}	ν_{12}	ν_{13}	$\mu_1 \nu_{11}+\mu_2 \nu_{12}+\mu_3 \nu_{13}$
d_2	ν_{21}	ν_{22}	ν_{23}	$\mu_1 \nu_{21}+\mu_2 \nu_{22}+\mu_3 \nu_{23}$
d_3	ν_{31}	ν_{32}	ν_{33}	$\mu_1 \nu_{31}+\mu_2 \nu_{32}+\mu_3 \nu_{33}$

Таким чином, для визначення глобальних пріоритетів метод Сааті застосовує процедуру адитивної згортки локальних пріоритетів альтернатив за окремими критеріями з урахуванням важливості цих критеріїв з точки зору ОПР.

На підставі розрахунків за наявними даними альтернативу d_1 слід визнати найкращою, тому що вона має найвищий глобальний пріоритет (табл. 5.8).

Таблиця 5.8. **Результати ранжирування альтернатив за методом Сааті**

Альтернативи	Критерії			Глобальні пріоритети	Ранг
	q_1	q_2	q_3		
	0,55	0,19	0,26		
d_1	0,63	0,37	0,22	0,47	1
d_2	0,22	0,41	0,13	0,23	3
d_3	0,15	0,22	0,65	0,3	2

Завдання для комп'ютерного практикуму

У середовищі EXCEL за допомогою методу Сааті визначити найкращу з 4 альтернатив за 5 критеріями. Для виконання роботи студент отримає індивідуальний варіант вихідних даних, один з прикладів якого подано в табл. 5.9 – 5.14.

Таблиця 5.9. **Відношення переваг критеріїв**

Критерії	Критерії				
	1	***2***	***3***	***4***	***5***
1	1,00	3	1,5	3	2,1
2	0,33	1	0,5	1	0,7
3	0,67	2	1	2	1,4
4	0,33	1	0,5	1	0,7
5	0,48	1,43	0,71	1,43	1

Необхідно пояснити етапи рішення поставленого завдання в таблицях EXCEL, у яких:

– ввести вихідні дані з табл. 5.9 – 5.14;

– визначити наближені значення елементів власних векторів (методом нормованого середньо геометричного), що визначають відповідні пріоритети критеріїв та альтернатив за критеріями;

– побудувати узагальнюючу таблицю розрахунків за методом Сааті та зробити остаточний висновок за узагальнюючою таблицею.

Таблиця 5.10. **Переваги за першим критерієм**

Альтернативи	**Альтернативи**			
	1	***2***	***3***	***4***
1	1	0,5	1,5	1,05
2	2	1	3	2,1
3	0,67	0,33	1	0,7
4	0,95	0,48	1,43	1

Таблиця 5.11. **Переваги за другим критерієм**

Альтернативи	**Альтернативи**			
	1	***2***	***3***	***4***
1	1,00	2	1	3
2	0,50	1	0,5	1,5
3	1,00	2	1	3
4	0,33	0,67	0,33	1

Таблиця 5.12. **Переваги за третім критерієм**

Альтернативи	**Альтернативи**			
	1	***2***	***3***	***4***
1	1,00	2	6	12
2	0,50	1	3	6
3	0,17	0,33	1	2
4	0,08	0,17	0,5	1

Таблиця 5.13. **Переваги за четвертим критерієм**

Альтернативи	**Альтернативи**			
	1	***2***	***3***	***4***
1	1	3	6	9
2	0,33	1	2	3
3	0,17	0,5	1	1,5
4	0,11	0,33	0,67	1

Таблиця 5.14. **Переваги за п'ятим критерієм**

Альтернативи	**Альтернативи**			
	1	***2***	***3***	***4***
1	1,00	0,2	0,8	1,6
2	5,00	1	4	8
3	1,25	0,25	1	2
4	0,63	0,13	0,5	1

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте метод аналізу ієрархій.
2. Опишіть переваги методу Сааті.
3. Наведіть аксіоми, на яких ґрунтується метод Сааті.
4. Обґрунтуйте властивості матриць парних порівнянь.
5. Поясніть математичне визначення «власний вектор матриці».
6. Поясніть чим власний вектор матриці відрізняється від довільного вектору та надайте графічну інтерпретацію.
7. Яким чином у методі Сааті пропонується визначати наближені значення компонент вектору пріоритетів.

РОЗДІЛ 6

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЇ ЗУПИНКИ

6.1. Загальна постановка задачі

Нехай $D = \{d_1, ..., d_N\}$ – скінчена множина альтернатив. Припускають, що особа, яка приймає рішення (ОПР), заздалегідь не знає особисті якості альтернатив $d_1, ..., d_N$, але на основі «експерименту» може їх порівнювати та визначити альтернативу, яка має переваги над іншими. Також вважають, що для альтернатив виконується традиційна властивість транзитивності:

$$\text{якщо } d_i \succ d_j \text{, а } d_j \succ d_z \text{, то } d_i \succ d_z .$$

Мета ОПР полягає в тому, щоб на основі *послідовного* аналізу альтернатив, які переглядаються у випадковому порядку, вибрати найкращу серед усіх альтернатив множини D за таких обмежень:

1. Кожну з альтернатив переглядають *лише один раз*.

2. На кожному кроці ОПР може прийняти одне з двох рішень: або продовжити пошук кращої альтернативи, або зупинитися, вважаючи, що поточна альтернатива не тільки краща за попередні, але й найкраща з усіх альтернатив множини D.

Така задача виникає, коли здійснюють пошук:

- кандитата на вакантну посаду за результатами послідовного кастінгу;
- місця паркування або заправки автомобіля на дорозі з рухом в одному напрямку;
- найбільш привабливого банку для отримання кредиту;
- квартири для оренди або купівлі в великому місті;
- окремого товару на ринку.

Перелік таких прикладів може бути продовжений.

Виникає природне питання: як слід діяти, щоб зазначена мета вибору найкращого варіанту буде досягнута?

Поставимо задачу: знайти оптимальний крок i^*, на якому слід зробити остаточний вибір, щоб максимізувати імовірність P вибору найкращої альтернативи з усіх можливих альтернатив, тобто:

$$i^* = \underset{\substack{1 \le i \le N \\ \forall j \ne i}}{\arg\max}\, P(d_i \succ d_j), \quad j = 1, ..., N.$$

Перш ніж перейти до математичних деталей задачі оптимальної зупинки, розглянемо метод динамічного програмування, який застосовують для вирішення широкого кола задач прийняття оптимальних рішень, у тому числі, для формалізації задачі оптимальної зупинки.

6.2. Метод динамічного програмування

Оптимальний розв'язок задачі великої розмірності часто можна звести до знаходження оптимальних розв'язків задач меншої розмірності. Прямий шлях підходу – повний перебір. Але це не завжди можливо через велику кількість обчислень.

Приклад 6.1. Нехай маємо N вантажів з відомими вагами $G_1, G_2, ..., G_N$ та вантажівку, яка здатна перевозити вагу G_0. Необхідно визначити чи існує набір вантажів, який повністю заповнить вантажівку, а саме

$$G_i + G_j + ... + G_k = G_0, \; i, j, k \in [1, N]. \tag{6.1}$$

Зрозуміло, що перевірка умови (6.1) потребує аналізу $2^N - 1$ варіантів (табл. 6.1).

***Таблиця 6.1*. Варіанти вантажів**

№	G_N	…	G_2	G_1
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
…	…	…	…	…
$2^N - 1$	1	1	1	1

Коли $N = 100$ повний перебір потребує аналізу $2^{100} - 1$ варіантів. Якщо припустити, що комп'ютер здатен аналізувати 1 млрд. варіантів за 1 секунду, то перебір всіх варіантів потребує астрономічного часу

$$\theta = \frac{2^{100} - 1}{10^9} \approx \frac{10^{30}}{10^9} = 10^{21} \text{ секунд} > 10^{13} \text{ років}.$$

Інший шлях до знаходження розв'язку задачі великої розмірності – застосування так званого «жадібного» алгоритму, який ґрунтується на послідовному визначені найкращого рішення на *кожному* кроці. Однак такий локально-оптимальний відбір не завжди призводить до оптимального розв'язку глобальної задачі.

Приклад 6.2. Знайти вершину графа, в якій вказано найбільше число. Як видно з рис. 6.1 вже на першому кроці локально-оптимальний алгоритм веде до невірного шляху.

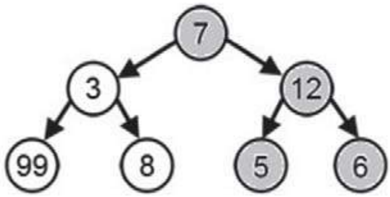


Рис. 6.1. Ілюстрація роботи жадібного алгоритму

Динамічне програмування – ефективна техніка, яка для знаходження розв'язку задачі, що залежить від багатьох параметрів, використовує розв'язки задачі з меншим числом параметрів, *не застосовуючи* повний перебір (рис. 6.2).

Рис. 6.2. Динамічне програмування – компроміс між неефективними алгоритмами

Динамічне програмування зовні нагадує метод доведення за індукцією та ґрунтується на принципі оптимальності, який сформульовано Ричардом Беллманом (США). Динамічне програмування застосовують до так званих задач з оптимальною структурою, які можна розділити на сукупність підзадач, причому оптимальний розв'язок всієї задачі зводиться до послідовного розв'язку підзадач.

Принцип оптимальності Беллмана полягає в тому, що на кожному i-му кроці треба приймати таке рішення, щоб сума винагороди S_i та найбільш можливих винагород S_{i+1}, S_{i+2}, … на всіх наступних кроках аж до найбільш можливої винагороди S_N на останньому кроці була максимальна:

$$S_i + S_{i+1} + S_{i+2} + ... + S_N \to \max .$$

Іншими словами, оптимальне рішення на i-му кроці приймається за правилом

$$d_i^* = \arg\max_{d_i \in D_i} \{S(d_i) + S(d_{i+1}^*) + S(d_{i+2}^*) + ... + S(d_N^*)\} , \qquad (6.2)$$

на відміну від жадібного алгоритму, згідно з яким таке рішення приймають за правилом

$$d_i^* = \arg\max_{d_i \in D_i} \{S(d_i)\} ,$$

де D_i – множина можливих рішень на i-му кроці.

Зі співвідношення (6.2) випливає, що серед усіх кроків є один крок – *останній*, який можна аналізувати самостійно, враховуючи тільки винагороду S_N на цьому кроці без врахування наступних винагород. Тому процес динамічного програмування зазвичай розгортають від кінця до початку.

Спочатку планують останній крок N на основі розумних припущень про те, чим завершиться попередній крок $N-1$, та обирають умовно-оптимальне рішення d_N^* останнього кроку, яке забезпечує найбільш можливий вигнаш $S(d_N^*)$.

Далі оптимізують рішення на кроці $N-1$. Для цього роблять розумне припущення про те, чим закінчиться крок $N-2$ та обирають таке рішення d_{N-1}^* на кроці $N-1$, для якого сума виграшів $S(d_{N-1}^*) + S(d_N^*)$ двох останніх кроків буде максимальною. Зауважимо, що виграш $S(d_N^*)$ вже відомий.

Продовжуючи цей процес знаходимо умовно-оптимальні рішення на всіх кроках.

Процес оптимізації методом динамічного програмування реалізують у двох напрямах:

• умовно-оптимальна оптимізація *від кінця до початку*, на основі якої визначають всі умовно-оптимальні рішення

$$d^* = (d_1^*, d_2^*, ..., d_N^*)\,, \tag{6.3}$$

• безумовна оптимізація від початку до кінця на основі вже готових рекомендацій (6.3), яка реалізує послідовність оптимальних рішень на всіх кроках.

Таким чином, у загальному випадку для реалізації метода динамічного програмування необхідно:

1. Визначити сукупність параметрів, які мають бути оптимізовані;

2. Звести вирішення загальної задачі до послідовності оптимізації окремих підзадач.

3. Визначити множини D_i, $i = 1,...,N$ варіантів можливих рішень (альтернатив) для кожної i-ї підзадачі з урахуванням наявних обмежень.

4. Визначити виграш S_i, який несе кожне з можливих рішень $d_i \in D_i$, тобто визначити функції виграшів

$$S_i = s(d_i)\,.$$

5. Записати *головне рекурентне рівняння*, яке визначає виграш S_i^* (починаючи з i-го кроку і до кінця) через відому функцію $s_{i+1}(\cdot)$:

$$S_i^* = \max_{d_i \in D_i} \{s(d_i) + s_{i+1}(d_{i+1}^*)\}\,, \tag{6.4}$$

де D_i – множина можливих рішень на i-му кроці, а d_{i+1}^* – умовно-оптимальне рішення на ($i+1$)-му кроці.

6. Знайти оптимальне рішення

$$d_N^* = \arg\max_{d_N \in D_N} s(d_N)$$

на останньому N-му кроці та виграш $S_N^* = s(d_N^*)$, який відповідає цьому рішенню, де D_N – множина можливих рішень на останньому кроці.

7. На основі співвідношення (6.4) визначити максимально можливі виграші S_{N-1}^*, S_{N-2}^*, …, S_1^* на всіх попередніх кроках $N-1$, $N-2$,…, 1 та знайти умовно-оптимальні рішення d_{N-1}^*, d_{N-2}^*, …, d_1^*, які забезпечують такі виграші.

8. Побудувати безумовну оптимізацію всієї задачі на основі знайдених оптимальних рішень окремих кроків (підзадач)

$$d^* = (d_1^*, d_2^*, ..., d_m^*).$$

Розглянемо два приклади знаходження розв'язку задач методом динамічного програмування.

Приклад 6.3. Визначити число способів, якими продавець може повернути покупцю суму в K грн, якщо він має купюри 1 грн, 2 грн та 5 грн. Будемо вважати, що має значення порядок повернення купюр, тобто варіанти 1+2+2+5 та 5+1+2+2 – різні варіанти.

Розв'язування задачі. Позначимо $F(K)$ число способів, якими продавець може повернути покупцю суму K грн. Наприклад, коли $K = 10$ величина $F(10)$ визначає скількома способами можна повернути суму в 10 грн.

Зрозуміло, що повернення коштів розпочинається з поверненням першої купюри. Тому, коли $K = 10$, то

- якщо перша купюра 1 грн, то залишається віддати 9 грн;
- якщо перша купюра 2 грн, то залишається віддати 8 грн;
- якщо перша купюра 5 грн, то залишається віддати 5 грн.

Звідси для визначення $F(10)$ потрібно скласти суму способів, для яких перша купюра буде 1, 2 або 5 грн. Формально це означає, що

$$F(10) = F(9) + F(8) + F(5). \tag{6.5}$$

Визначимо значення доданків у правій частині (6.5). Міркуючи аналогічним чином, маємо:

$$F(9) = F(8) + F(7) + F(4),$$

$$F(8) = F(7) + F(6) + F(3),$$

$$F(5) = F(4) + F(3) + F(0).$$

У загальному випадку (при $K \geq 5$) маємо

$$F(K) = F(K-1) + F(K-2) + F(K-5). \qquad (6.6)$$

Формулу (6.6) необхідно доповнити значеннями $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$.

Зрозуміло, що $F(0) = 1$ (є тільки один спосіб не повернути гроші). Зрозуміло також, що:

- повернути 1 грн можна 1 способом , тобто

$$F(1) = 1;$$

- повернути 2 грн можна 2 способами (1+1 або 2), тобто

$$F(2) = 2;$$

- повернути 3 грн можна 3 способами (1+1+1 або 1+ 2 або 2+1), тобто

$$F(3) = 3;$$

- повернути 4 грн можна 5 способами (1+1+1+1 або 1+1+2 або 1+2+1 або 2+1+1 або 2+2), тобто

$$F(4) = 5.$$

Продемонструємо знаходження величини $F(10)$:

$$F(5) = F(4) + F(3) + F(0) = 9,$$

$$F(6) = F(5) + F(4) + F(1) = 9 + 5 + 1 = 15,$$

$$F(7) = F(6) + F(5) + F(2) = 15 + 9 + 2 = 26,$$

$$F(8) = F(7) + F(6) + F(3) = 26 + 15 + 3 = 44,$$

$$F(9) = F(8) + F(7) + F(4) = 44 + 26 + 5 = 75,$$

$$F(10) = F(9) + F(8) + F(5) = 75 + 44 + 9 = 128.$$

Для визначення $F(K)$ можна використовувати наступну просту програму:

Визначити K

$$F(0)=1;\ F(1)=1;\ F(2)=2;\ F(3)=3;\ F(4)=5;$$

For i: = 5 to K do

$$F(i):=F(i-1)+F(i-2)+F(i-5);$$

Відобразити $F(K)$**.**

Приклад 6.4. У комірках $n\times n$ таблиці записано додатні та від'ємні числа (бали) $P(i,j)$, які відповідно визначають виграш або втрату (рис. 6.3).

Треба знайти оптимальний маршрут від комірки з координатами (1,1), яка розташована в нижньому лівому куті таблиці, до комірки з координатами (n,n), що розташована в верхньому правому куті, отримавши максимально сумарний виграш. У даному випадку допустимі кроки вправо, вверх або вправо-вверх за діагоналлю.

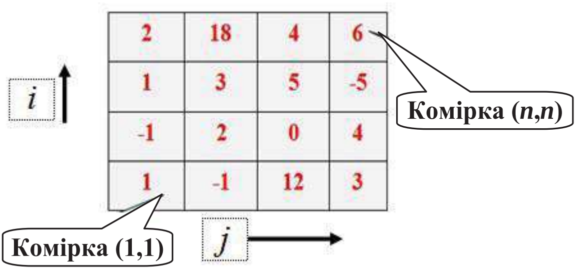


Рис. 6.3. Приклад таблиці балів

Зауважимо, що для $n\times n$ таблиці число можливих шляхів пропорційно 2^n. Тому алгоритм повного перебору не може бути практично реалізовано при $n>40$. Водночас жадібний алгоритм, що забезпечує лише локально-оптимальний вибір чергового кроку, не призводить до оптимального вирішення задачі (рис. 6.4).

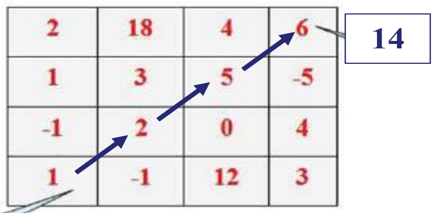


Рис. 6.4. Результат роботи жадібного алгоритму

Будемо шукати рішення задачі за допомогою методу динамічного програмування.

Позначимо $F(i, j)$ максимальний сумарний виграш, який буде отримано в результаті переходу від комірки з довільними координатами (i, j) в кінцеву комірку з координатами (n, n).

Наша мета – знайти значення $F(1, 1)$ для заданої таблиці балів.

Визначимо спочатку значення $F(n,n)$, тобто виграш, котрий буде отримано в верхньому правому куті таблиці. Зрозуміло, що цей виграш буде дорівнювати числу балів у цій комірці, тобто

$$F(n,n) = P(n,n).$$

Зрозуміло також, що виграші в інших комірках останнього стовпчика таблиці визначають за формулою

$$F(i,n) = P(i,n) + F(i+1,n),\ \forall i = 1,...,n-1, \tag{6.7}$$

а виграші у верхньому рядку – за формулою

$$F(n, j) = P(n, j) + F(n, j+1),\ \forall j = 1,...,n-1. \tag{6.8}$$

Враховуючи допустимі напрямки переміщення за відомими значеннями виграшів у верхньому рядку та правому стовпчику, легко можна визначити значення цільової функції $F(n-1,n-1)$ у комірці з координатами $i = n-1$ та $j = n-1$ (рис. 6.5).

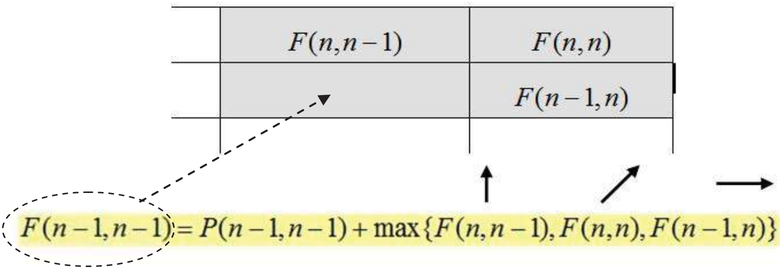


Рис. 6.5. Визначення значення функції $F(n-1,n-1)$

Для довільної комірки з координатами i, j формула для обчислення цільової функції має вигляд

$$F(i, j) = P(i, j) + \max\{F(i+1, j), F(i+1, j+1), F(i, j+1)\}. \tag{6.9}$$

Послідовно просуваючись комірками таблиці справа наліво і зверху вниз можна обчислити значення цільової функції $F(1, 1)$.

Приклад 6.5. Знайдемо оптимальний шлях за даними матриці розміром 3×4 (табл. 6.2).

Таблиця 6.2. **Вихідні дані** $P(i,\ j)$ **для прикладу 6.5.**

1	**10**	**2**	**1**
1	**–2**	**5**	**-3**
1	**–3**	**6**	**8**

За формулами (6.7) і (6.8) визначимо спочатку виграші $F(i,n)$ і $F(n, j)$ при $i \le 3$ та $j \le 4$ відповідно у верхньому рядку та правому стовпчику (рис. 6.6).

14	**13**	**3**	**1**
			-2
			6

Рис. 6.6. Значення $F(i,n)$ та $F(n, j)$

Далі за формулою (6.9) обчислимо значення $F(i, n-1)$, рухаючись зверху до низу в третьому рядку і $F(n-1, j)$, рухаючись справа наліво відповідно в другій стрічці (рис. 6.7).

14	**13**	**3**	**1**
1+max {14,13,11}=15	**-2+max {13,3,8}=11**	**5+max {3,1,-2}=8**	**-2**
		6+max {8,-2,6}=14	**6**

Рис. 6.7. Значення $F(i, n-1)$ та $F(n-1, j)$

Таким чином, на даному кроці нам залишилось визначити лише значення $F(1,2)$ та $F(1,1)$ (рис. 6.8).

14	**13**	**3**	**1**
15	**11**	**8**	**-2**
1+max {15,11,11}=16	**-3+max {11,8,14}=11**	**14**	**6**

Рис. 6.8. Значення $F(1,2)$ та $F(1,1)$

У результаті таблиця призів приймає остаточний вигляд (рис. 6.9) і можна визначити оптимальний маршрут, який забезпечує максимальний сумарний виграш, що дорівнює 16 од.

14	**13**	**3**	**1**
15	**11**	**8**	**-2**
16	**11**	**14**	**6**

Рис. 6.9. Оптимальний маршрут у результуючій таблиці

6.3. Перебірлива наречена

Розглянемо деталі методу оптимальної зупинки на задачі, яка отримала назву «Перебірлива наречена» (рис. 6.10), а в англомовній літературі – «Secretary Problem».

Умови задачі такі:

1. Принцеса шукає собі нареченого (існує єдине вакантне місце).
2. Є відоме число N претендентів.
3. Дівчина спілкується з претендентами у випадковому порядку.
4. Про кожного претендента можна сказати, що він кращий чи гірший від попередніх.
5. У результаті спілкування з кожним нареченим дівчина може йому відмовити або прийняти його пропозицію.
6. Знехтувані претенденти не повертаються.
7. Мета принцеси: вибрати найкращого претендента.

Рис. 6.10. Ілюстрація до задачі «Перебірлива наречена»

Цілком очевидно, що при відмові всім окрім останнього принцесі доведеться за нього вийти заміж яким би він не виявився або ж піти в монастир. Тому дуже велика перебірливість може призвести до втрати принцесою свого найкращого принца.

З іншого боку, якщо вона погодиться занадто рано, то швидше за все він не буде кращим. Необхідно знайти компроміс між такими крайніми стратегіями.

Формальне рішення задачі оптимальної зупинки якраз і визначає таку збалансовану стратегію.

Зрозуміло, що на будь-якому кроці принцеса повинна відмовити претенденту, якщо він гірший за попередніх (тривіальне рішення). Якщо ж черговий претендент кращий за всіх попередніх, то принцеса повинна прийняти *нетривіальне рішення*: погодитися або відмовити, чекаючи отримати більш кращого.

Для визначення оптимального кроку зупинки введемо означення випадкових подій:

- A – принцеса обрала найкращого нареченого;
- B_t – принцеса обрала претендента на t-му кроці;
- $\overline{B}_t$ – принцеса відмовила претенденту на t-му кроці;

Для визначення оптимальної стратегії, яка забезпечує найбільшу імовірність $P(A)$, розглянемо дві умовні імовірності:

- $g_t \triangleq P(A \mid B_t)$ – імовірність випадкової події G_t, яка полягає у тому, що t-й претендент не лише кращий за всіх попередніх, а й найкращий;

- $h_t \triangleq P(A \mid \overline{B}_t)$ – імовірність обрати найкращого нареченого у випадку, коли принцеса відмовила претенденту на t-му кроці (хоча він виявився кращим за попередніх) у припущенні, що починаючи з наступного $t+1$-го кроку принцеса використовує оптимальну стратегію.

Зрозуміло, що оптимальна стратегія поведінки на t-му кроці така:

а) відмовити претенденту, якщо він не кращий від попередніх;

б) обрати претендента, якщо він кращий від попередніх та

$$g_t \geq h_t . \qquad (6.10)$$

Визначимо імовірності, що фігурують у нерівності (6.10).

Для визначення умовної імовірності g_t на різних кроках будемо застосовувати метод динамічного програмування. Припустимо спочатку, що $t = N$, тобто наречена знаходиться на останньому N-му кроці, тобто вона відмовила усім $N-1$ попереднім претендентам.

У даному випадку оптимальна стратегія зрозуміла:

- обрати N-го претендента, якщо він кращий від попередніх (мета досягнута);
- відмовити N-му претенденту, якщо він не кращий від попередніх (мета не досягнута).

Якщо на останньому кроці (коли $t = N$) претендент кращий за попередніх, то він і найкращий (випадкова подія G_n), тобто імовірність досягнення мети нареченої дорівнює $g_t = 1$ (табл. 6.3).

Таблиця 6.3. **Значення імовірності g_t при $t = N$**

t	$N-3$	$N-2$	$N-1$	N
g_t				1

Знайдемо тепер значення g_t на попередньому кроці $t = N-1$. Імовірність g_{N-1} означає, що претендент, якого принцеса визнала кращим на кроці $N-1$ не тільки кращий за попередніх, а й найкращий (випадкова подія G_{N-1}).

Оскільки претенденти зустрічаються з принцесою у випадковому порядку, то імовірності появи найкращого нареченого на будь-якому кроці однакові:

$$P(G_1) = ... = P(G_{N-1}) = P(G_N) = \frac{1}{N}.$$

Таким чином, імовірність появи кращого нареченого на N-му кроці дорівнює $\frac{1}{N}$. Звідси випливає, що коли на кроці $N-1$ претендент виявився кращим за попередніх, то умовна імовірність залишитися найкращим (тобто краще претендента на N-му кроці), визначається так

$$g_{N-1} = 1 - G_N = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}.$$

Тобто, ми знаємо вже імовірності випадкової події g_t на останніх двох кроках (табл. 6.4)

Таблиця 6.4. **Значення імовірності g_t при $t = N-1$ та $t = N$**

t	$N-3$	$N-2$	$N-1$	N
g_t			$\frac{N-1}{N}$	1

Рухаємось далі та обчислимо значення g_t на кроці $t = N-2$, тобто умовну імовірність g_{N-2} того, що претендент, котрий на кроці $N-2$ визнаний кращим за попередніх буде також кращим за двох наступних претендентів.

Оскільки випадкові події G_{N-1} та G_N не сумісні, то за формулою додавання імовірностей маємо (табл. 6.5)

$$g_{N-2} = 1 - [P(G_{N-1}) + P(G_N)] = 1 - \left[\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\right] = \frac{N-2}{N}.$$

Таблиця 6.5. **Значення імовірності g_t при $t = N-2,\ N-1,\ N$**

t	$N-3$	$N-2$	$N-1$	N
g_t		$\frac{N-2}{N}$	$\frac{N-1}{N}$	1

Міркуючи аналогічним чином легко показати, що

$$g_t = \frac{t}{N}, \tag{6.11}$$

тобто імовірність g_t лінійно зростає з ростом t.

Повернемось тепер до імовірності h_t. Нагадаємо, що за означенням величина h_t – це імовірність досягнення мети (вибрати найкращого нареченого), якщо принцеса відмовить претенденту t-го кроку, а далі буде діяти за оптимальною стратегією. Іншими словами, це імовірність одержати перемогу, якщо оптимально діяти починаючи з кроку $t+1$, а, значить, з усіма іншими стратегіями імовірність одержати найкращого нареченого буде не вище за h_t.

Використовуючи техніку динамічного програмування можна показати, що

$$h_t = \frac{t}{N}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \ldots + \frac{1}{N-1}\right), \tag{6.12}$$

тобто величина h_t монотонно спадає з ростом t.

З виразів (6.11) та (6.12) випливає, рівність $g_t = h_t$ спостерігається при виконанні умови

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \ldots + \frac{1}{N-1} = 1, \tag{6.13}$$

яка визначає точку T оптимальної зупинки (рис. 6.11).

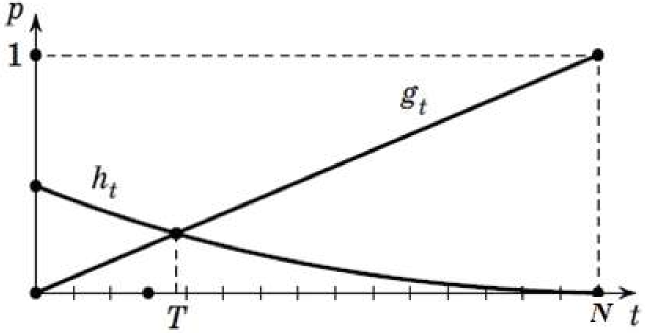


Рис. 6.11. Оптимальна зупинка в точці T, що відповідає перетину імовірності g_t та h_t

Використовуючи (6.13) можна довести, що при $N \geq 100$ точка оптимальної зупинки визначається співвідношенням

$$T = \frac{N}{e},$$

де $e = 2{,}71828$ – число Непера.

Тобто, оптимальна стратегія принцеси полягає у виборі першого, який буде кращим за $\frac{N}{e}$ попередніх претендентів.

За умови такої стратегії імовірність обрати найкращого нареченого максимальна та з ростом N прямує до величини $P \approx 0{,}368$.

Таким чином, оптимальна стратегія вибору найкращого варіанта така:

1. Розділити N претендентів на дві підгрупи: «експериментальну», яка включає $\frac{1}{e}$ від усіх, та «робочу», яка включає $1-\frac{1}{e}$ інших претендентів.

2. Претендентам експериментальної підгрупи (першим $\frac{N}{e}$ претендентам) необхідно відмовити, лише запам'ятовуючи якості кращого.

3. Серед претендентів другої підгрупи слід обрати першого, хто виявиться кращим за лідера першої підгрупи.

Наприклад, якщо ми бажаємо обрати найкращу квартиру, послідовно вивчаючи сто варіантів (без повернення до вже відхилених), то необхідно вибрати тридцять сьомий варіант квартири, якщо вона виявиться кращою за попередні.

Завдання для комп'ютерного практикуму

Завдання 6.1. У середовищі EXCEL, MATLAB або у будь-якому іншому програмному середовищі, створити програму, яка забезпечує вирішення у загальному випадку наступної задачі.

1. Побудувати 5×5 таблицю, клітинки якої заповнюють довільними числами (додатними та від'ємними). З кожним наступним запуском програми, числа в клітинках таблиці випадковим чином змінюються.

2. Додатне число визначає приз, а кожне від'ємне число – програш, який отримують з проходженням цієї клітинки.

3. За методом динамічного програмування визначити оптимальний маршрут від клітинки в нижньому лівому куті до клітинки у верхньому правому куті, який забезпечує найбільшу сумою чисел в клітинках.

4. Перехід від однієї клітинки до другої може бути здійснений у трьох напрямках: вправо, вверх або за діагоналлю вправо-вверх.

5. У звіті навести дві таблиці з вихідними даними (приклад: табл. 6.6) та результатами обчислень (приклад: 6.7).

6. Обґрунтувати хід розв'язання завдання.

Таблиця 6.6. **Приклад таблиці**

3	7	–2	**6**	**3**
6	–2	5	**7**	2
3	**5**	**7**	**8**	–2
1	–1	–3	2	4
4	2	2	–2	8

Таблиця 6.7. **Приклад таблиці**

17	14	7	**9**	**3**
25	19	21	**16**	5
39	**36**	**31**	**24**	3
40	35	28	26	7
44	37	30	24	15

Завдання 6.2. Розробити комп'ютерну програму моделювання методу оптимальної зупинки.

1. Заповнити масив X випадковими числами x_i, $i = 1,..., N$ ($N \geq 100$) в діапазоні 160 – 190, які означають зріст потенційних наречених.

2. Визначити істинного лідера з N претендентів, тобто знайти максимальне значення $x^{\max}$ генерованих величин.

3. Визначити оптимальну точку зупинки за формулою

$$j = \eta\left[\frac{N}{e}\right] + 1,$$

де $[\eta]$ позначає цілу частину числа η, а $e = 2{,}71828$.

4. Визначити лідера експериментальної підгрупи – максимальне значення $x_{1,j}^{\max}$ чисел масиву X в діапазоні індексів $1,..., j$.

5. Визначають число $x_{j+1,N}^{\max}$ – перше зі значень масиву X в діапазоні індексів $j+1,..., N$, яке перевищує $x_{1,j}^{\max}$.

6. Задати число $\Delta \geq 0$ – поступка принцеси на відхилення зросту нареченого, обраного за методом оптимальної зупинки, від істинного лідера в масиві з N претендентів (зросту самого високого претендента).

7. Перемогою (досягненням мети) вважають випадок, коли

$$\left| x^{\max} - x_{j+1,N}^{\max} \right| \le \Delta, \tag{6.14}$$

тобто лідер $x_{j+1,N}^{\max}$, обраний за методом оптимальної зупинки, відрізняється від істинного лідера $x^{\max}$ не більше, ніж на поступку $\Delta \ge 0$.

8. Провести серію з M експериментів за п.п. 1-7 з фіксованими значеннями N і Δ та оцінити імовірність (частоту) досягнення мети за формулою

$$P = \frac{m}{M}, \tag{6.15}$$

де m – число перемог у серії з M експериментів за умовою (6.14).

9. Програма повинна надавати змогу в діалоговому режимі вводити значення величин:

$$N = 100,\ 200,\ 300,\ ...,\ 1000,$$

$$M = 100,\ 1000,$$

$$\Delta = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

та для кожного з цих фіксованих значень оцінити імовірність P за формулою (6.15).

10. Результати обчислень викласти в звіті, в якому представити та обґрунтувати:

а) графіки залежності оцінки імовірності P досягнення мети від числа претендентів N з фіксованими поступками $\Delta = 0$ та $\Delta = 5$.

б) графіка залежності оцінки імовірності P досягнення мети від заданої поступки $0 \le \Delta \le 5$ при фіксованих $N = 100$ та $M = 1000$.

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає задача оптимальної зупинки?

2. Сформулюйте проблему знаходження оптимального розв'язку задач великої розмірності методом повного перебору.

3. Сформулюйте основний недолік «жадібного» алгоритму.

4. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана.

5. Назвіть етапи реалізації метода динамічного програмування у загальному випадку.

РОЗДІЛ 7

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ КОНФЛІКТУ

7.1. Базові поняття та означення теорії ігор

Конфліктною називають ситуацію, коли не збігаються інтереси двох або більше сторін.

Конфлікт може бути:

- *антагоністичним,* коли виграш однієї сторони досягають завдяки програшу протилежної;
- *неантагоністичним*, коли інтереси сторін не є ні строго протилежними, ні повністю співпадаючими, наприклад, конфлікт студента та викладача на екзамені.

Розумно вирішувати конфліктні ситуації та не вибирати крайні форми поведінки, якщо це можливо. Для цього потрібно вміти формально описувати конфлікт (побудувати модель) і провести її аналіз.

На описовому рівні конфлікти є предметом вивчення науки конфліктології, яка досліджує закономірності виникнення, розвитку, вирішення і завершення конфліктів будь-якого рівня.

Так, наприклад, встановлено, що всі види вирішення конфліктів між людьми зводяться до 5 способів і визначаються 4 видами дій учасників, що відображено на сітці Томаса-Кілмана (рис. 7.1).

Рис. 7.1. Стилі поведінки людини в конфліктних ситуаціях

Конфронтація виникає, коли:

- результат вирішення конфлікту дуже важливий;
- критична ситуація;
- немає іншого вибору;
- є влада і авторитет.

Ухилення виникає, коли:

- результат не дуже важливий;
- відчуття можливості вирішити конфлікт на свою користь;
- складність самої ситуації;
- необхідно виграти час;
- немає достатніх ресурсів (влади).

Співпраця можлива, коли:

- сторони взаємозалежні;
- рівність влади над ситуацією (відсутність лідера) ;
- є можливість узгодити свої інтереси з інтересами іншої сторони.

***Пристосування* можливе**, коли:

- конфлікт не дуже хвилює;
- бажання зберегти мир;
- розуміння своєї неправоти;
- мало шансів на перемогу;
- розуміння проблем іншої сторони.

Компроміс можливий, коли:

- сторони бажають швидко вирішити конфлікт;
- сторони прагнуть отримати хоча б щось можливе з ситуації;
- інші підходи вирішення конфлікту неефективні.

Таким чином, конфліктологія дає змогу, на змістовному рівні, класифікувати конфліктні ситуації, визначити взаємозв'язок дій (стратегій) сторін з мотивацією цих дій та зв'язати потенційно можливий результат вирішення конфлікту з обраною стратегією поведінки.

На відміну від конфліктології, теорія ігор – це *математична* дисципліна, яка вивчає формальні аспекти конфлікту, а саме:

- математичні моделі конфліктних ситуацій;
- методи аналізу моделей конфліктних ситуацій;
- формальні стратегії оптимальної поведінки в умовах конфлікту.

Розглянемо спочатку особливості так званої гри в нормальній (стратегічній) формі.

Нехай

$$A = \{A_i\},\ i = 1,...,N$$

– перелік гравців, які беруть участь у грі,

$$S_i = \{s_{ij}\}$$

– множина *стратегій* поведінки i-го гравця у j-й ситуації,

$$u = u(s_{ij})$$

– профіль платежів (втрат або виграшів) для кожної стратегії s_{ij}.

Складність планування такої гри полягає у тому, що виграш кожного гравця залежить не тільки від його стратегії, а й від вибору стратегій інших гравців.

Гра в нормальній формі передбачає, що:

- гравці стратегічно незалежні;
- можуть обирати довільні стратегії;
- стратегії пов'язані між собою через корисність вибору, яка призводить до того чи іншого виграшу.

Для математичного аналізу гри мають бути сформульовані її *правила*, які визначають:

- систему можливих ходів кожної зі сторін;
- об'єм інформації щодо ходів протилежних сторін;
- послідовність чергування ходів;

- результат гри, до якого призводить послідовність ходів.

Результат (виграш або програш) гри не завжди має кількісний вираз. Але зазвичай можна встановити деяку шкалу вимірювання і визначати результат гри числом, наприклад, «+1» позначає виграш, «–1» позначає програш, а «0» позначає нічийний результат гри.

Найпростіша гра – парна гра *з нульовою сумою*, у якій приймає участь лише два гравці A та B, причому виграш (програш) A дорівнює програшу (виграшу) B.

Для зручності, гру з нульовою сумою можна розглядати зі сторони тільки одного гравця, наприклад, гравця A, ототожнюючи його з «нашою» стороною, яка прагне виграти, а гравця B ототожнювати з супротивником.

Особистий хід – це усвідомлений вибір (здійснення гравцем однієї з можливих дій, передбачених правилами гри).

Випадковий хід – це вибір можливих дій, передбачених правилами гри, які здійснюються не гравцем, а механізмом випадкового вибору, наприклад, киданням монети або гральної кістки.

Гра математично визначена, якщо для кожного випадкового ходу вказаний розподіл імовірності можливих результатів.

Гра з повною інформацією – це гра, в якій кожен гравець перед особистим ходом знає результати всіх попередніх ходів, як особистих, так і випадкових. Зауважимо, що ігри, які мають практичне значення, часто не володіють повною інформацією, так як у конфліктних ситуаціях невідомі ходи супротивника.

Стратегія гравця – це сукупність правил, які визнають однозначний вибір особистого ходу в кожній конкретній ситуації. Щоб поняття стратегії мало сенс, гра повинна включати особисті ходи гравців, тобто гра тільки з випадковими ходами не має стратегії.

Залежно від числа можливих стратегій, ігри розділяються на скінчені, коли у кожного гравця існує скінчене число стратегій, та нескінчені. Скінчена гра, в якій гравець A має m стратегій $A_1,...,A_m$, а гравець B має n стратегій $B_1,...,B_n$, зветься $m \times n$ матричною грою.

Позначимо через a_{ij} виграш для стратегій A_i, $1 \le i \le m$ і B_j, $1 \le j \le n$ та будемо вважати, що числа a_{ij} відомі та записані в клітинках платіжної матриці (табл. 7.1).

***Таблиця 7.1.* Платіжна матриця $m \times n$ гри**

Наші рішення	**Рішення супротивника**			
	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Розглянемо два приклади.

Приклад 7.1. Гравці A і B, не дивлячись на рішення один одного, кладуть на стіл монети сторонами Герб і Цифра. Правило гри таке:

- A виграє, якщо сторони монет однакові,
- B виграє (A програє), якщо сторони монет різні.

Складемо платіжну матрицю (табл. 7.2).

Таблиця 7.2.* Платіжна матриця гри для гравців *A* та *B

Рішення гравця A	**Рішення гравця B**	
	B_1 (Герб)	B_2 (Цифра)
A_1 (Герб)	1	–1
A_2 (Цифра)	–1	1

Проведемо аналіз гри:

1. Для одноразової гри розумних стратегій немає (шанси виграти гравців однакові).
2. Для багаторазової гри вже є шанс виграти.
3. Безглуздо застосовувати одну й ту ж стратегію, наприклад A_1, тому що за кількома ходами супротивник її легко «визначить».
4. Нерозумно чітко чергувати стратегії, тому що про таку «стратегію» гри теж легко здогадатися.
5. Шанс виграти підвищується, якщо застосовувати *змішану стратегію*, коли чисті стратегії A_1 і A_2 чергуються випадковим чином[1], наприклад так

[1] Методи побудови оптимальних змішаних стратегій будуть розглянуті далі

$$A_1\ A_2\ A_2\ A_1\ A_1\ A_2\ A_1\ A_2\ A_2\ A_2\ A_2\ A_1 \ldots$$

Приклад 7.2. Кожен з гравців A і B, не дивлячись на рішення один одного, обирає одне з трьох цілих чисел – **1**, **2** або **3**. Правило гри таке:

- A виграє, якщо сума чисел парна, і він отримає цю суму,
- B виграє, якщо сума чисел непарна, і A програє цю суму.

Складемо платіжну матрицю гри (табл. 7.3).

***Таблиця 7.3*. Платіжна матриця гри**

Рішення гравця A	**Рішення гравця B**		
	B_1 (число 1)	B_2 (число 2)	B_3 (число 3)
A_1 (число 1)	2	–3	4
A_2 (число 2)	–3	4	–5
A_3 (число 3)	4	–5	6

Аналіз гри показує, що:

1. На будь-яку стратегію, обрану A, його супротивник B може відповісти найкращим для нього чином:
   - на хід A_1 відповісти ходом B_2;
   - на хід A_2 відповісти ходом B_3;
   - на хід A_3 відповісти ходом B_2.
2. Якщо B знає, який хід зробив A, то B неодмінно виграє.
3. Сукупність оптимальних (найбільш вигідних) стратегій обох гравців (коли вони не знають про хід один одного) зводиться до застосування змішаної стратегії, яка буде розглянута далі.

7.2. Матрична гра в чистих стратегіях

Означення 7.1. Оптимальною будемо називати стратегію, яка з багаторазовими повторами забезпечить даному гравцю максимально можливий середній виграш або мінімально можливий середній програш.

При побудові оптимальної стратегії гравець вважає, що його супротивник теж розумний і робить все, щоб завадити нашому виграшу.

У даному випадку *не враховуються* елементи ризику та можливі помилки кожного з гравців. Рішення гри (виграш або програш) зводиться до одного числа – ціни гри.

Повернемось до табл. 7.1 та визначимо як побудувати оптимальну стратегію з чистими ходами обох супротивників.

Якщо гравець A обирає стратегію A_i, він повинен передбачити, що гравець B теж розумний і прийме стратегію B_j, при якій наш виграш a_{ij} буде мінімальним.

Тобто маємо передбачити, що на кожне рішення A_i супротивник B прийме рішення (табл. 7.4)

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Таблиця 7.4. **Визначення стратегії гравця A за платіжною матрицею**

Наші рішення	**Рішення супротивника**				$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	α_2
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	α_m

Розраховуючи на розумного супротивника і діючи найбільш обережно ми маємо вибрати ту зі стратегій, для якої число α_i буде максимальним, тобто

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}. \tag{7.1}$$

Величина α зветься *нижньою ціною* гри (максміном). Дотримуючись максмінної стратегії нам гарантований виграш не менше, ніж нижня ціна гри для *будь-якої* поведінки супротивника, хід якого заздалегідь не знаємо.

Для обчислення нижньої ціни гри α згідно з (7.1) достатньо знайти максимальний елемент у правому стовпчику табл. 7.4.

Розглянемо тепер, які рішення має приймати гравець B (наш супротивник), щоб мінімізувати свій програш.

Якщо гравець B обирає стратегію B_j, то він міркує так: розумний гравець A прийме таку стратегію A_i, щоб число a_{ij} було максимальним, тобто відповідало максимальному виграшу A і максимальному програшу B. Звідси випливає, що гравець B передбачає, що на кожне його рішення B_j гравець A приймає рішення

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Розраховуючи на розумного противника і діючи найбільш обережно гравець B має вибрати ту зі своїх стратегій, для якої число β_j буде мінімальним, тобто

$$\beta = \min \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{7.2}$$

Величина β, що визначають за умовою (7.2), зветься *верхньою ціною* гри або мінімаксом. Дотримуючись мінімаксної стратегії гравець B (наш супротивник) гарантує, що його програш не перевищить число β (верхню ціну гри) для будь-яких наших дій, про які він може не знати.

Для обчислення верхньої ціни гри β достатньо знайти мінімальний елемент у нижньому рядку табл. 7.5.

***Таблиця 7.5.* Визначення стратегії гравця B за платіжною матрицею**

Наші рішення	**Рішення супротивника**			
	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	β_1	β_2	...	β_n

У табл. 7.6 подано приклад розрахунку нижньої α та верхньої β цін гри для конкретної платіжної матриці. В даному випадку нижня ціна гри дорівнює $\alpha = 2$, що відповідає рішенню A_1 гравця A, а верхня ціна гри дорівнює $\beta = 4$, що відповідає рішенню B_4 гравця B.

Таким чином, основний принцип розглянутих стратегій – обережна гра в розрахунку на розумну поведінку протилежної сторони, яка гравцям гарантує виграш і програш у межах цін гри α та β.

Зауважимо, що для будь-яких чисел a_{ij} нижня ціна гри не перевищує верхню ціну гри, тобто справедливе співвідношення,

$$\min_j \max_i a_{ij} \geq \max_i \min_j a_{ij}, \tag{7.3}$$

або

$$\beta \geq \alpha. \tag{7.4}$$

***Таблиця 7.6.* Визначення нижньої та верхньої цін гри**

Наші рішення	**Рішення супротивника**				$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	7	2	3	**2**
A_2	8	1	9	–4	–4
A_3	–6	3	5	4	–6
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	8	7	9	**4**	

У справедливості умов (7.3), (7.4) легко переконатися, якщо подивитися на платіжну матрицю з визначеними значеннями α і β (рис. 7.2).

a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\alpha_1 = \min_j a_{1j}$
a_{21}	a_{22} (β)	a_{23}	$\alpha_2 = \min_j a_{2j}$
a_{31}	a_{32}	a_{33} (α)	$\alpha_3 = \min_j a_{3j}$
a_{41}	a_{42}	a_{44}	$\alpha_4 = \min_j a_{4j}$
$\beta_1 = \max_i a_{i1}$	$\beta_2 = \max_i a_{i2}$	$\beta_3 = \max_i a_{i3}$	

Рис. 7.2. Платіжна матриця з визначеними цінами гри

За означенням верхньої ціни гри β, елемент a_{22} максимальний в другому стовпчику. Звідси випливає, що

$$a_{22} \geq a_{32}. \tag{7.5}$$

З іншого боку, за означенням нижньої ціни гри α елемент a_{33} найменший в третьому рядку. Тобто

$$a_{32} \geq a_{33}. \tag{7.6}$$

Оскільки $\beta = a_{22}$, а $\alpha = a_{33}$, то з (7.5) і (7.6) безпосередньо випливає умова (7.4).

Згідно з умовою (7.4) в матричній грі можливі дві ситуації:

- нижня ціна гри строго менше верхньої:

$$\alpha < \beta,$$

- нижня та верхня ціни гри співпадають:

$$\alpha = \beta. \tag{7.7}$$

Умова (7.7) означає, що матрична гра має *сідлову точку*.

Нагадаємо, що в математиці сідлова точка – це стаціонарна (критична) точка з області визначення функції, у якій всі частинні похідні дорівнюють нулю, але ця точка не є локальним екстремумом.

Для функції $H(i, j)$ двох змінних i, j, яка має сідлову точку i^0, j^0, справедлива умова

$$H(i^0, j) \leq H(i, j) \leq H(i, j^0) \ \ \forall i \neq i^0, \ \forall j \neq j^0.$$

Графік такої неперервної функції $H(i, j)$ нагадує сідло: поверхня $H(i, j)$ опукла в одному напрямку та увігнута в іншому (рис. 7.3).

Якщо матриця гри має сідлову точку, то відхилення від стратегії в цій точці будь-яким з гравців погіршує його результат. Тобто оптимальне рішення *для обох гравців* – стратегія гри в сідловій точці.

В такому випадку значення $\alpha = \beta$ називається *чистою ціною гри*.

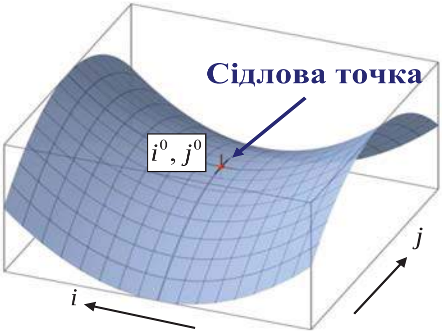


Рис. 7.3. Графік функції $H(i, j)$ з сідловою точкою i^0, j^0

Теорема 7.1. Якщо (i_1, j_1) та (i_2, j_2) – дві сідлові точки, то існують «симетричні» сідлові точки (i_1, j_2) та (i_2, j_1), причому виграші (програші) гравців у всіх сідлових точках однакові (рис. 7.4):

$$a(i_1, j_1) = a(i_2, j_2) = a(i_1, j_2) = a(i_2, j_1).$$

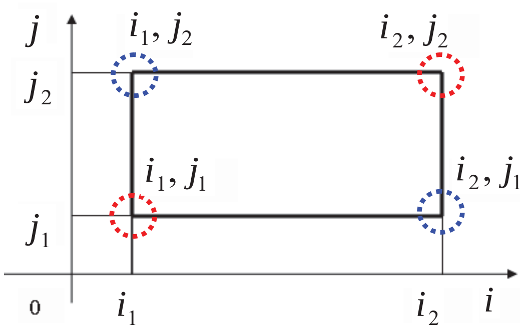


Рис. 7.4. Симетричні сідлові точки

Доведення. Нехай (i_1, j_1) та (i_1, j_1) – дві сідлові точки платіжної матриці (рис. 7.5).

Це означає, що для сусідніх точок виконуються умови:

$$a(i_1, j_1) \le a(i, j_1), \ \forall i \ne i_1, \tag{7.8}$$

$$a(i_1, j_1) \geq a(i_1, j),\ \forall j \neq j_1, \tag{7.9}$$

$$a(i_2, j_2) \leq a(i, j_2),\ \forall i \neq i_2, \tag{7.10}$$

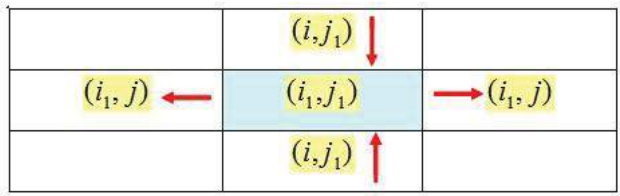
$$a(i_2, j_2) \geq a(i_2, j),\ \forall j \neq j_2 \tag{7.11}$$

Підстановка $i = i_2$ в (7.8) дає

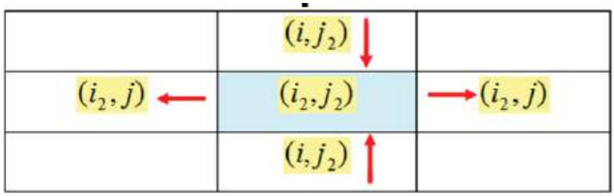
$$a(i_1, j_1) \leq a(i_2, j_1). \tag{7.12}$$

Підстановка $j = j_1$ в (7.11) дає

$$a(i_2, j_2) \geq a(i_2, j_1). \tag{7.13}$$



а



б

Рис. 7.5. Сусідні точки до сідлових точок платіжної матриці

Об'єднавши нерівності (7.12) і (7.13) отримаємо

$$a(i_1, j_1) \leq a(i_2, j_1) \leq a(i_2, j_2). \tag{7.14}$$

Аналогічно з (7.9) і (7.10) випливає, що

$$a(i_1, j_1) \geq a(i_1, j_2) \geq a(i_2, j_2). \tag{7.15}$$

Зрозуміло, що умови (7.14) і (7.15) можуть виконуватись сумісно, якщо виконуються умови теореми, тобто

$$a(i_1, j_1) = a(i_2, j_2) = a(i_1, j_2) = a(i_2, j_1)\,.$$

Теорема доведена.

На рис. 7.6 подано приклад платіжної матриці з чотирма сідловими точками.

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{2} & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{2} & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \min\limits_j a_{1j} = 2 \\ \to \min\limits_j a_{2j} = 2 \\ \to \min\limits_j a_{3j} = 0 \\ \to \min\limits_j a_{4j} = 0 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a\\a\\a\\a \end{array}}\right\} \max_i \min_j a_{ij} = 2\,.$$

$$\underbrace{\max_i a_{i1} = 2 \qquad \max_i a_{i2} = 2 \qquad \max_i a_{i3} = 5}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2}$$

Рис. 7.6. Приклад платіжної матриці з чотирма сідловими точками

Таким чином можна зробити такі загальні висновки:

1. Якщо в матричній грі є сідлова точка, то оптимальні стратегії обох гравців однакові – стратегії у сідловій точці, а ціна гри відома і дорівнює чистий ціні гри $\alpha = \beta$.

2. Якщо за наявністю сідлової точки один з гравців буде притримуватись оптимальної стратегії, а другий гравець, у надії підвищити свій виграш, буде відхилятися від неї, то він може тільки втратити, але не збільшити свій виграш.

3. Матриця гри може містити кілька сідлових точок.

4. Виграші у всіх сідлових точках однакові.

5. Якщо дві сідлові точки лежать у різних рядках і стовпчиках, то знайдуться ще дві «симетричні» сідлові точки.

6. Не у всіх платіжних матрицях є сідлова точка.

7. Гру з сідловою точкою рідко зустрічають на практиці: найчастіше нижня і верхня ціни гри різняться, тобто $\alpha < \beta$.

8. У випадку відсутності сідлової точки для підвищення шансів середнього виграшу ходи гравців повинні включати не тільки чисті стратегії, що ґрунтуються на мінмаксі та максміні, але й випадкові ходи, тобто доцільно будувати змішані стратегії.

7.3. Змішані стратегії

Розглянемо матричну гру, платіжну матрицю якої представлено в табл. 7.7.

Таблиця 7.7. **Приклад платіжної матриці для гри з нульовою сумою**

Наші рішення	**Рішення супротивника**				$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	7	1	3	1
A_2	8	1	9	–4	–4
A_3	5	–6	3	3	–6
A_4	8	4	–2	4	–2
A_5	–6	3	5	5	–6
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	8	7	9	5	

З табл. 7.7 випливає, що нижня ціна гри дорівнює

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = 1, \tag{7.16}$$

а верхня ціна гри дорівнює

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_j a_{ij} = 5,$$

тобто справедлива умова $\alpha < \beta$.

Виникає питання: як обирати стратегії, щоб для багаторазової гри наш середній виграш $\nu_{ср}$ перевищував нижню ціну, тобто щоб

$$\nu_{ср} > \alpha. \tag{7.17}$$

Покажемо, що для цього слід застосовувати *змішані стратегії* – тобто чергувати чисті стратегії

$$A_i,\ i = 1,...,m$$

з певним співвідношенням частот p_i (табл. 7.8).

***Таблиця 7.8.* Розподіл частот чистих стратегій**

Чисті стратегії	A_1	A_2	...	A_m
Частоти	p_1	p_2	...	p_m

Зауважимо, що чисту стратегію можна вважати особливим випадком змішаної стратегії, коли таку стратегію застосовувати з частотою одиниці, а інші – з нульовою частотою.

Означення 7.2. Змішаною стратегію називають імовірнісний розподіл, який задано на множині чистих стратегій, а саме:

$$p = (p_1,..., p_m) \in P_m = \left\{ p \mid \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \ p_i \geq 0 \right\} \text{ для гравця } A,$$

$$q = (q_1,..., q_n) \in Q_n = \left\{ q \mid \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ \ q_j \geq 0 \right\} \text{ для гравця } B.$$

Означення 7.3. Чисту стратегію називають *активною* (корисною), якщо її використовують у деякій оптимальній змішаній стратегії з ненульовою імовірністю.

Означення 7.4. Платіжною функцією називають математичне сподівання виграшу гравця A для багаторазового використання змішаних стратегій p та q

$$E(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j . \qquad (7.18)$$

Таким чином, мета гравця A – збільшення платіжної функції (7.18), а мета гравця B – протилежна, тобто зменшення платіжної функції $E(p,q)$.

Оскільки цілі гравців протилежні, то, за аналогією з використанням чистих стратегій, вводиться визначення *нижньої ціни гри*

$$\alpha = \max_{p \in P_m} \min_{q \in Q_n} E(p,q)$$

та *верхньої ціни гри*

$$\beta = \min_{q \in Q_n} \max_{p \in P_m} E(p,q).$$

У 1928 році математик Джон фон Нейман довів таку основну теорему матричних ігор.

Теорема 7.2. У будь-якій матричній грі *двох гравців* з нульовою сумою існує принаймні одна оптимальна пара змішаних стратегій $p^* \in P_m$ та $q^* \in Q_n$, при яких виконуються умову рівноваги

$$\max_{p \in P_m} \min_{q \in Q_n} E(p,q) = \min_{q \in Q_n} \max_{p \in P_m} E(p,q) = \nu, \qquad (7.19)$$

де $\nu = E(p^*, q^*)$ – чиста ціна гри.

Якщо гравці дотримуються оптимальних змішаних стратегій p^*, q^*, які задовольняють умову (7.19), то

$$E(p,q^*) \le E(p^*,q^*) \le E(p^*,q) \ \ \forall p \in P_m, \ \forall q \in Q_n.$$

Перш ніж визначити умову рівноваги (7.19) розглянемо методи спрощення платіжної матриці.

Враховуючи те, що платіжна матриця визначає виграші гравця A та програші гравця B, введемо такі означення.

Означення 7.5. Рядок i_1 платіжної матриці *домінує* над рядком i_2, якщо

$$a_{i_1 j} \ge a_{i_2 j}, \ \forall j = 1,...,n$$

та існує стратегія гравця B, що відповідає стовпчику j_0, така, що

$$a_{i_1 j_0} > a_{i_2 j_0}.$$

Зрозуміло, що в цьому випадку стратегія гравця A, що відповідає рядку i_1 заздалегідь краща стратегії, що відповідає рядку i_2 (забезпечує більший виграш), і друга стратегія може бути видалена з платіжної матриці.

Аналогічно визначають домінування стовпчиків.

Означення 7.6. Стовпчик j_1 платіжної матриці *домінує* за стовпчик j_2, якщо

$$a_{ij_1} \le a_{ij_2}, \ \forall i = 1,...,m,$$

та існує стратегія гравця A, що відповідає рядку i_0, така, що

$$a_{i_0 j_1} < a_{i_0 j_2}.$$

Зрозуміло, що в такому випадку стратегія гравця B, що відповідає стовпчику j_1 заздалегідь краща стратегії, що відповідає стовпчику j_2 (забезпечує менший програш), і друга стратегія може бути видалена з платіжної матриці.

Також платіжні матриці можуть бути спрощені, якщо з них видалити

- один зі співпадаючих рядків i_1 або i_2, коли

$$a_{i_1 j} = a_{i_2 j}, \ \forall j = 1,...,m,$$

- один зі співпадаючих стовпчиків j_1 або j_2, коли

$$a_{ij_1} = a_{ij_2}, \ \forall i = 1,...,n.$$

Зрозуміло, що рішення за початковою та спрощеною платіжними матрицями будуть співпадати.

Приклад 7.3. Спростимо платіжну матрицю (табл. 7.9).

***Таблиця 7.9.* Початкова платіжна матриця**

Чисті стратегії гравця A	**Чисті стратегії гравця B**			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Порядок спрощення:

Крок 1. Видаляємо рядок 2, тому що

$$a_{1j} \geq a_{2j}, \ \forall j = 1,2,3,4,$$

та видаляємо рядок 3, тому що

$$a_{1j} = a_{3j}, \ \forall j = 1,2,3,4.$$

В результаті платіжна матриця приймає вигляд (табл. 7.10).

Таблиця 7.10. **Спрощена платіжна матриця після кроку 1**

Чисті стратегії гравця A	**Чисті стратегії гравця** B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Крок 2. З табл. 7.10 видаляємо стовпчик 3, тому що

$$a_{13} > a_{14} \text{ та } a_{13} > a_{44}.$$

Спрощена таблиця приймає остаточний вигляд (табл. 7.11).

Таблиця 7.11. **Кінцева таблиця після спрощення за кроками 1 та 2**

Чисті стратегії гравця A	**Чисті стратегії гравця** B		
	B_1	B_2	B_4
A_1	1	2	3
A_4	4	3	0

Таким чином, тепер можна аналізувати не початкову платіжну матрицю 4×4, а спрощену матрицю 2×3, що спрощує задачу.

Розглянемо порядок розв'язування матричної гри 2×2 в змішаних стратегіях.

Припустимо, що платіжна матриця гри (табл. 7.12) не має сідлової точки, тобто нижня ціна гри менше верхньої

$$\alpha < \beta.$$

Таблиця 7.12. Платіжна матриця гри 2×2

Стратегії гравця A	Стратегії гравця B	
	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Необхідно знайти оптимальну стратегію гравця A

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$

яка для будь-яких дій супротивника забезпечує гравцю A максимальний середній виграш, що дорівнює ціні гри ν (табл. 7.13).

Таблиця 7.13. Оптимальна стратегія гравця A

Оптимальна стратегія гравця A	Чисті стратегії гравця B	
	B_1	B_2
A_1 з частотою p_1	a_{11}	a_{12}
A_2 з частотою p_2	a_{21}	a_{22}

За означенням, стратегія гравця A буде оптимальною, якщо незалежно від ходу супротивника середній виграш A дорівнює ціні гри ν, тобто

$$\left.\begin{array}{lll} \text{якшо} & B_1 \Rightarrow & a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu \\ \text{якщо} & B_2 \Rightarrow & a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu \end{array}\right\}. \tag{7.20}$$

Оскільки $p_1 + p_2 = 1$, то з системи рівнянь (7.20) випливає:

$$a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1).$$

Тобто

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{7.21}$$

Відповідно,

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{7.22}$$

Підстановка p_1 з (7.21) у перше з рівнянь (7.20) дає змогу визначити ціну гри

$$\nu = a_{11}\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} + a_{21}\left(1 - \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}\right).$$

або

$$\nu = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{7.23}$$

Для відомої ціни гри ν, легко можна визначити і оптимальну стратегію S_B^* супротивника (гравця B).

Оскільки $q_1 + q_2 = 1$, то для визначення

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

достатньо одного рівняння, наприклад,

$$a_{11}q_1 + a_{12}(1 - q_1) = \nu.$$

У результаті остаточно маємо

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{7.24}$$

та

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \tag{7.25}$$

Приклад 7.4. Покажемо на прикладі конкретної платіжної матриці (табл. 7.14), що змішана стратегія дійсно може забезпечити рішення гри з ціною ν, яка перевищує нижню ціну гри, тобто $\nu > \alpha$.

***Таблиця 7.14*. Платіжна матриця гри з ціною ν**

Чисті стратегії гравця A	**Чисті стратегії гравця B**	
	B_1	B_2
A_1	3	5
A_2	6	1,5

Згідно з даними табл. 7.14 нижня ціна гри дорівнює

$$\alpha = \max_j \min_i a_{ij} = 3,$$

а верхня ціна гри дорівнює

$$\beta = \min_i \max_j = 5.$$

Оскільки немає сідлової точки, то будемо шукати оптимальний розв'язок у змішаних стратегіях S_A^* та S_B^*.

Згідно з (7.21) маємо

$$p_1 = \frac{\frac{3}{2} - 6}{3 + \frac{3}{2} - 5 - 6} = \frac{9}{13}.$$

Відповідно

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{9}{13} = \frac{4}{13}.$$

Звідси ціна гри дорівнює

$$\nu = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = 3 \cdot \frac{9}{13} + 6 \cdot \frac{4}{13} = \frac{51}{13} \approx 3{,}923 > 3.$$

Згідно з (7.24) маємо

$$q_1 = \frac{\frac{3}{2} - 5}{3 + \frac{3}{2} - 5 - 6} = \frac{7}{13}.$$

Відповідно

$$q_2 = 1 - q_1 = \frac{6}{13}.$$

Таким чином, оптимальний розв'язок гри в змішаних стратегіях буде таким:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}, \qquad (7.26)$$

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{7}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}. \qquad (7.27)$$

Для багаторазового використання оптимальні змішані стратегії (7.26) та (7.27) забезпечать максимальний виграш гравцю A та мінімальний програш гравцю B. Зауважимо, що ціна гри $\nu \approx 3{,}923$ дійсно перевищує нижню ціну гри $\alpha = 3$.

7.4. Графоаналітичний метод розв'язування матричної гри

Ми показали, що за відсутності сідлової точки розв'язок гри з платіжною матрицею 2×2 в змішаних стратегіях знаходиться дуже просто – достатньо скористатися співвідношеннями (7.26), (7.27).

Покажемо, що коли платіжна матриця зводиться до матриці $2 \times n$ або до матриці $m \times 2$ (див. приклад 7.3), то розв'язок задачі може бути здійснено за допомогою графоаналітичного методу.

Пояснимо спочатку графоаналітичний метод на прикладі платіжної матриці 2×2 (табл. 7.15).

Таблиця 7.15. **Платіжна матриця** 2×2

Стратегії гравця A	**Стратегії гравця** B	
	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Як було показано, при $\alpha \neq \beta$ для гравця A оптимальну змішану стратегію

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \tag{7.28}$$

що забезпечує ціну гри ν в межах $\alpha < \nu < \beta$, можна знайти як розв'язок системи двох алгебраїчних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p + a_{21}(1-p) = \nu \\ a_{12}p + a_{22}(1-p) = \nu \end{aligned}\right\}.$$

Зрозуміло, що останні співвідношення визначають дві прямі в системі координат (p, ν), а точка перетину зазначених прямих визначає оптимальний розв'язок матричної гри.

Тому, для графоаналітичного розв'язку задачі потрібно (рис. 7.7):

- побудувати систему координат (p, ν);
- відкласти на осі ординат виграші гравця A зі стратегією A_2, тобто числа a_{21} і a_{22}, а на прямій $p = 1$ – виграші гравця A зі стратегією A_1, тобто числа a_{12} і a_{11} (рис. 7.7, *а*);
- з'єднати зазначені точки прямими лініями, точка перетину яких дає оптимальний розв'язок матричної гри – імовірність $p = p^*$, що фігурує в оптимальній стратегії (7.28).

Аналогічним чином знаходять оптимальну стратегію гравця B (рис. 7.7, б);

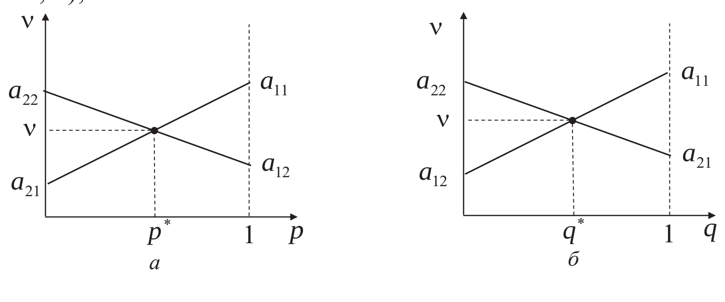


Рис. 7.7. Графоаналітичний метод визначення матричної гри

Приклад 7.5. Знайдемо графоаналітичним методом розв’язок гри з платіжною матрицею 7.16.

За даними табл. 7.16 визначаємо $\alpha = 4$, $\beta = 7$, тобто немає сідлової точки ($\alpha \neq \beta$) і ціна гри ν за змішаною стратегією має належати інтервалу $\nu \in [4,7]$.

Таблиця 7.16. **Платіжна матриця без сідлової точки**

Стратегії гравця A	**Стратегії гравця** B	
	B_1	B_2
A_1	3	8
A_2	7	4

Саме це підтверджує розв’язок гри графоаналітичним методом (рис. 7.8.):

$$p = 0{,}375,\ \text{а}\ \nu = 5{,}5 \in [4,7].$$

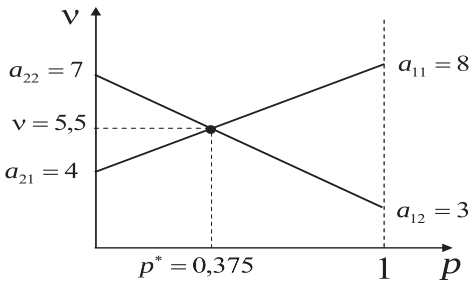


Рис. 7.8. Розв’язок гри графоаналітичним методом

Графоаналітичний метод дає змогу розв’язувати матричні ігри $2 \times n$ або $m \times 2$ при довільних значеннях m та n. Це випливає з наступної теореми, яка доведена в теорії матричних ігор.

Теорема 7.3. Будь-яка скінчена гра $m \times n$ має розв’язок, при якому число активних стратегій *кожного* з гравців не перевищує число

$$L = \min(m, n).$$

З теореми 7.3 випливає, що в матричних іграх $2 \times n$ або $m \times 2$ завжди знайдеться розв’язок, який передбачає не більше як дві активні стратегії *кожного* з гравців. Саме це і надає змогу розв'язувати матричні ігри $2 \times n$ та $m \times 2$ графоаналітичним методом.

Розглянемо це на прикладі розв'язку $2 \times n$ гри з платіжною матрицею за таблицею 7.17.

***Таблиця 7.17.* Платіжна матриця $2 \times n$ гри**

Стратегії гравця A	**Стратегії гравця B**			
	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}

За теоремою 7.3 число *активних* стратегій гравця B не перевищує двох. Тому, якщо розглядати гру з боку гравця A, то такі дві активні стратегії гравця B можна знайти з умови максміну, а саме

$$\nu = \max_{0 \le p \le 1} \min_{j} \{a_{1j} p + a_{2j}(1-p)\}, \; j = 1,...,n.$$

Для того, щоб знайти максимум за p функції

$$\min_{j} \{a_{1j} p + a_{2j}(1-p)\}$$

скористаємося графічною інтерпретацією задачі (рис. 7.9).

З цією метою

- у координатах (p, ν) будуємо прямі лінії

$$\delta = a_{1j} p + a_{2j}(1-p), \; j = 1,...,n, \qquad (7.29)$$

які відповідають можливим стратегіям $B_1, B_2, ..., B_n$ гравця B;

- будуємо ломану лінію, яка огинає знизу прямі (7.29);
- рішення p^* відповідає максимальній точці ломаної лінії.

Як це видно з рисунка активними стратегіями гравця B є стратегії B_2 і B_3, які перетинаються у точці з координатами (p^*, ν), а стратегія B_1 не потрібна.

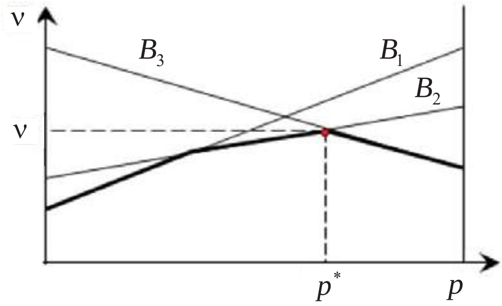


Рис. 7.9. Графічна інтерпретація $2 \times n$ гри

Приклад 7.6. Розглянемо тепер на конкретних даних (табл. 7.18) приклад розв'язування гри графоаналітичним методом.

Таблиця 7.18. **Платіжна матриця гри** 2×3

Стратегії гравця A	**Стратегії гравця** B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	4	3

Визначаємо нижню та верхню ціни гри

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 3;$$
$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 5.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$ (немає сідлової точки), то шукаємо розв'язок задачі в змішаних стратегіях. Змішана стратегія може забезпечити гравцю A максимально можливий середній виграш з ціною гри

$$\nu \in [3,5]. \tag{7.30}$$

Дамо графічну інтерпретацію задачі (рис. 7.10).

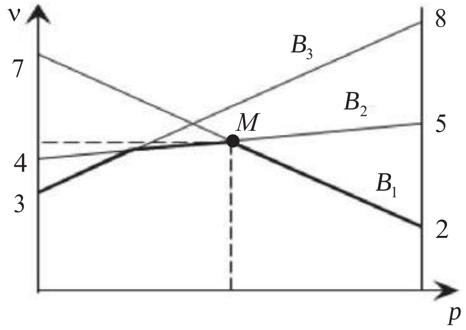


Рис. 7.10. Графічна інтерпретація задачі

Як це видно з рис. 7.10 у точці M перетинаються прямі, які відповідають стратегіям B_1 і B_2 гравця B. Це значить, що стратегія B_3 неактивна та може бути вилучена. Тобто задачу спрощують та зводять до 2×2 гри (табл. 7.19).

Таблиця 7.19. **Спрощена платіжна матриця**

Активні стратег ії гравця A	**Активні стратегії гравця B**	
	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	7	4

Знайдемо тепер розв'язок матричної гри 2×2 за табл. 7.19 аналітичним методом.

Згідно з (7.21) маємо

$$p_1 = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} = \frac{4-7}{2+4-5-7} = 0{,}5.$$

Відповідно,

$$p_2 = 1 - p_1 = 0{,}5.$$

За (7.24) маємо

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{4 - 5}{2 + 4 - 5 - 7} \approx 0{,}17\,.$$

Звідси

$$q_2 = 1 - q_1 \approx 0{,}83\,.$$

За (7.22) маємо

$$\nu = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{4 \cdot 2 - 5 \cdot 7}{2 + 4 - 5 - 7} = 4{,}5\,.$$

Таким чином, для даних прикладу 7.6 (табл. 7.17) можна визначити оптимальні змішані стратегії гравців:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \tag{7.31}$$

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0{,}17 & 0{,}83 \end{pmatrix}. \tag{7.32}$$

Якщо для багаторазових ігор гравці будуть використовувати оптимальні стратегії (7.31), (7.32), то гравець A отримає максимальний середній виграш, а гравець B мінімальний середній програш.

$$\nu = 4{,}5 > 3\,.$$

У даному випадку ціна гри дійсно задовольняє умову (7.30) і перевищує мінімальну ціну гри в чистих стратегіях:

Розв'язок матричної гри $m \times 2$ знаходять аналогічним чином з тою різницею, що гру розглядають з позиції гравця B (мінімаксу).

Продемонструємо розв'язування такої гри за конкретними даними.

Приклад 7.7. Необхідно знайти розв'язок гри $m \times 2$, початкову платіжну матрицю якої подано в табл. 7.20.

Таблиця 7.20. **Початкова платіжна матриця гри** $m \times 2$

Чисті стратегії гравця A	**Чисті стратегії гравця** B	
	B_1	B_2
A_1	1	4
A_2	3	1
A_3	2	2,5
A_4	5	0

Визначаємо спочатку нижню та верхню ціни гри:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{1,\ 1,\ 2,\ 0\} = 2\,;$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{5,\ 4\} = 4\,.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$ (немає сідлової точки), то будемо шукати розв’язок задачі в змішаних стратегіях, які забезпечать ціну гри

$$\nu \in [2{,}4]. \tag{7.33}$$

На рис. 7.11 представлено графічну інтерпретацію задачі.

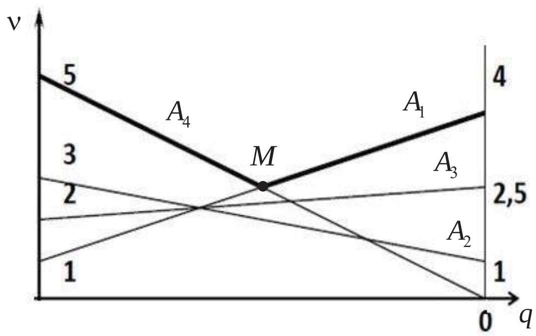


Рис. 7.11. Графічна інтерпретація задачі

У точці оптимуму M перетинаються лише дві прямі, які відповідають стратегіям A_1 та A_4 гравця A. Тому саме стратегії A_1 та A_4 є активними, а стратегії A_2, A_3 неактивні та можуть бути вилучені.

Задача зводиться до 2×2 гри (табл. 7.21), аналітичний розв'язок якої вже досить ретельно розглядався.

***Таблиця 7.21.* Спрощена платіжна матриця**

Активні стратегії гравця A	**Активні стратегії гравця B**	
	B_1	B_2
A_1	1	4
A_4	5	0

Згідно з (7.21), (7.23) та (7.24) за даними спрощеної табл. 7.21 визначаємо:

$$p_1 = \frac{a_{42} - a_{41}}{a_{11} + a_{42} - a_{12} - a_{41}} = \frac{0-5}{1+0-4-5} = 0,625;$$

$$q_1 = \frac{a_{42} - a_{12}}{a_{11} + a_{42} - a_{12} - a_{41}} = \frac{0-4}{1+0-4-5} = 0,5;$$

$$\nu = \frac{a_{42}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{42} - a_{12} - a_{41}} = \frac{0\cdot 1 - 4\cdot 5}{1+0-4-5} = 2,5.$$

Тобто, оптимальні стратегії гравців:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_4 \\ 0,625 & 0,375 \end{pmatrix},$$

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix},$$

а ціна гри ν, що задовольняє умову (7.33), перевищує мінімальну ціну гри в чистих стратегіях

$$\nu = 2,5 > 2.$$

Зауважимо, що в загальному випадку $m \times n$ гри при $m > 2$ та $n > 2$ графічна інтерпретація задачі передбачає перехід у багатовимірний простір.

Тому візуальний аналіз задачі стає проблематичним і для практичного розв'язування задач застосовують два інших підходи, а саме:

- загальний аналітичний метод розв'язування задачі на основі методу лінійного програмування;
- наближений метод розв'язування задачі.

7.5. Загальний метод розв'язування матричної гри

Будемо як і раніше вважати, що для гри з m можливими стратегіями $A_1,...,A_m$ гравця A та n можливими стратегіями $B_1,...,B_n$ гравця B задана платіжна матриця $m \times n$ (табл. 7.22), у клітинках якої фігурують виграші a_{ij}, $i = 1,...,m$, $j = 1,...n$ гравця A (програші гравця B) у ситуаціях, коли гравці застосовують відповідно стратегії A_i та B_j.

Таблиця 7.22. **Платіжна матриця загальної $m \times n$ гри**

Наші рішення	**Рішення супротивника**			
	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Необхідно знайти розв'язок гри, тобто дві оптимальні змішані стратегії гравців A та B

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots A_m \\ p_1 & p_2 & \dots\ p_m \end{pmatrix}, \qquad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots B_m \\ q_1 & q_2 & \dots\ q_n \end{pmatrix},$$

де

$$p_1 + p_2 + ... + p_m = 1 \quad \text{та} \quad q_1 + q_2 + ... + q_m = 1,$$

причому деякі з чисел p_i, $i=1,...,m$ та q_j, $j=1,...n$ можуть дорівнювати нулю.

Оптимальна стратегія S_A^* повинна при будь-яких діях супротивника B забезпечувати гравцю A середній виграш, не менший за ціну гри ν. А якщо гравець B також дотримується своєї оптимальної стратегії S_B^*, то виграш гравця A дорівнює ν.

Аналогічно оптимальна стратегія S_B^* при будь-яких діях гравця A повинна забезпечувати гравцю B програш, не більший за ціну гри ν, та рівний ціні гри ν при дотриманні гравцем A своєї оптимальної стратегії S_A^*.

Будемо надалі вважати, що ціна гри додатна $\nu > 0$. Для виконання умови $\nu > 0$ достатньо, щоб всі елементи платіжної матриці були невід'ємними. Це легко забезпечити, якщо до всіх елементів a_{ij} платіжної матриці додати відповідну величину $L > 0$. Зрозуміло, що з такою модифікацією платіжної матриці ціна гри зміниться, але оптимальні стратегії гравців залишаться незмінними.

Припустимо, що гравець A обрав свою оптимальну стратегію

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots A_m \\ p_1 & p_2 & \dots p_m \end{pmatrix}.$$

Тоді, якщо супротивник (гравець B) обрав свою чисту стратегію B_j, то наш середній виграш буде дорівнювати

$$a_j = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + ... + p_m a_{mj}. \qquad (7.34)$$

Наша оптимальна стратегія S_A^* має таку властивість, що для будь-якої поведінки супротивника B_j, $j=1,...,n$ забезпечує виграш не менший за ціну гри $\nu > 0$.

Звідси випливає, що будь-яке число a_j, $j=1,...,n$, яке задовольняє співвідношенню (7.34), не може бути меншим за ν, тобто маємо систему нерівностей

$$\left.\begin{array}{l} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + ... + p_m a_{m1} \ge \nu \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + ... + p_m a_{m2} \ge \nu \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + ... + p_m a_{mn} \ge \nu \end{array}\right\}. \quad (7.35)$$

Розділимо нерівності (7.35) на додатну величину ν та позначимо:

$$\xi_1 = \frac{p_1}{\nu};\ \xi_2 = \frac{p_2}{\nu};\ \dots;\ \xi_m = \frac{p_m}{\nu}. \quad (7.36)$$

Тоді систему (7.35) можна записати так:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + ... + a_{m1}\xi_m \ge 1 \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + ... + a_{m2}\xi_m \ge 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + ... + a_{mn}\xi_m \ge 1 \end{array}\right\}, \quad (7.37)$$

де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – невід’ємні числа, що визначаються за (7.36).

Оскільки

$$p_1 + p_2 + ... + p_m = 1,$$

то числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ задовольняють умову

$$\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n = \frac{1}{\nu}. \quad (7.38)$$

З умови (7.38) випливає: для того, щоб наш *гарантований* середній виграш ν був максимальним, сума чисел $\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ повинна бути мінімальною.

Таким чином, отримуємо таку задачу лінійного програмування:

$$\Phi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n \to \min \quad (7.39)$$

за умови невід’ємності $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ та обмежень (7.37).

Продемонструємо деталі розв’язування задачі на конкретному прикладі.

Приклад 7.8. Кожен з гравців A і B, не дивлячись на рішення один одного, обирає одне з трьох цілих чисел – 1, 2 або 3. Гравець A

отримає суму цих чисел, якщо вона парна, і програє гравцю B суму цих чисел, якщо вона непарна (табл. 7.23). Необхідно знайти оптимальні стратегії гравців.

Таблиця 7.23. **Платіжна матриця гри**

Рішення гравця A	**Рішення гравця** B		
	B_1 (число 1)	B_2 (число 2)	B_3 (число 3)
A_1 (число 1)	2	–3	4
A_2 (число 2)	–3	4	–5
A_3 (число 3)	4	–5	6

Згідно з наведеними даними, нижня ціна гри $\alpha = -3$, а верхня ціна гри $\beta = 4$, тобто сідлової точки немає. Тому будемо шукати оптимальні змішані стратегії гравця, що забезпечать ціну гри

$$\nu \in [-3, 4].$$

Для забезпечення умови $a_{ij} \geq 0$ модифікуємо елементи початкової платіжної матриці

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + 5. \qquad (7.40)$$

У результаті такої модифікації ціна гри збільшиться на 5 одиниць (потім ми зробимо відповідну корекцію), але самі рішення гравців за модифікованою платіжною матрицею (табл. 7.24) не зміняться.

Таблиця 7.24. **Модифікована платіжна матриця**

Рішення гравця A	**Рішення гравця** B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

Визначимо оптимальну змішану стратегію S_A^* гравця A на основі системи нерівностей

$$\left.\begin{aligned}7\xi_1+2\xi_2+9\xi_3&\ge 1\\2\xi_1+9\xi_2+0\xi_3&\ge 1\\9\xi_1+0\xi_2+11\xi_3&\ge 1\end{aligned}\right\}, \tag{7.41}$$

де:

$$\xi_1=\frac{p_1}{\nu};\ \xi_2=\frac{p_2}{\nu};\ \ldots;\ \xi_m=\frac{p_m}{\nu}. \tag{7.42}$$

Введемо у (7.41) фіктивні невід'ємні змінні z_1, z_2, z_3 і перейдемо до системи рівнянь

$$\left.\begin{aligned}7\xi_1+2\xi_2+9\xi_3-z_1&=1\\2\xi_1+9\xi_2+0\xi_3-z_2&=1\\9\xi_1+0\xi_2+11\xi_3-z_3&=1\end{aligned}\right\}. \tag{7.43}$$

Розв'язок системи рівнянь (7.43) відносно змінних ξ_1, ξ_2, ξ_3 надає

$$\left.\begin{aligned}\xi_1&=\frac{1}{20}-\frac{99}{80}z_1+\frac{11}{40}z_2+\frac{81}{80}z_3\\\xi_2&=\frac{1}{10}+\frac{11}{40}z_1+\frac{1}{20}z_2-\frac{9}{40}z_3\\\xi_3&=\frac{1}{20}+\frac{81}{80}z_1-\frac{9}{40}z_2-\frac{59}{80}z_3\end{aligned}\right\}. \tag{7.44}$$

Для розв'язку задачі потрібно мінімізувати цільову функцію, яка в нашому випадку має вигляд

$$\Phi=\xi_1+\xi_2+\xi_3. \tag{7.45}$$

Тобто, з урахуванням (7.44) з (7.45) випливає така оптимізаційна задача

$$\Phi=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}z_1+\frac{1}{10}z_2+\frac{1}{20}z_3\to\min. \tag{7.46}$$

Оскільки усі коефіцієнти в (7.46) додатні, то значення фіктивних змінних z_1, z_2, z_3, за яких функція Φ буде мінімальною, мають дорівнювати нулю

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0.$$

Тоді функція Φ набуває значення

$$\Phi = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{5},$$

і ціна гри дорівнює

$$\nu = 5. \qquad (7.47)$$

Підстановка значень $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ у систему (7.44) дає:

$$\xi_1 = \frac{1}{20},\ \xi_2 = \frac{1}{10},\ \xi_3 = \frac{1}{20}. \qquad (7.48)$$

Із (7.42) з урахуванням (7.48) випливає, що:

$$p_1 = \frac{1}{4},\ p_2 = \frac{1}{2},\ p_3 = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, знайдена оптимальна змішана стратегія гравця A

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad (7.49)$$

тобто для отримання гарантованого середнього виграшу в багаторазовій грі нам потрібно обирати цифру 1 у 25% випадках, цифру 2 у 50% випадках та цифру 3 у 25% випадках.

Для знаходження оптимальної стратегії гравця B треба розглянути гру зі сторони B з будь-якими стратегіями гравця A, наприклад, з активними стратегіями A_2 та A_3.

Оскільки, ціна гри $\nu = 5$, то за даними табл. 7.24 маємо таку системи рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} 2q_1 + 9q_2 = 5 \\ 9q_1 + 11q_3 = 5 \end{array}\right\}$$

або

$$\left.\begin{array}{l} 2q_1 + 9q_2 = 5 \\ 9q_1 + 11(1 - q_2 - q_1) = 5 \end{array}\right\}.$$

Звідси

$$q_1 = q_3 = \frac{1}{4},\ q_2 = \frac{1}{2},$$

і оптимальна стратегія гравця B така:

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \tag{7.50}$$

Оскільки, згідно з (7.40) ми збільшили всі елементи a_{ij} платіжної матриці на величину $L = 5$, то тепер необхідно зменшити ціну гри на п'ять одиниць.

Тобто остаточна ціна гри за початковою платіжною матрицею (табл. 7.23) дорівнює

$$\nu = 0.$$

Таким чином, багаторазова гра за оптимальними стратегіями гравців S_A^* і S_B^*, які визначаються співвідношеннями (7.49) та (7.50), не має переможця. Якщо ж один з гравців відступить від своєї оптимальної стратегії, то він *обов'язково програє*.

Ми розглянули аналітичний метод розв'язування парної гри з нульовою сумою. Саме такі ігри найбільш досліджені в теорії ігор. Але така модель не охоплює всі практичні випадки. Зокрема, доволі часто існують ситуації, коли число конфліктуючих сторін більше двох і необхідно знайти оптимальне рішення, яке в деякому розумінні буде задовольняти *всіх* учасників гри.

Тому в теорії ігор розглядають *узагальнене* визначення ігор у нормальній (стратегічній) формі .

Означення 7.7. Грою у нормальній (стратегічній) формі називають гру, в якій:

- приймає учать N гравців ($N \geq 2$);
- кожний i-й гравець має множину стратегій (ходів) $X_i = \{x_i\}$, $i = 1,..., N$;
- для кожного i-го гравця задана функція виграшу

$$K_i = K_i(x_1, x_2,..., x_i,...x_N),$$

яка залежить як від вибору його стратегії $x_i \in X_i$, так і від обраних стратегій іншими гравцями $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, …, $x_N \in X_N$, причому гравці *одночасно* обирають свої стратегії, *не маючи інформації* щодо стратегій інших гравців.

Таким чином, після вибору стратегій гравців виникає конкретна ситуація

$$x = (x_1, x_2,..., x_i,...x_N),$$

у якій гравці отримають свої виграші

$$K_1(x),\ K_2(x),\ \ldots,\ K_i(x),\ \ldots,\ K_N(x).$$

Означення 7.8. Стратегію $x_i^{**} \in X_i$ називають *домінуючою* стратегією i-го гравця, якщо $\forall x_1 \in X_1$, $\forall x_2 \in X_2$, $\ldots, \forall x_i \in X_i, \ldots$, $\forall x_N \in X_N$ справедлива умова

$$K_i(x_1, x_2,..., x_i^{**},...x_N) \geq K_i(x_1, x_2,..., x_i,...x_N).$$

Зауважимо, що

1. Вибір домінуючої стратегії приносить гравцеві результати, які не гірші, ніж результати будь-якої його іншої стратегії, *незалежно від стратегій*, обраних іншими гравцями.

2. Для спрощення прийняття рішення кожен гравець повинен залишити тільки домінуючі стратегії, якщо це можливо, і тим самим сформувати Парето ефективну множину стратегій.

3. Конкретна гра може не містити Парето ефективних множин стратегій гравців.

Означення 7.9. Набір стратегій

$$x^* = (x_1^*, x_2^*,..., x_i^*,...x_N^*)$$

називають рівноважним за Нешем, якщо для будь-якого i -го гравця

$$K_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_i^*, \dots x_N^*) \geq K_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_i, \dots x_N^*),\ \forall x_i \in X_i,$$

тобто відхилення від рівноваги може лише погіршити виграш цього гравця.

Зауважимо, що сідлова точка парної гри – частковий випадок рівноваги за Нешем.

Таким чином можна зробити такі висновки:

1. Якщо всі гравці мають домінуючі стратегії, то гра має єдину рівновагу за Нешем.

2. Індивідуальне відхилення від рівноваги за Нешем будь-якого з гравців не принесе йому вигоду.

3. Спільне відхилення від рівноваги за Нешем декількох гравців може, але *не обов'язково* принести їм вигоду.

Розглянемо наочний приклад рівноваги за Нешем, який в теорії прийняття рішень отримав назву «*Дилема в'язня*».

Приклад 7.9. Задачу формулюють таким чином.

1. Два злочинці спіймані за дрібні крадіжки і їм загрожує до 1 року ув'язнення.

2. Слідчий пропонує угоду: той, хто надає зізнання у більш серйозному злочині (груповому пограбуванні) отримає помилування, але тоді другий отримує *максимальний* термін – 10 років ув'язнення.

3. Якщо ж *обох* визнають винними у груповому пограбуванні, то вони отримують до 3 років ув'язнення.

У клітинках табл. 7.25 представлено можливі наслідки рішень злочинців.

***Таблиця 7.25*. Наслідки від прийнятих рішень сторін**

Рішення першого в'язня	**Рішення першого в'язня**	
	Мовчить	Зізнається
Мовчить	1 рік 1 рік	10 років 0 років
Зізнається	0 років 10 років	3 роки 3 роки

Кожен з учасників гри міркує, що краще йому зізнатися та отримати 3 роки ув'язнення, ніж отримати 10 років, якщо він буде мовчати, а другий зізнається. Тим самим визначають рівновагу за Нешем – обидва мають зізнатись.

Хоча відхилення від цієї рівноваги (мовчати) може бути вигідним конкретному учаснику – отримання лише 1 року ув’язнення, але такий наслідок не є обов’язковим, тому що залежить від рішення другого в’язня, який може зазнатися, що призвести до 10 років ув’язнення.

7.6. Наближений метод розв’язування матричної гри

Часто на практиці немає необхідності шукати точний розв’язок матричної гри, а достатньо знайти наближений розв’язок. Тому розглянемо так званий метод Брауна-Робінсона – ітеративну процедуру побудови послідовності пар змішаних стратегій гравців, за якими визначають наближений розв’язок матричної гри, що збігається до точного розв’язку при достатній кількості ітерацій.

Нехай задана $m \times n$ матриця гри двох гравців (табл. 7.22). Ітераційна процедура Брауна-Робінсона передбачає, що на кожному k-му $(k = 1,2,....)$ кроці ітерації розігруються віртуальні партії елементарних ігор, за якими експериментально оцінюються частоти вибору чистих стратегій гравцями A і B.

На першому кроці ітерації гравець A обирає одну зі своїх чистих стратегій $A_i(1)$. Гравець B (наш супротивник) відповідає на цю стратегію своєю стратегією $B_j(1)$, яка найбільш невигідна для нас, тобто обирає ту стратегію, яка мінімізує наш виграш.

На другому кроці ітерації необхідно відповісти на стратегію $B_j(1)$ такою стратегією $A_i(2)$, яка надає максимальний середній виграш за дві ітерації.

Після цього супротивник B відповідає на нашу пару стратегій $A_i(1)$ і $A_i(2)$ своєю стратегією $B_j(2)$, яка мінімізує наш середній виграш для стратегій $A_i(1)$ і $A_i(2)$, й так далі.

Таким чином, на кожному k-му кроці ітерації гравець відповідає на будь-яку стратегію іншого гравця стратегією, яка є оптимальною відносно *всіх попередніх ходів*. У цьому випадку ходи гравців розглядаються як змішана стратегія з частотами вибору чистих стратегій, визначених на попередніх кроках.

Процедура Брауна-Робінсона реалізує модель практичного «навчання» гравців, коли кожен з них на досвіді розвідує спосіб поведінки супротивника і намагається відповідати на його дії найбільш вигідним для себе способом. Якщо таку імітацію реального процесу навчання продовжувати достатньо довго, то середній виграш, який припадає на одну пару ходів (елементарну гру) буде прагнути до ціни гри, а визначені експериментально частоти ходів будуть прагнути до частот вибору ходів оптимальної змішаної стратегії гравця.

Формально процедуру Брауна-Робінсона здійснюють за таким правилом:

1. При першій ($k=1$) елементарній партії обидва гравці A і B обирають довільні чисті стратегії.

2. За результатами $k \geq 1$ розіграшів визначають частоту вибору $\widetilde{p}_i(k)$ кожної чистої стратегії A_i гравцем A на попередніх партіях, а для гравця B – частота $\widetilde{q}_j(k)$ вибору кожної чистої стратегії B_j (рис. 7.12).

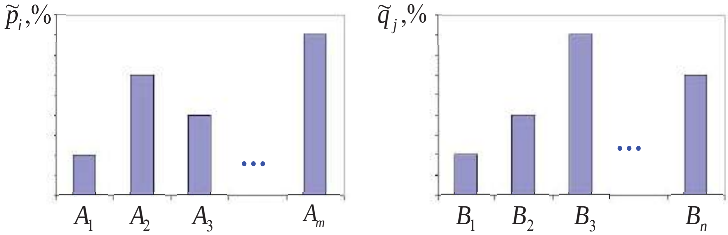


Рис. 7.12. Оцінки розподілів вибору стратегій гравцями

3. Частоти $\widetilde{p}_i(k)$ і $\widetilde{q}_j(k)$ визначаються за формулами:

$$\widetilde{p}_i(k) = \frac{N_{A_i}(k)}{k}, \ \widetilde{q}_j(k) = \frac{N_{B_j}(k)}{k} \qquad (7.51)$$

де $N_{A_i}(k)$, $N_{B_j}(k)$ – кількість партій, при яких гравці обирали стратегії A_i та B_j відповідно.

4. Вибір стратегій на черговій партії $k+1$ здійснюють так, щоб гравець A обрав свою чисту стратегію, яка максимізує його очікуваний виграш $\alpha(k)$, а гравець B обрав свою чисту стратегію, яка мінімізує його очікуваний програш $\beta(k)$.

5. Величини $\alpha(k)$ і $\beta(k)$ обчислюють у припущенні, що супротивник грає відповідно до емпіричного імовірнісного розподілу, сформованому на попередніх k партіях. Іншими словами, гравець A припускає, що в черговій партії $k+1$ його супротивник B використовує змішану стратегію

$$S_B(k+1)=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ \tilde{q}_1(k) & \tilde{q}_2(k) & \dots & \tilde{q}_n(k) \end{pmatrix},$$

а гравець B припускає, що в черговій партії $k+1$ його супротивник A також використовує змішану стратегію

$$S_A(k+1)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ \tilde{p}_1(k) & \tilde{p}_2(k) & \dots & \tilde{p}_m(k) \end{pmatrix}.$$

6. Величини $\alpha(k)$ і $\beta(k)$ обчислюють за формулами:

$$\alpha(k)=\max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{q}_j(k),$$

$$\beta(k)=\min_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{p}_j(k).$$

Можна довести, що при $k\to\infty$ описаний ітераційний процес прямує до точних результатів гри, тобто:

$$\tilde{p}_i(k)\underset{k\to\infty}{\to} p_i^*,$$

$$\tilde{q}_j(k)\underset{k\to\infty}{\to} q_j^*,$$

$$\frac{\alpha(k)+\beta(k)}{2}\underset{k\to\infty}{\to}\nu^*.$$

Метод Брауна-Робінсона має безперечні переваги:

- орієнтований на довільну $m\times n$ гру;
- не потребує модифікації даних для забезпечення умови $a_{ij}\ge 0$;
- легко реалізується програмним способом.

Водночас важливо приймати до уваги, що процедури зменшують швидкість збігу зі зростанням розмірності платіжної матриці.

Реалізація методу Брауна-Робінсона передбачає створення та аналіз так званої *таблиці віртуальних партій*, структура якої для 3×3 гри показана на рис. 7.13.

k	$i(k)$	$B_1(k)$	$B_2(k)$	$B_3(k)$	$j(k)$	$A_1(k)$	$A_2(k)$	$A_3(k)$	$\alpha(k)$	$\beta(k)$	$\nu(k)$

Рис. 7.13. Структура таблиці віртуальних партій для гри 3×3

У стовпчиках таблиці віртуальних партій наведено такі позначення:

- k – номер елементарної гри (партії);
- $i(k)$ – номер стратегії, яку обирає гравець A на k-й грі;
- $B_j(k)$ – виграш, накопичений гравцем A за k партій у припущенні, що на k-й партії гравець B обирає свою j-у стратегію;
- $j(k)$ – номер стратегії, яку обирає гравець B на k-й грі;
- $A_i(k)$ – програш, накопичений гравцем B за k партій у припущенні, що в k-й партії гравець A обирає i-у стратегію;
- $\alpha(k)$– усереднений за k партій виграш гравця A;
- $\beta(k)$– усереднений за k партій програш гравця B;
- $\nu(k)$ – ціна гри, яка обчислюється за формулою

$$\nu(k)=\frac{\alpha(k)+\beta(k)}{2}. \tag{7.52}$$

Продемонструємо метод на конкретному прикладі.

Приклад 7.10. Два спортивних клуби A і B мають три склади команд A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3 відповідно. Подавши заявку на змагання, клуби не знають, який склад команди запропонує супротивник.

У табл. 7.26 подано імовірності виграшу клубу A (програшу клубу B) для різного складу команд, які відомі з минулих зустрічей.

Необхідно, спираючись на відому інформацію (табл. 7.26), визначити з якими частотами клуби мають виставляти свої команди, щоб одержати найбільше середнє число перемоги у змаганнях.

Для того, щоб не мати справу з дрібними числами, модифікуємо платіжну матрицю (табл. 7.26), збільшивши в 10 разів кожний елемент (табл. 7.27). Зрозуміло, що з такою модифікацією ціна гри збільшиться у десять разів, але розв’язок задачі залишиться незмінним.

***Таблиця 7.26.* Таблиця імовірності виграшів для змагань**

Команди клубу A	**Команди клубу** B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	0,8	0,2	0,4
A_2	0,4	0,5	0,6
A_3	0,1	0,7	0,3

***Таблиця 7.27.* Модифікована таблиця імовірності виграшів**

Команди клубу A	**Команди клубу** B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	8	2	4
A_2	4	5	6
A_3	1	7	3

Заповнимо таблицю фіктивних змагань за структурою рис. 7.13. Пояснимо наші дії на перших рядках табл. 7.28.

***Таблиця 7.28.* Таблиця віртуальних змагань**

k	$i(k)$	$B_1(k)$	$B_2(k)$	$B_3(k)$	$j(k)$	$A_1(k)$	$A_2(k)$	$A_2(k)$	$\alpha(k)$	$\beta(k)$	$\nu(k)$
1	3	1	7	3	1	8	4	1	1	8	4,5
2	1	9	9	7	3	12	10	4	3,5	6	4,75
3	1	17	11	11	2	14	15	11	3,67	5	4,33
4	2	21	16	17	2	16	20	18	4	5	4,5
5	2	25	21	23	2	18	25	25	4,2	5	4,6
6	2	29	26	29	2	20	30	32	4,33	5,33	4,82
7	3	30	33	32	1	28	34	33	4,29	4,86	4,57
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
18	2	79	84	91	1	86	83	74	4,39	4,78	4,58

Основний принцип організації віртуальної гри полягає у тому, що при виборі чергової стратегії кожен гравець орієнтується не тільки на її оптимальність відносно чергової стратегії супротивника, а і на «накопичені» оптимальні виграші *на всіх попередніх ходах*.

На першій віртуальній партії ($k = 1$) клуби A і B обрали довільні чисті стратегії: клуб A виставив на змагання команду A_3, тобто $i(1) = 3$, а клуб B – команду B_1, тобто $j(1) = 1$.

Згідно з табл. 7.27 при виборі команди A_3 можливі виграші клубу A складуть:

- $B_1(1) = 1$, якщо клуб B обирає команду B_1;
- $B_2(1) = 7$, якщо клуб B обирає команду B_2;
- $B_3(1) = 3$, якщо клуб B обирає команду B_3.

Саме такі числа записані у відповідних клітинках першого рядка табл.7.28, причому *найменше* з цих чисел $B_1(1) = 1$ виділено сірим кольором.

Згідно з табл. 7.27 при виборі команди B_1 можливі програші клубу B складуть:

- $A_1(1) = 8$, якщо клуб A обирає команду A_1;
- $A_2(1) = 4$, якщо клуб A обирає команду A_2;
- $A_3(1) = 1$, якщо клуб A обирає команду A_3.

Саме такі числа записані у відповідних клітинках першого рядка табл.7.28, причому *найбільше* з цих чисел $A_1(1) = 8$ виділено сірим кольором.

Звідси на першій партії виграш гравця A дорівнює $\alpha(1) = B_1(1) = 1$, програш гравця B дорівнює $\beta(1) = A_1(1) = 8$, а ціну гри визначаємо за формулою (7.52): $\nu(1) = 4{,}5$.

Оптимальні стратегії гравців на другій віртуальній партії ($k = 2$) визначають таким чином. Найбільший з програшів гравця B на першій партії ($A_1(1) = 8$) визначає стратегію $i(2) = 1$ гравця A, тобто стратегію A_1. При такій стратегії визначимо накопичені виграші гравця A на перших двох партіях. Для цього знайдемо суму виграшів $B_i(1)$, $i = 1,2,3$ при можливих стратегіях гравця A у першій партії (табл.7.28) та елементів рядка платіжної матриці (табл. 7.27), що відповідають стратегії A_1 в другій партії.

Як це видно з таблиці 7.28 найменший з накопичених виграшів гравця A дорівнює числу $B_3(2) = 7$, що відповідає стратегії B_3 гравця B. Звідси випливає, що оптимальна стратегія гравця B на другій партії, що максимально шкодить гравцю A, є стратегія B_3, тобто $j(2)=3$.

Знайдемо тепер суму виграшів $A_i(1)$, $i=1{,}2{,}3$ при можливих стратегіях гравця B у першій партії (табл.7.28) та елементів стовпчика платіжної матриці (табл. 7.27), що відповідають оптимальній стратегії B_3 в другій партії.

Як це видно з таблиці 7.28 найбільший з накопичених втрат гравця B за дві партії дорівнює числу $A_1(2)=12$, що відповідає стратегії A_1 гравця A.

Ґрунтуючись на такій інформації гравець A міркує, що його оптимальна стратегія на наступній (третій) партії, яка максимально зашкодить гравцю B, має бути стратегія A_1, тобто $i(3)=1$.

Аналогічним чином клуби обирають свої стратегії в наступних віртуальних партіях.

Усереднений виграш гравця A за k партій обчислюють за формулою

$$\alpha(k)=\frac{\min\limits_j B_j(k)}{k},$$

усереднений програш гравця B за формулою

$$\beta(k)=\frac{\max\limits_i A_i(k)}{k},$$

а поточна ціна гри $\nu(k)$ за формулою (7.52).

Наприклад, для другої партії ці величини дорівнюють відповідно $\alpha(2)=3{,}5$, $\beta(2)=6$, $\nu(k)=4{,}75$.

Проаналізувавши певну кількість віртуальних партій за формулою (7.51) можна обчислити частоти, з якими гравці використовували свої чисті стратегії і на основі цих частот побудувати оптимальні змішані стратегії.

На основі розрахунків, проведених за даними таблиці 7.28 при 18 віртуальних партіях, побудовані оптимальні змішані стратегії гравців:

$$S_A^*=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 44\% & 50\% & 6\% \end{pmatrix},$$

та

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 28\% & 61\% & 11\% \end{pmatrix}.$$

Таким чином, для збільшення середнього числа перемог у змаганнях відповідні склади команд треба чергувати з такими частотами.

Незважаючи на те, що процедура Брауна-Робінсона має досить повільну швидкість збігання до точного розв'язку матричної гри, застосування цієї процедури дуже корисно. З відносною простотою обчислень ітеративний метод дає змогу знайти орієнтовну ціну гри та виявити домінування корисних стратегій.

Так, наприклад, керівник спортивного клубу A, орієнтуючись на результат побудови оптимальної змішаної стратегії S_A^*, може взагалі відмовитись виставляти на змагання склад A_3 як мало перспективний для отримання перемоги.

Завдання для комп'ютерного практикуму

У будь-якому програмному середовищі створити програму, яка забезпечує:

– введення двох цілих чисел $2 \le m \le 5$ та $2 \le n \le 6$, які відповідають кількості можливих стратегій гравців A та B;

– формування $m \times n$ платіжної матриці, елементи якої заповнюються випадковими числами, що належать до інтервалу значень [–20, 20];

– знаходження розв'язку матричної гри.

Зауваження: з кожним стартом програми елементи платіжної матриці мають оновлюватися.

Питання для самоконтролю

1. Наведіть базові поняття та означення теорії ігор.
2. Наведіть алгоритм визначення нижньої та верхньої ціни ігри.
3. Яке оптимальне рішення гравців у грі з сідловою точкою?
4. В чому полягає особливість розв'язування матричної гри в змішаних стратегіях.
5. Наведіть особливості рівноваги за Нешем.

РОЗДІЛ 8

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТАТИСТИЧНИХ РІШЕНЬ

8.1. Прийняття рішень в умовах ризику

Задача прийняття рішень в умовах невизначеності виникає, коли необхідно діяти в ситуації, що відома не повністю. Задачу формулюють як задачу пошуку окремого найкращого (в якомусь розумінні) рішення на заздалегідь заданій множині допустимих рішень.

Основна трудність полягає у тому, що наслідки, пов'язані з прийняттям того або іншого рішення, залежать від невідомої ситуації. Ступінь неприйнятності цих наслідків прийнято вимірювати в умовних одиницях – втратах, які може зазнати особа, що приймає рішення (ОПР).

Вихідною інформацією, необхідною для розв'язування задачі, є *функція втрат* $F(d,S)$, що являє собою залежність втрат ОПР від двох аргументів: його рішення $d \in D$ та ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$, в якій це рішення приймається.

Головний принцип розв'язування задач в умовах невизначеності полягає у перетворюванні функції втрат $F(d,S)$ у функцію ризику $R(d)$, яка відображує залежність ступеня ризику, на який іде ОПР, вже тільки від одного аргументу – від рішення $d \in D$, що приймають. Спосіб такого перетворювання неоднозначний і залежить від вибраного критерію ризику. Від цього критерію залежить і зміст виразу «найкраще рішення»: найкращим називають рішення, яке мінімізує ризик.

Застосування різних критеріїв ризику залежить від характеру невизначеності ситуації. Докладно вивчено два типи невизначеності: невизначеність стану природи і невизначеність цілеспрямованої протидії. Задачі, пов'язані з невизначеністю зазначених типів, вивчаються теорією статистичних рішень та теорією ігор.

Розглянуті в розділі 7 задачі припускали невизначеність ситуації, викликану незнанням того, який хід зробить наш супротивник, що намагається нам активно протидіяти.

На відміну від постановки, прийнятої в теорії ігор, у задачах теорії статистичних рішень невизначеність ситуації не має антагоністичного (конфліктного) характеру. Передбачається, що зовнішнє середовище, в якому приймають рішення, байдуже до наших рішень і не протидіє нам.

Невизначеність у теорії статистичних рішень зв’язують лише з незнанням того, в якому стані знаходиться зовнішнє середовище – «природа», яку умовно можна вважати другим учасником гри.

Здавалося б, що відсутність свідомої протидії супротивника спрощує задачу вибору рішення, тому що ОПР ніхто не заважає. Але це на так!

У грі з активним супротивником ми знаємо щодо його намірів протидіяти, а тому можемо розв’язувати задачу у припущенні, що супротивник прийме найгірше для нас рішення. Тим самим частково знімається елемент невизначеності гри.

У грі з природою таке обґрунтоване припущення зробити неможливо і тому вибір оптимального рішення значною мірою залежить від вибору критерію оптимальності, тобто від суб’єктивних уподобань ОПР.

Після такого вступу розглянемо формальну постановку задачі.

Передбачається, що ОПР (гравець A) може приймати одне з рішень $d_i \in D$, $i = 1,...,m$, а другим «гравцем» виступає зовнішнє середовище, яке може перебувати в одному зі станів $S_j \in \mathbf{\Theta}$. Формально таку задачу можна представити у вигляді матриці (табл. 8.1)

$$U = \| u_{ij} \|,\ i = 1,..,m,\ \ j = 1,..,n, \tag{8.1}$$

де u_{ij} – виграш (корисність) від рішення d_i у ситуації $S_j \in \mathbf{\Theta}$.

На відміну від розглянутих раніше матричних ігор, у даному випадку для вибору оптимальної стратегії вже не можна орієнтуватися на те, що другий гравець (природа) прагне мінімізувати наш виграш. Тому, поряд з платіжною матрицею, вводиться $m \times n$ матриця ризиків (табл.8.2)

$$R = \| r_{ij} \|, \tag{8.2}$$

де r_{ij} – величина ризику, який пов'язаний з рішенням $d_i \in D$ у ситуації $S_j \in \mathbf{\Theta}$.

Таблиця 8.1. **Матриця виграшів**

Можливі рішення ОПР	**Стани зовнішнього середовища**				
	S_1	…	S_j	…	S_n
d_1	u_{11}	…	u_{ij}	…	u_{1n}
…	…	…	…	…	…
d_i	u_{i1}	…	u_{ij}	…	u_{in}
…	…	…	…	…	…
d_m	u_{m1}	…	u_{mj}	…	u_{mn}

Таблиця 8.2. **Матриця ризиків**

Можливі рішення ОПР	**Стани зовнішнього середовища**				
	S_1	…	S_j	…	S_n
d_1	r_{11}	…	r_{ij}	…	r_{1n}
…	…	…	…	…	…
d_i	r_{i1}	…	r_{ij}	…	r_{in}
…	…	…	…	…	…
d_m	r_{m1}	…	r_{mj}	…	r_{mn}

Величину ризику визначають за допомогою різниці

$$r_{ij} = \max_i u_{ij} - u_{ij} \tag{8.3}$$

між максимальним виграшом $u_j = \max_i u_{ij}$, який ОПР потенційно отримала би, якщо б знала, що середовище знаходиться у певному стані S_j, та реальним виграшом u_{ij}, який ОПР отримає з вибором рішення $d_i \in D$ у даному стані $S_j \in \mathbf{\Theta}$.

Слід зауважити, що вихідна платіжна матриця (матриця виграшів) може однозначно бути перетворена в матрицю ризиків, але не навпаки (рис. 8.1).

	S_1	S_2	S_3	S_4
d_1	**1**	**4**	**5**	**9**
d_2	**3**	**8**	**4**	**3**
d_3	**4**	**6**	**6**	**2**

Платіжна матриця

	S_1	S_2	S_3	S_4
d_1	**4 –1**	**8 – 4**	**6 – 5**	**9 – 9**
d_2	**4 –3**	**8 – 8**	**6 – 4**	**9 –3**
d_3	**4 – 4**	**8 – 6**	**6 – 6**	**9 –2**

	S_1	S_2	S_3	S_4
d_1	**3**	**4**	**1**	**0**
d_2	**1**	**0**	**2**	**6**
d_3	**0**	**2**	**0**	**7**

Матриця ризиків

Рис. 8.1 Перетворення платіжної матриці в матрицю ризиків

У теорії статистичних рішень розглядають пошук оптимального розв’язку задачі в умовах:

- *ризику*, коли розподіл імовірності $P(S_j)$ станів середовища $S_j \in \boldsymbol{\Theta}$ відомий або його можна оцінити на основі попередніх експериментальних досліджень за вибіркою спостережень;
- *невизначеності*, коли невідомий розподіл імовірності $P(S_j)$ станів середовища $S_j \in \boldsymbol{\Theta}$, а його оцінювання на основі попередніх експериментальних спостережень складно реалізувати або взагалі неможливо.

Задачу прийняття оптимальних рішень в умовах ризику формулюють таким чином.

Нехай відомі імовірності $P(S_j)$ станів середовища $S_j \in \boldsymbol{\Theta}$. Тоді для кожного рядка платіжної матриці 8.1 можна визначити очікуваний виграш для фіксованого рішення $d_i \in D$ у вигляді математичного сподівання

$$E\{u(d_i)\} = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} P(S_j). \qquad (8.4)$$

Оптимальною стратегією $d^* \in \{d_1, ..., d_m\}$ буде та з можливих стратегій, яка забезпечує найбільший очікуваний виграш:

$$d^* = \arg\max_{1 \le i \le m} E\{u(d_i)\}. \qquad (8.5)$$

Приклад 8.1. Матриця (табл. 8.3), у якій представлено виграші u_{ij}, $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 4$, що отримає ОПР від кожного з трьох рішень $d_i \in \{d_1, d_2, d_3\}$, у кожній з чотирьох ситуацій $S_j \in \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ з відомим розподілом імовірності $P(S_j)$.

Таблиця 8.3. **Матриця виграшів**

S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} P(S_j)$
$P(S_j)$	$P(S_1) = 0{,}25$	$P(S_2) = 0{,}3$	$P(S_1) = 0{,}25$	$P(S_1) = 0{,}2$	
d_1	1	4	5	9	4.5
d_2	3	8	4	3	4.75
d_3	4	6	6	2	4.7

В останньому стовпчику табл. 8.3 надано розрахунки очікуваних результатів ОПР для кожного можливого рішення, які визначені за формулою (8.4) математичного сподівання. Максимальному очікуваному результату відповідає рішення d_2, яке є оптимальним розв'язком задачі за умовою (8.5).

Практична задача визначення оптимального рішення за критерієм максимуму очікуваного результату була розглянута в розділі 1 (див. приклад).

Якщо для відомого розподілу імовірності перейти від матриці виграшів (табл.8.1) до матриці ризиків (табл.8.2), то для кожного рядка такої матриці можна визначити очікуваний ризик з фіксованим рішенням $d_i \in D$ у вигляді математичного сподівання

$$E\{r(d_i)\} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} P(S_j) \tag{8.6}$$

Тоді оптимальне рішення (стратегія) ОПР має задовольняти умову мінімуму середнього ризику

$$d^* = \arg\min_{1 \le i \le m} E\{r(d_i)\}.$$

Зрозуміло, що при такому переході оптимальне рішення не зміниться. Як видно з табл. 8.4, рішення d_2, яке за даними прикладу 8.1 забезпечує максимум очікуваного виграшу (8.4), залишається оптимальним і з точки зору мінімуму середнього ризику (8.6).

***Таблиця 8.4*. Матриця ризиків**

S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} P(S_j)$
$P(S_j)$	$P(S_1)=0{,}25$	$P(S_2)=0{,}3$	$P(S_1)=0{,}25$	$P(S_1)=0{,}2$	
d_1	3	4	1	0	2,2
d_2	1	0	2	3	1,35
d_3	0	2	0	7	2,0

З іншого боку оптимальне рішення залежить від розподілу $P(S_j)$ імовірності станів середовища. Тому для однієї і тієї ж матриці ризиків оптимальне рішення може змінитися, якщо зміниться розподіл $P(S_j)$ (табл. 8.5).

***Таблиця 8.5*. Матриця ризиків при зміні розподілу $P(S_j)$**

S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} P(S_j)$
$P(S_j)$	$P(S_1)=0{,}6$	$P(S_2)=0{,}1$	$P(S_1)=0{,}2$	$P(S_1)=0{,}1$	
d_1	3	4	1	0	2,4
d_2	1	0	2	3	1,3
d_3	0	2	0	7	0,9

Пошук оптимальних рішень у реальних практичних задачах найчастіше проводиться при відсутності будь-якої інформації щодо імовірності $P(S_j)$ станів середовища, тобто в умовах невизначеності.

8.2. Прийняття рішень в умовах невизначеності

Існує два підходи до розв'язування задачі в умовах відсутності інформації щодо імовірності $P(S_j)$ станів середовища:

- вибір оптимального рішення на основі додаткового критерію;
- використання змішаних стратегій.

Критерієм оптимальності в умовах невизначеності називають правило вибору найкращого рішення, яке засновано на певних припущеннях (гіпотезах) ОПР відносно поведінки зовнішнього середовища. Такі критерії повинні мати наступні властивості:

- забезпечення відбору перспективних та нівелювання неперспективних альтернатив (стратегій);
- незалежність від адитивної добавки до значень функції корисності.

Розглянемо особливості основних критеріїв, які отримали найбільше поширення у теорії прийняття рішень.

Критерій Лапласа (*рівноможливих станів*) оснований на припущенні, що імовірності $P(S_j)$ станів однакові:

$$P(S_1) = P(S_2) = ... = P(S_n). \tag{8.7}$$

За таким критерієм оптимальною вважають стратегію d_i, для якої сума значень виграшів $u(d_i S_j)$ для усіх станів S_j зовнішнього середовища максимальна, тобто

$$d^* = \arg\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{m} u(d_i S_j). \tag{8.8}$$

Цілком зрозуміло, що припущення (8.7) не завжди є обґрунтованим. Ще один суттєвий недолік критерію Лапласа продемонструємо на прикладі матриці виграшів, поданої у табл. 8.6.

Таблиця 8.6. Ілюстрація недоліку критерію Лапласа

Стратегії	Стани зовнішнього середовища							$\sum_{j=1}^{10} u_{ij}$
	S_1	S_2	S_3	…	S_8	S_9	S_{10}	
d_1	1	0	0	…	0	0	100	101
d_2	9,9	10	10	…	10	10	10,1	100

За критерієм (8.8) оптимальним вважають рішення d_1, оскільки при виборі альтернативи d_1 сума виграшів при можливих станах зовнішнього середовища більша, ніж сума виграшів за умови вибору альтернативи d_2.

Однак, як видно з табл. 8.6, при рішенні d_1 виграші розподілені вкрай нерівномірно за станами S_j. Тому, якщо обрати рішення d_1, то ОПР ризикує взагалі нічого не отримати тоді, як рішення d_2 гарантує мінімальний виграш 9,9 одиниць.

Критерій Вальда (*крайнього песимізму до виграшу*) заснований на гіпотезі, згідно з якою ОПР прагне отримати гарантований результат для будь-якого стану середовища S_j, $j = 1,..,m$.

Для вибору оптимальної альтернативи для кожного рішення d_i (рядка матриці виграшів) визначають мінімальне значення і обирають максимальне з отриманих чисел, яке і визначає оптимальну альтернативу, тобто

$$d^* = \arg\max_{d_i} \min_{S_j} u(d_i S_j)\,. \tag{8.9}$$

Головний недолік критерію Вальда полягає в тому, що визначення оптимальної альтернативи спирається на найгіршу ситуацію, хоча природа байдужа до наших рішень і не протидіє ОПР. При такому невиправданому песимізмі ОПР можуть бути відкинуті більш вигідні альтернативи.

Для ілюстрації згаданого недоліку розглянемо матрицю виграшів (табл. 8.7).

За критерієм (8.9) оптимальним вважається рішення d_1, оскільки саме така альтернатива відповідає максимуму останнього стовпчика таблиці.

Однак, як видно з табл. 8.7, для всіх станів середовища, за винятком стану S_1, рішення d_2 забезпечує більш високі виграші.

***Таблиця 8.7*. Приклад недоліку критерію Вальда**

Стратегії	**Стани зовнішнього середовища**							$\min\limits_{S_j} u(d_i S_j)$
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	
d_1	2	3	1	5	4	3	1	1
d_2	0	6	8	17	9	6	8	0

Критерій Гурвіца (*зваженого песимізму-оптимізму*) ґрунтується на наступній гіпотезі: рівень песимізму ОПР приймає деяке значення $\lambda \in [0,1]$ причому, чим більше значення λ, тим більший песимізм у ОПР.

За критерієм Гурвіца для кожної альтернативи $d_i \in D$ визначають два числа

$$u_i^{\min} = \min_{S_j} u(x_i S_j) \quad \text{та} \quad u_i^{\max} = \max_{S_j} (x_i S_j) \tag{8.10}$$

та обирають оптимальну альтернативу, яка задовольняє умову

$$d^* = \arg\max_{d_i \in D} \left\{ \lambda u_i^{\min} + (1-\lambda) u_i^{\max} \right\}. \tag{8.11}$$

Таким чином, критерій Гурвіца заснований на припущенні ОПР, що природа може знаходитись у самому гіршому стані з імовірністю λ та в самому кращому стані з імовірністю $1-\lambda$.

Зрозуміло, що при $\lambda = 1$ критерій Гурвіца зводиться до критерію Вальда (критерію максміну).

Критерій Гурвіца забезпечує певну гнучкість для вибору оптимального рішення. Водночас він дуже чутливий до вибору λ, що може змінити висновок щодо оптимальності альтернативи (табл. 8.8).

Як видно з табл. 8.8 при $\lambda = 0{,}5$ оптимальним за критерієм Гурвіца є рішення d_2, а при $\lambda = 0{,}9$ – рішення d_1. Таким чином, вибір оптимальної альтернативи залежить від *суб'єктивного* вибору λ, тобто залежить від ставлення ОПР до ризику.

Таблиця 8.8. **Приклад вибору альтернативи за критерієм Гурвіца**

Стратегії	**Стани зовнішнього середовища**					$u_i^{\min}$	$u_i^{\max}$	**Значення критерію** $\lambda u_i^{\max} + (1-\lambda) u_i^{\min}$	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5			$\lambda = 0{,}5$	$\lambda = 0{,}9$
d_1	1	3	2	4	5	1	5	3	1,4
d_2	0	6	8	10	12	0	12	6	1,2

Критерій Севіджа (*найменшого розчарування*), подібно до критерію Вальда, проявляє крайній песимізм, але не до виграшу ОПР, а до ризику.

Тобто для його використання здійснюють перехід від матриці виграшів до матриці ризиків, за якою визначають оптимальну альтернативу, що задовольняє умову

$$d^* = \arg\min_{d_i} \max_{S_j} r(d_i S_j)\,. \qquad (8.12)$$

Незважаючи на те, що матриця ризиків однозначно пов'язана з матрицею виграшів, рішення за критеріями Вальда та Севіджа можуть не співпадати, що продемонстровано в табл. 8.9 і 8.10.

Таблиця 8.9. **Приклад вибору альтернативи за критерієм Вальда**

Рішення	**Стани середовища**				$\min\limits_{S_j} u(d_i S_j)$
	S_1	S_2	S_3	S_4	
d_1	1	4	5	9	1
d_2	3	8	4	3	3
d_3	4	6	6	2	2

Легко побачити, що за даними таблиці виграшів (табл. 8.9) оптимальною альтернативою є альтернатива d_2, оскільки саме вона забезпечує максимум з мінімальних винагород, тобто задовольняє умову (8.9).

Таблиця 8.10. **Приклад вибору альтернативи за критерієм Севіджа**

Рішення	**Стани середовища**				$\max\limits_{S_j} r(d_i S_j)$
	S_1	S_2	S_3	S_4	
d_1	3	4	1	0	4
d_2	1	0	2	6	6
d_3	0	2	0	7	7

Водночас оптимальним рішенням за критерієм Севіджа є альтернатива d_1, оскільки сама вона забезпечує мінімум максимальних ризиків (табл. 8.10), тобто задовольняє умову (8.12).

Таким чином, слід пам'ятати, що вибір оптимального рішення в умовах невизначеності значною мірою є суб'єктивним, тому що залежить від вибору критерій оптимальності, а з використанням критерію Гурвіца ще й від значення λ.

Разом з тим теорія прийняття рішень дає змогу знайти науково обґрунтоване оптимальне рішення (з точки зору обраного критерію), яке спрямоване на досягнення максимуму позитивного або мінімуму негативного результату для конкретної практичної задачі в умовах невизначеності.

Для того, щоб ще раз продемонструвати можливості теорії прийняття рішень повернемось до прикладу з розділу 1, у якому було розглянуто методологію розв'язування задачі в умовах ризику при відомому розподілі імовірності $P(S_j)$ станів середовища $S_j \in \mathbf{\Theta}$.

Трохи змінимо постановку та будемо розв'язувати задачу при відсутності інформації щодо розподілу імовірності $P(S_j)$, ґрунтуючись на *різних* критеріях оптимальності.

Приклад 8.2. Власник невеликого магазину на початку кожного дня за ціною 50 грн закуповує для реалізації продукт, який має термін зберігання всього одну добу. Для отримання прибутку власник встановлює ціну реалізації цього продукту 60 грн за одиницю. Якщо на протязі дня продукт не розпродано, то в кінці дня власник встановлює знижену ціну 30 грн за одиницю, за якою продукт завжди купують.

Питання: скільки одиниць продукту має закупити власник магазину кожного дня?

Розв'язок задачі за критерієм Вальда (критерій МАКСІМІН). Таким критерієм користуються песимісти – дуже обережні люди, які схильні припускати, що події будуть розвиватися за найгіршим для них сценарієм.

Формально це означає, що оптимальне рішення задовольняє умову (8.9), для реалізації якої доповнимо таблицю рішень 1.1 додатковим стовпчиком з найменшими значеннями виграшів $u(d_i S_j)$ від кожного можливого рішення $d_i \in D$ (табл. 8.12).

Оптимальне рішення відповідає максимуму з чисел останнього стовпчику, тобто оптимальним у даному випадку є рішення закупати 1 од. продукту щодня, що призведе до очікуваного прибутку в 10 грн.

***Таблиця 8.12.* Очікуваний прибуток за критерієм МАКСІМІН**

Обсяг закупівель в день	**Попит продукту протягом дня**				min
	1 од.	**2 од.**	**3 од.**	**4 од.**	
1 од.	10 грн	10 грн	10 грн	10 грн	10 грн
2 од.	–10 грн	20 грн	20 грн	20 грн	–10 грн
3 од.	–30 грн	0 грн	30 грн	30 грн	–30 грн
4 од.	–50 грн	–20 грн	10 грн	40 грн	–50 грн

Розв'язок задачі за критерієм Севіджа (критерій МІНІМАКС). Застосуємо критерій Севіджа для аналізу таблиці ризиків, в якій кількісною характеристикою наслідків прийнятих рішень буде втрачений прибуток.

Використовуючи формулу (8.3), перейдемо від вихідної таблиці виграшів 1.1 до таблиці ризиків (табл. 8.13) та запишемо в остатньому стовпчику максимальні значення втраченого прибутку від кожного альтернативного рішення $d_i \in D$.

***Таблиця 8.13.* Втрачений прибуток за критерієм МІНІМАКС**

Обсяг закупівель в день	**Попит продукту протягом дня**				max
	1 од.	**2 од.**	**3 од.**	**4 од.**	
1 од.	0 грн	10 грн	20 грн	30 грн	30 грн
2 од.	20 грн	0 грн	10 грн	20 грн	20 грн
3 од.	40 грн	20 грн	0 грн	10 грн	40 грн
4 од.	60 грн	40 грн	20 грн	0 грн	60 грн

Слід звернути увагу на те, що в табл. 8.13 всі числа невід'ємні та одне з чисел у кожному стовпчику дорівнює нулеві.

Оптимальне рішення відповідає мінімальному з чисел останнього стовпчика, тобто у даному випадку оптимальним є рішення закупати 2 од. продукту щодня, що призведе до мінімальної очікуваної втрати прибутку (ризику) в 20 грн.

Розв'язок задачі за критерієм Гурвіца. Критерій застосовують при компромісному ставленні ОПР до абсолютного оптимізму та песимізму. Такий компроміс визначає значення параметру λ в формулі (8.10).

Оптимальним буде рішення, яке забезпечує максимум очікуваного позитивного результату, в нашому випадку, очікуваного прибутку за критерієм (8.11).

Нагадаємо, що при $\lambda = 1$ критерій Гурвіца зводиться до критерію Вальда (критерію МАКСІМІНУ).

Знайдемо оптимальне рішення задачі за критерієм Гурвіца у припущенні, що $\lambda = 0{,}4$. Для цього перейдемо від вихідної таблиці виграшів 1.1 до табл. 8.14, у рядках якої для кожного $d_i \in D$ обчислені величини, що фігурують у формулі (8.11).

Таблиця 8.14. **Таблиця значень критерію Гурвіца**

Обсяг закупівель в день	Очікуваний прибуток		$0{,}4u_i^{\min}$	$0{,}6u_i^{\max}$	Значення критерію Гурвіца
	Мінімальний $u_i^{\min}$	Максимальний $u_i^{\max}$			
1 од.	10 грн.	10 грн.	4 грн.	6 грн.	**10 грн.**
2 од.	-10 грн.	20 грн.	-4 грн.	12 грн.	**8 грн.**
3 од.	-30 грн.	30 грн.	-12 грн.	18 грн.	**6 грн.**
4 од.	-50 грн.	40 грн.	-20 грн.	24 грн.	**4 грн.**

Оптимальне рішення відповідає максимальному зі значень критерію Гурвіца (див. останній стовпчик табл. 8.14), тобто у даному випадку оптимальним є рішення закупати 1 од. продукту щодня, що призведе до максимуму очікуваного прибутку в 10 грн.

В деяких випадках на практиці використовують також критерій вибору найкращого з найкращих варіантів (критерій МАКСІМАКС)

Таким критерієм користуються дуже азартні люди – оптимісти, які схильні до ризику, не передбачають перешкод на своєму шляху та впевнені, що події будуть розвиватися за найкращим сценарієм.

Формально це означає, що оптимальне рішення задовольняє умову

$$d^* = \arg\max_{d_i} \max_{S_j} u(d_i S_j),$$

де $u(d_i S_j)$ – виграш (прибуток), який отримає ОПР з вибором рішення d_i у ситуації S_j.

Для розв'язку задачі за таким критерієм доповнимо таблицю рішень 1.1 додатковим стовпчиком, у якому запишемо найбільші значення виграшів $u(d_i S_j)$ для кожного можливого рішення $d_i \in D$ (табл. 8.11).

Оптимальне рішення відповідає максимуму з чисел останнього стовпчика. Звідси оптимальним у даному випадку є рішення закупати 4 од. продукту щодня, що призведе до очікуваного прибутку в 40 грн.

Зауважимо, що критерій МАКСМАКС співпадає з критерієм Гурвіца при $\lambda = 0$.

Таблиця 8.11. **Очікуваний прибуток за критерієм «МАКСІМАКС»**

Обсяг закупівель у день	**Попит продукту протягом дня**				max
	1 од.	**2 од.**	**3 од.**	**4 од.**	
1 од.	10 грн	10 грн	10 грн	10 грн	10 грн
2 од.	–10 грн	20 грн	20 грн	20 грн	20 грн
3 од.	–30 грн	0 грн	30 грн	30 грн	30 грн
4 од.	–50 грн	–20 грн	10 грн	40 грн	40 грн

Таким чином, розглянутий приклад демонструє, що оптимальне рішення задачі залежить від обраного критерію.

8.3. Байєсовий підхід до прийняття рішень

Одним з найбільш відомих методів розв'язування задачі гри з природою безумовно є метод, що ґрунтується на теоремі Байєса. Тому, перш ніж перейти до опису деталей байєсового підходу, не зайве нагадати теорему Байєса, яка доводиться лише в декілька рядків, але справила величезний вплив на науку взагалі і, зокрема, на теорію прийняття рішень. Це ще раз підтверджує справедливість крилатого виразу, яке в російській мові формулюють наступним чином: «В науке важен не вывод, а вывод».

Теорема 8.1. Нехай випадкова подія A може статися сумісно з однією з інших несумісних подій (гіпотез) $H_1,...,H_N$, що утворюють повну групу, для яких відомі *апріорні* імовірності $P(H_i)$, $i=1,...N$, такі, що

$$\sum_{i=1}^{N} P(H_i) = 1. \tag{8.13}$$

Нехай також відомі умовні імовірності $P(A|H_i)$, $i=1,...N$ події A з кожною з гіпотез.

Тоді, якщо в результаті експерименту встановлено, що подія A сталася, то *апостеріорна* імовірність i-ї гіпотези може бути визначена за формулою

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{N} P(H_i)P(A|H_i)},\ i=1,...N. \tag{8.14}$$

Доведення. За означенням сумісну імовірність події A з гіпотезою H_i, $i=1,...N$ можна записати у вигляді

$$P(AH_i)=P(H_i)P(A|H_i)=P(A)P(H_i \mid A),\ i=1,...N. \tag{8.15}$$

З співвідношення (8.15) випливає, що

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.\ i=1,...N. \tag{8.16}$$

Оскільки гіпотези H_i, $i = 1,...N$ несумісні та задовольняють умову (8.13), то за формулою повної імовірності маємо

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A \,|\, H_i) P(H_i) . \qquad (8.17)$$

Підстановка (8.17) в (8.16) дає (8.14).

Теорема доведена.

Приклад 8.3. З медичної статистики відомо, що 1% жінок у сорокарічному віці хворіє на рак молочної залози. За даними медичної статистики встановлено також, що при проходженні профілактичного обстеження методом мамографії 80% , у котрих дійсно є рак молочної залози, та 9,6% здорових жінок отримують позитивні результати діагностики – підозру на рак.

Під час проведення огляду *конкретна жінка* даної вікової групи отримала позитивний результат мамографії. Виникає питання: яка імовірність того, що у цієї пацієнтки насправді є рак молочної залози?

Цікаво, що тільки 15% лікарів дають правильну відповідь на це питання. Інші ж 85% дають невірну оцінку[1] та вважають, що у пацієнтки імовірність раку молочної залози належить діапазону 70–90%, що досить далеко від правди!

Визначимо правильну оцінку за допомогою формули Байєса (8.17). Сформулюємо дві гіпотези:

- H_1 – пацієнтка хворіє на рак;
- H_2 – пацієнтка не хворіє на рак.

Нехай випадкова подія A полягає в тому, що мамографія *конкретної особи* надала позитивний результат.

Тоді за умовами задачі маємо апріорні імовірності гіпотез

$$P(H_1) = 0{,}01 , \qquad (8.18)$$

$$P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0{,}99 \qquad (8.19)$$

[1] Цей факт наведено в роботі Casscells, W., Schoenberger A., and Grayboys T. Interpretation by Physicians of Clinical Laboratory Results // New England Journal of Medicine – 1978.– Vol. 299. – P. 999–1001.

та умовні імовірності позитивного результату мамографії

$$P(A \mid H_1) = 0{,}8, \tag{8.20}$$

$$P(A \mid H_2) = 0{,}096. \tag{8.21}$$

Використовуючи формулу (8.14), за даними (8.18) – (8.21) визначимо *апостеріорну* імовірність наявності раку молочної залози при *позитивному* результаті мамографії

$$P(H_1 \mid A) = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}8}{0{,}01 \cdot 0{,}82 + 0{,}99 \cdot 0{,}096} = 0{,}0794.$$

Таким чином, правильна відповідь на поставлене питання така: імовірність того, що у пацієнтки насправді є рак молочної залози складає менше 8%, а не 70–90%, як це помилково вважає більшість лікарів на основі інтуїтивних міркувань.

Навіть з такого досить простого прикладу випливає висновок про важливість застосування байєсової стратегії для прийняття обґрунтованих рішень в іграх з «природою». Рішення, які приймаються інтуїтивно, можуть призвести до великих помилок.

Перейдемо до загального формулювання баєсового підходу.

Нехай деякий об'єкт знаходиться в одному з M станів множини $V = \{V_1, ..., V_M\}$. Є сукупність характеристик (властивостей) об'єкта

$$x^{(N)} = (x_1, ..., x_N) \in X^{(N)},$$

що можуть бути використані як *діагностичні ознаки*, які дають змогу відрізняти один стан об'єкта від іншого.

Потрібно побудувати правило

$$d(x^{(N)}) : X^{(N)} \to \mathrm{M}, \tag{8.22}$$

яке відображає множину $X^{(N)} \triangleq \{x^{(N)}\}$ можливих значень ознак $x_1, \cdots, x_N$ на множину $\mathrm{M} \triangleq \{1, ..., M\}$ номерів можливих рішень (діагнозів) щодо поточного стану об'єкту з множини $V = \{V_1, ..., V_M\}$.

Іншими словами, потрібно побудувати алгоритм визначення значень індикаторної змінної $d(x^{(N)})$ у вигляді

$$d(x^{(N)}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x^{(N)} \in \Omega_1, \\ & \cdots \\ M, & \text{якщо } x^{(N)} \in \Omega_M, \end{cases} \tag{8.23}$$

де Ω_m, $m = 1,...,M$ – області рішень, що не перетинаються, у просторі ознак $X^{(N)}$, у яких приймається однозначне рішення на користь класу V_m.

Байєсовий підхід розглядає:

• стани $V_1,...,V_M$ об'єкту як випадкові події з апріорними імовірностями $P(V_m)$ такими, що

$$\sum_{m=1}^{M} P(V_m) = 1.$$

• ознаки $x_1, \cdots, x_N$ як випадкові величини, для яких об'єктивно існують багатовимірні умовні розподіли $p(x^{(N)} | V_m)$, $m = 1,...,M$.

Означення 8.1. Множини

$$X_m^{(N)} = \{x^{(N)} : p(x^{(N)} | V_m) \neq 0\} \subseteq X^{(N)}, \; m = 1,...,M \;,$$

на яких зосереджені умовні розподіли $p(x^{(N)} | V_m)$, будемо називати власними областями відповідних класів у просторі ознак $X^{(N)}$.

Зауваження 8.1. Строго кажучи, умовні розподіли ознак в i-му та j-му класах, $1 \le i \le M$, $1 \le j \le M$, $i \neq j$ потрібно позначати різними функціями, наприклад, так

$$p_i(x^{(N)} | V_i) \quad \text{та} \quad p_j(x^{(N)} | V_j). \tag{8.24}$$

Однак, для спрощення записів не будемо зазначати індекси і замість (8.24) будемо далі писати так

$$p(x^{(N)} | V_i) \text{ та } p(x^{(N)} | V_j).$$

Зауваження 8.2. Позначатимемо співпадаючі розподіли у класах так

$$p(x^{(N)} | V_i) \equiv p(x^{(N)} | V_j),$$

а не співпадаючі так

$$p(x^{(N)}\,|V_i) \not\equiv p(x^{(N)}\,|V_j)\,.$$

Зауваження 8.3. Запис $p(x)$ буде означати щільність імовірності неперервної величини x або імовірність дискретного значення x. У цьому випадку знак $\sum$ буде означати операцію інтегрування у першому випадку та операцію додавання у другому.

Зауваження 8.4. Якщо багатовимірний розподіл $p(x^{(N)}\,|V_m)$ відомий, то його інтегрування дає змогу отримати уявлення щодо одновимірних (маргінальних) розподілів будь-якої ознаки x_n, $1 \le n \le N$, тобто розподіли

$$p(x_n\,|V_1),...,p(x_n\,|V_M)\,.$$

Множина $X_{nm} \stackrel{\Delta}{=} \{x_n : p(x_n\,|V_m) \ne 0\}$ є носієм маргінального розподілу $p(x_n\,|V_m)$ ознаки x_n, $1 \le n \le N$ у класі V_m, $m = 1,...M$.

Для спрощення розглянемо випадок двох класів ($M = 2$), коли об'єкт може приймати тільки два стани, наприклад, пацієнт «здоровий – хворий», пухлина «злоякісна – доброякісна», агрегат «справний – пошкоджений».

Розглянемо чотири можливих варіанти розташування носіїв X_1, X_2 розподілів $p(x|V_1)$, $p(x|V_2)$ деякої ознаки x в класах V_1 і V_2.

Перший варіант (рис. 8.2) – носії X_1 і X_2 не перетинаються та повністю можуть бути розділені пороговим значенням x_0.

1. $X_1 \cap X_2 \ne \varnothing$

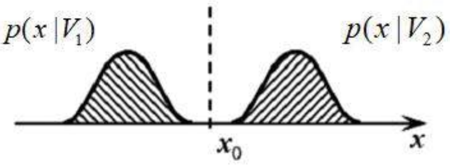


Рис. 8.2. Перший варіант розташування носіїв X_1, X_2

В такому випадку статистична постановка задачі втрачає сенс, оскільки для всіх $x < x_0$ приймаються однозначні рішення на користь класу V_1, а для всіх $x > x_0$ – безпомилкові рішення на користь класу V_2.

Другий варіант (рис. 8.3) – носії X_1 і X_2 частково перетинаються. В такому випадку безпомилкові рішення можуть бути прийняті лише для значень

$$x \in (X_1 \cup X_2)/(X_1 \cap X_2) \neq \varnothing ,$$

тоді як для значень $x \in X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$ можливі помилки, коли приймають рішення на користь класу V_1 при знаходженні об'єкту у стані V_2.

2. $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$
$(X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2)$

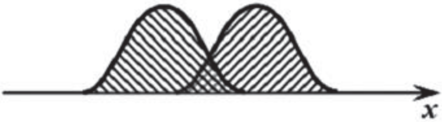


Рис. 8.3. Другий варіант розташування носіїв X_1, X_2

Третій варіант (рис. 8.4) – носії X_1 і X_2 співпадають, але не співпадають умовні розподіли $p(x|V_1)$ і $p(x|V_2)$.

3. $X_1 = X_2$
$p(x|V_1) \not\equiv p(x|V_2)$

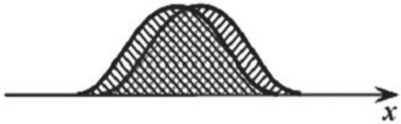


Рис. 8.4. Третій варіант розташування носіїв X_1, X_2

В такому випадку вже помилка можлива для будь-якого значення ознаки x.

Четвертий варіант (рис. 8.5) – співпадають не тільки носії X_1 і X_2, а й умовні розподіли $p(x|V_1) \equiv p(x|V_2)$.

4. $X_1 = X_2$
$p(x|V_1) \equiv p(x|V_2)$

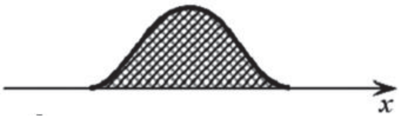


Рис. 8.5. Четвертий варіант розташування носіїв X_1, X_2

В такому випадку окрема ознака x *не корисна* (не інформативна). Водночас сукупність таких ознак може бути не тільки корисною, а й забезпечити безпомилкові рішення відносно класів V_1 і V_2 (рис. 8.6).

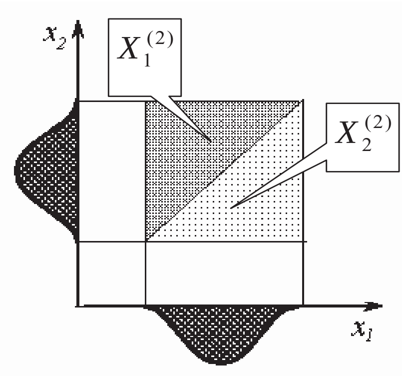


Рис. 8.6. Безпомилкові рішення за сукупністю ознак x_1 і x_2

Дійсно, як видно з рис. 8.6, носії $X_1^{(2)}$ і $X_2^{(2)}$ двовимірних умовних розподілів $p(x_1, x_2 | V_1)$ і $p(x_1, x_2 | V_2)$ не перетинаються.

Зрозуміло, що в такій ситуації може прийматися безпомилкове рішення на користь класу V_1, якщо $(x, x_2) \in X_1^{(2)}$ і безпомилкове рішення на користь класу V_2, якщо $(x, x_2) \in X_2^{(2)}$.

Зауважимо, що таке розташування носіїв $X_1^{(2)}$ і $X_2^{(2)}$ не має протиріч з четвертим варіантом, за яким обидві окремі ознаки x_1 і x_2 *не корисні*.

Нехай за результатами обстеження визначені поточні значення ознак

$$x_1 = \widehat{x}_1, \quad \ldots, \quad x_N = \widehat{x}_N .$$

Тоді умову

$$x^{(N)} = \widehat{x}^{(N)} \triangleq (\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_N)$$

будемо розглядати як випадкову подію, яка відбулася.

При відомих апріорних імовірностей $P(V_1)$, $P(V_2)$ та умовних розподілів $p(x^{(N)}|V_1)$, $p(x^{(N)}|V_2)$ байєсовий підхід передбачає, що за формулою Байєса можна визначити дві *апостеріорні імовірності*:

$$P(V_1 \mid \widehat{x}^{(N)}) = \frac{P(V_1)\,p(\widehat{x}^{(N)}|V_1)}{\sum\limits_{m=1,2} P(V_m)\,p(\widehat{x}^{(N)}|V_m)}, \tag{8.25}$$

$$P(V_2 \mid \widehat{x}^{(N)}) = \frac{P(V_2)\,p(\widehat{x}^{(N)}|V_2)}{\sum\limits_{m=1,2} P(V_m)\,p(\widehat{x}^{(N)}|V_m)}. \tag{8.26}$$

За правилом максимуму апостеріорних імовірностей рішення на користь класу V_1 приймають у тому випадку, коли

$$P(V_1 \mid \widehat{x}^{(N)}) > P(V_2 \mid \widehat{x}^{(N)}), \tag{8.27}$$

і на користь класу V_2, коли

$$P(V_1 \mid \widehat{x}^{(N)}) < P(V_2 \mid \widehat{x}^{(N)}). \tag{8.28}$$

Оскільки знаменники правих частин (8.25), (8.26) однакові, то правило (8.27), (8.28) еквівалентно такому правилу

$$d(x^{(N)}) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } P(V_1)\,p(\widehat{x}^{(N)}|V_1) > P(V_2)\,p(\widehat{x}^{(N)}|V_2), \\ 2, \text{ якщо } P(V_1)\,p(\widehat{x}^{(N)}|V_1) < P(V_2)\,p(\widehat{x}^{(N)}|V_2), \end{cases}$$

або в компактному вигляді

$$d(x^{(N)}) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \lambda(\widehat{x}^{(N)}) > \lambda_0, \\ 2, \text{ якщо } \lambda(\widehat{x}^{(N)}) < \lambda_0, \end{cases} \tag{8.29}$$

де величину

$$\lambda(\widehat{x}^{(N)}) = \frac{p(\widehat{x}^{(N)}|V_1)}{p(\widehat{x}^{(N)}|V_2)}$$

називають відношенням правдоподібності, яке порівнюють з порогом

$$\lambda_0 = \frac{P(V_2)}{P(V_1)}.$$

Зрозуміло, що для фіксованого значення вектору ознак $x^{(N)} = \widehat{x}^{(N)}$ умовна імовірність помилкового рішення за правилом (8.29) максимуму апостеріорних імовірностей $P(V_1 \mid \widehat{x}^{(N)})$, $P(V_2 \mid \widehat{x}^{(N)})$ визначається так:

$$P(e \mid \widehat{x}^{(N)}) \overset{\Delta}{=} 1 - \max\{P(V_1 \mid \widehat{x}^{(N)}), P(V_2 \mid \widehat{x}^{(N)})\}.$$

Якщо величину $P(e \mid \widehat{x}^{(N)})$ усереднити за всіма можливими $x^{(N)} \in X^{(N)}$, то отримаємо середню імовірність помилкового рішення

$$P(e) \overset{\Delta}{=} \sum_{x^{(N)} \in X^{(N)}} p(x^{N})[1 - \max\{P(V_1 \mid x^{(N)}), P(V_2 \mid x^{(N)})\}].$$

Можна довести, що правило максимуму апостеріорних імовірностей забезпечує мінімум середньої імовірності $P(e)$ на множині $x^{(N)} \in X^{(N)}$.

Зауважимо, що величина $P(e)$ не розрізняє два типи помилок: клас V_1 помилково віднесений до класу V_2 чи навпаки клас V_2 помилково віднесений до класу V_1. Але зрозуміло, що в загальному випадку втрати від таких двох різних помилок (помилок першого та другого роду) не однакові. Розглянемо це питання більш детально.

Нехай клас V_1 – хворі на певну хворобу, наприклад, на цукровий діабет, а клас V_2 – люди, які не мають цієї хвороби. Нехай далі для прийняття рішень щодо наявності або відсутності діабету застосовують діагностичну ознаку x – кількість глюкози в крові.

Тоді, якщо умовні розподіли $p(x \mid V_1)$ і $p(x \mid V_2)$ *одномодальні*, то правило максимуму апостеріорних імовірностей зводиться до простого порогового правила (рис. 8.7)

$$d = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \geq x_0, \\ 2, \text{ якщо } x < x_0, \end{cases} \tag{8.30}$$

де x_0 – порогове значення, наприклад 5,5 ммоль/л[2].

[2] Конкретне значення x_0 визначають за медичною методикою.

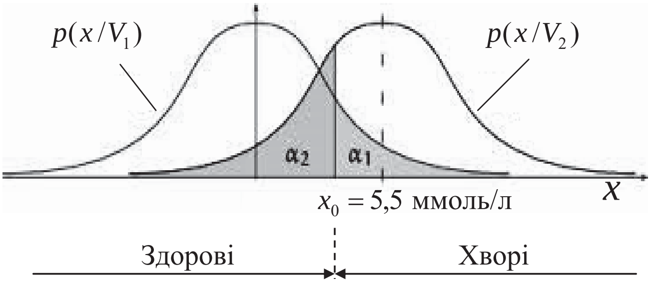


Рис. 8.7. Приклад застосування порогового правила

Як видно з наведеного рисунку існує два типи помилок

- α_1 – помилкове віднесення здорової людини до хворих;
- α_2 – помилкове віднесення хворого до здорових.

Правило максимуму апостеріорних імовірностей передбачає однакову ціну помилок α_1, α_2. У загальному випадку для оцінювання втрат від прийнятих рішень застосовують платіжну матрицю, яка має вигляд

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, \tag{8.31}$$

де L_{11} і L_{22} втрати від правильних рішень, а L_{12}, L_{21} – втрати, пов'язані з помилками α_1, α_2 першого та другого роду.

Для оцінювання середніх втрат $L(i, j)$ від рішення на користь класу V_i, $i = 1{,}2$, коли насправді об'єкт знаходиться у стані V_j, $j = 1{,}2$, у теорії статистичних рішень використовують середній ризик, який з урахуванням (8.23) має вигляд

$$R = \sum_{x^{(N)} \in X^{(N)}} \sum_{j=1}^{2} L(d(x^{(N)}), j) P(V_j) p(x^{(N)} | V_j). \tag{8.32}$$

Можна показати, що оптимальні рішення, які забезпечують мінімум середнього ризику (8.32) мають прийматися за правилом

$$d(x^{(N)}) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \lambda(\widehat{x}^{(N)}) > \theta_0, \\ 2, \text{ якщо } \lambda(\widehat{x}^{(N)}) < \theta_0 \end{cases} \tag{8.33}$$

за яким відношення правдоподібності

$$\lambda(\widehat{x}^{(N)}) = \frac{p(\widehat{x}^{(N)} \,|\, V_1)}{p(\widehat{x}^{(N)} \,|\, V_2)}$$

порівнюють з пороговим значенням

$$\theta_0 = \frac{P(V_2)(L_{21} - L_{22})}{P(V_1)(L_{12} - L_{11})}.$$

Якщо прийняти

$$L_{11} = L_{22} = 0 \;\text{ та }\; L_{12} = L_{21} = 1,$$

тобто втрати від правильних рішень дорівнюють нулю, а втрати від помилкових рішень дорівнюють одиниці, то середній ризик вироджується у середню імовірність помилок, а правило (8.33) зводиться до правила максимуму апостеріорних імовірностей.

8.4. Критерії корисності діагностичних тестів

Розглянемо з позицій теорії статистичних рішень критерії, за якими можна оцінювати корисність діагностичних рішень у задачах скринінгу, під яким розуміють виявлення хвороби під час масових профілактичних обстежень населення за умови відсутності клінічних проявів.

Зрозуміло, що будь-який реальний діагностичний тест, поряд з правильними рішеннями, призводить до

- *ложнонегативних* результатів, коли хвору людину вважають здоровою;
- *ложнопозитивних* результатів, коли здорову людину вважають хворою.

Ложнонегативний результат небезпечний, особливо для тяжкої хвороби, тому що залишає хвору людину без необхідного лікування. Однак і ложнопозитивний результат теж несе втрати, тому що здоровий може бути направлений на небезпечне додаткове обстеження, наприклад, на біопсію при підозрі на онкологічну хворобу або на коронарографію при підозрі на ішемічну хворобу серця.

Вважатимемо, що ефективність тесту оцінена на основі попередньо проведеного випробування на репрезентативній групі пацієнтів з заздалегідь відомими діагнозами. Результати таких випробувань зазвичай оформлюються у вигляді 2×2 матриці (табл. 8.15).

***Таблиця 8.15.* Результати випробування діагностичного тесту**

Справжній діагноз	**Результат тестування**	
	Рішення «Хворий»	Рішення «Здоровий»
Хворий	TP	FN
Здоровий	FP	TN

У таблиці фігурують такі позначення:

- ***TP*** (*True Positive*) – число правильних діагнозів «Хворий» (істиннопозитивний результат);
- ***TN*** (*True Negative*) – число правильних діагнозів «Здоровий» (істиннонегативний результат);
- ***FP*** (*False Positive*) – число здорових, що помилково віднесені до хворих (ложнопозитивний результат або помилка хибної тривоги);
- ***FN*** (*False Negative*) – число хворих, що помилково віднесені до здорових (ложнонегативний результат або пропуск цілі).

За даними табл. 8.15 легко можна оцінити прийняті в медичній діагностиці *операційні характеристики* тесту – чутливість та специфічність.

Чутливість (*Sensitivity*) S_E визначають часткою (відсотком) попередньо верифікованих хворих, яких тест відніс до хворих, тобто

$$S_E = \frac{TP}{TP + FN},$$

а **специфічність** (*Specificity*) S_P визначають часткою (відсотком) здорових, яких тест відніс до здорових, тобто

$$S_P = \frac{TN}{TN + FP}.$$

Виникає природне питання: які мають бути значення S_E і S_P, щоб тест можна було гарантовано рекомендувати для практичного застосування?

Введемо таке означення.

Означення 8.2. Діагностичний тест є *корисним* для задачі скринінгу, якщо апостеріорний ризик R, який виникає після його проведення, менше апріорного ризику R_0, тобто виконується *строга нерівність*

$$R < R_0. \tag{8.34}$$

Апостеріорний ризик R – це середні втрати, що отримає людина після проведення тесту, який надав йому інформацію «Ти хворий» або «Ти здоровий», а апріорний ризик викликаний рішеннями людини «Я хворий» або «Я здоровий», яка не проходила тестування (рис. 8.8).

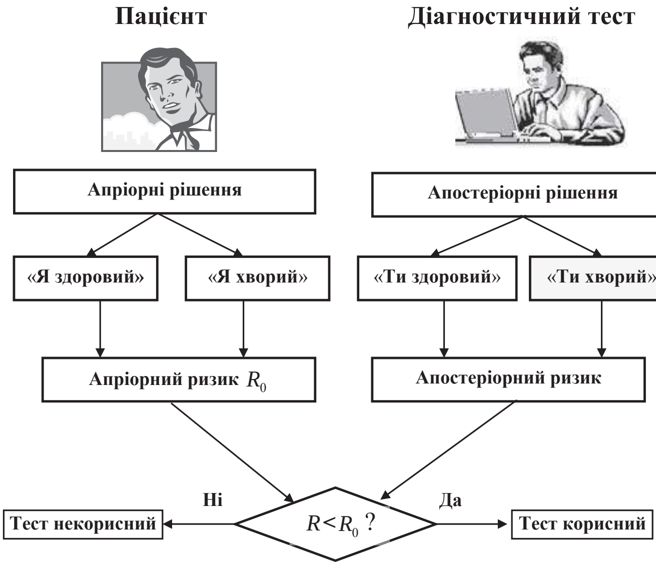


Рис. 8.8. Умова корисності діагностичного тесту

Визначимо величини, які фігурують у нерівності (8.34).

Вважатимемо, що досліджувана група репрезентативна та відображає генеральну сукупність хворих у популяції з відомою апріорною імовірністю (*преваленсом*) P хвороби. Відповідно величина $1-P$ буде визначати імовірність здорової людині в групі.

Якщо група репрезентативна, то чутливість S_E та специфічність S_P характеризують імовірності пропуску цілі $P(E|V_1)$ та хибної тривоги $P(E|V_2)$, тобто можна вважати, що:

$$S_E \approx 1-P(E|V_1), \tag{8.35}$$

$$S_P \approx 1-P(E|V_2). \tag{8.36}$$

Як і раніше будемо характеризувати втрати платіжною матрицею (8.31), а середні втрати під час масових обстежень осіб з невідомими діагнозами – середнім ризиком

$$R=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}P(V_i,d=j)L_{ij}\,, \tag{8.37}$$

де $P(V_i,d=j)$ означає імовірність сумісної появи двох випадкових подій: діагноз пацієнт належить до i-го класу (i =1,2), а згідно з діагностичним тестом діагноз пацієнту належить до j-го класу ($j=1{,}2$).

Для спрощення припустимо, що втрати, пов’язані з правильними рішеннями відсутні: $L_{11}=L_{22}=0$. Тоді, якщо прийняти до уваги означення імовірності *сумісної* появи двох подій

$$P(V_i,d=j)=P(V_i)P((d=j)|V_i),$$

то з (8.37) випливає, що помилкові рішення тесту ($j\neq i$) призводять до *апостеріорного ризику*

$$R=L_{12}P(V_1)P(E|V_1)+L_{21}(1-P(V_1)P(E|V_2),$$

який з урахуванням (8.35), (8.36) та прийнятого позначення P преваленсу хвороби можна представити в еквівалентній формі запису

$$R=L_{12}P(1-S_E)+L_{21}(1-P)(1-S_P)\,. \tag{8.38}$$

Визначимо тепер апріорний ризик тесту R_0. Кожен пацієнт, спираючись лише на преваленс хвороби P, може приймати одне з двох рішень:

«Я здоровий» і тоді апріорний ризик дорівнює $L_{12}P$,
«Я хворий» і тоді апріорний ризик дорівнює $L_{21}(1-P)$.

Введемо безрозмірну величину

$$\omega = \frac{L_{12}}{L_{21}},$$

яка визначає співвідношення втрат від помилок пропуску цілі та хибної тривоги.

Зрозуміло, що оптимальні апріорні рішення пацієнта, який не проходить тестування, повинні враховувати як розповсюдженість хвороби P, так і величину ω. Мінімум апріорного ризику (рис. 8.9) забезпечує рішення «Я здоровий», коли виконується умова

$$P(1+\omega) < 1 \tag{8.39}$$

та рішення «Я хворий», якщо

$$P(1+\omega) > 1. \tag{8.40}$$

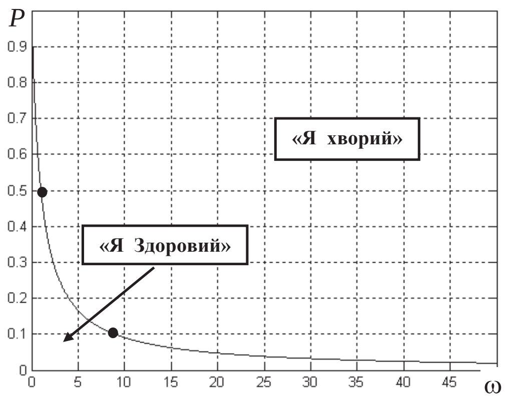


Рис. 8.9. Границя оптимальних апріорних рішень на площині (ω, P)

З (8.39), (8.40) випливає, що зі збільшенням ω (зростанням ціни ложнонегативного результату) апріорні рішення «Я хворий» слід приймати при менших значеннях превапенсу P.

Так, наприклад, як видно з рис. 8.9, коли $\omega = 1$ рішення «Я хворий» слід приймати при $P > 0{,}5$, а для $\omega = 9$ вже при $P > 0{,}1$.

Таким чином *апріорний ризик* R_0 можна представити так

$$R_0 = \begin{cases} L_{12}P, & \text{якщо} \quad P(1+\omega) < 1, \\ L_{21}(1-P), & \text{якщо} \quad P(1+\omega) > 1. \end{cases} \tag{8.41}$$

Підстановка (8.38) і (8.41) в (8.34) після елементарних перетворень дає змогу сформулювати теорему, яка визначає умову корисності діагностичного тесту для прийняття рішень у задачах скринінгу.

Теорема 8.1. Діагностичний тест *корисний*, в тому і тільки в тому випадку, коли за відомими преваленсом P, чутливістю S_E, специфічністю S_P та співвідношенням втрат ω виконується умова

$$(1-P)(1-S_P) < \omega P S_E, \text{ якщо } P(1+\omega) < 1 \tag{8.42}$$

або умова

$$(1-P)S_P > \omega P(1-S_E), \text{ якщо } P(1+\omega) > 1. \tag{8.43}$$

Продемонструємо на прикладі, що діагностичний тест, який має високі показники чутливості та специфічності, виявляється некорисним для проведення скринінгу, якщо не виконуються умови теореми 8.1.

Приклад 8.4. Припустимо, що для проведення скринінгу хвороби з превалєнсом 2% ($P = 0{,}02$) планують використовувати діагностичний тест з чутливістю $S_E = 0{,}9$ та специфічністю $S_P = 0{,}9$. Нехай втрати від ложнонегативних результатів тестування складають $L_{12} = 5$ од., а втрати від ложнопозитивних результатів складають $L_{21} = 1$, тобто $\omega = 5$.

Неважко побачити, що для такого тесту умови теореми 8.1 не виконуються. Покажемо, що такий тест дійсно є некорисним.

На рис. 8.10 представлено очікувані результати тестування групи в 10000 осіб.

Якщо не проводити тестування, то при $P = 0{,}02$ у групі з 10000 осіб може бути 200 хворих, які будуть вважатися здоровими. Таким чином, *апріорний ризик* на одну особу складає

$$R_0 = \frac{L_{12} \cdot 200}{10000} = \frac{5 \cdot 200}{10000} = 0{,}1 \text{ од.}$$

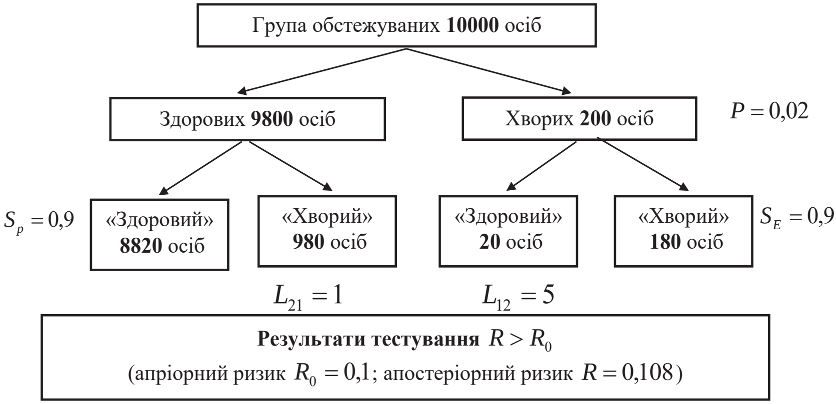


Рис. 8.10. Очікувані результати скринінгу

Якщо ж тест має чутливість $S_E = 0{,}9$ та специфічність $S_P = 0{,}9$, то при обстеженні 10000 осіб може буде не виявлено 20 хворих, а 980 здорових осіб можуть бути помилково віднесені до хворих. Такі ложнонегативні та ложнопозитівні помилки призведуть до очікуваного *апостеріорного ризику* на одну особу

$$R = \frac{L_{12} \cdot 20 + L_{21} \cdot 980}{10000} = \frac{5 \cdot 20 + 1 \cdot 980}{10000} = 1{,}08 \text{ од.}$$

Тобто апостеріорний ризик перевищує апріорний ($R > R_0$) і з точки зору означення 8.2 тест абсолютно некорисний для задачі скринінгу.

Якщо припустити, що $L_{12} = L_{21} = 1$, то некорисність тесту виявиться ще більш вражаючою: очікуваний апостеріорний ризик на одну особу складе $R = 0{,}1$, тоді як апріорний ризик дорівнює $R_0 = 0{,}02$.

На перший погляд такий парадоксальний результат некорисності тесту з високими показниками чутливості та специфічності має цілком безперечне пояснення. Справа в тому, що коли не виконуються умови теореми 8.1, то з точки зору правила мінімуму середнього ризику рішення «Ти хворий» необґрунтоване. За результатами тестування *завжди* повинно прийматися рішення «Ти хворий», яке співпадає з апріорним рішенням. Зрозуміло, що в такому випадку тест стає некорисним.

Умови теореми 8.1 дозволяють сформулювати дві теореми, які визначають допустимі значення чутливості та специфічності гарантовано корисного діагностичного тесту.

Теорема 8.2. Якщо в області $P(1+\omega)<1$ специфічність S_P тесту не перевищує граничне значення, тобто

$$S_P < \frac{1-P(1+\omega)}{1-P},$$

то *для будь-якої великої* чутливості S_E тест заздалегідь некорисний

Доведення. З (8.42) випливає, що при $P(1+\omega)<1$ діагностичний тест корисний тільки в тому випадку, коли

$$S_P > \frac{1-P(1+\omega S_E)}{1-P}. \tag{8.44}$$

Оскільки, завжди $S_E \le 1$, то підсилення (8.44) шляхом підстановки $S_E = 1$ дає оцінку знизу граничного значення специфічності гарантовано корисного тесту

$$S_P^{Гр} = \frac{1-P(1+\omega)}{1-P} .$$

Останнє співвідношення доводить справедливість теореми.

На рис. 8.11 показані графіки границь допустимих значень специфічності $S_P^{Гр}$ при різних значень преваленсу P і співвідношеннях ω втрат від помилок пропуску цілі та хибної тривоги. Як видно, величина $S_P^{Гр}$ зменшується зі збільшенням P та ω.

Слід звернути увагу на те, що при малих значень превalенса $P<0{,}02$, характерних для скринінгу низки хвороб (сахарний діабет, рак молочної залози та інші) специфічність S_P гарантовано корисного діагностичного тесту має перевищувати 90% при $\omega \leq 5$ та 98 % при $\omega = 1$.

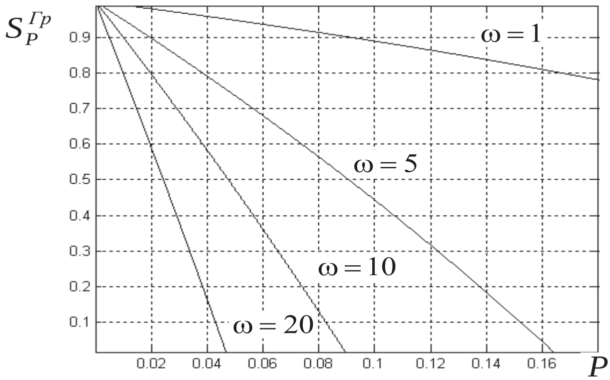


Рис. 8.11. Графіки границь допустимих значень специфічності

Для особливо небезпечних хвороб співвідношення втрат від ложнонегативних і ложнопозитивних результатів суттєво збільшується. Тому при $P(1+\omega) > 1$ оптимальні апріорні рішення «Я хворий» мають прийматися навіть з низьким превеленсом P.

Наприклад, при $\omega = 200$ апріорні рішення «Я хворий» мають прийматися вже при $P > 0{,}5\%$ (рис. 8.12).

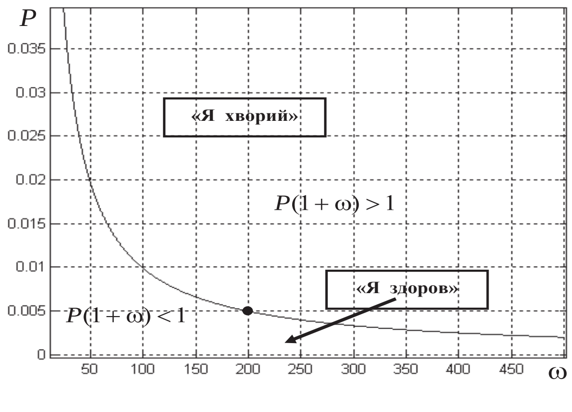


Рис. 8.12. Області оптимальних апріорних рішень з високими ω

Теорема 8.3. Якщо в області $P(1+\omega)>1$ чутливість тесту не перевищує граничного значення, тобто якщо

$$S_E < 1 - \frac{1-P}{P\omega},$$

то за *будь-якої великої специфічності* S_P тест заздалегідь некорисний.

Доведення. З теореми 8.1 випливає, що в області $P(1+\omega)>1$ діагностичний тест гарантовано корисний, тільки в тому випадку, коли

$$S_E > 1 - \frac{(1-P)S_P}{P\omega}. \tag{8.45}$$

Оскільки завжди $S_P \le 1$, то підсилення (8.45) внаслідок підстановки значення $S_P = 1$ дає змогу при $P(1+\omega)>1$ оцінити нижнє граничне значення чутливості гарантовано корисного тесту:

$$S_E^{Гр} = 1 - \frac{1-P}{P\omega}.$$

Теорема доведена.

На рис. 8.13 показані графіки границь допустимих значень чутливості $S_E^{Гр}$ при різних значеннях превалeнсу P і співвідношеннях ω втрат від помилок пропуску цілі та хибної тривоги. Як видно з рис. 8.13, на відміну від $S_P^{Гр}$, гранична величина $S_E^{Гр}$ зростає зі збільшенням P та ω.

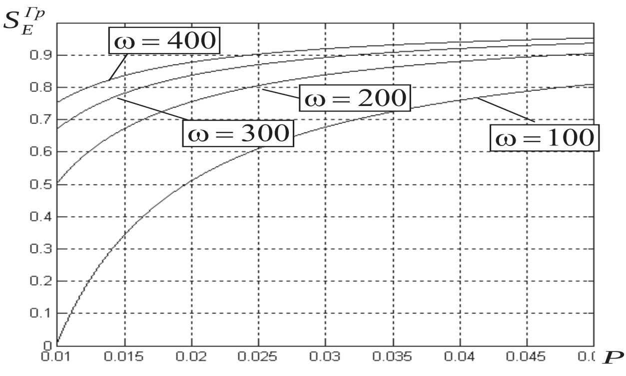


Рис. 8.13. Графіки границь допустимих значень чутливості

Умови теореми 8.1 дозволяють також вдосконалити популярний в медичній та технічній діагностиці метод порівняння діагностичної цінності тестів, що ґрунтується на аналізі так званої експериментальної ROC-кривої (***R****eceiver* ***O****perating* ***C****haracteristic*).

ROC-аналіз передбачає, що будь-який бінарний діагностичний тест (класифікатор) з відомими чутливістю S_E та специфічністю S_P, можна відобразити точкою на площині (ROC-площині) з координатами $(S_E, 1-S_P)$, що дає наочне графічне представлення діагностичної цінності тесту (рис. 8.14).

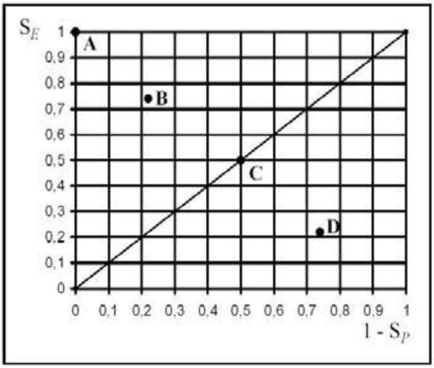


Рис. 8.14. Відображення діагностичних тестів на ROC-площині

Ідеальний діагностичний тест **A** розташований в точці з координатами (0,1) ROC-площини. Такий тест завжди приймає істинно позитивні рішення без помилок хибної тривоги, тобто відносить всіх хворих до класу хворих та не зараховує здорових до хворих.

Таким чином, *ефективні* діагностичні тести знаходяться у лівому верхньому кутку ROC-площини: чим ближче до точки **A** точка **B** з операційними характеристиками S_E і S_P, тим тест *ефективніший*.

Тести, розташовані в лівому нижньому кутку ROC- площини, називають *консервативними*, оскільки за умови малого відсотку помилок хибної тривоги вони мають низьку чутливість S_E. Якщо консервативний тест, який має високе значення специфічності S_P прийняв рішення «Хворий», то до такого рішення слід ставитися з високим ступенем довіри. Водночас рішення «Здоровий» може бути не вірним через низьку чутливість S_E.

Тести, розташовані в правому верхньому куті, називають *ліберальними*, так як за умови великого відсотку істинно позитивних результатів мають низьку специфічність. Через високу чутливість S_E рішення «Здоровий» таких тестів, швидше за все, вірно, тоді як протилежне рішення «Хворий» може бути помилковим через низьку специфічність S_P.

Тест **C**, розташований на діагоналі ROC-площини, не дає ніякої додаткової діагностичної інформації і тому безкорисний. Такі тести еквівалентні класифікаторам, які використовують стратегію «випадкового вгадування» класів.

Тест **D**, розташований нижче діагоналі, ще гірший від тих, які використовують стратегію випадкового вгадування. Однак, такий тест можна «перевести» в точку **B**, якщо змінити його рішення на протилежні.

Застосовуючи тест для діагностики станів об'єкту, який реалізує порогове правило (8.30), можна визначити його чутливість та специфічність при *різних* значеннях порогу x_0 та за обчислюваними парами значень побудувати експериментальну ROC-криву (рис. 8.15).

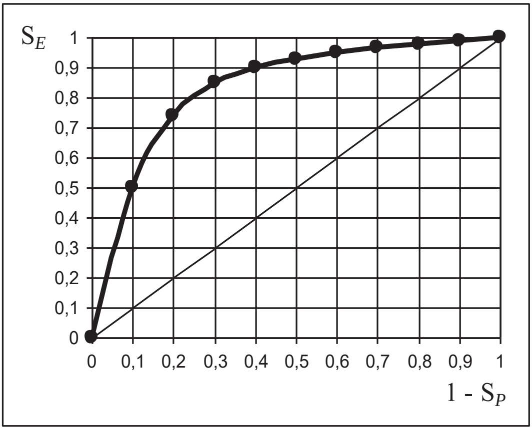
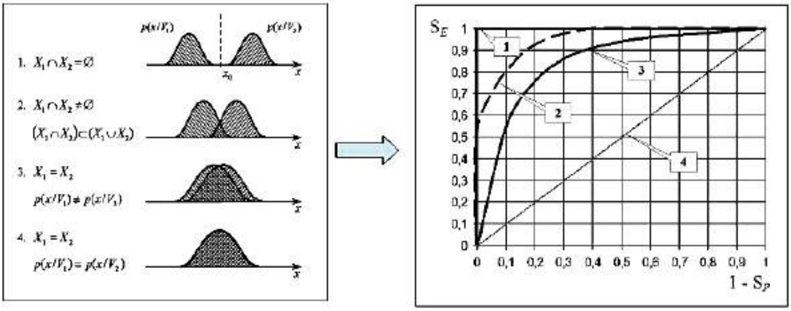


Рис. 8.15. Експериментальна ROC-крива порогового класифікатора

Згадані вище чотири можливих варіанти розташування носіїв X_1, X_2 розподілів $p(x|V_1)$, $p(x|V_2)$ ознаки x у класах V_1 і V_2 породжують відповідні типи ROC-кривих (рис. 8.16). Легко побачити, що ROC-криві віддаляються від точки 1 ідеального тесту з чутливістю $S_E = 1$ і $S_P = 1$ (точки 1), коли збільшується перетин носіїв X_1, X_2 умовних розподілів $p(x|V_1)$, $p(x|V_2)$ і збігається з діагоналлю ROC-площини, при виконанні умови $p(x|V_1) \equiv p(x|V_2)$.



Умовні розподіли ознаки **Відповідні ROC криві**

Рис. 8.16. Взаємозв'язок умовних розподілів ознаки та ROC-кривих

Тому для порівняння ефективності діагностичних тестів застосовують площу AUC (*Area Under Curve*) під ROC-кривою, яка характеризує середню чутливість тесту $\overline{S}_E$ з можливими значеннями його специфічності $0 \le S_P \le 1$ або середню специфічність тесту $\overline{S}_P$ з можливими значеннями чутливості $0 \le S_E \le 1$.

Для розширення можливостей ROC-аналізу переформулюємо теорему 8.1 наступним чином.

Теорема 8.4. Діагностичний тест *гарантовано корисний* в сенсі строгої нерівності $R < R_0$, якщо його чутливість S_E і специфічність S_P пов'язані співвідношенням

$$S_E > m(1 - S_P), \quad \text{якщо} \quad m \ge 1 \qquad (8.46)$$

або

$$S_E > 1 - m + m(1 - S_P), \ \text{якщо} \quad m < 1, \qquad (8.47)$$

де

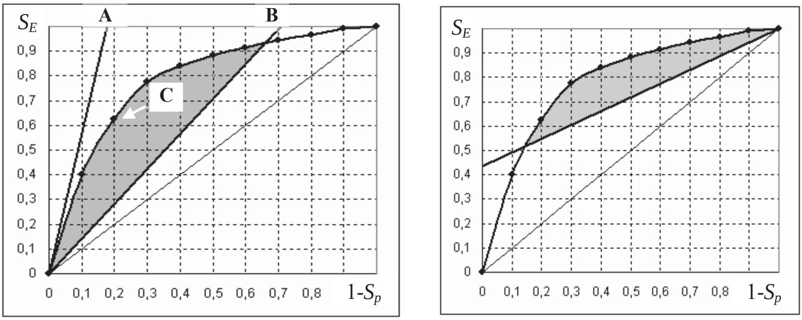
$$m = \frac{L_{21}(1-P)}{L_{12}P}. \tag{8.48}$$

Такі умови дозволяють *підсилити* традиційний ROC-аналіз шляхом обмеження ROC-кривої прямою, яка визначається рівняннями (8.46) – (8.48) та обмежує область гарантовано корисних тестів.

При $m \geq 1$ така пряма проходить через точки з координатами (0, 0) і ($1/m, 1$), а при $m < 1$ через точки з координатами (1,1) і $(0, 1-m)$ (рис. 8.17).

Відрізок **OA** (рис. 8.17, ліворуч) відповідає випадку, коли $P = 0{,}15$ та $\omega = 1$. Як видно, у даному випадку тест некорисний, оскільки ROC-крива розташована нижче відрізка **OA**. Але, якщо за умовами задачі втрати від пропуску цілі в чотири рази вище втрат від хибної тривоги, тобто $\omega = 4$, то відповідна пряма **OB** вже перетинає ROC-криву.

Тому тест з чутливістю $C_E = 62{,}5\%$ і специфічністю $C_P = 80\%$ виявиться гарантовано корисним, оскільки точка **C** з такими операційними характеристикам розташована на допустимій частині ROC-кривої.



$m \geq 1$ $m < 1$

Рис. 8.17. Підсилений ROC-аналіз

Умови (8.42) і (8.43) надають можливість вирішити й зворотну задачу: визначити допустимий інтервал співвідношення втрат ω, коли тест з відомими чутливістю C_E і специфічністю C_P залишається гарантовано корисним для скринінгу хвороби з превалєнсом P.

Такий інтервал визначають за формулою

$$\frac{1-P}{P}\cdot\frac{1-S_P}{S_E}\le\omega\le\frac{1-P}{P}\cdot\frac{S_P}{1-S_E}. \qquad (8.49)$$

З формули (8.49) випливає, наприклад, що мамографія, яка, згідно з прикладом 8.1, має чутливість $S_E = 80\ \%$ та специфічність $S_P = 90{,}4\ \%$, є корисною для скринінгу раку молочної залози в групі жінок у сорокарічному віці, в якій за даними медичної статистики розповсюдженість хвороби становить 1%, якщо співвідношення втрат від ложнонегативних та ложнопозитивних помилок лежить у межах

$$111{,}9 \le \omega \le 447{,}5.$$

Приймаючи до уваги небезпечність такої хвороби можна вважати таке співвідношення втрат цілком допустимим.

Завдання для комп'ютерного практикуму

Створити програму визначення корисності діагностичного тесту за умовами теореми 8.1 при довільних значеннях чутливості S_E, специфічності S_P, превалєнсі P та співвідношенні втрат ω.

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте особливості прийняття рішень у грі з природою.
2. Порівняйте методи прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності.
3. Наведіть відмінності критеріїв Лапласа, Вальда, Гурвіца та Севіджа.
4. Поясніть суть баєйсового підходу до прийняття рішень.
5. Наведіть означення критерію корисності діагностичного тесту в задачі скринінгу.
6. Поясніть суть підсиленого ROC-аналізу.

РОЗДІЛ 9

ДЕРЕВА РІШЕНЬ ТА ЛОТЕРЕЇ

9.1. Теорія раціонального вибору

Теорія статистичних рішень поклала підґрунтя для теорії *раціонального вибору*, яка застосовує моделі впорядкованого процесу мислення. За таким підходом *поєднують* формальні методи вибору, які враховують оцінки імовірності випадкових подій, та рішення, які приймає людина (ОПР), діючи неформально.

Для того, щоб такі рішення були обґрунтованими в теорії раціонального вибору вводиться ряд аксіом, на основі яких доводиться теорема щодо існування спеціальної функції – функції корисності. Рішення вважають раціональним, якщо воно забезпечує найбільшу корисність. У такому випадку аналізують не одне, а багато послідовних рішень, які будуть оцінюватись відповідно до простого критерію.

У теорії раціональних рішень активно застосовують такі поняття як дерева рішень та лотереї.

Означення. Лотерея (x, p, y) – це гра з двома можливими наслідками x і $y = \bar{x}$, під якими розуміють випадкові події, що утворюють повну групу та виникають з імовірностями p і $1 - p$.

Найпростіший приклад лотереї – підкидання монети (рис. 9.1).

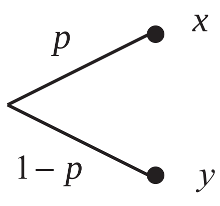


Рис. 9.1. Графічне представлення лотереї

Розглянемо основні аксіоми.

Аксіома 9.1. Для бінарних відношень строгої переваги P, нестрогої переваги R та еквівалентності I мають місце:

- умова *зв'язності*, згідно з якою або виконують xRy, або виконують yRx, або обидва одночасно;
- умова *транзитивності*, згідно з якою *з* xRy і yRz *слідує* xRz.

Аксіома 9.2. Дві лотереї, які зображені на рис. 9.2, знаходяться у відношенні еквівалентності.

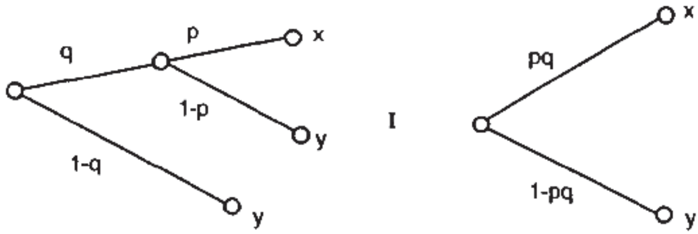


Рис. 9.2. Еквівалентні лотереї

Аксіома 9.3. Якщо наслідки x та y еквівалентні, то лотерея xPz еквівалента лотереї yPz.

Аксіома 9.4. Якщо $xPyPz$**,** то існує імовірність $p \neq 0$, що y еквівалентний xPz.

На основі таких аксіом доведена теорема.

Теорема. 9.1. На множині наслідків існує функція корисності U, така, що xRy тоді і тільки тоді, коли

$$U(x) \geq U(y)$$

і

$$U(x, p, y) = pU(x) + (1-p)U(y).$$

<u>Наслідок</u>. Якщо $U(x) \geq U(y)$, то $aU(x) \geq aU(y)$, де a – ціле додатне число.

Розглянемо приклад типової задачі раціонального вибору.

Приклад 9.1. Є множина $V = \{V_1, V_2\}$ непрозорих ваз двох типів V_1 і V_2. У вазі кожного типу знаходиться певне число білих W та чорних B куль (рис. 9.3.).

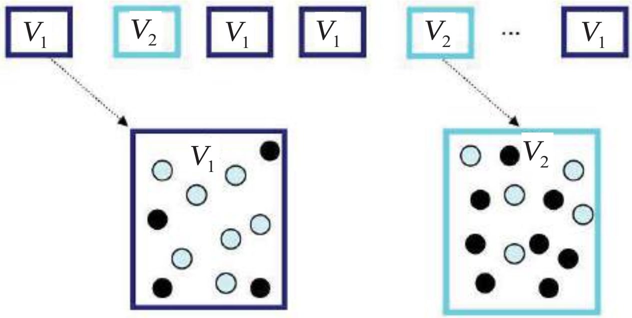


Рис. 9.3. Задача з двома вазами

Особа, що приймає рішення (ОПР) знає, що загалом є:

- 700 ваз типу V_1 та 300 ваз типу V_2;
- у кожній вазі типу V_1 знаходиться 6 білих і 4 чорних кулі;
- у кожній вазі типу V_2 знаходиться 3 білих W і 7 чорних B куль.

Задача ОПР – найбільш раціональним чином прийняти одне з двох рішень:

- d_1 – ваза, яку вона бачить, типу V_1;
- d_2 – ваза, яку вона бачить, типу V_2.

Відомо, що за умовами задачі:

- якщо ОПР вгадала, що ваза типу V_1 – отримує 350 грн, а якщо не вгадала – сплачує 50 грн;
- якщо ОПР вгадала, що ваза типу V_2 – отримує 500 грн, а якщо не вгадала – сплачує 100 грн.

Представимо умови задачі у вигляді табл. 9.1.

Теорія корисності рекомендує оцінювати середню (очікувану) корисність кожного з рішень та обирати рішення з максимальною очікуваною корисністю.

Якщо ОПР не знає, які кулі знаходяться у конкретній вазі, то за умовами задачі раціональним є рішення d_1, тому що таке рішення має більшу очікувану корисність:

$$U(d_1) = 0{,}7 \cdot 350 - 0{,}3 \cdot 50 = 230 \text{ грн}; \tag{9.1}$$

$$U(d_2) = 0{,}3 \cdot 500 - 0{,}7 \cdot 100 = 80 \text{ грн}. \tag{9.2}$$

***Таблиця 9.1.* Умови задачі до прикладу 9.1**

Тип вази	**Імовірність вибору вази даного типу**	**Виграш за рішенням, грн**	
		d_1	d_2
V_1	0,7	350	–100
V_2	0,3	–50	500

Такий раціональний вибір реалізує метод прийняття рішень на основі максимуму очікуваної вигоди або мінімуму середнього ризику, який ми розглядали в попередньому розділі.

Але можна піти далі та деталізувати процес розв'язування задачі з застосуванням дерева рішень.

Дерево рішень представляє собою граф у вигляді сукупності вузлів і гілок, причому:

- вузол, у якому рішення приймає людина (ОПР), позначають квадратом;
- вузол, у якому все вирішує випадкова подія – світлим колом;
- на гілках записують імовірності;
- справа від кінцевих гілок записують результати.

На рис. 9.4 показано дерево рішень для задачі за прикладом 9.1.

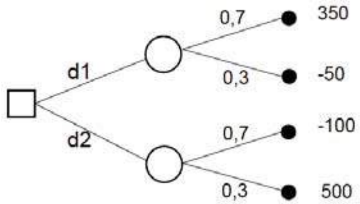


Рис. 9.4. Дерево рішень

9.2. Процедура згортання дерева рішень

Припустимо тепер, що ОПР може за *додаткову плату* 60 грн перед тим, як прийняти рішення, витягнути з вази одну кулю, визначити її колір та повернути у вазу. Зрозуміло, що така *додаткова інформація* може підвищити достовірність рішення.

За умовами задачі апріорні імовірності гіпотез, які вказують на типи ваз, дорівнюють $P(V_1) = 0{,}7$ і $P(V_2) = 0{,}3$, а умовні імовірності витягнути з вази конкретного типу кулю білого W та чорного B кольору дорівнюють відповідно

$$p(W \mid V_1) = 0{,}6 \text{ та } p(W \mid V_2) = 0{,}3,$$

$$p(B \mid V_1) = 0{,}4 \text{ та } p(B \mid V_2) = 0{,}7.$$

Визначимо безумовні імовірності витягнути кулю певного кольору

$$C \in \{W, B\}.$$

Для цього використаємо формулу *повної імовірності*

$$P(C) = P(C \mid V_1)P(V_1) + P(C \mid V_2)P(V_2). \qquad (9.3)$$

З (9.3) випливає що

$$P(W) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}51. \qquad (9.4)$$

Відповідно

$$P(B) = 0{,}49. \qquad (9.5)$$

За формулою Байєса маємо

$$P(V_i \mid C) = \frac{P(V_i)P(C \mid V_i)}{\sum_i P(V_i)P(C \mid V_i)},\ i = 1{,}2,\ C \in \{W, B\}. \qquad (9.6)$$

Ґрунтуючись на (9.6) визначаємо апостеріорні імовірності

$$P(V_1 \mid W) = \frac{P(V_1)P(W \mid V_1)}{P(W)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}6}{0{,}51} \approx 0{,}82 \qquad (9.7)$$

і відповідно

$$P(V_2 \mid W) \approx 0{,}18 .$$

Аналогічно можна визначити, що

$$P(V_1 \mid B) \approx 0{,}57 \text{ і } P(V_2 \mid B) \approx 0{,}43 . \qquad (9.8)$$

Спираючись на отримані дані удосконалимо дерево рішень (рис. 9.5).

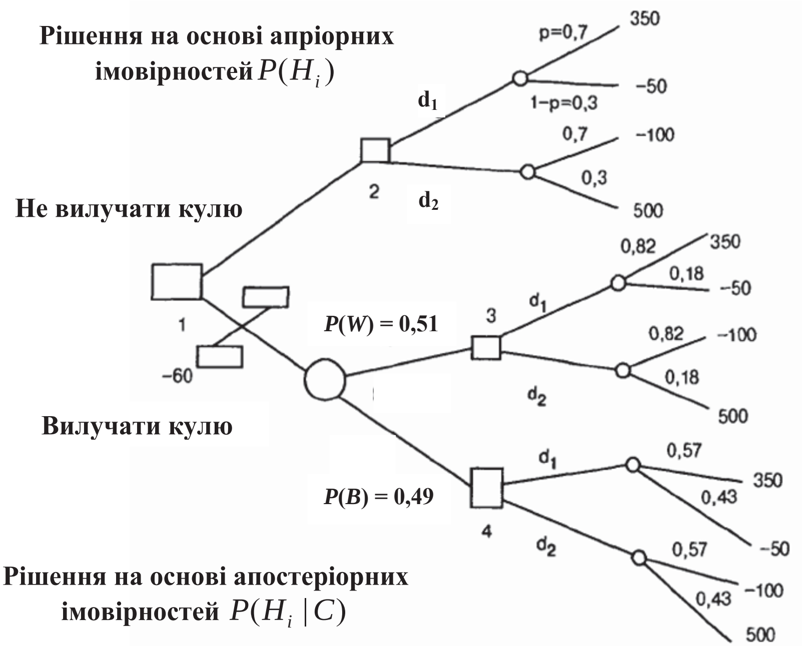


Рис. 9.5. Вдосконалене дерево рішень

Тепер вже ОПР може приймати свої рішення як за апріорними, так і за апостеріорними імовірностями. У вузлі 1 ОПР здійснює такий вибір, опираючись лише на те, що за умовами задачі вилучення кулі потребує *додаткову* плату, тобто його додаткові втрати складають 60 грн.

Якщо ОПР не погоджується на додаткову плату, то рішення можуть прийматися лише на основі апріорних імовірностей $P(V_1)=0{,}7$ та $P(V_2)=0{,}3$ і наслідки рішень співпадають з тими, що представлені на рис. 9.3.

Якщо ж ОПР дає згоду на додаткові втрати у 60 грн, то розвиток наступних подій відображають нижньою гілкою дерева рішень і залежать від випадкової події – який колір $C \in \{W, B\}$ має куля, витягнута з вази.

За результатами обчислень у 51% випадків витягнута куля буде білою W, а в 49% – чорною B. Подальші рішення ОПР залежать від кольору витягнутої кулі. Тобто розвиток подій може бути спрямований до вузла 3 або 4.

Зрозуміло, що у вузлі 3 повинно прийматися одне з двох рішень d_1 і d_2 на основі порівняння апостеріорних імовірностей

$$P(V_1 | W)=0{,}82 \text{ і } P(V_2 | W)=0{,}18,$$

а у вузлі 4 – одне з двох рішень d_1 і d_2 на основі порівняння апостеріорних імовірностей

$$P(V_1 | B)=0{,}57 \text{ і } P(V_2 | B)=0{,}53.$$

Після того, як дерево рішень побудовано, проводиться його аналіз – вибір оптимальної послідовності рішень за критерієм максимуму очікуваної корисності.

Для такого аналізу потрібно:

1. Рухатися від кінцевих гілок дерева до його кореня.

2. Там де є випадковість (коло) – визначити середнє значення корисності.

3. Там, де рішення прийняв ОПР (квадратик) – вибрати гілку з найбільшою очікуваною корисністю, а інші гілки – відсікти рисками.

Проведемо аналіз побудованого дерева рішень (рис. 9.4) та визначимо чи раціонально вилучати кулю з вази. Результати такого аналізу представлені на рис. 9.6.

Будемо рухатись за верхньою гілкою дерева справа-наліво (від кінцевих гілок до кореня).

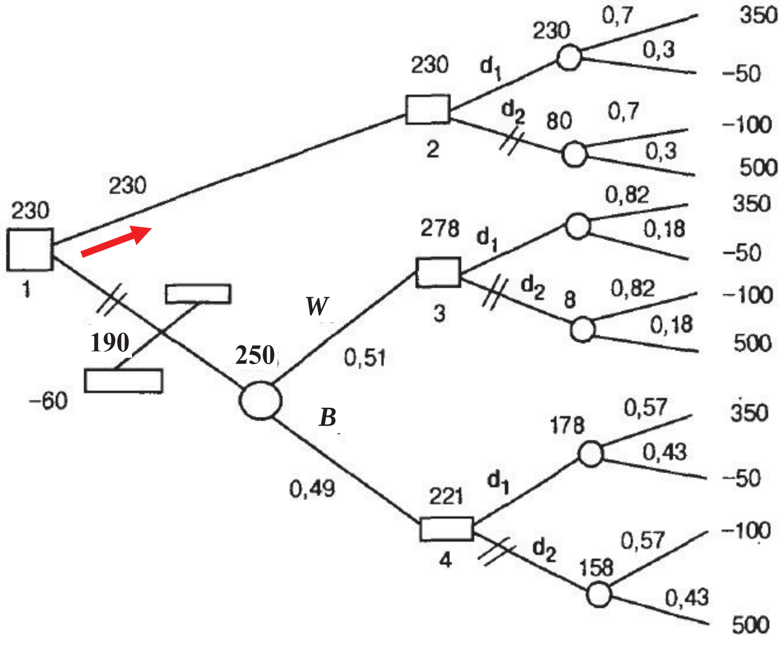


Рис. 9.6. Результат згортання дерева рішень

Очікувана корисність $U(d_1) = 230$ грн, яку згідно з (9.1) отримає ОПР у випадку прийняття рішення d_1, перевищує очікувану корисність $U(d_2) = 80$ грн, яку, згідно з (9.2) отримає ОПР у випадку прийняття рішення d_2. Тому над квадратиком 2 ставимо число 230 і відсікаємо двома рисками гілку, яка відповідає рішенню d_2 з меншим значенням очікуваної корисності.

Тепер будемо рухатися справа-наліво до квадратика 3. Нам потрібно порівняти очікувані корисності, які отримає ОПР за рішеннями d_1 і d_2.

Згідно з наведеними даними маємо

$$U(d_1) = 0{,}82 \cdot 350 - 0{,}18 \cdot 50 = 278 \text{ грн}; \tag{9.9}$$

$$U(d_2) = 0{,}18 \cdot 500 - 0{,}82 \cdot 100 = 8 \text{ грн.} \qquad (9.10)$$

Таким чином над квадратиком 3 пишемо число 278 – найбільшу з очікуваної корисності, визначених за (9.9), (9.10), та відсічемо двома рисками гілку, яка відповідає рішенню d_2 з меншим значенням очікуваної корисності.

Аналогічним чином обчислюють число 221, яке ставимо над квадратиком 4.

Тепер треба оцінити очікувану корисність, яку ОПР отримає у випадковій ситуації, яку познає коло, розташоване зліва від квадратиків 3 та 4.

Очікувану корисність визначають з урахуванням імовірностей випадкових подій W та B з обчисленими за формулами (9.4), (9.5) імовірностями $P(W) = 0{,}51$ і $P(B) = 0{,}49$. У результаті маємо

$$U(d_1 \vee d_2) = 0{,}51 \cdot 278 + 0{,}49 \cdot 221 \approx 250 \text{ грн.}$$

Запишемо це число над відповідним колом та визначимо очікувану корисність з урахуванням втрат 60 грн, які за умовами задачі ОПР сплачує за можливість вилучати кулі з ваз

$$U = 250 - 60 = 190 \text{ грн.}$$

Над квадратиком 1 (коренем дерева) треба поставити число 230 – максимальне з очікуваної корисності, яку ОПР отримає у випадку прийняття рішення за апріорними імовірностями (230 грн) та апостеріорними імовірностями (190 грн).

Таким чином, на основі аналізу дерева рішень ми прийшли до того, що найкращий варіант дій – не витягувати кулю з вази та прийняти рішення d_1 (ваза типу V_1) *за апріорними* імовірностями. Цей варіант *раціонального вибору* відповідає найвищому шляху дерева рішень, зображеному на рис. 9.5.

Представлена процедура знаходження оптимального шляху на дереві рішень отримала назву «згортання» дерева рішень.

При заданих числових значеннях апріорних імовірностей і результатів обчислення апостеріорних імовірностей така процедура надає змогу здійснити вибір тієї стратегії (послідовності дій), з якою досягають найбільший виграш, тобто одержують максимум функції корисності для ОПР.

Зрозуміло, що зі зміною умов задачі визначена оптимальна послідовність дій ОПР може змінитися. Нехай, наприклад, *додаткова плата* за отримання інформації шляхом витягування з вази однієї кулі зменшилась і становить не 60 грн, а 10 грн. У цьому випадку оптимальна послідовність дій ОПР має йти по іншій гілці, яка передбачає прийняття рішень за *апостеріорними* імовірностями (рис. 9.7).

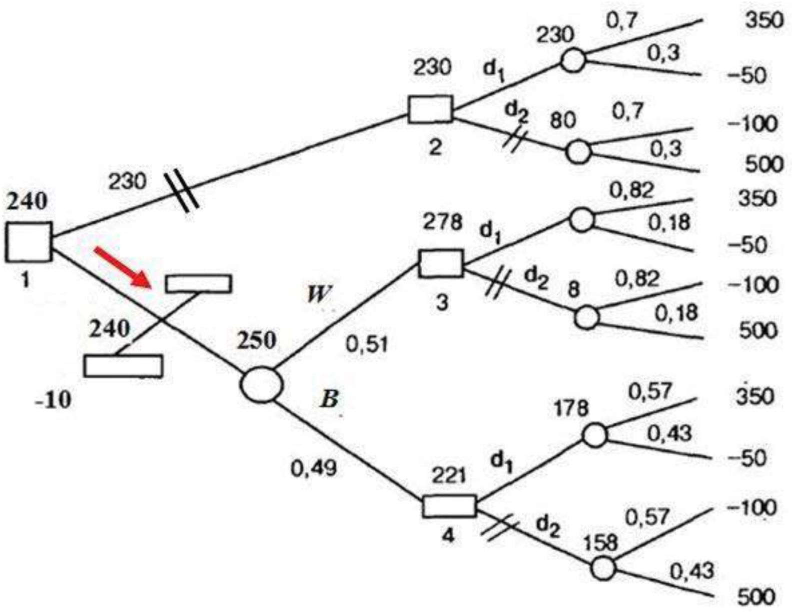


Рис. 9.7. Результат згортання дерева після зміни додаткової плати

Теорія раціонального вибору дає змогу приймати науково обґрунтовані рішення і запобігти помилок, які властиві людям з суб'єктивним оцінюванням ситуації та призводять до парадоксів.

Один за таких парадоксів зветься *парадокс Аллє*, сутність якого полягає у суб'єктивному виборі варіанту в ситуації, зображеній на рис. 9.8.

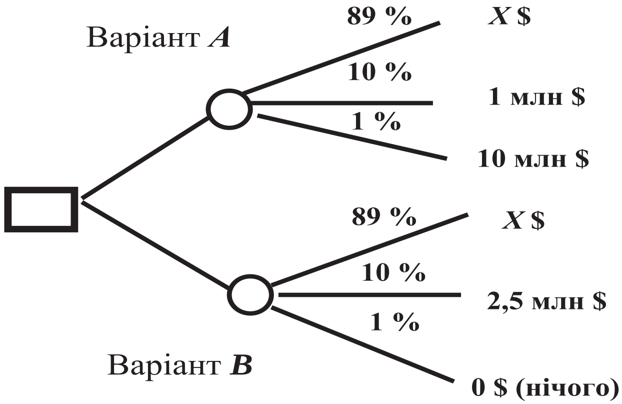


Рис. 9.8. Парадокс Аллє

Встановлено, що більшість людей не схильні до ризику і, незалежно від невідомої їм суми X, віддають перевагу першому варіанту, тобто приймають рішення

$$A \succ B.$$

Водночас, з точки зору максимуму очікуваного виграшу такий варіант не є раціональним. Дійсно, при виборі варіанту A очікуваний (середній) виграш становить

$$U_A = 0{,}89X + 0{,}1 \cdot 10^6 + 0{,}01 \cdot 10^7 = 0{,}89X + 2{,}0 \cdot 10^5,$$

а у випадку вибору варіанту B –

$$U_B = 0{,}89X + 0{,}1 \cdot 2{,}5 \cdot 10^6 = 0{,}89X + 2{,}5 \cdot 10^5,$$

тобто $U(B) > U(A)$ і тоді

$$B \succ A.$$

Лише при $X \to 0$ психологічний бар’єр усувається і поведінка більшості людей стає раціональною.

Приймаючи до уваги суб’єктивізм людей, які схильні переоцінювати низькі імовірності можливих результатів та недооцінювати високі, Д. Канеман і А. Тверскі в 1979 р. запропонували нову теорію прийняття рішень – теорію перспектив.

9.3. Елементи теорії перспектив

Теорія перспектив дає змогу визначати оптимальні рішення, що ґрунтуються *не тільки* на імовірностях виграшів та втрат ОПР, а й моделювати рішення, які приймаються у реальному житті.

Для обчислення очікуваної корисності U, за відомими цінностями $u(d_i)$ окремих альтернатив $d_i = d_1,...,d_N$, пропонують використовувати спеціальну функцію $\pi(p_i)$, яка *не лінійно* залежить від імовірності i-го результату

$$U = \sum_{i=1}^{N} \pi(p_i)u(d_i)\,. \qquad (9.11)$$

Функція $\pi(p_i)$ дає уявлення щодо суб'єктивної оцінки імовірності й має вигляд, зображений на рис. 9.9.

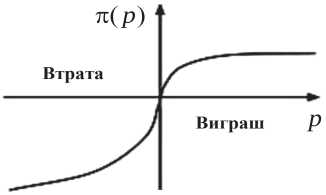


Рис. 9.9. Оцінювання суб'єктивної імовірності результатів вибору

Функція $\pi(p_i)$ має такі властивості:

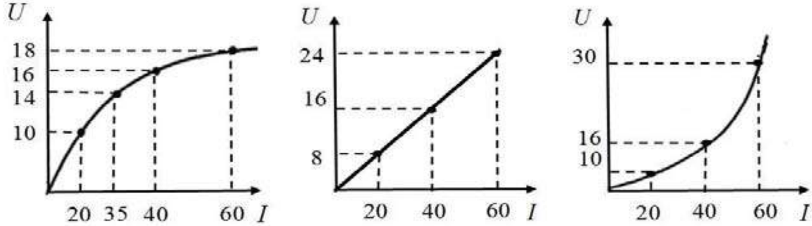
- $\pi(0) = 0$; $\pi(1) = 1$;
- $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$;
- $\pi(p) > p$ з малими значеннями імовірності p.

Слід зауважити, що взагалі люди розрізняються своєю готовністю піти на ризик. Деякі зовсім не хочуть ризикувати, для них ризик – серйозне випробовування і вони готові наважитись на ризик лише в тому випадку, якщо їм запропонують певну компенсацію. Саме тому зазвичай функція $\pi(p_i)$ має такий вигляд. Інші люди байдужі (нейтральні) до ризику. Водночас є певний відсоток людей, яким дуже подобається ризикувати.

Розглянемо приклад прийняття рішень з урахуванням таких трьох особливостей індивідуальних уподобань ОПР.

Приклад 9.2. Припустимо, що людина шукає роботу. На рис. 9.10 подані графіки, які характеризують функцію корисності $U(I)$ трьох типів ОПР залежно від доходів I.

Рис. 9.10, *а* – ілюструє найбільш розповсюджений тип функції $U(I)$, коли ОПР не бажає ризикувати, тобто віддає перевагу гарантованому доходу. В такому випадку функція $U(I)$ опукла вверх.



а б в

Рис. 9.10. Графіки функцій $U(I)$ для трьох типів відношень до ризику: *а* – ОПР не бажає ризикувати; *б* – ОПР нейтральна до ризику; *в* – ОПР подобається ризикувати

Припустимо, що ОПР може вибрати роботу зі стабільним доходом у 40 тис. грн або роботу пов'язану з ризиком, яка з однаковою імовірністю $P = 0{,}5$ може збільшити його дохід до 60 тис. грн або зменшити до 20 тис. грн.

Як видно з рис. 9.10 *а*, рівень корисності з доходом у 20 тис. грн дорівнює 10 одиниць, а рівень корисності з доходом у 60 тис. грн дорівнює 18 одиниць. Визначимо очікувану корисність як середню величину за такими можливими рішеннями з урахуванням імовірності кожного з результатів

$$U_a = 0{,}5U(20) + 0{,}5U(60) = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 18 = 14 \text{ од.} \tag{9.12}$$

Таким чином, у даному випадку зі стабільним доходом у 40 тис. грн ОПР має корисність $U(40) = 16$ од., яка перевищує очікувану корисність $U_a = 14$ од. за умови вибору роботи, що пов'язана з ризиком.

Тому людина, для якої функція корисності опукла вверх (рис. 9.10, *а*) вважає за краще не ризикувати та обрати роботу зі стабільним доходом.

Можна визначити навіть винагороду, яку ОПР готова заплатити, щоб уникнути ризику та обрати роботу зі стабільним доходом 40 тис. грн.

Дійсно, очікування корисності роботи, що пов'язана з ризиком, згідно з (9.12) дорівнює $U_a = 14$ од. Однак, як видно з рис. 9.10, *а* – такий же рівень корисності може бути досягнений зі стабільним доходом у 35 тис. грн. Таким чином, винагорода, якою ОПР готова пожертвувати, вважаючи роботу зі стабільним доходом у 40 тис. грн кращою ніж ризикованою, складає

$$\Delta I = 40 - 35 = 5 \text{ тис. грн.}$$

Розглянемо тепер, які рішення приймає ОПР з нейтральним ставленням до ризику (людина, яка з даним очікуваним доходом байдужа до вибору між гарантованим і ризикованим результатами). Графічно це може бути виражено за допомогою функції $U(I)$, показаної на рис. 9.10, *б*.

У даному випадку очікувана корисність рішення, пов'язаного з ризиком, складає

$$U_б = 0{,}5U(20) + 0{,}5U(60) = 0{,}5 \cdot 8 + 0{,}5 \cdot 24 = 16 \text{ од.}, \tag{9.13}$$

що дорівнює корисності вибору роботи зі стабільним доходом ОПР у 40 тис. грн.

І нарешті, розглянемо ситуацію, коли ОПР здатна йти на ризик. Люди, схильні до ризику, вподобають займатися ризикованим підприємництвом, грати на біржі тощо. В даному випадку функція корисності $U(I)$ опукла донизу (рис. 9.10, *в*) і очікувана корисність ризикованого рішення складає

$$U_в = 0{,}5U(20) + 0{,}5U(60) = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 30 = 20 \text{ од.} \tag{9.14}$$

Оскільки очікувана корисність $U_в = 20$ од. перевищує корисність $U(40) = 16$ од., яку забезпечує робота гарантованим доходом 40 тис. грн, то ризикована ОПР обирає роботу, яка потенційно може їй надати більший дохід у 60 тис. грн.

Завдання для комп'ютерного практикуму

Розробити комп'ютерну програму, яка забезпечує розв'язування задачі за прикладом 9.2 для трьох типів функції корисності, показаних на рис. 9.10.

Програма має забезпечити розрахунок очікуваної корисності за формулами (9.12), (9.13) або (9.14) залежно від вибору користувачем типу функції корисності.

Програма повинна мати елементи інтерфейсу, який забезпечує:

- вибір однієї з трьох типів функції корисності;
- введення *довільних* значень стабільного та ризикованого доходів (у прикладі 9.2 ці значення становлять відповідно 40 тис. грн, 60 тис. грн та 20 тис. грн);
- відображення результатів обчислення очікуваної корисності, яка відповідає вибору користувача.

Питання для самоконтролю

1. Надайте визначення поняттю лотерея.
2. Наведіть приклад дерева рішень.
3. Опишіть механізм згортання дерева рішень.
4. Охарактеризуйте типи уподобань ОПР щодо відношення до ризику, які розглядає теорія перспектив.
5. Поясніть формулу (9.11), за якою обчислюють очікувану корисність.

РОЗДІЛ 10

МЕТОДИ КОЛЕКТИВНИХ РІШЕНЬ

10.1. Задача формування колективних рішень

Відомим прийомом підвищення якості прийняття рішень є об'єднання спеціалістів відповідної області знань у колектив, який виробляє спільне рішення. Типовим прикладом подібного колективу є медичний консиліум, що приймає колективне рішення щодо поточного стану пацієнта на основі врахування різних думок – особистих рішень експертів.

Ідею колективного рішення можна застосувати і до «колективу» формальних алгоритмів, що надає змогу підвищити достовірність розпізнавання спостережуваних ситуацій.

Нехай експерти $A_1,...,A_N$, $N \geq 2$, братимуть участь у колективному прийнятті рішень. Припустимо, що група розглядає деякий набір альтернатив, і кожний i-й член групи здійснює свій вибір $d_i \in D$, $i = 1,...,N$. Виникає задача формування колективного рішення $d \in D$, що певним чином узгоджує індивідуальні рішення $d_1,...,d_N$ та виражає «загальну думку» групи (рис. 10.1).

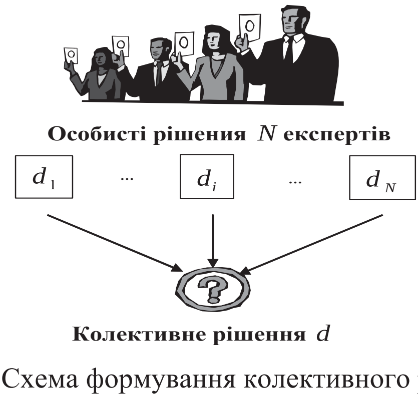


Рис. 10.1. Схема формування колективного рішення

Синтез функції $d \in D$, яка визначає спосіб інтеграції індивідуальних рішень $d_1,...,d_N$ членів колективу, є центральною задачею в організації колективу. Звичайно, різним принципам інтеграції індивідуальних рішень будуть відповідати різні колективні рішення.

Розглянемо з початку один з найбільш популярних методів інтеграції індивідуальних рішень експертів – метод голосування.

10.2. Метод голосування

Одним зі способів побудови колективного рішення $d \in D$ є правило більшості, коли колективним рішенням вважається альтернатива, яка отримала найбільше число голосів експертів. Припускається, що заборонено голосувати відразу за два рішення.

Водночас такий, на перший погляд, справедливий метод надає однозначне та справедливе рішення лише в тому випадку, коли число можливих альтернатив дорівнює двом $(M = 2)$ та експерти групи мають рівні компетентності в оцінювані альтернатив. У загальному ж випадку метод голосування може не надати справедливе рішення та призвести до так званих «парадоксів» голосування.

Розглянемо метод голосування більш детально.

Метод ґрунтується на індивідуальних перевагах експертів щодо альтернатив $d \in D$. Нагадаємо, що коли експерт вважає, що альтернатива $d_i \in D$ перевершує альтернативу $d_j \in D$, то цей факт позначається так:

$$d_i \succ d_j,\ i \neq j.$$

Індивідуальний порядок переваг експерта – це набір альтернатив, які розташовані в порядку їх переваги *конкретним* експертом. Сукупність індивідуальних порядків переваг альтернатив, наданих експертами групи, називають *профілем* переваг.

Кожен з експертів має один голос і віддає його за найкращу на його думку альтернативу. Переможцем оголошують альтернативу, яка отримала більше половини голосів експертів (*абсолютна* більшість).

Якщо множина D містить тільки дві альтернативи, то правило більшості правомірно вважати найбільш справедливим. Якщо ж число альтернатив більше двох, то метод голосування може викликати сумніви в справедливості результату.

Покажемо це на характерних прикладах.

Приклад 10.1. Нехай $N = 29$ експертів приймають рішення щодо $M = 3$ альтернатив d_1, d_2, d_3.

Припустимо, що індивідуальні переваги експертів такі:

15 експертів визнали, що $d_1 \succ d_2 \succ d_3$,

14 експертів визнали, що $d_2 \succ d_3 \succ d_1$.

Оскільки альтернатива d_1 набирає 15 голосів експертів, що більше половини, то вона стає переможцем. Але чи є вона дійсно кращою серед альтернатив?

Насправді, кращою може бути і альтернатива d_2, оскільки 14 експертів їй віддали перевагу, а 15 експертів поставили її на високе (друге) місце. До того ж, 14 експертів поставили альтернативу d_1 на останнє третє місце (після d_3).

Ще більш складний випадок виникає, коли при $M > 2$ жодна з альтернатив не набирає абсолютну більшість (більше половини) голосів експертів. Як бути в такому випадку? Яку з альтернатив оголосити переможцем, якщо голосування проводиться в один тур?

Приклад 10.2. Нехай є $N = 21$ експертів та $M = 4$ альтернативи d_1, d_2, d_3, d_4 з наступними індивідуальними перевагами експертів:

3 експерти: $d_1 \succ d_2 \succ d_3 \succ d_4$,

5 експертів: $d_1 \succ d_3 \succ d_2 \succ d_4$,

7 експертів: $d_2 \succ d_4 \succ d_3 \succ d_1$,

6 експертів: $d_3 \succ d_2 \succ d_4 \succ d_1$.

Позначимо через $\gamma(d_i)$ сумарну кількість голосів, яку альтернатива d_i отримає при голосуванні. Сумарна кількість голосів за альтернативу, яку в індивідуальному порядку експерти поставили на перше місці складає

$$\gamma(d_1) = 8,\ \gamma(d_2) = 7,\ \gamma(d_3) = 6,\ \gamma(d_4) = 0,$$

тобто жодна з альтернатив не отримує абсолютної більшості.

В таких випадках для прийняття колективного рішення можна використовувати правило *відносної* більшості: «перемагає» альтернатива, яка набирає більше голосів у порівнянні з іншими. В даному випадку перемагає альтернатива d_1, яка має досить пристойний результат – майже 40% від загальної кількості голосів.

Також популярність отримало правило Борда, відповідно до якого альтернатива, що займає останнє місце в індивідуальному порядку переваг, отримує 0 балів, передостаннє місце – 1 бал і т.д. Отже, альтернатива, яка займає перше місце в індивідуальному порядку переваг експерта, отримує від нього $M-1$ балів.

Тоді, для даних, описаних у прикладі 10.2, маємо

$$3 \text{ експерти } \begin{cases} d_1 \succ d_2 \succ d_3 \succ d_4, \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів,} \end{cases}$$

$$5 \text{ експертів } \begin{cases} d_1 \succ d_3 \succ d_2 \succ d_4, \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів,} \end{cases}$$

$$7 \text{ експертів } \begin{cases} d_2 \succ d_4 \succ d_3 \succ d, \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів,} \end{cases}$$

$$6 \text{ експертів } \begin{cases} d_3 \succ d_2 \succ d_4 \succ d_1, \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів.} \end{cases}$$

Зведемо сумарні бали, отримані альтернативами від всіх експертів (табл. 10.1). Отже, маємо таке впорядкування альтернатив

$$d_2 \succ d_3 \succ d_1 \succ d_4, \tag{10.1}$$

а значить переможцем, за правилом Борда, є альтернатива d_2 з найбільшою сумою балів.

Зауважимо, що колективна перевага (10.1) не збігається з жодною індивідуальною перевагою. Крім того, переможець за правилом Борда (альтернатива d_2) не співпадає з переможцем за правилом відносної більшості (альтернатива d_1).

***Таблиця 10.1.* Сумарні бали за правилом Борда**

Альтернативи	d_1	d_2	d_3	d_4
Бали	24	**44**	38	20

Розглянемо ще одне відоме правило голосування – правило Кондорсе. Відповідно до правила Кондорсе найкращою вважають альтернативу d_i, яка перемагає будь-яку іншу альтернативу при парному порівнянні за правилом більшості. Іншими словами, альтернатива d_i найкраща, коли число експертів, які вважають, що $d_i \succ d_j$, більше числа експертів, які вважають, що $d_j \succ d_i$, $\forall j \neq i$.

Позначимо через $K(d_i, d_j)$ кількість експертів, у яких в індивідуальному порядку переваг альтернатива $d_i \in D$ перевершує альтернативу $d_j \in D$, $i \neq j$.

Тоді за даними прикладу 10.2 кількість експертів, які вважають, що $d_1 \succ d_2$, дорівнює 8, тобто $K(d_1, d_2) = 8$. Аналогічним чином можуть бути визначені результати інших попарних переваг, які зведені в табл. 10.2.

Таблиця 10.2. **Результати попарних переваг альтернатив**

	d_1	d_2	d_3	d_4
d_1	–	8	8	8
d_2	13	–	10	21
d_3	**13**	**11**	–	**14**
d_4	13	0	7	–

За правилом Кондорсе (табл. 10.2), кращою має бути визнана альтернатива d_3, оскільки вона «виграє» у попарному порівнянні з кожною іншою альтернативою.

Таким чином, групове рішення залежить від прийнятого правила голосування та при одних і тих же даних може надавати різні результати.

Так за даними прикладу 10.2 виявилось, що:

- альтернатива d_2 – краща за правилом Борда,
- альтернатива d_3 – краща за правилом Кондорсе,
- альтернатива d_1 – краща за правилом відносної більшості.

Зауважимо, що жодна з альтернатив не набрала абсолютної більшості голосів, а альтернатива d_1, яка визнана кращою за правилом відносної більшості, є *найгіршою* з усіх альтернатив за правилом Кондорсе.

Розглянутий приклад дозволяє зробити ще один важливий висновок: існують такі профілі переваг, за якими найкраща за правилом відносної більшості альтернатива виявляється гіршою від інших альтернатив у попарному порівнянні.

Можна вказати й інші парадокси методів голосування. Один з таких парадоксів – *парадокс правила Борда*.

Припустимо, що в розглянутому прикладі 10.2 альтернатива d_4 з деяких міркувань заздалегідь відкидається всіма експертами. У такому випадку, ті ж $N = 21$ експертів прийматимуть колективне рішення вже тільки для $M = 3$ альтернатив d_1, d_2, d_3, та їх індивідуальні профілі переваг будуть мати вигляд:

$$\text{3 експерти: } d_1 \succ d_2 \succ d_3,$$

$$\text{5 експертів: } d_1 \succ d_3 \succ d_2,$$

$$\text{7 експертів: } d_2 \succ d_3 \succ d_1,$$

$$\text{6 експертів: } d_3 \succ d_2 \succ d_1.$$

Неважко побачити, що за правилом відносної більшості найкращою залишається альтернатива d_1, а за правилом Кондорсе – альтернатива d_3.

Визначимо тепер найкращу альтернативу за правилом Борда:

$$\text{3 експерти } \begin{cases} d_1 \succ d_2 \succ d_3, \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів,} \end{cases}$$

$$\text{5 експертів } \begin{cases} d_1 \succ d_3 \succ d_2, \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів,} \end{cases}$$

$$\mathbf{7} \text{ експертів } \begin{cases} d_2 \succ d_3 \succ d_1, \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів,} \end{cases}$$

$$\text{6 експертів } \begin{cases} d_3 \succ d_2 \succ d_1, \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів.} \end{cases}$$

Таким чином,

$$\text{альтернатива } d_1 \text{ набирає } \gamma(d_1) = 16 \text{ балів,}$$

$$\text{альтернатива } d_2 \text{ набирає } \gamma(d_2) = 23 \text{ бали,}$$

$$\text{альтернатива } d_3 \text{ набирає } \gamma(d_3) = 24 \text{ бали.}$$

Звідси випливає така групова перевага альтернатив:

$$d_3 \succ d_2 \succ d_1,$$

і найкращою за правилом Борда тепер має бути визнана альтернатива d_3, а не альтернатива d_2.

У цьому і полягає парадокс Борда: виключення з множини D заздалегідь слабкої альтернативи d_4, яка б не отримала *жодного* голосу експертів, змінює переможця. Отже, правило Борда, яке допускає подібну ситуацію, не викликає довіри до способу визначення найкращої альтернативи.

Зауважимо, що правило Кондорсе не призведе до подібного парадоксу: яка б з альтернатив, окрім d_3, не була б заздалегідь відкинута експертами, найкращою за Кондорсе все одно залишається альтернатива d_3.

Однак, правило Кондорсе призводить до іншого парадоксу.

Припустимо, що індивідуальні переваги $N = 3$ експертів щодо $M = 3$ альтернатив d_1, d_2, d_3 такі:

перший експерт: $d_1 \succ d_2 \succ d_3$

другий експерт: $d_3 \succ d_1 \succ d_2$,

третій експерт: $d_2 \succ d_3 \succ d_1$.

Звідси за правилом голосування Кондорсе отримуємо три суперечливих твердження:

$$d_2 \succ d_3; \quad d_3 \succ d_1; \quad d_1 \succ d_2.$$

Зрозуміло, що в даному випадку неможливо прийняти узгоджене групове рішення, що визначає волю більшості експертів, оскільки ми прийшли до *нетранзитивного* співвідношення

$$d_1 \succ d_2 \succ d_3 \succ d_1.$$

Таку ситуацію прийнято називати *парадоксом Кондорсе*.

Колективне рішення можна приймати при голосуванні у кілька турів. У найпростішому випадку таке голосування проводиться у два тури.

Спочатку кожен експерт подає свій голос за одну найбільш бажану альтернативу. Якщо будь-яка альтернатива набирає абсолютну більшість голосів, то її визнають найкращою. В іншому випадку, проводиться другий тур голосування за правилом більшості вже тільки для двох альтернатив, які набрали найбільшу кількість голосів у першому турі (рис. 10.2).

Альтернативи		Лідери 1 туру		Лідер 2 туру
$\{d_1,...,d_M\}$	$\Rightarrow$	$\{d_i, d_j\}$	$\Rightarrow$	d_i або d_j

Рис. 10.2. Колективне голосування у два тури

Набуло популярності також правило голосування з послідовним вибуванням неперспективних альтернатив.

Якщо в першому турі будь-яка альтернатива набирає абсолютну більшість голосів, то її оголошують найкращою. В іншому випадку, проводиться другий тур голосування, але без участі альтернативи, яка набрала мінімальну кількість голосів у першому турі.

Потім, якщо необхідно, проводиться наступний тур голосування без участі альтернативи, яка набрала мінімальну кількість голосів у попередньому турі голосування, і т.д. до виявлення переможця.

Зрозуміло, що з M альтернативами може знадобитися проведення $M-1$ турів.

Зауважимо, що при $M=3$ правило голосування у два тури і правила голосування з послідовним вибуванням дають один і той же результат. Якщо ж число альтернатив $M>3$, то такі правила можуть призвести до різних результатів.

Приклад 10.3. Нехай є $M=4$ альтернативи і $N=23$ експерти. Профіль переваг експертів має такий вигляд:

$$6 \text{ експертів}: d_1 \succ d_2 \succ d_3 \succ d_4,$$

$$7 \text{ експертів}: d_3 \succ d_2 \succ d_4 \succ d_1,$$

$$8 \text{ експертів}: d_4 \succ d_2 \succ d_1 \succ d_3,$$

$$2 \text{ експерти}: d_2 \succ d_1 \succ d_4 \succ d_3.$$

За правилом Борда маємо

$$\gamma(d_1) = 30,\ \gamma(d_2) = 48,\ \gamma(d_3) = 27,\ \gamma(d_4) = 33,$$

а значить, найкращою вважають альтернативу d_2, яка набрала найбільшу кількість очок.

Також альтернатива d_2 є переможцем і за правилом Кондорсе, оскільки альтернатива d_2 впевнено перемагає у попарному порівнянні з кожною з інших альтернатив: альтернативу d_1 з рахунком 17:6, альтернативу d_3 з рахунком 16:7 і альтернативу d_4 з рахунком 15:8 (табл. 10.3).

Таблиця 10.3. **Результати попарних порівнянь альтернатив**

	d_1	d_2	d_3	d_4
d_1	–	6	16	8
d_2	**17**	**–**	**16**	**15**
d_3	7	7	–	13
d_4	15	8	10	–

Розглянемо, як за такими даними працюватиме правило голосування у два тури з послідовним виключенням.

У першому турі голосування альтернативи отримують таку кількість голосів:

$$\gamma(d_1) = 6,\ \gamma(d_2) = 2,\ \gamma(d_3) = 7,\ \gamma(d_4) = 8.$$

Таким чином, максимальне число голосів набирає альтернатива d_4, але вона не набирає абсолютну більшість голосів. Тому проводиться другий тур голосування.

Зауважимо, що альтернатива d_2, яка виявилася переможцем і за правилом Борда, і за правилом Кондорсе, набрала мінімальну кількість голосів і вибуває з наступних турів голосування!

У другому турі голосування залишають альтернативи d_3 і d_4, які набрали в першому турі більше голосів.

Після проведення другого туру голосування (за відсутністю альтернатив d_1 і d_2), альтернативи d_3 і d_4 отримують такі голоси

$$\gamma(d_3) = 13\ ,\ \gamma(d_4) = 10\,.$$

Отже, у першому турі голосування вибуває альтернатива d_2 – переможець за правилом Борда і Кондорсе, а у другому турі перемагає альтернатива d_3 – найгірша альтернатива за правилом Борда (набрала найменше голосів $\gamma(d_3) = 27$).

За такими даними результати голосування з послідовним виключенням ілюструє схема (рис. 10.3).

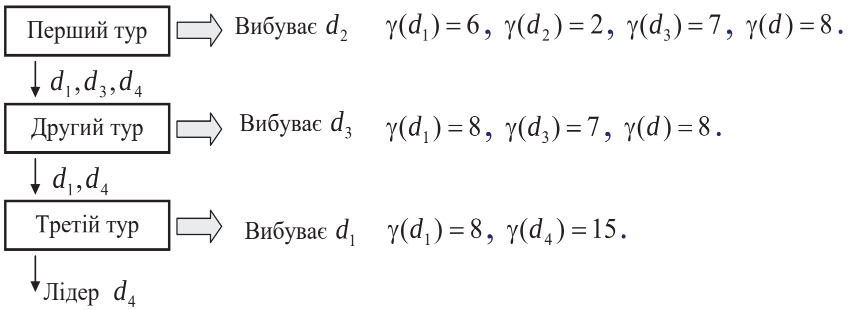


Рис. 10.3. Схема голосування з послідовним виключенням

Проведений аналіз схем голосування у кілька турів дозволяє зробити такі важливі висновки:

1. Існують профілі переваг експертів, при яких переможець за правилами Кондорсе і Борда може вибути вже у першому турі голосування.

2. Незалежно від проведення голосування у два тури або з подальшим виключенням існують профілі переваг експертів, за якими найкраща за правилами Кондорсе і Борда альтернатива можливо не буде визнана найкращою.

3. Альтернатива, яка визнана найкращою за правилом голосування в два тури, може виявитися гіршою альтернативою за правилом Борда.

У зв’язку з такою неоднозначністю та суперечливістю розглянутих правил були сформульовані аксіоми, які відображають справедливу схему голосування.

Аксіома монотонності. Нехай для заданого правила голосування з деяким профілем переваг експертів перемагає альтернатива $d_i \in D$.

Тоді альтернатива d_i має перемогти і в тому випадку, коли:

- порядок альтернативи d_i поліпшується відносно до хоча б однієї будь-якої альтернативи і не погіршується відносно до решти альтернатив;
- індивідуальний порядок переваги пари будь-яких інших альтернатив кожного експерта залишається незмінним.

Зауважимо, що правило відносної більшості і правило Борда задовольняють властивість монотонності. Правило голосування у два тури з послідовним виключенням не задовольняє властивість монотонності.

Аксіома участі. Нехай для заданого правила голосування з деяким профілем переваг група N експертів визнала найкращою альтернативу $d_i \in D$.

Тоді, якщо деякий додатковий експерт візьме участь у голосуванні, то $N+1$ експерти мають визнати найкращою або ту ж саму альтернатива d_i, або альтернативу, яка для додаткового експерта краща ніж альтернатива d_i.

Інакше кажучи, якщо додатковий голос змінює результат прийняття колективного рішення, то такий змінений результат має бути вигідним *тільки* додатковому експерту.

Можна показати, що правила Борда та відносної більшості задовольняють аксіому участі, а правило голосування у два тури і правило голосування з послідовним виключенням не задовольняють.

Аксіома анонімності (рівноправність експертів). Якщо два експерта «обміняються» своїми індивідуальними порядками переваг, то результат колективного рішення не зміниться.

Аксіома нейтральності (рівноправність альтернатив). Якщо альтернативи d_i і d_j поміняти місцями в індивідуальних порядках переваг всіх експертів, то результат колективного голосування буде таким:

- якщо раніше перемагала альтернатива d_i, то тепер переможцем буде альтернатива d_j;

• якщо раніше перемагала альтернатива d_j, то тепер переможцем буде альтернатива d_i;

• якщо раніше перемагала альтернатива d_m, яку не торкалися перейменування, то і тепер переможцем буде альтернатива d_m.

Аксіома поповнення. Нехай є дві групи експертів N_1 і N_2, $N_1 \bigcap N_2 = \varnothing$. Тоді, якщо експерти груп N_1 і N_2 за заданим правилом голосування визнають найкращою альтернативу $d_i \in D$, то експерти об'єднаної групи $N_1 \bigcup N_2$ за тим же правилом голосування також визнають найкращою альтернативу d_i.

Аксіома неперервності. Нехай експерти з множини N_1 за заданим правилом голосування обирають альтернативу $d_i \in D$, а експерти з множини N_2 – іншу альтернативу $d_j \in D$, $j \neq i$, $N_1 \bigcap N_2 = \varnothing$.

Тоді існує досить велике натуральне число k, яке забезпечить таке розширення групи експертів N_1, що експерти об'єднаної множини $(kN_1) \bigcup N_2$ виберуть альтернативу d_i. Іншими словами, якщо до множини N_1 додавати одного експерта, що віддає перевагу альтернативі d_i, то існує «критична маса» експертів, така, що далі буде визнаватися найкращою тільки альтернатива d_i.

Методи голосування розглядають також задачу визначення *колективної переваги* альтернатив.

Змістовна постановка такої задачі полягає у тому, що на основі індивідуальних переваг членів експертної групи необхідно побудувати *узгоджене* колективне рішення щодо порядку переваги розглянутих альтернатив. Іншими словами, в даному випадку, потрібно не тільки вибрати кращу альтернативу з деякої множини альтернатив, наприклад, альтернатив

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,$$

але і вказати порядок їх переваг, наприклад, такий порядок

$$d_2 \succ d_4 \succ d_1 \succ d_3,$$

який найкращим чином узгоджується з наявними індивідуальними перевагами всіх членів групи експертів.

Зрозуміло, що процедура вироблення колективної думки щодо переваги альтернатив також має задовольняти ряд розумних вимог.

Виникає питання, а чи можна створити таку систему голосування, яка була б одночасно раціональною (без протиріч), демократичною (одна людина – один голос) і вирішальною (дозволяла здійснити вибір)?

Кеннет Ерроу із Стенфордского університету сформулював ряд очевидних принципів (аксіом), яким повинна задовольняти така система, у тому числі:

Принцип універсальності. Система голосування повинна бути дієвою (призводити до результату) за будь-яких переваг експертів.

Принцип одностайності. Якщо кожен експерт вважає, що альтернатива d_i краща за альтернативу d_j, то і колективна думка має бути

$$d_i \succ d_j.$$

Принцип незалежності. Розташування будь-яких двох альтернатив d_i і d_j у колективній думці залежить тільки від порядку розташування цих альтернатив голосуючими експертами і не залежить від ставлення експертів до інших альтернатив.

Принцип повноти. Система має забезпечувати можливість порівняння будь-якої пари альтернатив і визначати з них кращу.

Принцип транзитивності (раціональності). Якщо відповідно до думки експертів альтернативу d_j визнають не кращою від альтернативи d_i, а альтернативу d_m – не кращою від альтернативи d_j, то альтернатива d_m – не краща за альтернативу d_i.

Кеннет Ерроу довів теорему про неможливість ідеального «колективного вибору», яка отримала назву *парадокса Ерроу*.

Теорема Ерроу. Якщо число альтернатив $M \geq 3$, то не існує ніяких інших способів побудови колективного рішення, що задовольняє зазначеним вище принципам, крім призначення диктатором одного з експертів, думку якого нав'язують іншим експертам.

Для визначення *колективної переваги* альтернатив за індивідуальними перевагами окремих експертів використовують метод, що ґрунтується на визначені так званої медіані *Кемені*. Наведемо основні властивості цього методу.

Нехай є M альтернатив і кожен з N експертів надав своє особисте ранжування цих альтернатив:

$$P_1,\ ...,\ P_N\ ,$$

тобто P_n , $n=1,...,N$ визначає порядок, у якому за розумінням n-го експерта альтернативи розташовані відповідно до їхніх переваг: на першому місті найкраща альтернатива, а на останньому – найгірша.

Медіана Кемені дозволяє знайти таке результуюче ранжування P^*, сумарна відстань від якого до всіх заданих ранжувань мінімальна, тобто

$$P^* = \arg\min_P \sum_{n=1}^{N} R_c(P, P_n)\,,$$

де $R_c(P,P_n)$ – відстань між ранжуваннями P і P_n.

Відстань $R_c(P,P_n)$ між ранжуваннями P і P_n (*відстань Кемені*) визначають за допомогою матриць бінарних відношень

$$A^n = \left\| a_{ij}^n \right\|\ i=1,...,M\,,\ j=1,...,M\,,\ n=1,...,N\,,$$

які кожен з N експертів надає у формі

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } d_i \text{ має перевагу перед } d_j, \\ -1, & \text{якщо } d_j \text{ має перевагу перед } d_i, \\ 0, & \text{якщо } d_i \text{ та } d_j \text{ рівноцінні.} \end{cases}$$

Відстань від довільного ранжування P, якому відповідає матриця $\left\| a_{ij} \right\|$, до кожного з наданих експертами ранжування $P_1,...,P_N$, яким відповідають матриці $\left\| a_{ij}^{(1)} \right\|,\ldots,\left\| a_{ij}^{(N)} \right\|$, визначають за формулою

$$\hat{R}_c = \sum_{n=1}^{N} R_c(P,P_n) = \sum_{i<j} \sum_{n=1}^{N} \left| a_{ij} - a_{ij}^{(n)} \right|.$$

Звідси випливає, що визначення узгодженого ранжування P^* альтернатив за медіаною Кемені зводиться до визначення рядків та стовпчиків матриці $\left\| a_{ij} \right\|$, у якої сума елементів a_{ij}, розташованих вище діагоналі, мінімальна.

Для розв'язування такої задачі існує декілька евристичних ітеративних алгоритмів.

Доведено, що ранжування альтернатив за медіаною Кемені задовольняє більшість принципів Ерроу. Крім того, медіана Кемені задовольняє принцип Кондорсе (правило більшості) і не призводить до парадоксу Кондорсе.

Тому на сьогодні медіану Кемені можна вважати одним з найбільш коректних методів визначення узгоджених ранжувань альтернатив.

10.3. Байєсові моделі прийняття колективного рішення

При розв'язуванні ряду прикладних задач проблема формування колективного рішення може бути розглянута у такій постановці. Деякий об'єкт випадковим чином приймає один з M станів множини $V=\{V_1,...,V_M\}$ з апріорними імовірностями $P(V_m)$, $\sum_{m=1}^{M} P(V_m)=1$.

Ясно, що не маючи додаткової інформації, для забезпечення мінімальної імовірності помилкової класифікації поточний стан об'єкта потрібно відносити до того стану, який найбільш імовірний. У такому випадку величина

$$P_0 = 1-\max\{P(V_1),...,P(V_M)\}$$

визначає мінімальну імовірність помилкової класифікації.

Припустимо, що є N експертів $A_1,...,A_N$, які, ґрунтуючись на додатковій інформації, незалежно один від одного, приймають особисті рішення щодо поточного стану об'єкту у вигляді індикаторної функції

$$d_i = m \tag{10.2}$$

якщо A_i прийняв рішення на користь V_m, $m=\overline{1,M}$, $i=\overline{1,N}$.

Зрозуміло, що в загальному випадку множина

$$\mathbf{\Theta}=\{S_{m_1...m_N} : (d_1 = m_1)\wedge ... \wedge (d_N = m_N),\ m_1,...,m_N = \overline{1,M}\}$$

можливих ситуацій включає M^N комбінації $S_{m_1 \dots m_N}$ особистих рішень експертів, причому тільки в M випадках особисті рішення будуть узгодженими (коли всі експерти приймають рішення на користь одного класу), а в інших – суперечливі.

Будемо характеризувати “кваліфікацію” експертів імовірностями $P^{(i)}$, $m = \overline{1, M}$ помилкової класифікації, припускаючи, що вони заздалегідь оцінені на основі попереднього дослідження. Природно допустити, що ці імовірності задовольняють умову

$$P^{(i)} < P_0, \; i = \overline{1, N}.$$

Поставимо задачу побудови оптимального колективного рішення

$$d = m,$$

якщо колектив прийняв рішення на користь V_m, $m = \overline{1, M}$, яке за відомими особистими рішеннями $d_1, \dots, d_N$ незалежних експертів та імовірностями $P(V_m)$, $P^{(i)}$ забезпечить мінімум *середньої імовірності* помилки або, в загальному випадку, мінімум *середнього ризику* колективного рішення на множині $\mathbf{\Theta}$.

Модель 10.1. Розглянемо спочатку простіший випадок, коли два експерта ($N = 2$) незалежно один від одного приймають особисті рішення (10.2) щодо поточного стану об’єкту, який знаходиться в одному з двох можливих станів ($M = 2$) з апріорними імовірностями $P(V_1)$ і $P(V_2) = 1 - P(V_1)$.

Зрозуміло, що в такому частковому випадку множина $\mathbf{\Theta} = \{S\}$ ситуацій S складається лише з чотирьох можливих комбінацій особистих рішень (10.2), а саме

$$\mathbf{\Theta} = \{S_{m_1 m_2} : (d_1 = m_1) \wedge (d_2 = m_2), \, m_1, m_2 = 1,2\}. \tag{10.3}$$

Покажемо, що на основі такої інформації може бути побудована формальна модель, яка на множині ситуацій $\mathbf{\Theta}$ забезпечить мінімум середньої імовірності помилки колективного рішення $d \in \{1,2\}$ щодо поточного стану об’єкту. Цей факт у точному формулюванні визначає така теорема.

Теорема 10.1. Нехай два експерти ($N=2$) незалежно один від одного приймають особисті рішення (10.2) щодо поточного стану об'єкта, який знаходиться в одному з двох можливих станів ($M=2$) з апріорними імовірностями $P(V_1)$ і $P(V_2)=1-P(V_1)$.

Нехай на основі попередніх спостережень відомі середні імовірності $P^{(i)}$, $i=1,2$ помилок особистих рішень кожного з незалежних експертів.

Тоді колективне рішення $d=m$, $m=1, 2$ є оптимальним з точки зору мінімуму середньої імовірності помилки на множині можливих ситуацій (2.3), якщо в суперечливій ситуації $S_{m_1m_2}$, $m_1 \neq m_2$ приймається рішення $d=1$ на користь V_1 за умови

$$P^{(m_2)}[1-P^{(m_1)}] > \lambda_0 P^{(m_1)}[1-P^{(m_2)}], \tag{10.4}$$

і рішення $d=2$ на користь V_2 за умови

$$P^{(m_2)}[1-P^{(m_1)}] < \lambda_0 P^{(m_1)}[1-P^{(m_2)}]. \tag{10.5}$$

де $\lambda_0 = P(V_2)/(P(V_1)$ – відношення апріорних імовірностей класів.

Доведення. Відповідно до теорії статистичних рішень середня імовірність помилки колективного рішення $d=m$, $m=1, 2$ буде мінімальною, якщо в суперечливих ситуаціях $S_{m_1m_2}$, $m_1 \neq m_2$ приймати рішення за максимумом апостеріорних імовірностей $P(V_1 \mid S_{m_1m_2})$, $P(V_2 \mid S_{m_1m_2})$. Наприклад, у ситуації S_{12} приймати рішення на користь V_1, якщо

$$P(V_1 \mid S_{12}) > P(V_2 \mid S_{12}), \tag{10.6}$$

і рішення на користь V_2 у протилежному випадку.

За формулою Байєса маємо

$$P(V_1 \mid S_{12}) = \frac{P(V_1)P(S_{12} \mid V_1)}{P(S_{12})},$$

$$P(V_2 \mid S_{12}) = \frac{P(V_2)P(S_{12} \mid V_2)}{P(S_{12})}.$$

Очевидно, що нерівність (10.6) має місце тільки в тому випадку, коли

$$P(V_1)P(S_{12}\,|V_1) > P(V_2)P(S_{12}\,|V_2)\,. \tag{10.7}$$

За означенням умовна імовірність $P(S_{12}\,|V_1)$ є імовірність того, що в ситуації, коли об'єкт знаходиться у стані V_1, експерт A_1 прийняв правильне рішення, а експерт A_2 помилився. Оскільки припускають, що рішення експертів незалежні, то за формулою добутку імовірностей маємо

$$P(S_{12}\,|V_1) = (1-P^{(1)})P^{(2)}\,. \tag{10.8}$$

Аналогічним чином

$$P(S_{12}\,|V_2) = (1-P^{(2)})P^{(1)}\,. \tag{10.9}$$

Тоді з (10.7) з урахуванням (10.8), (10.9) випливає, що в суперечливих ситуаціях S_{12} і S_{21} колективне рішення, що забезпечує мінімум середньої імовірності помилки, повинно прийматися за схемою (10.4) та (10.5). Теорема 10.1 доведена.

Співвідношення (10.4), (10.5) означають, що в ситуації S_{12} суперечливих індивідуальних рішень експертів об'єкт слід відносити до класу V_1 тільки у тому випадку, коли

$$P^{(2)} > \frac{\lambda_0 P^{(1)}}{1-P^{(1)}(1-\lambda_0)}, \tag{10.10}$$

і до класу V_2, коли

$$P^{(2)} < \frac{\lambda_0 P^{(1)}}{1-P^{(1)}(1-\lambda_0)}\,. \tag{10.11}$$

Аналогічним чином легко показати, що в суперечливій ситуації S_{21} слід приймати колективне рішення $d=1$, у тому і тільки в тому випадку, коли

$$P^{(1)} > \frac{\lambda_0 P^{(2)}}{1-P^{(2)}(1-\lambda_0)},$$

а рішення на користь $d=2$, коли

$$P^{(1)} < \frac{\lambda_0 P^{(2)}}{1-P^{(2)}(1-\lambda_0)}\,.$$

Для ілюстрації на рис. 10.4 показані границі областей колективних рішень для ситуації S_{12}, які побудовані згідно з умовами (10.10), (10.11) за різними значеннями λ_0. Вище відповідної границі слід відносити стан об'єкта до класу V_1 (рішення $d=1$), а нижче відповідної границі – до класу V_2 (рішення $d=2$).

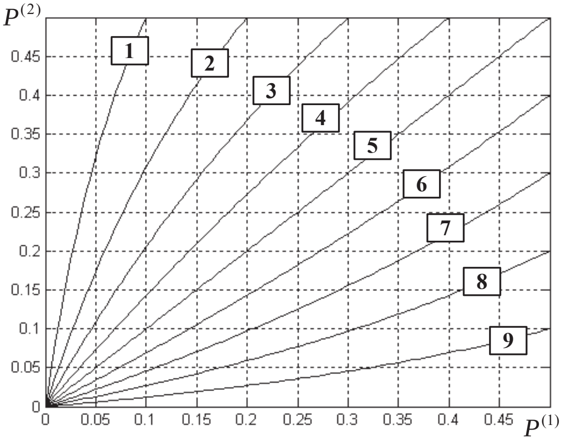


Рис. 10.4. Границі областей колективних рішень у ситуації S_{12}:

$1 - \lambda_0 = 9$; $2 - \lambda_0 = 4$; $3 - \lambda_0 = 2{,}33$; $4 - \lambda_0 = 1{,}5$; $5 - \lambda_0 = 1{,}0$;
$6 - \lambda_0 = 0{,}67$; $7 - \lambda_0 = 0{,}43$; $8 - \lambda_0 = 0{,}25$; $9 - \lambda_0 = 0{,}11$.

Цікаво, що в загальному випадку колективне рішення може не співпадати з особистим рішення експерта, який має меншу середню імовірність особистих рішень за результатами попередніх спостережень. Продемонструємо цей факт на наступному прикладі.

Приклад 10.4. Нехай $P(V_1)=0{,}3$, $P(V_2)=0{,}7$, тобто $\lambda_0 = 2{,}33$. Нехай на підставі попереднього досвіду відомо, що перший експерт помилявся у 5% випадків ($P^{(1)}=0{,}05$), а другий – у 8% випадків ($P^{(2)}=0{,}08$).

Припустимо, що перший експерт відніс об'єкт до класу V_1 ($d_1=1$), а другий – до класу V_2 ($d_2=2$), тобто спостерігаємо ситуацію S_{12} суперечливих рішень.

Як видно з рис. 10.4, точка з координатами $P^{(1)} = 0{,}05$ і $P^{(2)} = 0{,}08$ розташована нижче границі, що відповідає значенню $\lambda_0 = 2{,}33$. Отже, колективне рішення повинно бути $d = 2$ (об'єкт має бути віднесений до класу V_2), хоча перший експерт, який за попередніми дослідженнями продемонстрував меншу середню імовірність помилок ($P^{(1)} = 0{,}05$) у порівнянні з другим експертом ($P^{(2)} = 0{,}08$), який прийняв протилежне рішення $d_1 = 1$.

Для перевірки обґрунтованості колективного рішення на користь V_2 визначимо за формулою Байєса апостеріорні імовірності класів у даній ситуації S_{12}

$$P(V_1 \mid S_{12}) = \frac{P(V_1)P(S_{12} \mid V_1)}{P(S_{12})} = \frac{0{,}3(1-0{,}05)0{,}08}{0{,}3(1-0{,}05)0{,}08 + 0{,}7 \cdot 0{,}05(1-0{,}08)} = 0{,}415$$

і

$$P(V_2 \mid S_{12}) = \frac{P(V_2)P(S_{12} \mid V_2)}{P(S_{12})} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}05(1-0{,}08)}{0{,}3(1-0{,}05)0{,}08 + 0{,}7 \cdot 0{,}05(1-0{,}08)} = 0{,}585.$$

Як бачимо, $P(V_1|S_{12}) < P(V_2|S_{12})$, отже, об'єкт дійсно слід віднести до класу V_2.

Змінимо в умовах прикладу співвідношення апріорних імовірностей класів, поклавши $P(V_1) = 0{,}4$, $P(V_2) = 0{,}6$. Тоді $\lambda_0 = 0{,}67$ і, як видно з рис. 10.4, точка з координатами $P^{(1)} = 0{,}05$ і $P^{(2)} = 0{,}08$ потрапляє вже в область рішень на користь класу V_1.

Насправді,

$$P(V_1 \mid S_{12}) = \frac{0{,}4(1-0{,}05)0{,}08}{0{,}4(1-0{,}05)0{,}08 + 0{,}6 \cdot 0{,}05(1-0{,}08)} = 0{,}524$$

і

$$P(V_2 \mid S_{12}) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}05(1-0{,}08)}{0{,}4(1-0{,}05)0{,}08 + 0{,}6 \cdot 0{,}05(1-0{,}08)} = 0{,}476,$$

тобто $P(V_1|S_{12}) > P(V_2|S_{12})$. Отже, у цьому випадку об'єкт дійсно слід віднести вже до класу V_1.

Зауважимо, що дана схема прийняття колективного рішення ґрунтується на знанні дуже обмежених імовірнісних характеристик, які у вирішенні практичних завдань, зокрема завдань медичної і технічної діагностики, легко можуть бути оцінені на підставі попереднього досвіду.

Слід також зауважити, що умови (10.4), (10.5) отримані у припущенні, що помилки експертів не залежать від того, у якому стані знаходиться об’єкт, тобто вважають, що

$$P(d_i = 1 \mid V_2) = P(d_i = 2 \mid V_1) = P^{(i)}.$$

Але для розв’язування практичних задач, наприклад, задач медичної діагностики, таке припущення не завжди вірно: імовірність помилкового віднесення здорового пацієнта до групи хворих може не збігатися з імовірністю помилкового віднесення хворого пацієнта до групи здорових.

Як вже згадувалось для характеристики умовних імовірностей $P(d_i = 1 \mid V_2)$ та $P(d_i = 2 \mid V_1)$ (імовірностей помилок першого та другого роду) в медичній діагностиці введені спеціальні терміни: чутливість та специфічність.

Тому доцільно розширити формальну модель побудови колективних рішень, орієнтованих на цей практично важливий випадок та отримати умови, які на множині $\mathbf{\Theta}$ можливих ситуацій (10.3) забезпечать мінімум середньої імовірності помилки колективного рішення $d \in \{1,2\}$ щодо поточного стану об’єкту.

Теорема 10.2. Нехай два експерти ($N = 2$) незалежно один від одного приймають особисті рішення (10.2) щодо поточного стану об’єкту, який може знаходитись в одному з двох можливих станів ($M = 2$) з апріорними імовірностями $P(V_1)$ і $P(V_2) = 1 - P(V_1)$. Нехай відомі імовірності помилок першого та другого роду особистих рішень незалежних експертів

$$P^{(i)}(E \mid V_k) = P(d_i = m \mid V_k),\ m, k, i = 1,2, \quad k \neq m .$$

Тоді на множині можливих ситуацій (10.3) колективне рішення $d = m$, $m = 1, 2$ є оптимальним з точки зору мінімуму середньої імовірності помилки, якщо рішення $d = 1$ приймають на користь класу V_1 за умови

$$P(V_1)P^{(m_2)}(E \mid V_1)[1 - P^{(m_1)}(E \mid V_1)] > P(V_2)P^{(m_1)}(E \mid V_2)[1 - P^{(m_2)}(E \mid V_2)],$$

і рішення $d = 2$ на користь V_2 за умови

$$P(V_1)P^{(m_2)}(E\,|V_1)[1-P^{(m_1)}(E\,|V_1)]<P(V_2)P^{(m_1)}(E\,|V_2)[1-P^{(m_2)}(E\,|V_2)].$$

Доведення. Доведення теореми 10.2 аналогічно доведенню теореми 10.1 з тією різницею, що в даному випадку згідно з обчисленнями імовірностей $P(S_{m_1m_2}\,|V_k)$, $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 = 1,2$ припускається *умовна незалежність* імовірностей помилок експертів

$$P^{(m_1m_2)}(E\,|V_k) = P^{(m_1)}(E\,|V_k)P^{(m_2)}(E\,|V_k),$$

де $P^{(m_1m_2)}(E\,|V_k)$ – імовірність помилки обох експертів за умови знаходження об'єкта в k-му стані.

Слід зауважити, що розглянуті формальні моделі можуть бути використані не тільки для інтеграції індивідуальних рішень незалежних експертів, а й для визначення умов побудови оптимальних рішень групи незалежних комп'ютерних алгоритмів, зокрема, діагностичних тестів, за якими визначають поточний стан пацієнта – хворий (клас V_1) або умовно здоровий[1] (клас V_2).

З теореми 10.2 безпосередньо випливають умови для вирішення такої практичної задачі.

Наслідок 10.1. Нехай на основі двох незалежних діагностичних тестів проводяться профілактичні обстеження (скринінг) для виявлення деякої хвороби у пацієнтів. Тобто для конкретного пацієнта треба визначити чи є у нього ця хвороба чи ні.

Припускають, що на основі попередніх статистичних досліджень відомий преваленс P (розповсюдженість) хвороби в популяції, а також визначені індивідуальні чутливості $S_E^{(m)}$ та специфічності $S_E^{(m)}$ тестів, $m = 1,2$.

Тоді в суперечливій ситуації S_{12}, коли перший тест визнав пацієнта хворим, а інший – здоровим, колективне рішення, яке забезпечує мінімум середньої імовірності помилки, має прийматися за схемою:

$$\text{хворий, якщо}\quad S_E^{(1)}(1-S_E^{(2)}) > \lambda_0[1-S_P^{(1)}]S_P^{(2)},$$
$$\text{здоров, якщо}\quad S_E^{(1)}(1-S_E^{(2)}) < \lambda_0[1-S_P^{(1)}]S_P^{(2)},$$

[1] Мають на увазі, що пацієнт не абсолютно здоровий, а у нього немає досліджуваної хвороби.

де $\lambda_0 = (1-P)/P$ – параметр, що залежить лише від превалентсу хвороби в досліджуваній популяції.

Розглянемо тепер загальний випадок побудови колективного рішення $d = m$, $m = \overline{1,M}$, що ґрунтується на інтеграції особистих рішень $d_1,...,d_N$ групи з $N \geq 2$ незалежних експертів.

Теорема 10.3. Нехай $P(d_i = m \,|\, V_k)$, $m,k = \overline{1,M}$, $i = \overline{1,N}$ – відомий розподіл умовних імовірностей особистих рішень кожного з $N \geq 2$ незалежних експертів колективу, $P(V_k)$ – відомий розподіл імовірностей станів об'єкту, $\sum\limits_{k=1}^{M} P(V_k) = 1$, $M \geq 2$, а $\mathbf{L} = \|L_{km}\|$ – платіжна матриця, що характеризує втрати від колективного рішення $d = m$, $m = \overline{1,M}$ при істинному стані об'єкту V_k, $k = \overline{1,M}$.

Тоді колективне рішення є оптимальним з точки зору мінімуму середнього ризику на множині можливих ситуацій (особистих рішень експертів)

$$\mathbf{\Theta} = \{S_{m_1 ... m_N} : (d_1 = m_1) \wedge ... \wedge (d_N = m_N),\ m_1,...,m_N = \overline{1,M}\}, \qquad (10.12)$$

якщо колективне рішення приймається за схемою

$$d_S^{opt} = \arg \min_{d_S \in [1,M]} \sum_{k=1}^{M} L_{kd_S} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(d_i \,\, |V_k). \qquad (10.13)$$

де $d_S = \overline{1,M}$ – колективне рішення у спостережуваній ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$.

Доведення. Запишемо середній ризик, який визначає математичне сподівання втрат від колективних рішень у вигляді

$$R(d) = \sum_{S \in \mathbf{\Theta}} \sum_{k=1}^{M} L_{kd_S} P(V_k, S) \qquad (10.14)$$

де L_{kd_S} – елемент платіжної матриці $\mathbf{L} = \|L_{km}\|$, що в спостережуваній ситуації $S \in \Theta$ відповідає колективному рішенню $d_S = m$, $m = \overline{1,M}$ та k-му стану об'єкта, $k = \overline{1,M}$, а $P(V_k, S)$ – сумісна імовірність двох випадкових подій: об'єкт знаходиться у стані V_k та спостерігають певну комбінацію $S = (d_1,...,d_N)$ особистих рішень експертів $d_1,...,d_N$, що виражені в формі (10.2).

За теоремою множення імовірностей величину $P(V_k, S)$ можна представити у вигляді

$$P(V_k, S) = P(S)P(V_k \mid S).$$

Підстановка останнього виразу в (10.14) дає

$$R(d) = \sum_{S\in\mathbf{\Theta}} P(S) \sum_{k=1}^{M} L_{kd_S} P(V_k \mid S). \tag{10.15}$$

Як видно з (10.15), середній ризик $R(d)$ має вигляд суми за S. Тому для кожної окремої комбінації $S \in \mathbf{\Theta}$ можна будувати оптимальне колективне рішення незалежно від інших комбінацій так, щоб мінімізувати умовний ризик, тобто

$$d_S^{opt} = \arg \min_{d_S \in [1,M]} R(d_S),$$

де

$$R(d_S) = \sum_{k=1}^{M} L_{kd_S} P(V_k \mid S). \tag{10.16}$$

Оскільки припускається, що експерти приймають свої рішення незалежно один від одного, то за відомих імовірностей $P(V_k)$ і $P(d_i = m \mid V_k)$ для кожної комбінації $S = (d_1, ..., d_N)$ особистих рішень експертів можна обчислити апостеріорні імовірності

$$P(V_k \mid S) = \frac{P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(d_i \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(d_i \mid V_k)}.$$

Підстановка останнього виразу в (10.16) дає

$$R(d_S) = \sum_{k=1}^{M} L_{kd_S} \frac{P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(d_i \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k) \prod_{i=1}^{N} P(d_i \mid V_k)}. \tag{10.17}$$

Оскільки знаменник (10.17) додатній, то мінімум середнього ризику (10.15) на всій множині (10.12) буде забезпеченим, якщо в кожній спостережуваній ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$ колективне рішення приймають за умовою (10.13). Теорема 10.3 доведена.

Легко побачити, що модель (10.13) припускає достатньо великий об'єм апріорної інформації: потрібно знати не тільки апріорні імовірності $P(V_k)$ станів об'єкта, але й всі умовні імовірності $P(d_i = m \,|\, V_k)$, $m = \overline{1, M}$ можливих особистих рішень кожного i-го експерту.

Розглянута модель може бути істотно спрощена, якщо припустити, що елементи платіжної матриці $\mathbf{L}$ задовольняють умову

$$L_{km} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } m = k \\ 1, \text{ якщо } m \neq k \end{cases}, \tag{10.18}$$

тобто прийняти, що втрати від правильних рішень дорівнюють нулю, а втрати від будь-яких помилкових рішень дорівнюють одиниці.

Оскільки з виконанням умов (10.18) середній ризик (10.12) вироджується у середню імовірність помилкових рішень, а оптимальне рішення відповідає правилу максимуму апостеріорних імовірностей, то з теореми 10.3 випливає такий наслідок.

Наслідок 10.2. Колективне рішення забезпечить мінімум середньої імовірності помилки на множині (10.12), якщо в кожній конкретній спостережуваній ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$ колективне рішення приймають за схемою

$$d_S^{opt} = \arg\max_{1 \le k \le M} P(V_k) \prod_{i \in J_k} [1 - P^{(i)}(E \,|\, V_k)] \prod_{i \notin J_k} P^{(i)}(E \,|\, V_k) \;, \tag{10.19}$$

де J_k – множина номерів експертів, що в ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$ прийняли особисте рішення $d_i = k$, $k = \overline{1, M}$,

$$J_\mu \cap J_\nu = \varnothing \;\; \forall \mu, \nu = \overline{1, M}\,,\; J_1 \cup \ldots \cup J_M = \{1, \ldots, M\},$$

а $P^{(i)}(E \,|\, V_k)$ – розподіл умовних імовірностей помилкових рішень кожного з експертів.

Дійсно, нехай наперед відомі умовні імовірності $P^{(i)}(E \,|\, V_k)$ помилкових рішень кожного з експертів для всіх $k = \overline{1, M}$. Будемо будувати оптимальне колективне рішення за правилом максимуму апостеріорних імовірностей $P(V_k \,|\, S)$, які за формулою Байєса визначаються так

$$P(V_k \mid S) = \frac{P(V_k)P(S \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k)P(S \mid V_k)}. \tag{10.20}$$

Імовірність $P(S \mid V_k)$, що фігурує в (10.20), представляє собою імовірність того, що експерти, номера яких належать множині J_k, прийняли правильне рішення, а решта помилились. Тому, в силу умовної незалежності особистих рішень експертів, апостеріорні імовірності (2.20) можна представити у вигляді

$$P(V_k \mid S) = \frac{P(V_k)\prod_{i\in J_k}[1-P^{(i)}(E \mid V_k)]\prod_{i\notin J_k}P^{(i)}(E \mid V_k)}{\sum_{k=1}^{M} P(V_k)\prod_{i\in J_k}[1-P^{(i)}(E \mid V_k)]\prod_{i\notin J_k}P^{(i)}(E \mid V_k)}. \tag{10.21}$$

Із співвідношення (10.21) безпосередньо випливає, що колективне рішення забезпечить мінімум середньої імовірності помилки на множині $\mathbf{\Theta}$ можливих комбінацій особистих рішень, якщо в кожній конкретній спостережуваній ситуації $S \in \mathbf{\Theta}$ колективне рішення приймають за схемою (10.19).

Для ілюстрації схеми формування колективного рішення за правилом (10.19) розглянемо модельний приклад.

Приклад 10.5. Нехай деякий об'єкт знаходиться в одному з трьох класів станів, що утворюють повну групу випадкових подій з апріорними імовірностями $P(V_1) = 0{,}7$, $P(V_2) = 0{,}08$ і $P(V_3) = 0{,}22$. Стан об'єкта оцінює п'ять незалежних експертів. Імовірності помилок експертів і можлива комбінація прийнятих ними особистих рішень викладено в табл. 10.4.

Легко бачити, що в даному випадку особисті рішення експертів суперечливі, причому $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{3{,}4\}$, $I_3 = \{2{,}5\}$.

Для прийняття колективного рішення обчислимо такі величини

$$P(V_1)\prod_{i\in J_1}[1-P^{(i)}(E \mid V_1)]\prod_{i\notin J_1}P^{(i)}(E \mid V_1)P(V_1) = 4{,}03\cdot 10^{-8},$$

$$P(V_2)\prod_{i\in J_2}[1-P^{(i)}(E \mid V_2)]\prod_{i\notin J_2}P^{(i)}(E \mid V_2)P(V_2) = 1{,}12\cdot 10^{-6},$$

$$P(V_1)\prod_{i\in J_3}[1-P^{(i)}(E \mid V_3)]\prod_{i\notin J_3}P^{(i)}(E \mid V_3)P(V_3) = 3{,}73\cdot 10^{-6}.$$

Таблиця 10.4. **Імовірність помилок та особисті рішення експертів**

Експерт	**Імовірності помилок**			**Особисті рішення**
	$P^{(i)}(E\mid V_1)$	$P^{(i)}(E\mid V_2)$	$P^{(i)}(E\mid V_3)$	d_i
Перший	0,04	0,01	0,03	$d_1 = 1$
Другий	0,01	0,03	0,02	$d_2 = 3$
Третій	0,03	0,05	0,01	$d_3 = 2$
Четвертий	0,02	0,02	0,06	$d_4 = 2$
П'ятий	0,01	0,05	0,04	$d_5 = 3$

Оскільки третя зі знайдених величин максимальна, то, на підставі правила (10.19), приймаємо остаточне рішення на користь класу V_3. Зауважимо, що клас V_3 не має найвищу апріорну імовірність.

Цілком зрозуміло, що при розв'язанні практичних задач найчастіше невідомі точні значення імовірнісних характеристик, які фігурують у запропонованих правилах. Однак, при достатньому обсязі спостережень імовірності $P(V_k)$ і $P^{(i)}(E_i\mid V_k)$ можуть бути оцінені відповідними частотами:

$$\hat{P}(V_k) = \frac{G_k}{G},$$

$$\hat{P}^{(i)}(E\mid V_k) = \frac{E_{ki}}{G_k}, \qquad (10.22)$$

де G_k – число спостережень k-го класу ($k = 1,\ldots M$) у вибірці з G спостережень, а E_{ki} – число помилкових рішень i-го експерту ($i = 1,\ldots, N$) в ситуаціях, коли об'єкт знаходився у k-му стані.

Розглянемо зручну для практичного застосування схему, яка навчається, та може бути покладена в основу системи підтримки прийняття колективного рішення.

Припустимо, що для кожного з G спостережень відома точна належність об'єкту до одного з можливих класів, що виражена у вигляді вказівок «вчителя» $y_1,\ y_2,\ \ldots\ ,\ y_G$, де $y_n \in \{1,\ldots,M\}$. Запишемо частоту спостереження k-го класу у вигляді

$$\hat{P}(V_k) = \frac{\sum_{n=1}^{G} \chi_{kn}}{G}, \tag{10.23}$$

де

$$\chi_{kn} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } y_n = k, \\ 0, \text{ якщо } y_n \neq k. \end{cases}$$

Оскільки праву частину (10.23) можна виразити у вигляді суми двох доданків

$$\frac{\sum_{n=1}^{G} \chi_{kn}}{G} = \frac{G-1}{G} \frac{\sum_{n=1}^{G-1} \chi_{kn}}{G-1} + \frac{\chi_{kG}}{G},$$

в першому з яких фігурує оцінка частоти появи *k*-го класу, обчислена за $G-1$ спостереженнями, то після очевидних перетворень отримаємо

$$\hat{P}_G(V_k) = \hat{P}_{G-1}(V_k) - \frac{1}{G}(\hat{P}_{G-1}(V_k) - \chi_{kG}). \tag{10.24}$$

Для оцінки імовірностей помилок експертів розглянемо послідовність $y_{k1},..., y_{kG_k}$ вказівок вчителя, що задовольняють умову $y_{kn} = k$. Очевидно, що величина E_{ki}, яка фігурує у правій частині (10.22), може бути записана у вигляді суми

$$E_{ki} = \sum_{n=1}^{G_k} \eta_{kin},$$

де η_{kin} – штрафна функція, яка записана у формі

$$\eta_{kin} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \delta_{in} = k; \\ 1, \text{ якщо } \delta_{in} \neq k. \end{cases}$$

Тоді оцінка імовірності помилки *i*-го експерта з появою *k*-го класу також може бути знайдена за рекурентною формулою

$$\hat{P}_{G_k}^{(i)}(E \mid V_k) = \hat{P}_{G_{k-1}}^{(i)}(E \mid V_k) - \frac{1}{G_k}(\hat{P}_{G_{k-1}}^{(i)}(E \mid V_k) - \eta_{kiG_k}). \tag{10.25}$$

З рекурентних формул (10.24), (10.25) видно, що зі зростанням числа спостережень величина поправки прямує до нуля, що відповідає граничній теоремі Бернуллі, згідно з якою частота випадкової події прямує до її імовірності.

На основі запропонованого підходу легко може бути реалізована система підтримки прийняття колективних рішень, архітектура якої показана на рис. 10.5.

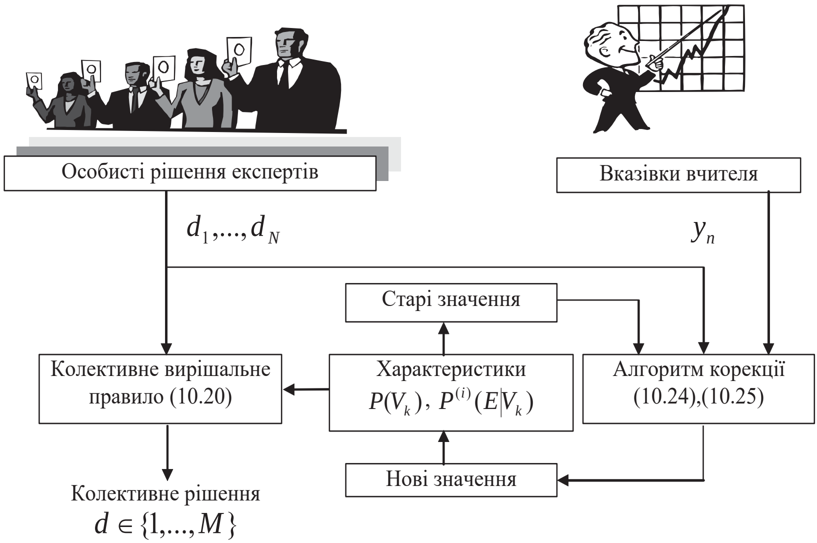


Рис. 10.5. Архітектура системи формування колективного рішення

Колективне рішення реалізують на підставі особистих рішень $d_1,...,d_N$ групи незалежних експертів за правилом (10.19), у якому використовують поточні значення оцінок імовірнісних характеристик $P(V_k)$ і $P^{(i)}(E\,|V_k)$, $i=1,...,N$, $k=1,...,M$.

У базі даних системи фіксують обсяги спостережень $G_1,...,G_M$ ($G_1+...+G_M=G$), за якими були оцінені зазначені імовірні характеристики.

Як тільки після прийняття колективного рішення з'явилася можливість перевірити справжній стан об'єкту, то така додаткова інформація вводиться у систему у вигляді вказівки «вчителя» y_n. За допомогою рекурентних формул (10.24) і (10.25), ця інформація дає змогу скорегувати поточні оцінки $P(V_k)$ і $P^{(i)}(E\,|V_k)$, $i=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,M}$.

Запропонована архітектура системи, що поєднує колективне рішення з можливістю періодичної корекції імовірнісних характеристик може бути використана в різних областях застосування.

Наприклад, таку систему можна рекомендувати для діагностики захворювань серця, що ґрунтується на об'єднанні методів електрокардіографії і магнітокардіографії. У даному випадку вказівками вчителя можуть слугувати наявні результати референтного методу (коронарографії), який за медичними показаннями призначають деяким обстежуваним пацієнтам.

10.4. Інтервальне узагальнення моделей

Розглянуті вище формальні моделі припускають повні апріорні знання про імовірнісні характеристики $P(V_k)$, $k=\overline{1,M}$ і $P(d_i=m\,|V_k)$, $m=\overline{1,M}$, $\overline{i=1,N}$, які далеко не завжди відомі при розв'язуванні практичних задач. Водночас оцінки зазначених характеристик можуть бути отримані на основі попередніх експериментів.

Нехай є експериментальна вибірка, що містить скінченний обсяг n спостережень з заздалегідь відомими станами об'єкта. Тоді імовірності $P(V_k)$ і $P(d_i=m\,|V_k)$ можна оцінити частотами відповідних подій

$$P^*(V_k)=\frac{n_k}{n}\ ,\ k=\overline{1,M}$$

та

$$P^*(d_i=m\,|V_k)=\frac{n_{mk}^{(i)}}{n_k},\ i=\overline{1,N},\ m=\overline{1,M},\ k=\overline{1,M}\ ,$$

де n_k – число спостережень, коли об'єкт знаходився у стані V_k ($\sum_{k=1}^{M} n_k=n$), а $n_{mk}^{(i)}$ – число випадків, коли i-й експерт прийняв особисте рішення на користь стану об'єкту V_m, $m=\overline{1,\,M}$ при заздалегідь відомому знаходженні об'єкту у стані V_k, $k=\overline{1,M}$.

Ясно, що заміна імовірностей $P(V_k)$ і $P(d_i = m \,|\, V_k)$ точковими оцінками $P^*(V_k)$ і $P^*(d_i = m \,|\, V_k)$ правомірна лише при $n \to \infty$. Тому для розв’язання практичних задач представляє інтерес узагальнення отриманих результатів на випадки, коли замість точкових значень імовірностей $P(V_k)$ і $P(d_i = m \,|\, V_k)$ використовують їхні довірчі інтервали. `

З теорії імовірності відомо, що частота P^* випадкової події, яка обчислена за вибіркою експериментальних спостережень об’ємом n, з довірчою імовірністю β визначає довірчий інтервал $\mathbf{I}(\beta, n) = [P_1, P_2]$ імовірності P (рис.10.6), границі якого визначаються за формулами:

$$P_1 = \frac{P^* + \dfrac{1}{2}\dfrac{t_\beta^2}{n} - t_\beta \sqrt{\dfrac{P^*(1-P^*)}{n} + \dfrac{1}{4}\dfrac{t_\beta^2}{n^2}}}{1 + \dfrac{t_\beta^2}{n}}, \qquad (10.26)$$

$$P_2 = \frac{P^* + \dfrac{1}{2}\dfrac{t_\beta^2}{n} + t_\beta \sqrt{\dfrac{P^*(1-P^*)}{n} + \dfrac{1}{4}\dfrac{t_\beta^2}{n^2}}}{1 + \dfrac{t_\beta^2}{n}}, \qquad (10.27)$$

де $t_\beta = \arg \Phi^* \left(\dfrac{1+\beta}{2} \right) > 0$, а

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau$$

– функція нормального розподілу.

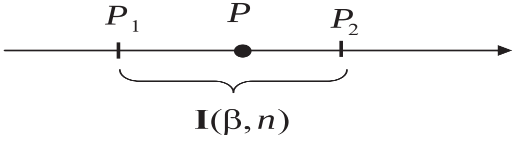


Рис. 10.6. Довірчий інтервал імовірності P

Іншими словами, якщо за вибіркою спостережень об'ємом n визначена частота P^* випадкової події, то невідома імовірність P з довірчою імовірністю β належить довірчому інтервалу $\mathbf{I}(\beta, n) = [P_1, P_2]$.

Наприклад, якщо частота деякої випадкової події A, яка визначена за серією експериментів зі 100 іспитів, дорівнює $P^* = 0{,}78$, то згідно з вище поданими формулами невідома імовірність P цієї події з 90%-ю довірчою імовірністю лежить у границях $P_1 = 0{,}705$, $P_2 = 0{,}840$, тобто $P \in [0{,}705,\ 0{,}840]$.

Зауважимо, що при $n \to \infty$ формули спрощуються та інтервал $\mathbf{I} = [P_1, P_2]$ стає симетричним відносно визначеної частоти P^*.

Розглянемо з початку основну ідею, на якій ґрунтується інтервальне узагальнення побудованих оптимальних моделей колективних рішень.

Припустимо, що нам треба перевірити умову

$$X > Y, \tag{10.28}$$

де X, Y – два числа, які належать відповідно до інтервалів

$$X \in [X_1, X_2] \quad \text{та} \quad Y \in [Y_1, Y_2],$$

причому

$$[X_1, X_2] \cap [Y_1, Y_2] = \varnothing$$

тобто інтервали $[X_1, X_2]$ і $[Y_1, Y_2]$ не перетинаються.

Оскільки за означенням

$$X \geq X_1, \quad \text{а} \quad Y \leq Y_2,$$

то перевірка виконання нерівності (10.28) *для всіх* можливих значень X та Y зводиться до перевірки умови

$$X_1 > Y_2. \tag{10.29}$$

Іншими словами, треба перевірити чи перевищує нижня границя одного інтервалу верхню границю другого (рис. 10.7).

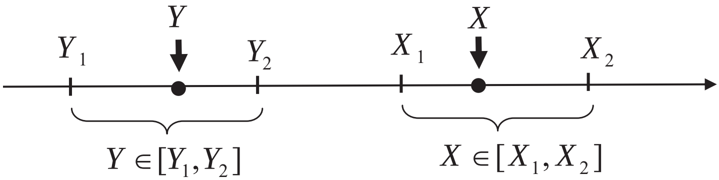


Рис. 10.7. Перевірка умови (10.28) для інтервальних величин

Зрозуміло, що коли інтервали можливих значень X та Y перетинаються, тобто

$$[X_1, X_2] \cap [Y_1, Y_2] \neq \varnothing,$$

перевірка умови (10.29) не гарантує виконання нерівності (10.28) для *всіх можливих значень* X та Y.

Оскільки в побудованих оптимальних моделях здійснюють арифметичні операції над імовірнісними характеристиками, будемо при переході до їх інтервальних аналогів використовувати арифметичні операції над інтервальними величинами

$$A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2],$$

де a_1, b_1 – нижні, а a_2, b_2 – верхні границі інтервалів A, B.

З теорії інтервального аналізу відомо, що результат арифметичних операцій над дійсними інтервалами $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ можна отримати за допомогою формул:

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \tag{10.30}$$

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1], \tag{10.31}$$

$$AB = [\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}, \max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}], \tag{10.32}$$

$$A / B = A[1/b_2, 1/b_1], \quad 0 \notin B. \tag{10.33}$$

Перейдемо тепер безпосередньо до інтервального узагальнення запропонованих оптимальних моделей прийняття колективних рішень.

Означення 10.1. Колективне рішення $\tilde{d} = m$, $m = \overline{1, M}$ будемо називати *субоптимальним* з точки зору критерію $\Im$, якщо $\tilde{d}$ забезпечує $\Im$ з заданою *довірчою імовірністю* β.

Розглянемо найбільш простий випадок, коли два експерти приймають незалежні рішення щодо одного з двох випадкових станів об'єкта (модель 10.1) та введемо такі позначення

$$Z^{(m_1 m_2)} = P^{(m_2)}(1 - P^{(m_1)}), \quad m_1, m_2 = 1, 2,\ m_1 \neq m_2, \tag{10.34}$$

$$W^{(m_1 m_2)} = \lambda_0 P^{(m_1)}(1 - P^{(m_2)}), \quad m_1, m_2 = 1, 2,\ m_1 \neq m_2, \tag{10.35}$$

де $\lambda_0 = \dfrac{P(V_2)}{P(V_1)}$.

Перейдемо від точкових значень (10.34), (10.35) до їх інтервальних аналогів

$$\mathbf{Z}^{(m_1 m_2)} = \mathbf{I}^{(m_2)}(1 - \mathbf{I}^{(m_1)}), \tag{10.36}$$

$$\mathbf{W}^{(m_1 m_2)} = \lambda_0 \mathbf{I}^{(m_1)}(1 - \mathbf{I}^{(m_2)}), \tag{10.37}$$

де $\mathbf{I}^{(m_1)}, \mathbf{I}^{(m_2)}$ – довірчі інтервали імовірностей $P^{(m_1)}, P^{(m_2)}$ відповідно.

Застосуємо інтервальні арифметичні операції (10.31), (10.32) для інтервалів $\mathbf{I}^{(m_1)}$, $\mathbf{I}^{(m_2)}$, що фігурують у (10.36), (10.37). В результаті маємо

$$\mathbf{Z}^{(m_1 m_2)} = [Z_1^{(m_1 m_2)}, Z_2^{(m_1 m_2)}] = [P_1^{(m_2)}, P_2^{(m_2)}](1 - [P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_1)}]) =$$

$$= [P_1^{(m_2)}, P_2^{(m_2)}][1 - P_2^{(m_1)}, 1 - P_1^{(m_1)}]) =$$

$$= [\min\{P_1^{(m_2)}(1 - P_2^{(m_1)}), P_1^{(m_2)}(1 - P_1^{(m_1)}), P_2^{(m_2)}(1 - P_2^{(m_1)}), P_2^{(m_2)}(1 - P_1^{(m_1)})\},$$

$$\max\{P_1^{(m_2)}(1 - P_2^{(m_1)}), P_1^{(m_2)}(1 - P_1^{(m_1)}), P_2^{(m_2)}(1 - P_2^{(m_1)}), P_2^{(m_2)}(1 - P_1^{(m_1)})\}].$$

Так як за властивістю довірчого інтервалу маємо

$$P_1^{(m_2)},\ P_2^{(m_2)} \in [0,1] \qquad \text{та} \qquad (1-P_2^{(m_1)}),\ (1-P_1^{(m_1)}) \geq 0,$$

а за означенням інтервалу виконуються умови

$$P_1^{(m_2)} \geq P_2^{(m_2)}, \qquad (1-P_2^{(m_1)}) \geq (1-P_1^{(m_1)}),$$

то

$$\min\{P_1^{(m_2)}(1-P_2^{(m_1)}), P_1^{(m_2)}(1-P_1^{(m_1)}),\ P_2^{(m_2)}(1-P_2^{(m_1)}), P_2^{(m_2)}(1-P_1^{(m_1)})\} =$$

$$= P_1^{(m_2)}(1-P_2^{(m_1)}),$$

$$\max\{P_1^{(m_2)}(1-P_2^{(m_1)}), P_1^{(m_2)}(1-P_1^{(m_1)}),\ P_2^{(m_2)}(1-P_2^{(m_1)}), P_2^{(m_2)}(1-P_1^{(m_1)})\} =$$

$$= P_2^{(m_2)}(1-P_1^{(m_1)}).$$

Отже,

$$\mathbf{Z}^{(m_1 m_2)} = [Z_1^{(m_1 m_2)}, Z_2^{(m_1 m_2)}] = [P_1^{(m_2)}(1-P_2^{(m_1)}), P_2^{(m_2)}(1-P_1^{(m_1)})]. \quad (10.38)$$

Аналогічно міркуючи, отримаємо

$$\mathbf{W}^{(m_1 m_2)} = [W_1^{(m_1 m_2)}, W_2^{(m_1 m_2)}] = \lambda_0 [P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_1)}](1-[P_1^{(m_2)}, P_2^{(m_2)}]) =$$

$$= \lambda_0 [P_1^{(m_1)},\ P_2^{(m_1)}][1-P_2^{(m_2)},\ 1-P_1^{(m_2)}]) =$$

$$= \lambda_0 [P_1^{(m_1)}(1-P_2^{(m_2)}), P_2^{(m_1)}(1-P_1^{(m_2)})]. \quad (10.39)$$

Згідно з умовами (10.4), (10.5) оптимальне колективне рішення повинно прийматися на основі порівняння точкових величин $Z^{(m_1 m_2)}$ і $W^{(m_1 m_2)}$. Очевидно, що будь-яке значення $Z^{(m_1 m_2)} \in \mathbf{Z}^{(m_1 m_2)}$ буде більше (або менше) будь-якого значення $W^{(m_1 m_2)} \in \mathbf{W}^{(m_1 m_2)}$, якщо інтервали $\mathbf{Z}^{(m_1 m_2)} = [Z_1^{(m_1 m_2)}, Z_2^{(m_1 m_2)}]$, $\mathbf{W}^{(m_1 m_2)} = [W_1^{(m_1 m_2)}, W_2^{(m_1 m_2)}]$ не перетинаються, тобто

$$Z_1^{(m_1 m_2)} > W_2^{(m_1 m_2)}, \qquad (10.40)$$

або

$$Z_2^{(m_1 m_2)} < W_1^{(m_1 m_2)}. \qquad (10.41)$$

Умову (10.40), з урахуванням (10.38), (10.39), можна представити у вигляді

$$P_1^{(m_2)}(1 - P_2^{(m_1)}) > \lambda_0 P_2^{(m_1)}(1 - P_1^{(m_2)}), \qquad (10.42)$$

а умова (10.41) з урахуванням (10.38), (10.39) може бути записана так

$$P_2^{(m_2)}(1 - P_1^{(m_1)}) < \lambda_0 P_1^{(m_1)}(1 - P_2^{(m_2)}). \qquad (10.43)$$

Враховуючи вище сказане сформулюємо таку теорему.

Теорема 10.4. Нехай два експерти ($N = 2$) незалежно один від одного приймають особисті рішення (10.2) щодо поточного стану об'єкта, який знаходиться в одному з двох можливих станів ($M = 2$) з апріорними імовірностями $P(V_1)$ і $P(V_2) = 1 - P(V_1)$. Також на основі попередніх спостережень відомі частоти $P^{*(i)}(n)$ допущених помилок кожним з експертів.

Тоді колективне рішення $\tilde{d} = m$, $m = 1,2$ є субоптимальним з точки зору критерію мінімуму середньої імовірності помилки на множині можливих ситуацій (10.3), якщо в ситуаціях $S_{m_1 m_2}$, $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 = 1,2$ приймати остаточне рішення $\tilde{d} = 1$ на користь V_1 при виконанні умови (10.42), та рішення $\ddot{d} = 2$ на користь V_2 при виконанні умови (10.43).

Зрозуміло, що ситуація протиріччя індивідуальних рішень експертів залишиться *невирішеною*, якщо інтервали $\mathbf{Z}^{(m_1 m_2)}$ і $\mathbf{W}^{(m_1 m_2)}$ перетинаються, тому що тоді не виконується жодна з умов теореми 10.4, причому така ситуація може статися навіть, коли не перетинаються довірчі інтервали $\mathbf{I}^{(m_1)}$ і $\mathbf{I}^{(m_2)}$.

На рис. 10.8 представлено приклади областей колективного рішення згідно з умовами (10.42), (10.43) при оцінці стану об'єкту з апріорними імовірностями $P(V_1) = 0{,}8$ і $P(V_2) = 0{,}2$ в ситуації S_{12} протиріччя особистих рішень експертів. Сірим кольором виділені області значень частот особистих помилок експертів, за якими ситуація протиріччя не може бути вирішена через перетин інтервалів $\mathbf{Z}^{(m_1 m_2)}$ і $\mathbf{W}^{(m_1 m_2)}$.

Легко бачити, що область невизначеності (виділена сірим кольором на рис. 10.8) зменшується з ростом об'єму n експериментальної вибірки і збільшується з ростом довірчої імовірності β.

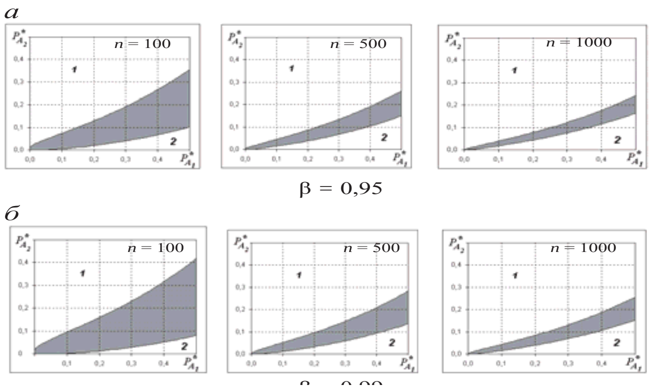


Рис. 10.8. Області колективного рішення у ситуації S_{12} при $\lambda_0 = 0{,}25$: *а* – рішення на користь V_1; *б* – рішення на користь V_2.

Для розв'язування прикладних задач представляє інтерес визначення формальних умов, що накладаються на об'єм n експериментальної вибірки, за якою оцінюють кваліфікації експертів для подальшого вирішення ситуацій протиріч особистих рішень експертів згідно інтервальної моделі (10.42), (10.43).

Можна показати, що факт зменшення області невизначеності з ростом об'єму n експериментальної вибірки пояснюють тим, що верхні границі інтервалів $\mathbf{Z}^{(m_1 m_2)}$ і $\mathbf{W}^{(m_1 m_2)}$ монотонно спадають, а нижні – монотонно зростають.

Тоді субоптимальна модель колективних рішень на основі співвідношень (10.42), (10.43) може бути реалізована для довільних $P(V_i)$ і β, якщо оцінки частот помилок експертів $P^{*(i)}(n)$, $i = 1,2$, отримано, за експериментальною вибіркою, з об'ємом

$$n_0 = \left[t_\beta^2 \frac{\sqrt{\lambda_0}(P^{*(2)} + \sqrt{\lambda_0} P^{*(1)})(\sqrt{\lambda_0}(1 - P^{*(2)}) + (1 - P^{*(1)}))}{(P^{*(2)}(1 - P^{*(1)}) - \lambda_0 P^{*(1)}(1 - P^{*(2)}))^2} + 1 \right], \quad (10.44)$$

де $\lambda_0 = (1 - P(V_1)) / P(V_1)$, а $[\eta]$ – ціла частина числа η.

Число n_0 отримано після алгебраїчних перетворень виразу, який визначає найбільший з коренів, що задовольняють рівнянням:

$$Z_1^{(m_1 m_2)} = W_2^{(m_1 m_2)},$$

$$Z_2^{(m_1 m_2)} = W_1^{(m_1 m_2)}.$$

На рис. 10.9 представлені графіки залежності об'єму вибірки n_0 від частот помилок експертів P^* для фіксованих значень λ_0 з довірчими імовірностями $\beta = 0{,}95$ (рис. 10.8, *а*) і $\beta = 0{,}99$ (рис. 10.8, *б*).

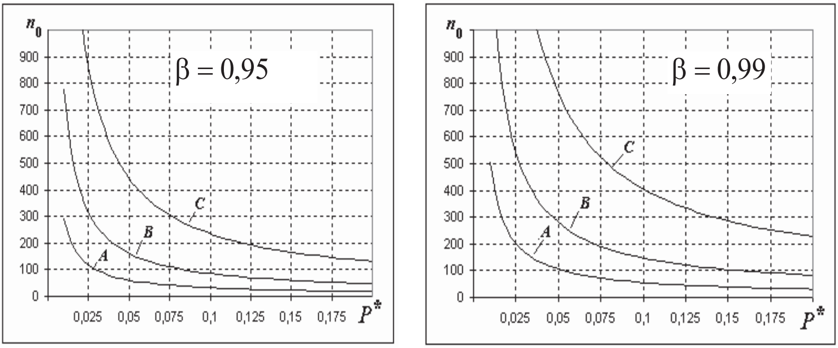


Рис. 10.9. Залежності n_0 від P^* з різними значеннями λ_0:
$\lambda_0 = 0{,}11$ і $\lambda_0 = 9$ (A); $\lambda_0 = 0{,}25$ і $\lambda_0 = 4$ (B); $\lambda_0 = 0{,}43$ і $\lambda_0 = 2{,}33$ (C).

Зауважимо, що необхідне число спостережень n зростає зі зменшенням частот $P^{*(i)}(n)$, а також коли $\lambda_0 \to 1$.

Таким чином, з вище сказаного випливає такий алгоритм розв'язування задачі прийняття колективного рішення в умовах ризику:

Крок 1. За експериментальною вибіркою об'ємом n спостережень з відомими станами об'єкта обчислюємо частоти помилок експертів $P^{*(i)}(n)$, $i = 1,2$.

Крок 2. Використовуючи обчислені значення $P^{*(i)}(n)$ з фіксованою довірчою імовірністю β та відомим параметром $\lambda_0 = \dfrac{P(V_2)}{P(V_1)}$ обчислюємо n_0 за формулою (10.44).

Крок 3. Якщо $n \le n_0$, то проводимо деяку кількість $\Delta n > n_0 - n$ додаткових спостережень, тобто визначаємо нове $n = n + \Delta n$ і повертаємось до кроку 1.

Крок 4. Обчислюємо границі довірчих інтервалів $\mathbf{I}^{(m_1)}$, $\mathbf{I}^{(m_2)}$ і приймаємо колективне рішення згідно з умовами теореми 10.1.

Приклад 10.6 Нехай за вибіркою $n = 100$ спостережень з відомими станами об'єкта обчислені значення помилок експертів $P^{*(1)} = 0{,}04$, $P^{*(2)} = 0{,}06$, також відомо, що $P(V_1) = 0{,}2$, $P(V_2) = 0{,}8$, отже $\lambda_0 = 4$. Припустимо, що експерт A_1 відніс об'єкт до класу V_1, а експерт A_2 – до класу V_2, тобто маємо ситуацію S_{12} суперечливих рішень. Зауважимо, що перший експерт більш кваліфікований, оскільки $P^{*(1)} < P^{*(2)}$.

За формулою (10.44) завдяки фіксованій довірчій імовірності $\beta = 0{,}99$ та відомому параметрі $\lambda_0 = 4$ обчислюємо $n_0 = 614$. Оскільки $n_0 > n$, проведемо $\Delta n = 600$ додаткових експериментів та визначимо за вибіркою $n = 700$ нові значення частот помилок експертів.

Нехай нові значення частот такі: $P^{*(1)} = 0{,}038$, $P^{*(2)} = 0{,}058$. Тепер, за формулою (10.44), значення $n_0 = 664$, тобто $n > n_0$ і ситуація S_{12} може бути вирішена за умовами теореми 10.1.

Дійсно, коли $n = 700$ та $\beta = 0{,}99$, інтервали $\mathbf{Z}^{(m_1 m_2)}$ і $\mathbf{W}^{(m_1 m_2)}$ не перетинаються і за умовою (10.43) колективне рішення слід прийняти на користь стану V_2 (рис. 10.10).

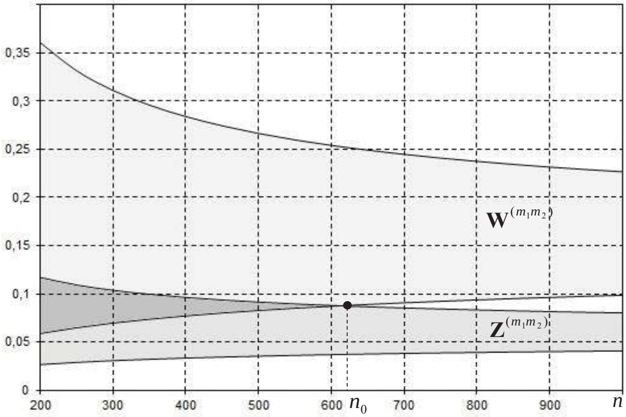


Рис. 10.10. Залежності границь інтервалів $\mathbf{Z}^{(m_1 m_2)}$ і $\mathbf{W}^{(m_1 m_2)}$ від числа спостережень n

Цілком зрозуміло, що аналогічним чином можуть бути побудовані субоптимальні моделі колективних рішень як інтервальне узагальнення інших моделей, що розглядалися у підрозділі 10.3.

Завдання для комп'ютерного практикуму

Розробити комп'ютерну програму для розв'язання наступних завдань.

Завдання 10.1. За довільними даними визначити колективне рішення щодо найкращої з трьох альтернатив за методом більшості голосів п'яти експертів.

Програма повинна мати елементи інтерфейсу, які забезпечують:

- введення індивідуальних переваг альтернатив за оцінками кожного з експертів;
- відображення номеру найкращої альтернативи, визначеної за правилом більшості голосів.

Завдання 10.2. За довільними даними визначити колективне рішення щодо поточного стану об'єкту, який може знаходитись в одному з трьох станів з відомими імовірностями (див. приклад 10.5).

Інтерфейс програми має забезпечити:

- введення довільних значень імовірності можливих станів об’єкту $P(V_m)$, $m = 1,2,3$ з урахуванням обмеження

$$P(V_1) + P(V_2) + P(V_3) = 1;$$

- введення довільних значень імовірності помилок експертів та їх особистих рішень (за формою табл. 10.4);
- визначення за формулою (10.19) колективного рішення;
- відображення результату.

Питання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте особливості задачі визначення колективного рішення.
2. Опишіть основні підходи до реалізації методу голосування.
3. Охарактеризуйте парадокси Борда та Кондорсе.
4. Викладіть та поясніть основні принципи (аксіоми) Ерроу, які відповідають справедливій схемі голосування.
5. Обґрунтуйте основний висновок теореми Ерроу.
6. Охарактеризуйте медіану Кемені.
7. Наведіть принципи, на яких ґрунтується байєсова схема прийняття колективних рішень.
8. Опишіть принцип переходу від оптимальних до субоптимальних байєсових колективних рішень.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Мета роботи: розрахунково-графічна робота (далі РГР**)** надає студентам практичні навички розв'язування задач прийняття рішень за сукупністю критеріїв методом аналізу ієрархій.

Зміст та завдання для розрахунково-графічної роботи:

1. Сформулювати конкретну практичну задачу вибору найкращої з альтернатив за багатьма критеріями (уподобаннями ОПР).
2. Можливими варіантами завдання можуть бути задачі вибору:
   - автомобіля за ціною, об'ємом двигуна, типом коробки передач тощо;
   - місця роботи за заробітною платою, відстанню до офісу тощо;
   - типу замка для вхідних дверей за виробником, кількістю ключів тощо;
   - мобільного телефону за ціною, об'ємом пам'яті, вагою тощо;
   - десерту для щоденного раціону за калорійністю, корисними елементами тощо;
   - готелю для літнього відпочинку за вартістю номера, відстанню від моря, поверхом, на якому знаходиться номер тощо;
   - косметичних ін'єкцій від зморшок на обличчі за тривалістю дії рідини, протипоказаннями, вартістю процедури тощо;
   - музикального інструменту за ціною, фірмою виробником тощо;
   - телевізора за розмірами екрану, вартістю, наявністю мультимедійних можливостей тощо;
   - дитячого дошкільного закладу за кількістю гуртків для розвитку, рівнем професійності вихователів, наявністю спортивного залу, інтерактивних засобів тощо.
3. Надати конкретні вихідні дані для розв'язку завдання методом Сааті.
4. Представити таблиці розрахунків.
5. Представити необхідні формули та графічні ілюстрації.

ПІСЛЯМОВА

На основі розглянутого матеріалу сформулюємо основні принципи (постулати) теорії прийняття рішень як наукової дисципліни.

1. Задача прийняття рішень виникає в ситуаціях, коли є не менше як два варіанти розвитку подій (альтернатив).

2. Ідеальних рішень не буває: вибір кожної з можливих альтернатив може призводити до певних втрат (ризику) особи, що приймає рішення.

3. Теорія прийняття рішень забезпечує вибір альтернативи, яка мінімізує можливий ризик.

4. Математичний метод, який реалізує спосіб мінімізації ризику, має відповідати ситуації, в якій приймають рішення, та уподобанням особи, яка їх приймає.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Алескеров Ф.Т.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения: учеб. пособ. для вузов / Ф.Т. Алескеров, Э.Л. Хабина, Д.А. Шварц. – М. : Изд. дом ВШЭ, 2006. – 298 с.
2. *Волошин О.Ф.* Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – Київ : Вид.-полігр. центр «Київ. ун-т», 2010. – 336 с.
3. *Грешилов А.А.* Математические методы принятия решений: учеб. пособ. / А.А. Грешилов. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 647 с.
4. *Горбань І.І.* Теорія ймовірності і математична статистика для наукових працівників та інженерів / І.І. Горбань. – Київ : ІПММС, 2003. – 244 с.
5. *Гусейн-Заде С.М.* Разборчивая невеста / С.М. Гусейн-Заде. – М. : Изд. Моск. Центра непрерывного математического образования, 2003. – 24 с.
6. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения (пер. с англ.) / М. Де Гроот. – М. : Мир, 1971. – 491 с.
7. *Іваненко В.І.* Прийняття рішення в умовах невизначеності / В.І. Іваненко, М.М. Дідук. – Київ : Енциклопедія кібернетики, 1973. – Т. 2. – С. 292–294.
8. *Жуковська О.А.* Основи інтервального аналізу: навч. посіб. / О. А. Жуковська. – Київ : Освіта України, 2009. – 136 с.
9. *Жуковская О.А.* Интервальное обобщение байесовской модели принятия коллективного решения в конфликтных ситуациях / О.А. Жуковская, Л.С. Файнзильберг // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 3. – С. 133–144.
10. *Зайченко Ю.П.* Дослідження операцій / Ю.П. Зайченко. – Київ : Вид. Дім «Слово», 2006. – 816 с.
11. *Згуровский М.З.* Модифицированный метод анализа иерархий / *М.З. Згуровский, А.А. Павлов, А.С. Штанькевич* // Системні дослідження та інфор маційні технології. – 2010. – № 1. – С. 7–25.

12. *Кини Р.Л.* Принятие решений по многим критериям: Предпочтения и замещения (пер. с англ.) / Р. Л. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.
13. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений / О.И. Ларичев. – М. : Логос, 2000. – 296 с.
14. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа / Б. Г. Литвак. – М. : Радио и связь, 1982. – 184 с.
15. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора / Б.Г. Миркин. – М. : Наука, 1974. – 256 с.
16. *Ногин В.Д.* Принятие решений при многих критериях. Учеб.-метод. пособие / В. Д. Ногин. – Спб. : Ютас, 2007. – 104 с.
17. *Подиновский В. В.* Парето – оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 254 с.
18. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий (пер. с англ.) / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1993. – 278 с.
19. *Степашко В С.* Комп’ютерний експеримент в індуктивному моделюванні / В.С. Степашко, С.М. Єфіменко, Є.А. Савченко. – Київ: Наук. думка, 2014. – 222 с.
20. *Файнзильберг Л.С.* Байєсова схема принятия коллективных решений в условиях противоречий / Л. С. Файнзильберг // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 3. – С.112–122.
21. *Файнзильберг Л. С.* Обучаемая система поддержки принятия коллективного решения группы независимых экспертов / Л.С. Файнзильберг // Управляющие системы и машины. – 2003. – № 4. – С. 62–67.
22. *Файнзильберг Л.С.* Математические методы оценки полезности диагностических признаков / Л.С. Файнзильберг. – Київ : Освіта України, 2010. – 152 с.
23. *Шлезингер М.И.* Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию / М. И. Шлезингер, В. Главач. – Київ : Наук. думка, 2004. – 545 с.
24. *Ivanenko V.I.* Decision Systems and Nonstochastic Randomness / V. I. Ivanenko. – Springer, 2010. – 272 p.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Навчальне видання

Л.С. Файнзільберг,
О.А. Жуковська, В.С. Якимчук

ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Підписано до друку 07.04.2018 р.
Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 16,30.
Наклад 500 прим.

ФО-П Маслаков Руслан Олексійович
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК №4726 від 29.05.2014 р.
Тел. (095) 699-25-20, (098) 366-48-27.
E-mail: osvita2005@gmail.com, www.rambook.com.ua

ВД «Освіта України»™

ФАЙНЗІЛЬБЕРГ Леонід Соломонович
доктор технічних наук, професор
кафедри біомедичної кібернетики
факультету біомедичної інженерії
Національного технічного університету
України «Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського»,
головний науковий співробітник
Міжнародного науково-навчального
центру інформаційних технологій
і систем НАН України і МОН України.
e-mail: fainzilberg@gmail.com
http://fainzilberg.irtc.org.ua/

ЖУКОВСЬКА Ольга Анатоліївна,
кандидат фізико-математичних
наук, доцент кафедри
математичного моделювання
економічних систем факультету
менеджменту та маркетингу
Національного технічного
університету України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського».
e-mail: zhukovskaya71@gmail.com

ЯКИМЧУК Вікторія Сергіївна,
кандидат технічних наук,
старший викладач кафедри
біомедичної кібернетики
факультету біомедичної інженерії
Національного технічного
університету України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського».
e-mail: viktoria.iakymchuk@gmail.com