Лабораторна робота 1.

Тема1:Методологічні основи теорії прийняття рішень. Основні поняття теории прийняття рішень

Короткі теоретичні відомості

1. Методологічні основи теорії прийняття рішень

Реальні ситуації, що складаються в буть якій сфері життєдіяльності, відрізняються зростаючою складністю задач, неперервною зміною і неповнотою даних про об’єкт дослідження, високою динамічністю процесів. У цих умовах інтелектуальні можливості людини можуть увійти до протиріччя з об'ємом інформації, який необхідно осмислити і переробити в ході управління різноманітними технологічними і соціальними процесами. Внаслідок цього зростає небезпека зриву управління.

Науково-технічна революція (НТР) настільки підвищила рівень озброєності осіб, що приймають рішення (ОПР), що помилки від невірно прийнятих рішень можуть привести не лише до економічної катастрофи для окремого підприємця або галузі, але і до глобальної катастрофи для людства.

Дієвим способом підвищення ефективності і якості рішень, що приймаються, є оволодіння ОПР усіх рівнів методологією системного аналізу та прийняття рішень на основі математичних методів.

Мистецтво вироблення найкращих (у тому або іншому сенсі) суджень так же старо, як і саме людство. Наука ж про вироблення суджень досить молода, а математична теорія прийняття рішень налічує не більше 60-70 років. Теория прийняття рішень створюється і розвивається зараз досить інтенсивно, але все ще знаходиться у стадії розвитку.

В останні десятиліття спостерігається швидке поширення застосування різних галузей знань, особливо математичних, у військовій справі, в управлінні виробництвом і т. п. При цьому спостерігається постійна взаємодія і взаємозбагачення між постановками практичних задач прийняття рішень у вказаних областях та розробкою математичного апарату, необхідного для їх вирішення.

До них можна віднести:

- математичне програмування,
- теорію ігор,
- теорію статистичних рішень,
- теорію оптимального автоматичного керування,
- дослідження операцій,
- системний аналіз,
- економічну кібернетику та ін.

Усі ці дисципліни займаються розглядом однієї і тієї ж основної проблеми – наукового аналізу ряду можливих способів дії з метою знаходження такого з них, який в певних умовах був би найкращим. Іншими словами, вони займаються розглядом проблеми прийняття оптимальних рішень, але стосовно об'єктів різної природи і в різних умовах їх існування. У цьому сенсі їх можна вважати складовими частинами єдиної наукової дисципліни, для позначення якої нині все частіше застосовується термін «теорія прийняття рішень» (ТПР).

Системність – це загальна властивість об'єктивно існуючої єдності світу, його структурованості і взаємозв'язку.

Системність як загальна властивість світу виявляється не тільки в системності матеріального світу, але й системності пізнавальної та практичної діяльності:

- *системність пізнавальної діяльності* полягає в тому, що наші знання структуровані, являють собою ієрархічну систему взаємопов'язаних моделей світу;
- *системність практичної діяльності* полягає у використанні взаємозв'язаних процедур для перетворення навколишнього середовища й людини, у врахуванні різних сторін діяльності та всіх можливих її наслідків.

Розглянемо головні поняття дисципліни.

Системний аналіз – це методологія об'єктів, що ґрунтується на концепції систем. Він включає формулювання проблемної ситуації, всебічне кількісне порівняння альтернатив та вибір оптимальних рішень при широкому застосуванні методів моделювання. Системний аналіз застосовується для підготовки й обґрунтування шляхів вирішення складних проблем політичного, соціального, військового, економічного, технічного та ін. характеру. Системний аналіз – це прикладна діалектика.

Предметом вивчення системного аналізу є система, незалежно від її природи, організації, способу існування і способу опису.

Метою розгляду системи є рішення задач аналізу, сінтезу,керування і проектування.

Головна процедура системного аналізу – побудова узагальнених моделей, в яких відображені закономірності реальної ситуації. Моделі системного аналізу відображають структуру, взаємозв'язки у складних системах, реальну ситуацію та проблеми, які в них виникають. За допомогою створених моделей досліджують системи й знаходять шляхи вирішення складних проблем.

Технічна основа системного аналізу – інформаційні системи, обчислювальна техніка і сучасні методи керування.

Системний аналіз вивчає такі питання:

- утворення цілого;

- побудова цілого;
- зростання і розвиток цілого;
- відношення між цілісною системою та іншими системами;
- відношення між системою та метасистемою, великою зовнішньою системою, до складу якої вона входить.

Системний аналіз ґрунтується на системному підході, а також на ряді математичних дисциплін та сучасних методах керування. ***Системний підхід*** – це напрямок дослідження, вивчення світу, в основі якого лежить розгляд об'єктів як системи.

Проблема обґрунтування (прийняття) рішень має універсальний, усеосяжний характер. Вона виникає практично у будь-якій сфері цілеспрямованої людської діяльності і складає її принципову суть.

Особливо актуальною є проблема прийняття рішень стосовно складних систем різного призначення. Процес проектування, розробки, створення і експлуатації складних систем є пов'язаним з необхідністю приймати велику кількість рішень, що стосуються як системи в цілому, так і окремих її підсистем і елементів. Ці рішення можуть мати технічний, організаційний, управлінський і т. п. характер. При цьому окремі рішення, що стосуються підсистем і елементів системи, повинні прийматися з позицій системного підходу, тобто з урахуванням усіх істотних зв'язків і взаємозв'язків цієї підсистеми або елементу з іншими елементами системи, і мають бути науково-обгрунтованими.

Ситуацію, в якій відбувається обґрунтування (прийняття) рішень, характеризують такі **основні риси**:

1. **наявність мети (цілей).** Необхідність прийняття рішення диктується наявністю деякої мети, яку треба досягти : наприклад, виконати планове завдання, вибрати тип верстата, призначити план перевезень і так далі. Якщо ж мета не поставлена, то не виникає і необхідність приймати яке-небудь рішення;
2. **наявність альтернативних ліній поведінки.** Рішення приймаються в умовах, коли існує більше за один спосіб досягнення мети, або, інакше, декілька альтернатив досягнення мети. З різними альтернативами можуть бути пов'язані різні витрати і різна вірогідність досягнення мети. Ці витрати і вірогідність не завжди можуть бути точно визначені. Тому часто прийняття рішень пов'язане з неясністю і невизначеністю. Якщо ж існує лише одна лінія поведінки, то вибору немає і, отже, рішення приймати не потрібно, воно очевидне;
3. **наявність обмежуючих чинників.** Рішення зазвичай приймаються в умовах дії великого числа чинників, що обмежують можливість вибору способів дій. Ці чинники інакше називають дисциплінуючими умовами. Обмежуючі чинники, що підлягають розгляду, можна укрупнено розбити на три основні групи: економічні, технічні і соціальні.

Під **економічними** чинниками розуміють чинники, пов'язані з ресурсами:

- час,
- грошові засоби,

- трудові ресурси,
- виробничі можливості і т. п.

До **технічних** чинників зазвичай відносять чинники, які безпосередньо пов'язані з інженерним аналізом і виробленням вимог до технічних характеристик об'єктів:

- габарити,
- вага,
- міцність,
- надійність,
- точність,
- температурні умови і т. п.

Нарешті, **соціальні** чинники, у тому числі і чисто людські, виражають вимоги не лише політичної або соціальної доцільності здійснення тієї або іншої альтернативи, але і людської етики і моралі. Вказані чинники накладають обмеження на можливості досягнення поставленої мети. Очевидно, що відсутність обмежень істотно спрощує задачу прийняття рішення.

Отже, **задача обґрунтування (прийняття) рішення** (ЗПР) виникає в тому і тільки у тому випадку, коли існує мета, яку треба досягти, коли можливі різні способи її досягнення і існують чинники, що обмежують можливості досягнення мети. Виявлення усіх трьох вказаних основних елементів ЗПР повинне обов'язково передувати її безпосередньому рішенню.

Об'єкт і предмет дослідження теорії прийняття рішень (ТПР).

Об'єктом дослідження ТПР є ситуація прийняття рішень, або так звана проблемна ситуація (ПС).

Предметом дослідження ТПР виступають загальні закономірності вироблення рішень в проблемних ситуаціях, а також закономірності, властиві процесу моделювання основних елементів проблемної ситуації.

Основним призначенням ТПР є розробка для практики науково обгрунтованих рекомендацій по організації і технології побудови процедур підготовки і прийняття рішень в складних ситуаціях із застосуванням сучасних методів і засобів (в першу чергу, комп'ютерів і комп'ютерних систем).

В основі сучасної ТПР лежить комплексна концепція прийняття рішень, яка вимагає врахування усіх істотних аспектів проблемної ситуації і раціональної інтеграції як логічного мислення і інтуїції людини, так і математичних і технічних засобів. Згідно цієї концепції ***прийняття рішення*** – це свідомий вибір з ряду (альтернатив).

Цей вибір робить ОПР, в ролі якої виступає людина або колектив, що мають права вибору рішення і несуть відповідальність за його наслідки.

Під **метою** розуміється ідеальне представлення бажаного стану або результату діяльності. Якщо фактичний стан не відповідає бажаному, то має місце ***проблема***.

Вироблення плану дій з усунення проблеми складає ***суть задачі прийняття рішень***.

Проблеми можуть виникати в наступних випадках:

- функціонування системи в даний момент не забезпечує досягнення поставлених цілей;
- функціонування системи в майбутньому не забезпечить досягнення поставлених цілей;
- потрібна зміна цілей діяльності і т. ін.

Проблема завжди пов'язана з певними умовами, які узагальнено називають ***ситуацією***.

Сукупність проблеми і ситуації утворює ***проблемну ситуацію***. Виявлення і опис проблемної ситуації дає початкову інформацію для постановки задачі прийняття рішень.

Суб'єктом всякого рішення є ***особа, що приймає рішення (ОПР)***. Поняття ОПР є збиральним.

Це може бути:

- одна особа – *індивідуальне ОПР* ;
- група осіб, що виробляють колективне рішення – *групове ОПР*.

Для допомоги ОПР у зборі і аналізі інформації і формуванні рішень притягуються ***експерти*** – фахівці з вирішуваної проблеми.

Поняття експерта в теорії прийняття рішень трактується в широкому сенсі і включає співробітників апарату керування, що готують рішення, учених і практиків. Ухвалення рішень відбувається в часі, тому вводиться поняття процесу прийняття рішень. Цей процес складається з послідовності етапів і процедур і спрямований на усунення проблемній ситуації.

2. Основні поняття теории прийняття рішень та схема процесу прийняття рішень

Нижче наводяться основні поняття і визначення теорії обґрунтування (прийняття) рішень, що отримали найбільше поширення. Інші, менш поширені, поняття вводитимуться по мірі викладення.

Одним з основних понять ТПР є поняття операції.

Під терміном ***«операція»*** слід розуміти організовану діяльність у будь-якій сфері життя, об'єднану єдиним задумом, спрямовану до досягнення певної мети і таку, що має характер повторюваності, тобто багатократності.

У цьому визначенні підкреслюються *дві особливості операції*: її цільова спрямованість та повторюваність.

Це визначення виходить з факту існування загального і стійкого в цілому ряду явищ, що створюють операцію, тобто мається на увазі можливість встановлення закономірностей. Саме звідси виникає можливість проводити дослідження, що стосуються кількісних сторін операції, загальними науковими шляхами з використанням методів теорії вірогідності, статистики, математики і ряду наук – фізики, хімії, біології, економіки та ін.

Приклади різних операцій:

1) виробнича діяльність галузі промисловості, що випускає деяку народногосподарську продукцію;
2) відображення повітряного нальоту засобами системи протиповітряної оборони;
3) запуск групи штучних супутників Землі для створення космічної системи зв'язку;
4) сукупність заходів, спрямованих до підвищення надійності деякого технічного пристрою.

Тепер перейдемо до другого важливого поняття ТПР – оперуюча сторона.

Сукупність осіб і технічних пристроїв, які прагнуть в цій операції до досягнення деякої мети, називається ***оперуючою стороною***.

Так, в першому наведеному вище прикладі (з галуззю промисловості) оперуючою стороною є особи, відповідальні за прийняття рішень відносно діяльності підприємств, що входять до складу галузі, тобто керівництво міністерства, у веденні якого знаходиться ця галузь.

У операції можуть брати участь одна або декілька оперуючих сторін, переслідуючих різні, неспівпадаючі цілі.

Неспівпадання цілей оперуючих сторін створює ***конфліктну ситуацію***. Подібні операції називаються ***багатосторонніми*** або ***конфліктними***.

Так, в другому, наведеному вище прикладі операції, результат операції залежить від діяльності двох сторін, переслідуючих протилежні цілі : нападаючої сторони, що здійснює повітряний наліт, і що обороняється, відбиває наліт.

Разом з оперуючими сторонами в операції можуть брати участь арбітри і природні сили, поведінка яких не підпорядкована прагненню до досягнення цілей операції.

Для досягнення мети оперуюча сторона повинна мати в розпорядженні деякий *запас активних засобів (ресурсів)*, використовуючи або витрачаючи які вона може домагатися досягнення мети.

В якості ресурсів залежно від суті операції можуть виступати:

- верстати,
- запаси сировини,
- робоча сила,
- грошові кошти,
- засоби протидії в системі протиповітряної або протиракетної оборони і т.п.

Операція є керованим заходом. Оперуюча сторона управляє операцією, вибираючи ті або інші способи використання ресурсів – ***способи дій***. В якості синонімів терміну «спосіб дії» часто використовуються наступні терміни:

- альтернатива,
- стратегія,
- керування,
- рішення.

Можливості оперуючої сторони по управлінню операцією завжди обмежені, оскільки завжди обмежені рядом природних причин ресурси, що перебувають у її розпорядженні. Цей факт проявляється в наявності обмежень – ***дисциплінуючих умов*** та у виборі способів дій оперуючої сторони – ***стратегій***.

Стратегії, що задовольняють накладеним обмеженням, називаються ***можливими*** або ***допустимими*** (у сенсі накладених обмежень).

Поняття «допустимі стратегії» є відносним: клас допустимих стратегій визначається накладеними обмеженнями і змінюється, якщо змінюються обмеження.

Реалізація тієї або іншої допустимої стратегії оперуючої сторони зазвичай призводить до різних ***результатів операції***. Щоб порівнювати між собою якість різних стратегій, треба мати можливість оцінювати відповідні результати операції.

Результат операції оцінюється за допомогою деяких ***критеріїв якості*** (інакше: ***критеріїв ефективності*** або ***критеріїв оптимальності***).

Критерій оптимальності є математичним вираженням мети операції (математичною моделлю мети операції), що дозволяє кількісно оцінити міру досягнення цієї мети.

Стратегія, найкраща в сенсі вибраного критерію оптимальності, тобто яка доставляє йому необхідне екстремальне (максимальне або мінімальне) значення, називається ***оптимальною стратегією*** (синонімами цьому терміну є терміни оптимального рішення, оптимального керування і т. п.).

Слід завжди мати на увазі, що поняття «оптимальна стратегія» є не абсолютним, а відносним, як і поняття «допустима стратегія». Не існує оптимальної стратегії взагалі, всяка оптимальна стратегія є найкращою лише в деякому вузькому, абсолютно конкретному сенсі, визначуваному критерієм оптимальності. Одна і та ж стратегія, оптимальна в сенсі одного критерію, може виявитися далеко не оптимальною і навіть дуже поганою в сенсі іншого критерію.

Перейдемо до розгляду наступного важливого поняття ТПР і дослідження операцій – дослідник операції.

У складі оперуючої сторони спеціально виділяється і займає особливе місце ***дослідник операції*** або ***операціоніст***. Він належить до оперуючої сторони і повинен переслідувати ту ж мету, що і оперуюча сторона. Проте він не приймає остаточних рішень по вибору способів дій, а лише допомагає в цьому оперуючій стороні, надаючи їй кількісні підстави для прийняття рішень.

Іншими словами, дослідник операції має право не вирішального, а лише дорадчого голосу. Природно, що тому він і не повинен нести відповідальності за прийняті рішення і наслідки від реалізації зроблених дій. Така постановка справи є принциповою, оскільки допомагає дослідникові операції зберігати наукову об'єктивність і принциповість. Цей принцип був проголошений ще на ранній, військовій, стадії розвитку дослідження операцій як принцип розділення функцій командування і функцій дослідження.

Отже, суть роботи дослідника операції полягає в:

- детальному вивченні суті і специфіки вирішуваної проблеми,
- визначенні усього набору допустимих стратегій,
- оцінці їх якості,
- порівнянні їх між собою,
- визначенні оптимальної стратегії.

Дослідження операції завершується рекомендаціями по вибору оптимальної стратегії.

Саме ж прийняття рішення, тобто остаточний вибір стратегії і її реалізація, виходить за рамки дослідження і відноситься до компетенції відповідальної особи – ***керівника операції***.

Таким чином, теорію прийняття рішень, можливо, правильніше було б називати ***теорією обгрунтування рішень***.

Отже, **наукове обгрунтування рішень** – це передусім кількісна оцінка можливих рішень і вибір найкращого з них за деяким об'єктивним критерієм.

Тому в кількісній теорії прийняття рішення в якості критерію оптимальності може виступати тільки такий, який допускає кількісну оцінку. У кількісній теорії прийняття рішень широко оперують поняттями **показник і критерій**.

Словник визначає поняття «**показник**» як «те, по чому можна судити про розвиток». Іншими словами, стосовно ТПР, під ***показником*** слід розуміти кількісну оцінку якоїсь властивості об'єкту, що вивчається.

Властивості технічних і економічних об'єктів зазвичай багатогранні. Для їх кількісної характеристики має бути використана сукупність багатьох показників.

> Так, наприклад, транспортний літак можна охарактеризувати за допомогою таких показників, як крейсерська швидкість, безпосадочна дальність польоту, вантажопідйомність, злітна вага, потрібна довжина злітної і посадочної смуги, і багатьох інших.

Термін **«критерій»** походить від грецького «критерион», що означає в перекладі «засіб для вирішення», «міряло оцінки». Поняття «критерій» в словнику визначається як «ознака, на підставі якої робиться оцінка, визначення або класифікація чого-небудь».

В ТПР ***критерієм*** є засіб для кількісної оцінки рішень, порівняння їх між собою і вибору найкращого (оптимального).

У сучасній науці про прийнятті рішень передбачається, що варіанти рішень (***альтернативи***) характеризуються різними показниками їх привабливості для особи, що приймає рішення (ОПР). Ці показники називають ознаками, факторами, атрибутами, критеріями [3].

Критерій – спосіб вираження відмінностей в оцінці альтернативних варіантів з точки зору учасників процесу вибору, тобто показник привабливості варіантів рішень. Саме за допомогою критерію ОПР будемо судити про перевагу результатів, а, отже, і способів проведення операції щодо вирішення проблеми [1].

У досить простих ситуаціях прийняття рішень вдається обмежитися єдиним критерієм оптимальності. Відповідні здачі прийняття рішень називаються ***одноцільовими або одинкритеріальними ЗПР*** (інакше – ***монокритеріальними або скалярними***).

Інакше мають місце ***багатоцільові або багатокритеріальні ЗПР*** (інакше – ***полікритеріальні або векторні***).

Критерій оптимальності часто називають також ***критеріальною (цільовою функцією)*** або ***функцією ефективності***.

Для будь-якої задачі прийняття рішень повинна існувати трійка:

- мета,
- критерії,
- альтернативи.

Якщо відсутній один з компонентів, то проблема вважається не поставленою.

Альтернатива – один із способів досягнення мети або один з кінцевих варіантів рішень.

Розрізняють:

- залежні альтернативи;
- незалежні альтернативи.

Якщо дія над будь-якої альтернативою не впливає на якість інших, то така альтернатива є ***незалежною***.

Будь-який процес прийняття рішень супроводять проблеми:

- проблеми **концептуального** характеру,
- проблеми **формально-математичного** характеру,
- проблеми **обчислювального** характеру.

Концептуальні проблеми зазвичай вирішуються на рівні керівників операції із залученням групи експертів. Рішення концептуальних проблем складає зміст так званої **неформальної теорії прийняття рішень**.

До числа **концептуальних** проблем належать такі проблеми, як:

- аналіз і вибір цілей операції,
- аналіз можливих наслідків проведення операції,
- виявлення сукупності показників,
- що характеризують результати операції і об'єкти, що беруть участь в них,
- аналіз цих показників,
- виділення з їх числа найбільш важливих і віднесення їх в розряд критеріїв оптимальності і багато інших.

<u>Для побудови математичної моделі прийняття рішення</u> необхідно задати наступні три множини:

X – множина допустимих альтернатив (стратегій, варіантів, дій, рішень, планів і т.д.),

Y – множина можливих станів середовища,

A – множина можливих результатів.

Передбачається, що множина X містить не менше двох альтернатив – інакше потреба в прийнятті рішення відпадає.

Оскільки результати повністю визначається вибором альтернатив і станом середовища, то кожній парі (x, y), де $x \in X$, $y \in Y$, відповідає певний результат $a \in A$. Тобто, існує функція $F: X \times Y \to A$, яка називається ***функцією реалізації***. Функція реалізації кожній парі виду (x, y), тобто (альтернативи, стан середовища) ставить у відповідність визначений нею результат.

Набір об'єктів (X, Y, A, F) становить ***реалізаційну структуру ЗПР***. Реалізаційна структура відображає зв'язок між вибраними альтернативами і наслідками. Такий зв'язок не є однозначним, оскільки явище досягає того чи іншого конкретного результату в залежності не тільки від обраної альтернативи, але і від наявного стану середовища. Таким чином, є, як прийнято говорити, *невизначеність стратегічного типу*; ця невизначеність створюється за рахунок впливу середовища на об'єкт. Реалізаційна структура задачі прийняття рішення становить її першу компоненту.

Другий компонент ЗПР називається її ***оціночною структурою***. Якщо реалізаційна структура визначає в результат, що виник, то оціночна структура вказує оцінку цього результату з точки зору того хто приймає рішення.

У математичної моделі ЗПР оціночна структура може задаватися різними способами.

> Наприклад, якщо ОПР може оцінити ефективність кожного результату $a \in A$ деяким числом φ (a), то оціночна структура задається у вигляді пари $\langle A, \varphi \rangle$, де $\varphi: A \to R$; при цьому φ називається ***оціночної функцією***.

Інший спосіб задання оціночної структури полягає у вказівці відносини переваги результатів, що зводиться до перерахування пар результатів (a_1, a_2) для яких a_1 є кращою, ніж a_2 (записують $a_1 > a_2$, читають a_1 є кращою, ніж a_2).

<u>**Зауваження:**</u> Іноді використовується запис $a_1 \geq a_2$, яка читається: «a_1 є не менш кращою, ніж результат a_2».

<u>Ще один спосіб завдання оціночної структури</u> – розбиття множини результатів A на два класи:

A_0 – клас «поганих» результатів

A_1 – клас «хороших» результатів.

Існують й інші способи створення оціночної структури у вигляді оціночної функції φ.

Цільова функція f є композицією функції реалізації F і оціночної функції φ, тобто $f = \varphi \circ F$, де $\circ$ – знак композиції.

Отже, $f(x, y) = \varphi(F(x, y))$.

Число f (x, y) є ***оцінкою корисності*** того результату, який виникає в ситуації коли він вибирає альтернативу x, а середовище приймає стан y.

<u>**Зауваження:**</u>

1. У деяких задачах прийняття рішення оцінка результату є вираженням витрат збитків і т.п. В цьому випадку цільова функція f називається ***функцією втрат***.
2. При побудові моделей прийняття рішень не є можливим однозначно вказати, що є середовищем. Корисно керуватися принципом: ***середовище*** – це те, що визначає при кожній фіксованій альтернативі появу того чи іншого результату.

<u>**Методика дослідження задач прийняття рішень на основі математичного моделювання полягає в реалізації наступних трьох етапів**</u>.

***Етап* 1.** Побудова математичної моделі ЗПР.

***Етап* 2.** Формування принципу оптимальності і знаходження оптимального рішення.

***Етап* 3.** Аналіз отриманих результатів.

<u>Перший етап</u> розглянуто вище.

Реалізація другого етапу є пов'язаною з виведенням принципу оптимальності. Оскільки оптимального рішення для будь-якої ЗПР не існує, то розглядають окремі класи задач прийняття рішень і для кожного класу формують свій принцип оптимальності.

Слід зазначити, що для ЗПР даного класу може існувати кілька оптимальних рішень. Цім пояснюється необхідність третього етапу, який полягає в аналізі отриманих результатів. Аналіз полягає в співвіднесенні формально отриманих рекомендацій з вимогою ЗПР. Якщо оптимальне рішення, з якихось причин, виявляється неприйнятним, то це призводить або до вибору іншого оптимального рішення (якщо воно є), або до зміни принципу оптимальності, або до зміни самої математичної моделі ЗПР.

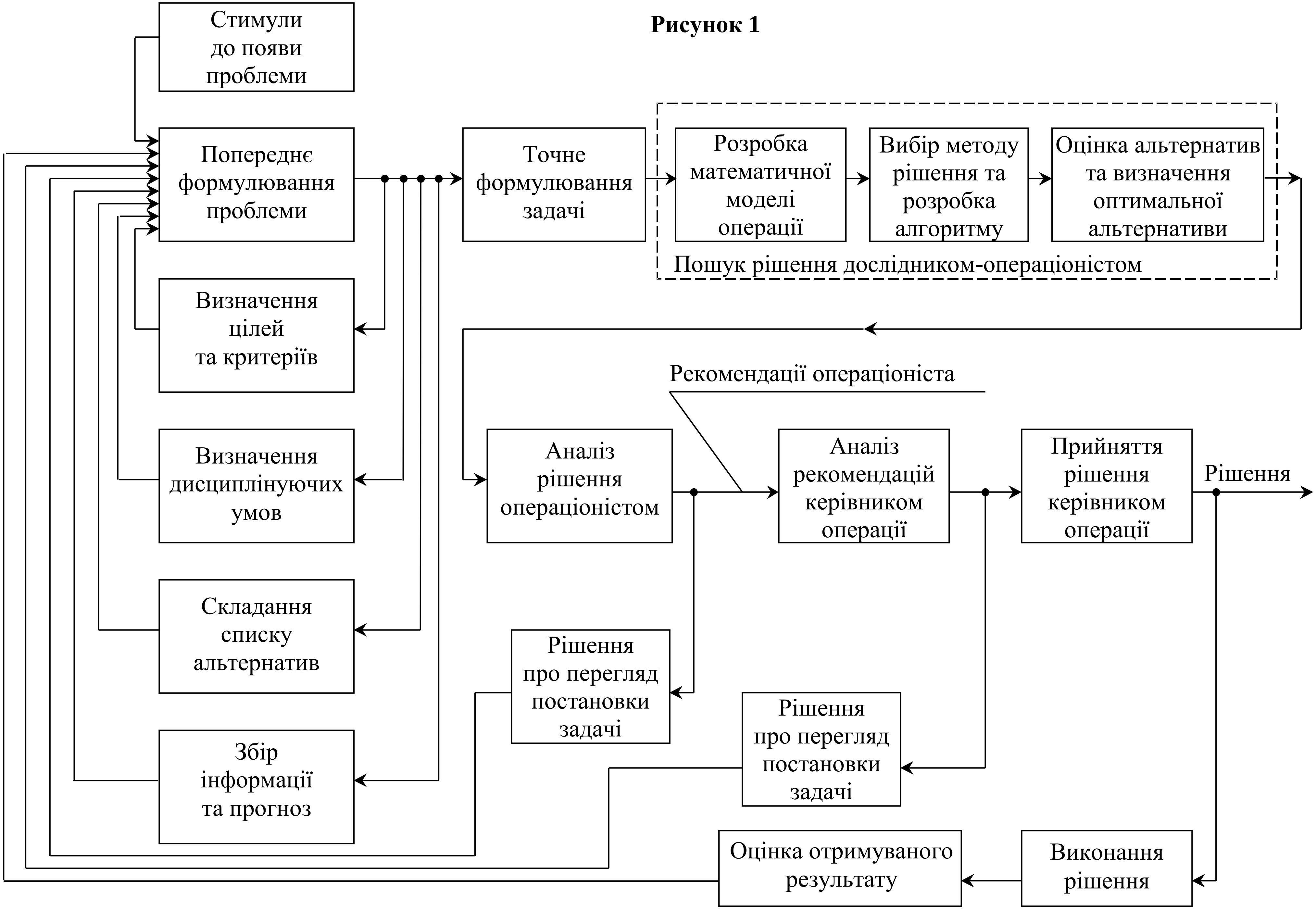
Процеси прийняття рішень (ППР), що реалізовуються в найрізноманітніших сферах діяльності, мають дуже багато спільного, тому необхідно мати деяку універсальну, **«типову» схему ППР**, що встановлює найбільш доцільний набір і послідовність дій, вироблюваних при рішенні ЗПР.

«Типовий» процес прийняття рішення має наступний склад:

1) попереднє формулювання проблеми;
2) визначення цілей операції та вибір відповідних критеріїв оптимальності;
3) виявлення та формулювання дисциплінуючих умов;
4) складання можливо повнішого списку альтернатив та попередній їх аналіз з метою відкидання явно неефективних;
5) збір необхідної інформації та прогнозування змін параметрів операції в майбутньому;
6) точне формулювання постановки задачі;
7) розробка математичної моделі операції, що дозволяє оцінювати ефективність кожної альтернативи;
8) аналіз й вибір методу розв'язання задачі та розробка алгоритму рішення;
9) оцінка альтернатив та визначення найбільш ефективних;
10) прийняття рішення відповідальним керівником;
11) виконання рішення та оцінка результатів.

Структурна схема процесу прийняття рішення представлена на рис. 1. Вказані особливості процесу відображені за допомогою зворотних зв'язків.

Рисунок 1


Стимули до появи проблеми
Попереднє формулювання проблеми
Точне формулювання задачі
Розробка математичної моделі операції
Вибір методу рішення та розробка алгоритму
Оцінка альтернатив та визначення оптимальної альтернативи
Пошук рішення дослідником-операціоністом
Визначення цілей та критеріїв
Рекомендації операціоніста
Визначення дисциплінуючих умов
Аналіз рішення операціоністом
Аналіз рекомендацій керівником операції
Прийняття рішення керівником операції
Рішення
Складання списку альтернатив
Рішення про перегляд постановки задачі
Рішення про перегляд постановки задачі
Збір інформації та прогноз
Оцінка отримуваного результату
Виконання рішення

3. Загальна постановка одинкритеріальної задачі прийняття рішення

Нехай є деяка операція, тобто керований захід, на результат якого оперуюча сторона може в якійсь мірі впливати.

Ефективність цього керування характеризується деяким критерієм оптимальності F, що допускає кількісне представлення.

Критерій оптимальності може бути заданий або у вигляді функції (за допомогою одного із способів завдання функції), або, в складніших випадках, у вигляді функціонала, або мати лише алгоритмічне завдання.

Величина критерію оптимальності залежить від ряду чинників, які можна розбити на дві групи::

1) ***контрольовані (керовані) чинники***, вибір яких знаходиться у розпорядженні оперуючої сторони. Кожен конкретний вибір значень контрольованих чинників є *стратегією оперуючої сторони*;
2) ***неконтрольовані (некеровані) чинники***, на які оперуюча сторона впливати не може. До складу неконтрольованих чинників може входити і час, якщо в операції беруть участь динамічні об'єкти, змінюючі свої властивості і поведінку в часі.

Неконтрольовані чинники залежно від інформованості про них дослідника операції **можна розбити на три групи**:

1) ***детерміновані чинники*** – невипадкові фіксовані чинники (або, інакше, невипадкові величини), значення яких повністю відомі оперуючій стороні до проведення операції;
2) ***стохастичні чинники*** – випадкові фіксовані чинники (або, інакше, випадкові величини) та процеси з відомими оперуючій стороні законами розподілу;
3) ***невизначені чинники***, для кожного з яких є відомою тільки галузь можливих знань чинника або область, усередині якої знаходиться закон розподілу, якщо чинник випадковий. У останньому випадку має місце невизначений закон розподілу випадкового чинника. Значення невизначених чинників є невідомими оперуючій стороні у момент прийняття рішення про вибір оптимальної стратегії.

Відповідно до виділених чинників критерій оптимальності F можна представити у вигляді залежності

$$F = F\left(X_1, X_2, ..., X_l, A_1, A_2, ..., A_p, Y_1, Y_2, ..., Y_q, Z_1, Z_2, ..., Z_r, t\right), \qquad (1)$$

де $X_1, ..., X_2$ – контрольовані чинники; $A_1, ..., A_p$ – неконтрольовані детерміновані чинники; $Y_1, ..., Y_q$ – неконтрольовані стохастичні чинники; $Z_1, ..., Z_r$ – неконтрольовані невизначені фактори.

Величини *X, A, Y, Z* в загальному випадку можуть бути масивами будь-якої розмірності: скалярами, векторами, матрицями і т.д.

Величини контрольованих (керованих) чинників зазвичай обмежені низкою природних причин, наприклад обмеженістю наявних для операції ресурсів. Математично ці обмеження записуються у вигляді дисциплинируючих умов:

$$g_i = g_i\left(X_1,...,X_l, A_1,...,A_{p_i}, Y_1,...,Y_{q_i}, Z_1,...,Z_{r_i}, t\right)\{\le,=,\ge\}b_i,\quad i\in\overline{i,\,m}, \tag{2}$$

де $A_1,...,A_{p_i}$ – неконтрольовані детерміновані чинники; $Y_1,...,Y_{q_i}$ – неконтрольовані стохастичні чинники; $Z_1,...,Z_{r_i}$ – неконтрольовані невизначені фактори.

Умови (2) визначають області $\Omega_{X_1},\Omega_{X_2},...,\Omega_{X_l}$ простору, всередині яких розташовані можливі (допустимі) значення контрольованих факторів $X_1, X_2,..., X_l$.

Аналогічним чином можуть бути обмежені і області можливих значень неконтрольованих чинників.

У ЗПР зазвичай передбачається, що ці області є відомими оперуючій стороні.

Оскільки критерій оптимальності є кількісною мірою ступеня досягнення мети операції, то математично мета операції виражається в прагненні до максимально можливого збільшення (або зменшення) значення критерію *F,* що можна записати в вигляді

$$F \to \max(\text{або } \min). \tag{3}$$

Засобом досягнення цієї мети є відповідний вибір оперуючою стороною керувань $X_1, X_2,..., X_l$ із областей $\Omega_{X_1},\Omega_{X_2},...,\Omega_{X_l}$ їх допустимих значень.

Отже, перед особою, відповідальною за прийняття рішення, стоїть **задача прийняття рішення**, яку можна сформулювати наступним чином:

> при заданих значеннях і характеристиках фіксованих неконтрольованих факторів $A_1,...,A_p, Y_1,...,Y_q$ з урахуванням невизначенех факторів $Z_1,...,Z_r$ знайти оптимальні значення $\overline{X}_1,...,\overline{X}_l$ керувань $X_1,...,X_l$ із областей $\Omega_{X_1},...,\Omega_{X_l}$ їх допустимих значень, які по можливості звертали б в максимум (мінімум) критерій оптимальності *F*.

Наведене **загальне формулювання задачі прийняття рішення** не є строго математичною, про що свідчить обмовка «по можливості». Ця нестрогість обумовлена насамперед наявністю неконтрольованих невизначених, а також стохастичних чинників.

Завдання до лабораторної роботи 1

Завдання1

1. Сформулюйте декілька задач прийняття рішень, виходячи з власного життєвого досвіду.

2. Структуруйте задачі (п. 1), виділіть альтернативи, цілі та критерії.

3. Класифікуйте отримані задачі (п. 1, 2) та запропонуйте підходи до їхнього розв'язання. Спробуйте сформулювати відповідні правила прийняття рішень.

4. Наведіть етапи "типової" схеми ППР та розкрийте їх сутність на прикладі сформульованих задач (п. 1).

Завдання 2

Розробіть презентацію сформульованої задачі прийняття рішень, яка виходить з власного життєвого досвіду, використовуючи основні поняття системного аналізу та теорії прийняття рішень, що наведені в теоретичних відомостях.

Питання для самоперевірки

1. Що відрізняє процеси прийняття рішень від інших видів діяльності людини?
2. Які ролі відіграють люди в процесі прийняття рішень?
3. Наведіть основні риси, що характеризують ситуацію, в якій відбувається прийняття рішень?
4. Що таке критерії? Наведіть приклади критеріїв.
5. Що таке альтернативи? Наведіть приклади альтернатив.
6. Сформулюйте основне призначення ТПР.
7. Що дає початкову інформацію для постановки задачі прийняття рішень.
8. Наведіть групи на які можна розбити критерії оптимальності.
9. Що є предметом вивчення системного аналізу?
10. Наведіть головну процедуру системного аналізу.
11. Що розуміється під системністю?
12. Які проблеми належать до концептуальних проблем теорії прийняття рішень?
13. Що означає, що виникла задача прийняття рішень?

Тренувальний Тест

1. Як називається людина яка працює в даній області діяльності, що розбирається в проблемі, яка розглядається та може висловити думку з проблеми в доступній формі.

а) ОПР (особа, що приймає рішення);
б) эксперт;
в) специалист;
г) консультант.

2) Один із способів досягнення мети або один з кінцевих результа-тов називають

а) критерієм;
б) альтернативою.

3) Якщо X - множина допустимих альтернатив;
У - множина станів середовища;
A - множина випадків;
F - функція реалізації,
то набір яких об'єктів становить реалізаційну структуру ЗПР?

а) XYA, б) XYF, в) XAF, г) XYAF.

4) Дана пара ісходів (a_1, a_2), причому результат a_2 не менш кращий ніж результат a_1. Оиберіть запис,що відповідає певному твердженню

а) $a_1 > a_2$;
б) $a_1 < a_2$;
в) $a_1 \leq a_2$;
г) $a_1 \geq a_2$..

5) Якщо оцінка результату є вираженням витрат збитків, то цільова функція f називається:

а) функція витрат;
б) функція втрат;
в) функція збитків;
г) функція f.

Рекомендована література

1. Ус С. А., Коряшкіна Л. С. Моделі й методи прийняття рішень : навч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2018. 299 с.
2. Файнзільберг Л. С., Жуковська О. А., Якимчук В. С. Теорія прийняття рішень : підручник. Київ : Освіта України, 2018. 246 с.
3. Полінкевич О. М., Волинець І. Г. Обґрунтування господарських рішень

та оцінювання ризиків : навч. посіб. Луцьк : ВежаДрук, 2018. 336 с.

4. Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навч. посіб. Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. 272 с.

5. Катренко А. В., Пасічник В. В. Прийняття рішень: теорія та практика : підручник Львів : Новий Світ – 2000, 2020. 447 с.

Лабораторна робота 2

Тема. Експертні методи в теорії прийняття рішень

Короткі теоретичні відомості

1. Ранжування. Методика побудови ранжируваного ряду

У процесі здійснення експертизи, під час проведення експертного опитування, одержувані від експертів думки (судження) часто виражені *порядковою шкалою*, тобто експерт може сказати (та обґрунтувати), наприклад:

– що певний тип продукції буде привабливішим для споживачів, ніж інші;
– що один показник якості продукції є важливішим за інший;
– що перший технологічний об'єкт є небезпечнішим, ніж другий,

і т.д.

Але при цьому експерт не в змозі сказати, *у скільки разів* або *на скільки* важливішою, або, відповідно, не безпечнішою є та чи інша досліджувана характеристика (показник, фактор).

У цьому зв'язку постає питання: як проводити аналіз відповідей, зібраних робочою групою експертів?

Для вирішення такої проблеми експертів часто просять надати ранжування (упорядкування) об'єктів експертизи, тобто розташувати їх у порядку зростання (або, точніше, неспадання) важливості характеристики, яка цікавить організаторів експертизи.

Під ***ранжуванням*** розуміється процес визначення ***рангів***, під якими, в свою чергу, розуміються відносні кількісні оцінки ступенів відмінностей за якісними ознаками (наприклад, розташування факторів у порядку їх суттєвості, значимості в даному дослідницькому контексті).

Іншими словами, під ***ранжуванням*** розуміють розташування досліджуваних факторів у порядку їх істотності або в порядку рангів, поставлених у відповідність кожному фактору.

Отже, ранжування визначаються та вивчаються за допомогою рангів, які за своєю сутністю являють собою номери (об’єкту експертизи) у впорядкованому (ранжируваному) ряді.

Формально ранги виражаються числами 1, 2, 3, ..., але при цьому дуже важливим є те, що над цими числами не можна проводити звичні арифметичні операції.

Наприклад, хоча $1+2=3$*, не можна стверджувати, що для об'єкта, що стоїть на третьому місці в упорядкуванні (в іншій термінології – ранжуванні), важливість характеристики дорівнює сумі важливостей об'єктів з рангами* 1 *та* 2.

Так, наприклад, розглядаючи оцінки досягнень спортсменів, можна поставити питання: чи можна сказати, що спортсмен, який посів третє місце, досяг того ж результату, що й спортсмени, які посіли перше і друге місця, разом узяті?

Тому очевидно, що для аналізу подібних якісних даних необхідна не звичайна арифметика, а підхід, що дає базу для розробки, вивчення та застосування конкретних методів розрахунку. Одним із таких підходів виступає підхід, в основі якого лежить методологія ранжирування.

Ранжування застосовується у випадках, коли є неможливою або недоцільною безпосередня оцінка.

При цьому ранжування об'єктів містить лише інформацію про те, який з об'єктів є кращим, та не містить інформацію про те, наскільки або у скільки разів один об'єкт переважає інший.

Розглянемо більш детально процедуру ранжування.

Нехай експерту пред'являється набір альтернатив (факторів), які підлягають оцінюванню, і пропонується впорядкувати їх за уподобаннями та приписати їм числа натурального ряду – ранги. Найкраща альтернатива (фактор) отримує ранг, що дорівнює 1, наступна за нею альтернатива (фактор) – ранг, що дорівнює 2 і т.д.

В такій постановці формалізуємо процес ранжування (тобто розташування факторів у порядку їх суттєвості) факторів x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ранжируваний ряд може будуватися двома способами:

1) на перше місце ставиться найсуттєвіший фактор, слідом за ним менш суттєвий фактор, але найважливіший з решти, і т.д.

   Отриманий таким чином ранжируваний ряд має вигляд

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, \qquad (11)$$

   де:

   i_1 – номер найсуттєвішого фактора,

   i_2 – номер менш суттєвого фактора,

   $\ldots,$

   i_n – номер найбільш несуттєвого фактора в цьому ряді.

2) кожному фактору x_i ставиться у відповідність деяке число – його ранг k_i, тобто номер фактора в ранжируваному ряді (11):

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n. \end{matrix} \qquad (12)$$

   Очевидно, що перший ранг ($k_i = 1$) має фактор x_i, який найбільш впливає на реалізацію мети на об'єкті дослідження. Другий і наступні ранги (до $k_i = 2$ і т.д.) ставляться у порядку спадання їх суттєвості (важливості).

   Наприклад, якщо ранги (12) виявилися такими, що відповідають представленню

$$\begin{aligned} x_i &= x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, \\ k_i &= 3,\ \ 1,\ \ 5,\ \ 4,\ \ 2, \end{aligned} \tag{13}$$

то ранжируваний ряд має вигляд x_2, x_5, x_1, x_4, x_3.

Дійсно, з (13) видно, що перший ранг ($k_i = 1$) має другий фактор x_2, другий ранг ($k_i = 2$) – п'ятий фактор і т.д.

Тепер, якщо доведеться створювати, наприклад, математичну модель з 3 факторами ($n = 3$), вибір істотних чинників з (13) очевидний. Це x_2, x_5, x_1. Четвертим і третім факторами при цьому нехтуємо, причому очевидно, що збиток від цього рішення буде мінімальним, оскільки відкинуто найбільш несуттєві фактори.

<u>Зауваження</u>: при описі ранжируваних рядів застосовуються:

– ***відношення переважності*** ($\succ$), за яким $x_q \succ x_s$ означає, що фактор x_q є більш переважним, ніж фактор x_s. Наприклад, ранжируваний ряд x_2, x_5, x_1, x_4, x_3 з різними за своєю важливістю факторами буде мати вигляд $x_2 \succ x_5 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$;

– ***відношення еквівалентності*** ($\sim$), за яким $x_q \sim x_s$ означає, що фактор x_q є еквівалентним (з таким самим ступенем важливості) фактору x_s. Наприклад, ранжируваний ряд x_2, x_5, x_1, x_4, x_3 у випадку еквівалентності факторів x_1 та x_4 буде мати вигляд $x_2 \succ x_5 \succ x_1 \sim x_4 \succ x_3$.

Задача побудови рангового ряду (11) або еквівалентна до неї задача визначення рангів (12) вирішується експертами та зводиться до організації експертного опитування й обробки результатів цього опитування з тим, щоб отримати шукані ранги та оцінити їх достовірність, тобто визначити узгодженість суджень експертів.

2 Методологія експертного оцінювання за методом безпосереднього ранжирування та методом парних порівнянь. Визначення узгодженості суджень експертів

Найчастіше на практиці застосовують **<u>наступні методи експертного ранжування</u>**:

1. <u>безпосереднього ранжирування</u> (в даному методі експерти відразу привласнюють ранги факторам, які їм представлені для ранжирування);
2. <u>парних порівнянь</u> (в даному методі використовується парне порівняння факторів, яке спрощує задачу експерту, але потребує подальшого оброблення результатів для отримання ранжируваного ряду).

3 Сутність та методологія експертного оцінювання за методом безпосереднього ранжирування. Визначення узгодженості суджень експертів

Нехай N експертів ранжують n факторів $x_1, \dots, x_n$.

Кожному фактору кожен експерт присвоює ранг – число від 1 до n. Так, i-му фактору (x_i, $i = \overline{1, n}$) j-й експерт (E_j, $j = \overline{1, N}$) присвоює ранг k_{ij}.

В результаті складається ***матриця*** $K = (k_{ij})$ ***рангових суджень експертів*** виду

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_N \end{array} & \left\| \begin{array}{cccc} k_{11} & k_{21} & \dots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \dots & k_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{1N} & k_{2N} & \dots & k_{nN} \end{array} \right\| \end{array}, \tag{14}$$

де k_{ij} – ранг i-го фактору ($i = \overline{1, n}$), визначений j-м експертом ($j = \overline{1, N}$); номери рядків відповідають номерам експертів, а номери стовпців – номерам факторів. Це означає, що j-й рядок являє собою думку j-го експерта про усі фактори, а i-й стовпець – думка усіх експертів з приводу i-го фактора.

При призначенні рангів експертами потрібно дотримуватися наступних умов:

1) сума рангів, призначених всім факторам кожним експертом, має бути однаковою:
$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, N;$$
2) якщо експерт якийсь з q факторів вважає еквівалентними (однаковими за важливістю), то він надає їм один й той самий ранг, який дорівнює середньому арифметичному з q цілих рангів, таких, які б були отримані за умови, що експерту вдалося їх проранжувати.

Наприклад, якщо для трьох факторів x_1, x_2, x_3 *з різною важливістю* ($x_1 \succ x_2 \succ x_3$) *встановлено відповідні ранги* 1; 2; 3, *то, у випадку, якщо визначено, що* x_1, x_2 *є еквівалентними* ($x_1 \sim x_2$) *та мають більшу важливість (є більш переважними) за* x_3, *то ранжируваний ряд матиме вигляд* $x_1 \sim x_2 \succ x_3$, *а ранги будуть наступними:* 1,5; 1,5; 3.

Якщо

$x_3 \sim$	$x_1 \succ$	x_2	
1	2	3	ранги при умові врахування суто переважності
1,5	1,5	3	ранги при умові врахування еквівалентності

то, відповідно, ранги будуть наступними: 1,5; 1,5; 3, *а в матрицю рангів* *записується наступна* послідовність *рангів:* 1,5; 3; 1,5 – *<u>значення рангів заносяться відповідно розташуванню факторів</u>* x_1, x_2, x_3 *у матриці.*

Для остаточного визначення шуканих рангів слід обчислити середні ранги кожного *i*-го фактора:

$$\bar{k}_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij}\,, \quad i = \overline{1,n}\,,$$

де на перше місце ставиться фактор з мінімальним середнім рангом

$$\bar{k}_l = \min_{i=1,\ldots,n} \{\bar{k}_i\},$$

тобто фактор x_l, на друге місце – фактор, що має мінімальний з решти середній ранг, і т.д.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваний ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу з *N* експертів. В такому випадку буде отримане ***ітогове (результуюче) ранжування***.

Зауважимо, що, оскільки в процесі ранжування досліджуваних факторів кожним експертом, що входить до експертної групи, встановлюваний ранг присвоюється самостійно, а, отже, можливим є вплив суб'єктивного фактору експерту, виникає необхідність обробки цих даних з метою визначення ступеня довіри ОПР отримуваному ітоговому ранжуванню, в якості міри якого виступає ***узгодженість суджень експертів***.

Ця оцінка є необхідною, в першу чергу, тому, що думки експертів можуть сильно розходитися за оцінюваними параметрами. Неузгоджене ранжування призводить до того, що дані коефіцієнти будуть статистично недостовірними.

В такому формулюванні узгодженість ранжування, здійсненого експертами, необхідно визначати для підтвердження правильності гіпотези про те, що експерти виробляють відносно точні вимірювання, що дозволяє формувати різні угруповання в експертних групах, які обумовлюються багато в чому людськими факторами, насамперед такими, як відмінність поглядів, концепцій, різними науковими школами, характером професійної діяльності тощо.

<u>**Узгодженість суджень експертів**</u> визначається за допомогою *коефіцієнта конкордації* (*критерію узгодженості*) $0 \le W \le 1$:

$$W = \frac{D(\bar{k})}{D_{\max}} = \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{k}_i - \frac{n+1}{2}\right)^2,$$

де:

$D(\bar{k})$ – сумарне квадратичне відхилення від середнього значення для кожного середнього рангу факторів:

$$D(\bar{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{k}_i - M(\bar{k})\right)^2;$$

$M(\bar{k})$ – середнє арифметичне сум рангів оцінок, одержаних всіма факторами:

$$M(\bar{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{n+1}{2};$$

$D_{\max}$ – сумарне квадратичне відхилення від середнього значення для середніх рангів факторів при найкращій узгодженості експертів:

$$D_{\max} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Коефіцієнт конкордації може набувати значень від 0 до 1: $0 \le W \le 1$.

При $W = 0$ судження експертів повністю розходяться.

При $W = 1$ судження експертів висловлюються одноголосно (повністю співпадають), що на практиці являє собою неможливий випадок.

Якщо значення коефіцієнта конкордації є невеликим ($0 \le W < 0{,}75$ – для технічних об’єктів; $0 \le W < 0{,}5$ – для економічних об’єктів; $0 \le W < 0{,}4$ – для екологічних й соціальних об’єктів), то це означає, що ступінь довіри є достатньо низькою, а узгодженість думок експертів – досить слабкою. Причиною низької узгодженості експертів може бути або дійсно відсутня спільність думок експертів, або ситуація, коли серед експертів існують групи з високою узгодженістю думок, однак спільні думки їх при цьому є протилежними. В таких випадках для підвищення ступінь довіри можна застосувати наступні кроки:

1) надати експертам досліджувані фактори для повторного ранжування;
2) змінити кількість експертів, що входять в експертну групу;
3) замінити групу експертів.

Сформулюємо **основні переваги та недоліки методу безпосереднього ранжування**, які формують особливості та умови використання методу.

До *недоліків методу* слід віднести наступні:

1) обмеженість кількості факторів, які підлягають ранжуванню. Їх кількість може становити не більше 20. Пов’язано це виключно із можливостями експертів. По суті це призводить до виникнення неточностей (похибок) при використанні методу при великому числі обробок, оскільки зі збільшенням кількості досліджуваних факторів експертам стає важко присвоїти об'єктивні рангові оцінки;

2) високий вплив суб’єктивного фактору експерту (оскільки ранжируваний ряд не є результатом кількісних оцінок факторів, а є результатом суб’єктивної думки відповідного експерту);

3) залишається відкритим питання про те, наскільки далеко за значимістю знаходяться досліджувані об'єкти один від одного.

До *переваг методу* відносяться наступні:

1) низька трудомісткість методу при здійснюванні математичних обчислень;

2) зручність для програмування та потреба в мінімальному обсязі використовуваних ресурсів обчислювальної техніки;

3) низький рівень використовуваних ресурсів часу для проведення досліджень.

Розглянемо декілька прикладів з використання методу безпосереднього ранжування.

<u>Приклад 1.</u> Нехай маємо судження трьох експертів ($N = 3$), представлених відповідними ранжируваними рядами виду:

– ряд 1-го експерту E_1: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$;
– ряд 2-го експерту E_2: $x_2 \succ x_1 \succ x_3$;
– ряд 3-го експерту E_3: $x_3 \succ x_1 \succ x_2$

Необхідно за наданими експертами рядами ранжування побудувати матрицю рангових суджень експертів, за якою визначити ітогове ранжування та ступінь узгодженості думок експертів. Зробити відповідні висновки.

Розв'язання:

Побудуємо матрицю рангових суджень експертів. Для цього поставимо у відповідність кожному *i*-му фактору ранг, який відповідає рангу у ранжированому ряді, наданими відповідними експертами.

Вважаючи, що ранг *i*-го фактору відповідає номеру цього (*i*-го) фактору у ранжированому ряді, наданим відповідним *j*-м експертом, та враховуючи відношення переважності (та/або еквівалентності) факторів вихідних ранжированих рядів, отримаємо матрицю рангових суджень $K = (k_{ij})$ з відповідними рангами k_{ij}.

Так, за рядом $x_1 \succ x_2 \succ x_3$ 1-го експерту E_1 маємо наступні ранги: $1; 2; 3$; за рядом $x_2 \succ x_1 \succ x_3$ 2-го експерту E_2 – ранги $2; 1; 3$; за рядом $x_3 \succ x_1 \succ x_2$ 3-го експерту E_3 – ранги $2; 3; 1$.

Отже, матриця суджень представляється матрицею виду

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix} & \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{Vmatrix} \end{array}.$$

Визначимо середні ранги за співвідношенням $\bar{k}_i = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{j=1}^{N} k_{ij}$, $i = \overline{1, n}$:

$$\bar{k}_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} k_{1j} = \frac{1}{3}(k_{11} + k_{12} + k_{13}) = \frac{1}{3}(1 + 2 + 2) = \frac{5}{3},$$

$$\bar{k}_2 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} k_{2j} = \frac{1}{3}(k_{21} + k_{22} + k_{23}) = \frac{1}{3}(2 + 1 + 3) = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\bar{k}_3 = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} k_{3j} = \frac{1}{3}(k_{31} + k_{32} + k_{33}) = \frac{1}{3}(3 + 3 + 1) = \frac{7}{3},$$

Розраховані середні ранги $\bar{k}_1 = 5/3$, $\bar{k}_2 = 2$, $\bar{k}_3 = 7/3$ дають можливість побудувати ранжируваний ряд. Для цього визначимо з трьох середніх рангів $\bar{k}_1 = 5/3$, $\bar{k}_2 = 2$, $\bar{k}_3 = 7/3$ мінімальний ранг за співвідношенням $\bar{k}_l = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \{\bar{k}_i\}$:

$$\bar{k}_1 = \min \left\{\frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}\right\} = \frac{5}{3}.$$

Далі, фактор, що відповідає мінімальному середньому рангу $\bar{k}_1 = \frac{5}{3}$, поставимо на перше місце в ранжируваному ряді.

На друге місце поставиться фактор, значення середнього рангу якого буде мінімальним з решти двох, тобто $\bar{k}_2 = \min \left\{\frac{6}{3}, \frac{7}{3}\right\} = \frac{6}{3}$.

На останнє місце поставимо фактор, значення середнього рангу якого залишилося, тобто $\bar{k}_3 = \frac{7}{3}$.

Отже, отримуємо ранжируваний ряд виду $x_1 \succ x_2 \succ x_3$.

Визначимо узгодженість суджень експертів:

$$W = \frac{D(\bar{k})}{D_{\max}} = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\bar{k}_i - \frac{n+1}{2}\right)^2}{\frac{n^2-1}{12}} = \frac{\frac{1}{3}\left((\bar{k}_1-2)^2 + (\bar{k}_2-2)^2 + (\bar{k}_3-2)^2\right)}{\frac{8}{12}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{5}{3}-\frac{6}{3}\right)^2 + (2-2)^2 + \left(\frac{7}{3}-\frac{6}{3}\right)^2\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{27}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11.$$

Оскільки $0 \le W = 0{,}1 \le 0{,}4$, то можна зробити висновок, що судження експертів виявились дуже погано узгодженими. Тим не менш, ітогове ранжування виявилось правильним. Це вийшло за рахунок усереднення суджень експертів, котре виключило їх індивідуальні особливості, а разом з ними і помилки.

Приклад 2. За завданням керівництва підприємства аналізувалися вісім проектів, запропонованих для включення до плану стратегічного розвитку підприємства. Вони позначені: *A, B, C, D, E, F, G, H*. Усі проекти було направлено 12 експертам, включеним до експертної групи, організованої за рішенням правління підприємства. У наведеній нижче табл. 2 представлено ранги восьми проектів, які їм було присвоєно кожним з 12 експертів.

Таблиця 2 – Ранги 8 проектів за рівнем привабливості
для включення до плану стратегічного розвитку підприємства

№ експерта	**Досліджувані проекти**							
	A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***

1	5	3	1	2	8	4	6	7
2	5	4	3	1	8	2	6	7
3	1	7	5	4	8	2	3	6
4	6	4	2,5	2,5	8	1	7	5
5	8	2	4	6	3	5	1	7
6	5	6	4	3	2	1	7	8
7	6	1	2	3	5	4	8	7
8	5	1	3	2	7	4	6	8
9	6	1	3	2	5	4	7	8
10	5	3	2	1	8	4	6	7
11	7	1	3	2	6	4	5	8
12	1	6	5	3	8	4	2	7

За табл. 2 ранги присвоювалися відповідно до уявлень експертів про доцільність включення проектів у стратегічний план підприємства. Так, експерт надавав ранг 1 найкращому проекту, який обов'язково треба реалізувати; ранг 2 отримував від експерта другий за привабливістю проект, ... , нарешті, ранг 8 – найбільш сумнівний проект, який реалізовувати варто лише в останню чергу.

Зауваження: Експерт №4 вважає, що проекти *C* та *D* є рівноцінними, але поступаються лише одному проекту – проекту *F*. Тому проекти *C* й *D* мали б стояти на другому і третьому місцях та отримати бали 2 й 3. Оскільки вони є рівноцінними, то отримують середній бал (2+3)/2 = 5/2 = 2,5.

Аналізуючи представлені в табл. 2 результати роботи експертів, члени аналітичного підрозділу робочої групи, які аналізували відповіді експертів за завданням правління підприємства, змушені констатувати, що повної згоди між експертами немає, тому дані, наведені в табл. 2, слід піддати ретельнішому математичному аналізу, а, отже, для отримання групового судження потрібне застосування методу безпосереднього ранжування.

Для цього підраховано суму рангів, присвоєних проектам (див. табл. 3). Потім ця сума була розділена на кількість експертів, в результаті розрахований середній ранг.

За отриманими середніми рангами надалі будується ітогове ранжування, виходячи з принципу – чим меншим є середній ранг, тим кращим є проект.

Так, найменший середній ранг, що дорівнює 2,625, у проекту *D,* – отже, у підсумковому ранжуванні він отримує ранг 1. Наступна за величиною сума, що дорівнює 3,125, у проекту *C,* – і він отримує підсумковий ранг 2.

Проекти *B* та *F* мають однакові суми (дорівнюючі 3,25), отже, з точки зору експертів вони є рівноцінними (при наведеному способі зведення разом суджень експертів), а тому мають стояти на 3 й 4 місцях та отримують середній бал (3 +4) /2 = 3,5. Подальші результати розрахунків наведено у табл.3.

Таблиця 3 – Результати розрахунків для рангів, наведених в табл. 2

Обчислювальний	**Досліджувані проекти**

показник	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Сума рангів, $\sum_{j=1}^{N} k_{ij}$	60	39	37,5	31,5	76	39	64	85
Середнє рангів, $\bar{k}_i$	5	3,25	3,125	2,625	6,333	3,25	5,333	7,083
Ітоговий ранг	5	3,5	2	1	7	3,5	6	8

Отже, ітогове ранжування має вигляд

$$D \succ C \succ B \sim F \succ A \succ G \succ E \succ H \,.$$

Найбільш привабливим проектом, таким чином, є проект *D*, найменш привабливим проектом визначено проект *H*. Оскільки проекти *B* та *F* отримали однакову суму балів, то це означає, що вони є еквівалентними.

Надалі оцінюється узгодженість суджень експертів за використанням коефіцієнту конкордації (провести самостійно).

4. Сутність та методологія експертного оцінювання за методом парних порівнянь. Визначення узгодженості суджень експертів

Серед методів експертної оцінки, застосовуваних для одержання коефіцієнтів відносної важливості факторів (параметрів, ознак, напряму розвитку і т. ін.), метод парних порівнянь вважається дуже ефективним, оскільки дозволяє визначити відносну важливість факторів, коли безпосереднє ранжування стає важким.

Згідно з цим методом усі фактори порівнюються між собою послідовно, причому кожна наступна оцінка не зв'язана з попередньою.

Нехай *N* експертів ранжирують *n* факторів $x_1, \ldots, x_n$ та отримують ранжирувані ряди.

> *<u>Наприклад</u>, якщо є 3 експерти* E_j $(j = 1,2,3)$, *яким необхідно проранжирувати 3 фактори* x_i $(i = 1,2,3)$, *то отримані ранжирувані ряди можуть мати наступний вигляд:*
>
> – *ряд 1-го експерту* E_1: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$;
> – *ряд 2-го експерту* E_2: $x_2 \succ x_1 \succ x_3$;
> – *ряд 3-го експерту* E_3: $x_2 \succ x_3 \succ x_1$.

Необхідно визначити ітогове ранжування, яке буде узагальнювати судження всіх експертів.

Для цього здійснюються наступні **<u>основні етапи реалізації методу парних порівнянь</u>**:

1) складаються матриці парних порівнянь для кожного експерта;
2) визначається матриця середніх парних порівнянь;

3) визначається середнє значення середнього парного порівняння i-го фактора з l-м для кожного фактору;

4) визначається ітогове ранжування факторів.

Розглянемо кожний з наведених етапів реалізації методу докладно.

1 етап: ***Складання матриці парних порівнянь для кожного експерта*.**

На цьому етапі здійснюється полегшення процедури порівняння наявних факторів, для чого звичайно використовується спеціальна матриця (таблиця) парних порівнянь (табл. 4), в якій фактори (параметри, ознаки, напрями розвитку) розміщуються за горизонталями та за вертикалями (у верхньому рядку та в лівому крайньому стовпці).

Таблиця 4

Фактори	x_1	x_2	…	x_l	…	x_n
x_1	$x_1 : x_1$	$x_1 : x_2$	…	$x_1 : x_l$	…	$x_1 : x_n$
x_2	$x_2 : x_1$	$x_2 : x_2$	…	$x_2 : x_l$	…	$x_2 : x_n$
…	…	…	…	…	…	…
x_i	$x_i : x_1$	$x_i : x_2$	…	$x_i : x_l$	…	$x_i : x_n$
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$x_n : x_1$	$x_n : x_2$	…	$x_n : x_l$	…	$x_n : x_n$

За даною таблицею при використанні методу парних порівнянь попарно порівнюються фактори x_i з x_l з метою визначення у кожній парі найбільш важливого (значущого) фактору. В результаті таких попарних порівнянь факторів x_i з x_l заповнюється наступна таблиця (матриця), у комірки якої вписуються результати (оцінки) q_{il} здійснених порівнянь.

При цьому ранжування в такій постановці відбувається за правилом: якщо фактор i (у рядку) є більш значущим, ніж фактор l (у стовпці), то елементу q_{il} (у комірці il) приписується «+1», в противному випадку – ставиться
«–1». У комірках головної діагоналі (q_{il}, $i = l$) проставляються «0», оскільки порівнювальні елементи на головній діагоналі є еквівалентними самі до себе.

Отже, досліднику пропонується попарно проранжирувати фактори, що формально означає, що кожній парі факторів x_i та x_l поставлено у відповідність число

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \succ x_l \, ; \\ 0, & \text{якщо } x_i \sim x_l \, ; \\ -1, & \text{якщо } x_i \prec x_l \, . \end{cases}$$

При цьому $q_{il} = -q_{li}$.

Таким чином, судження кожного *j*-го експерту представляється у вигляді матриці парних порівнянь виду

$$Q^j = \left\| q_{il}^j \right\|, \quad i, l = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

де: q_{il}^j визначає оцінки q_{il}, отримані за судженням j-го експерта;

кількість матриць Q^j відповідає кількості експертів, тобто N.

<u>2 етап:</u> ***Визначення матриці середніх парних порівнянь.***

На даному етапі отримані на попередньому етапі матриці $Q^j = \left\| q_{il}^j \right\|$ для усереднення суджень експертів зводяться до однієї загальної матриці – матриці середніх парних порівнянь розмірності $n \times n$ виду

$$\overline{Q} = \left\| \overline{q}_{il} \right\|,$$

де $\overline{q}_{il}$ – середнє парне порівняння *i*-го фактора з *l*-м, отримане від усіх N експертів:

$$\overline{q}_{il} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} q_{il}^j, \quad i, l = 1, 2, \ldots, n.$$

<u>3 етап:</u> ***Визначення середніх рангів за кожним і-м фактором.***

На даному етапі для остаточного визначення шуканих рангів обчислюються середні ранги за кожним *i*-м фактором

$$\overline{q}_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \overline{q}_{il}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Такі середні ранги $\overline{q}_i$ виступають в якості *показників узагальненого судження щодо важливості факторів*: чим більшою є сума *i*-го рядка, тим більш важливе значення має *i*-й фактор.

<u>4 етап:</u> ***Визначення ітогового ранжування факторів за <u>Правилом 1</u>.***

На даному етапі за обчисленими середніми рангами $\overline{q}_i$ будується ранжируваний ряд, в якому на перше місце ставиться фактор з максимальним середнім рангом

$$\overline{q}_v = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \overline{q}_i \right\},$$

тобто фактор x_v (цей фактор є найсуттєвішим), на друге місце ставиться фактор, який має максимальний з решти середній ранг, і т.д.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваний ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу з N експертів. В такому випадку буде отримане ***ітогове (результуюче) ранжування***.

З метою оцінки ступеня довіри ОПР отримуваному ітоговому ранжуванню визначимо ***узгодженість суджень експертів***, яка встановлюється за коефіцієнтом конкордації $0 \le W \le 1$, який визначається виразом

$$W = \frac{D(\bar{q})}{D_{\max}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} \left(\bar{q}_{il}\right)^2 ,$$

де

$$D(\bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} \left(\bar{q}_{il}\right)^2 ;$$

$$D_{\max} = 1.$$

При $W = 1$ судження експертів є повністю узгодженими, а при $W = 0$ вони суперечать один одному. Якщо значення коефіцієнта конкордації є невеликим ($0 \le W < 0{,}75$ – для технічних об'єктів; $0 \le W < 0{,}5$ – для економічних об'єктів; $0 \le W < 0{,}4$ – для екологічних й соціальних об'єктів), то це означає, що ступінь довіри є достатньо низькою, а узгодженість думок експертів – досить слабкою.

Сформулюємо **основні переваги та недоліки методу парних порівнянь**, які формують особливості та умови використання методу.

До *недоліків методу* слід віднести наступні:

1) має місце невеликий вплив суб'єктивного фактору експерту (оскільки ранжируваний ряд не є результатом кількісних оцінок факторів, а є результатом суб'єктивної думки відповідного експерту);

2) залишається відкритим питання про те, наскільки далеко за значимістю знаходяться досліджувані фактори один від одного.

До *переваг методу* відносяться наступні:

1) немає обмеженості кількості факторів, які підлягають ранжуванню;

2) експерт у процесі експертизи зосереджує свою увагу не на всіх факторах відразу, а тільки на двох, які порівнюються в даний момент (це полегшує роботу і сприяє підвищенню якості експертизи).

3) здійснюється велика кількість порівнянь кожного фактору з іншими, за рахунок чого підвищується точність та відкривається можливість вивчення великої кількості ознак);

4) метод дозволяє одержати не тільки середню оцінку фактора, надану кожним експертом, а й дисперсію цієї оцінки, що дає можливість проведення більш глибокого статистичного аналізу;

5) допускається вимірювання нерівномірно змінюваних важливостей показників;

Розглянемо приклад з використання методу парних порівнянь.

<u>Приклад 3.</u> Нехай маємо судження трьох експертів ($N=3$), представлених відповідними ранжируваними рядами факторів x_i $(i=1,2,3)$:

– ряд 1-го експерту E_1: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$;
– ряд 2-го експерту E_2: $x_2 \succ x_1 \succ x_3$;
– ряд 3-го експерту E_3: $x_2 \succ x_3 \succ x_1$.

Необхідно з використанням методу парних порівнянь визначити ітогове ранжування, яке буде узагальнювати судження всіх експертів. Оцінити ступінь узгодженості думок експертів.

Розв'язання:

Побудуємо для кожного експерта матриці парних порівнянь виду

$$Q^j = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_l & \dots & x_n \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1l} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2l} & \cdots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{i1} & q_{i2} & \cdots & q_{il} & \cdots & q_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nl} & \cdots & q_{nn} \end{array} \right\| \end{array}, \quad i,l=\overline{1,n}, \;\; j=\overline{1,N}.$$

Використовуючи ранжируваний ряд 1-го експерту проводимо попарне порівняння кожного фактору x_i (елементи рядку) з кожним фактором x_l (елементи стовпця). В залежності від того, який фактор x_i переважатиме (не переважатиме, буде еквівалентним) фактор x_l, у матриці порівнянь Q^1 для цього експерту на перетині відповідних рядків з відповідними стовпцями проставимо числове значення q_{il} за наступним правилом:

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \succ x_l \;; \\ 0, & \text{якщо } x_i \sim x_l \;; \\ -1, & \text{якщо } x_i \prec x_l \;. \end{cases}$$

$$q_{il} = -q_{li}\,.$$

Так, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_1 (з 1 стовпця) маємо, що $x_1 \sim x_1$, а, отже,

$q_{11}=0$. Далі, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_2 (з 2 стовпця) маємо (з ранжируваного ряду E_1), що $x_1 \succ x_2$, а, отже, $q_{12}=1$. Аналогічно, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_3 (з 3 стовпця) маємо (з ранжируваного ряду E_1), що $x_1 \succ x_3$, а, отже, $q_{13}=1$. Отже, таким чином, заповнено 1 рядок матриці Q^1. Далі, діючи аналогічним чином, заповнюємо 2 й 3 рядки матриці. В результаті, для 1-го експерта отримуємо

$$Q^1 = \left\| q_{il}^1 \right\| = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \end{array},$$

верхній індекс в q_{il}^1 означає, що елементи q_{il} відносяться саме до матриці Q^1.

Аналогічно, для 2-го та 3-го експертів маємо:

$$Q^2 = \left\| q_{il}^2 \right\| = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}, \quad Q^3 = \left\| q_{il}^3 \right\| = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Далі будуємо матрицю $\overline{Q} = \left\| \overline{q}_{il} \right\|$ середніх парних порівнянь $\overline{q}_{il} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} q_{il}^j$, які являють собою середнє арифметичне відповідних (з однаковими індексами) елементів матриць Q^j, $j=\overline{1,N}$.

Для даного прикладу, елементи 1 рядка матриці $\overline{Q}$ визначаються наступним чином:

$$\overline{q}_{11} = \frac{1}{3}\left(q_{11}^1 + q_{11}^2 + q_{11}^3\right) = \frac{1}{3}(0+0+0) = 0,$$
$$\overline{q}_{12} = \frac{1}{3}\left(q_{12}^1 + q_{12}^2 + q_{12}^3\right) = \frac{1}{3}(1+(-1)+1) = \frac{1}{3},$$
$$\overline{q}_{13} = \frac{1}{3}\left(q_{13}^1 + q_{13}^2 + q_{13}^3\right) = \frac{1}{3}(1+1+(-1)) = \frac{1}{3}.$$

Діючи аналогічно, отримаємо матрицю середніх парних порівнянь

$$\overline{Q} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{array} \right\|.$$

Далі визначимо середні ранги за кожним i-м фактором за співвідношенням

$$\overline{q}_i = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{q}_{il}, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Маємо:

$$\bar{q}_1 = \frac{1}{3}(\bar{q}_{11} + \bar{q}_{12} + \bar{q}_{13}) = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9},$$

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{3}(\bar{q}_{21} + \bar{q}_{22} + \bar{q}_{23}) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}\right) = 0,$$

$$\bar{q}_3 = \frac{1}{3}(\bar{q}_{31} + \bar{q}_{32} + \bar{q}_{33}) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0\right) = -\frac{2}{9}.$$

Розраховані середні ранги $\bar{q}_1 = 2/9$, $\bar{q}_2 = 0$, $\bar{q}_3 = -2/9$ дають можливість побудувати ітоговий ранжируваний ряд. Для цього визначимо з трьох середніх рангів $\bar{q}_1 = 2/9$, $\bar{q}_2 = 0$, $\bar{q}_3 = -2/9$ максимальний ранг за співвідношенням $\bar{q}_v = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{\bar{q}_i\}$:

$$\bar{q}_1 = \max\left\{\frac{2}{9}, 0, -\frac{2}{9}\right\} = \frac{2}{9}.$$

Далі, фактор, що відповідає максимальному середньому рангу $\bar{q}_1 = 2/9$, поставимо на перше місце в ранжируваному ряді.

На друге місце поставиться фактор, значення середнього рангу якого буде максимальним з решти двох, тобто $\bar{q}_2 = \max\left\{0, -\frac{2}{9}\right\} = 0$.

На останнє місце поставимо фактор, значення середнього рангу якого залишилося, тобто $\bar{q}_3 = -2/9$.

Отже, отримуємо ітоговий ранжируваний ряд: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$.

Визначимо узгодженість суджень експертів:

$$W = \frac{D(\bar{q})}{D_{\max}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} (\bar{q}_{il})^2 = \frac{1}{3(3-1)} \sum_{i,l=1}^{3} (\bar{q}_{il})^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{9} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11.$$

Оскільки $0 \le W = 0{,}1 \le 0{,}4$, то можна зробити висновок, що судження експертів виявились дуже погано узгодженими. Тим не менш, ітогове ранжування виявилось правильним. Це вийшло за рахунок усереднення суджень експертів, котре виключило їх індивідуальні особливості, а разом з ними і помилки.

Існує друге правило отримання ітогового ранжування. Розглянемо його детально.

Визначення ітогового ранжування факторів за <u>Правилом 2</u>.

Кожна перевага q_{il} порівнюється з деяким обраним порогом δ $(0 < \delta < 1)$. В результаті виходить наступне перетворення матриці середніх переваг $\bar{Q}$ в контрастну матрицю, елементами якої є:

$$\varphi_{il} = \varphi(q_{il}), \quad i \neq l = 1, \dots, n\,,$$

де:

$$\varphi(q) = \begin{cases} -1, \text{якщо } q \leq -\delta. \\ 0, \text{якщо } |q| < \delta. \\ 1, \text{якщо } q \geq \delta. \end{cases}$$

За контрасною матрицею будується ранжируваний ряд. Після цього визначається значення оптимального порога δ на «порозі протиріч», тобто таке значення δ*, невелике зміненя якого призводить до протиріччя в ранжируваному ряду (правила транзитивності не виконуються). А ранжируваний ряд отриманий при значенні δ* і є шуканим ітоговим рядом.

<u>Приклад 4.</u> Нехай матриця середніх переваг $\overline{Q}$ має вигляд, приведений на рис.1, *а*. Нехай $\delta = 0{,}7$. Тоді контрастна матриця дає наступний ряд ранжирування:

$$x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1 \qquad (*)$$

Нулі в цій матриці означають не тільки еквівалентність, але й неяскраво виражену перевагу. Через це отримане ранжирування є несуперечливим. Згідно з алгоритмом, понизимо поріг.

При $\delta = 0{,}5$ контрастна матриця (*в*) вже має суперечення, оскільки мінімальний поріг, при якому не виходить суперечень, дорівнює $\delta^* = 0{,}52$ (див. рис. 1, *г*), що приводе до ранжируваного ряду (*), тобто, обравши поріг $\delta = 0{,}52$ та 0,7, отримаємо той самий ряд (*).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	-0,7	-0,44	-0,52	0	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1
x_2	0,7	0	-0,74	0,5	1	0	-1	0	1	0	-1	1	1	0	-1	0
x_3	0,44	0,74	0	-0,78	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1
x_4	0,52	-0,5	0,78	0	0	0	1	0	1	-1	1	0	1	0	1	0
	а)				**б)**				**в)**				**г)**			

Рис. 1. Матриця середніх переваг (а);
контрасні матриці при δ = 0,7 (б), δ = 0,5 (в) і δ* = 0,52 (г)

Застосування першого правила до цього прикладу дає результат, який є відмінним від (*). Це означає, що або $x_3 \sim x_2$, або для більш точного рішення необхідно отримати нові данні, які б дозволили вияснити, який з рядів ранжирування має місце у дійсності

Завдання до лабораторної роботи 2

1. На підставі отриманих від членів експертної підгрупи ранжирувань розглянутої множини альтернатив, використовуючи завдання для лабораторної роботи, визначити результуючий ряд ранжування, який буде відповідати усередненій оцінці колективу *N* експертів, використовуючи:
   - Метод безпосереднього ранжирування;
   - Метод парних порівнянь.
2. Розробити програмний продукт для обчислення результуючих ранжирувань на основі методів безпосереднього ранжирування і парних порівнянь, оцінивши коефіцієнт конкордації (узгодженості думки експертів).
3. Провести порівняльний аналіз знайдених результуючих ранжирувань і зробити висновки.
4. Оформити звіт.

.

<u>Варіанти завдань (номер варіанту відповідає номеру фамілії студента у списку в журналі академічної групи):</u>

1. $x_4 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_1$ $x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_1$ $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$	2. $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$ $x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4$ $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$ $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$	3. $x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_1$ $x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$
4. $x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_1$ $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$ $x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$	5. $x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$ $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_4 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_2$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	6. $x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$ $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$ $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$
7. $x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1$ $x_1 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$ $x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$	8. $x_1 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_3$ $x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1$ $x_4 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_2$ $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$	9. $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$ $x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1$

10. $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	11. $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	12. $x_4 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_1$ $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$
13. $x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	14. $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	15. $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$ $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$ $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$
16. $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$ $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	17. $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	18. $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$ $x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$ $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$
19. $x_3 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_1$ $x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$	20. $x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4$ $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$ $x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	21. $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ $x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4$ $x_3 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_1$
22. $x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	23. $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_2 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4$	24. $x_3 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_1$ $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$
25. $x_2 \succ x_4 \sim x_3 \succ x_1$ $x_1 \succ x_3 \sim x_2 \succ x_4$ $x_1 \sim x_2 \succ x_4 \sim x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	26. $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_1 \sim x_3 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$ $x_3 \sim x_1 \succ x_4 \sim x_2$	27. $x_4 \succ x_3 \succ x_2 \sim x_1$ $x_1 \sim x_3 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_1 \succ x_3 \sim x_4 \succ x_2$
28. $x_4 \sim x_2 \succ x_3 \succ x_1$ $x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_1$ $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \sim x_1$ $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$	29. $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$ $x_2 \sim x_1 \succ x_3 \succ x_4$ $x_1 \succ x_3 \sim x_4 \succ x_2$ $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$	30. $x_2 \succ x_3 \succ x_4 \sim x_2$ $x_3 \sim x_2 \succ x_1 \succ x_4$ $x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$
31. $x_2 \sim x_3 \succ x_4 \succ x_1$	32. $x_3 \succ x_2 \succ x_1 \succ x_4$	33. $x_3 \sim x_2 \succ x_1 \succ x_4$

$x_1 \succ x_3 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_3 \sim x_4 \succ x_2$ $x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$	$x_3 \sim x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_4 \succ x_3 \succ x_1 \sim x_2$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	$x_1 \succ x_3 \succ x_2 \sim x_4$ $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$ $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$
34. $x_4 \succ x_3 \succ x_2 \sim x_1$ $x_1 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_3$ $x_3 \sim x_1 \succ x_4 \succ x_2$ $x_2 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_3$	35. $x_1 \succ x_4 \succ x_2 \succ x_3$ $x_4 \succ x_3 \sim x_2 \succ x_1$ $x_4 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_2$ $x_1 \succ x_3 \sim x_4 \succ x_2$	36. $x_2 \sim x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_1 \succ x_3 \sim x_2 \succ x_4$ $x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_2$ $x_4 \sim x_3 \succ x_2 \succ x_1$
37. $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$ $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \sim x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \sim x_2$	38. $x_2 \sim x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_3 \succ x_1 \succ x_2 \succ x_4$ $x_1 \sim x_2 \succ x_4 \succ x_3$ $x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ x_2$	39. $x_4 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_2$ $x_3 \sim x_2 \succ x_1 \sim x_4$ $x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_1$ $x_3 \succ x_1 \sim x_2 \succ x_4$

Питання для самоконтролю

1. Що розуміється під експертним оцінюванням?
2. Що називається методом експертних оцінок? Що таке експертна оцінка?
3. Що таке ранг? Яким чином його визначають?
4. Сформулюйте поняття ранжування.
5. Які існують способи побудови ранжируваного ряду?
6. У чому полягає метод безпосереднього ранжирування?
7. Яким чином будується матриця рангових суджень експертів?
8. Як знайти ітогове ранжування методом безпосереднього ранжирування?
9. Охарактеризуйте основні етапи використання методу парних порівнянь.
10. Як будуються матриці парних порівнянь?
11. Як будується матриця середніх парних порівнянь?
12. Як знайти ітогове ранжування методом парних порівнянь?
13. В чому полягає сутність коефіцієнту конкордації та якими є його границі змінення?

Рекомендована література

1. Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навч. посіб. Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. 272 с.
2. Грабовецький Б. Є. Методи експертних оцінок : теорія, методологія, напрямки використання : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2010. 171 с.
3. Гнатієнко Г. М., Снитюк В. Є. Експертні технології прийняття рішень : монографія. Київ : ТОВ «Маклаут», 2008. 444 с.
4. Ярощук Л. Д. Інтелектуальні системи управління: курс лекцій до теми «Системи експертного оцінювання» розділу «Основи штучного інтелекту»

кредитного модуля «Інтелектуальні системи управління». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 40 с.

5. Новосад В. П., Селіверстов Р. Г., Артим І. І. Кількісні методи експертного оцінювання : наук.-метод. розробка. Київ : НАДУ, 2009. 36 с.

6. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2001. 170 с.

Лабораторна робота 3

Формалізація конфліктних ситуацій за допомогою теорії ігор. Розв'язання матричних ігор.

Короткі теоретичні відомості

Як відомо з попередньої лекції, будь-яка гра містить у собі **три елементи**: учасників гри – гравців, правила гри, оцінку результатів дій гравців:

$$\Gamma = < I,\ \{x\},\ \{H\} > = < \text{гравці, стратегії, виграші} >.$$

Таким чином, будь-яка гра передбачає наступне:

– *наявність деякого числа n осіб, які беруть у ній участь (гравців)*. За кількістю гравців ігри класифікуються на ігри двох осіб, трьох осіб тощо;

– *наявність правил гри*, які визначають можливі варіанти дій гравців, обсяг інформації кожної сторони про дії іншої, результат гри, до якого приводить відповідна послідовність ходів. У більшості ігор передбачається, що інтереси учасників піддаються кількісному опису, тобто результат гри (виграш) визначається певним числом;

– *наявність кінцевого виграшу (або програшу) кожного гравця*. Коли гра закінчується, кожен гравець отримує дохід p_i (якщо $p_i < 0$, то це означає, що гравець програв), що залежить від його поведінки та поведінки інших гравців.

Найбільш вивченим класом ігор є так звані ігри з нульовою сумою, коли у будь-якій партії має місце умова

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0,$$

виконання якої означає, що, якщо хтось виграє, то хтось обов'язково програє. Особливо це проявляється в іграх двох осіб з нульовою сумою, коли $p_1 + p_2 = 0$, тобто $p_2 = -p_1$ (інтереси гравців є суворо протилежними, оскільки виграш одного гравця є одночасно програшем іншого). Такі ігри називають *антагоністичними*.

Інші ігри – *з ненульовою сумою,* виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

Будь-яка гра складається з *партій*, які починаються та закінчуються, після чого гравцям виплачуються їх виграші.

У свою чергу кожна партія складається з *ходів*, які одночасно чи послідовно роблять гравці.

Опис гри як послідовності ходів зветься *позиційної форми гри*. Теорія ігор у позиційній формі розроблена дуже слабо.

Основний зміст сучасної теорії ігор – це так звана *матрична форма гри*. У цьому випадку вважається, що кожен гравець робить лише один хід, причому всі ходи робляться одночасно. Після цього кожному гравцеві виплачується виграш (або береться програш) в залежності від того, які ходи були зроблені ним та іншими гравцями.

Взагалі кажучи, гра в позиційній формі може бути зведена до гри в матричній формі, проте для реальних ігор це зведення є настільки складним, що практично є неможливим навіть для сучасних ЕОМ. Однак цілком можливо, що в майбутньому така інформація матиме і практичний зміст.

Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу

Кінцева парна гра двох осіб з нульовою сумою (**антагоністична гра двох осіб або двох коаліцій**) в матричній формі займає центральне місце у сучасній теорії ігор, оскільки теорія таких ігор розроблена майже остаточно.

Для такої гри характерним є те, що в ній виграш однієї сторони дорівнює програшу іншої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю.

Подібна ситуація є типовою у практичній діяльності ОПР, які щоденно приймають рішення за умов гострої конкуренції, неповноти інформації тощо. Основною метою розв'язування задач цього класу є розроблення рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій конфліктуючих сторін на основі застосування методичних підходів теорії ігор.

Розглянемо таку гру.

Нехай у грі беруть участь два гравці A та B з протилежними інтересами (виграш одного гравця дорівнює програшу іншого).

У розпорядженні гравця A є лише m можливих ходів $i = 1, 2, \ldots, m$ (m можливих стратегій $A_1, A_2, \ldots, A_m$); у розпорядженні гравця B (супротивника) є n можливих ходів $j = 1, 2, \ldots, n$ (n можливих стратегій $B_1, B_2, \ldots, B_n$). Натуральні числа m та n ніяким чином не пов'язані.

Можливі такі ходи (стратегії) гравців A та B називаються **чистими стратегіями**.

Обидва гравці роблять одночасно по одному ходу, після чого партія вважається закінченою.

Отже, парна гра складається із **двох ходів**:

1. гравець *A* робить хід *i* та обирає одну зі своїх можливих чистих стратегій $A_i \ (i = \overline{1,m})$;
2. гравець *B* робить хід *j* та обирає свою чисту стратегію із $B_j \ (j = \overline{1,n})$ при повному незнанні обраної стратегії гравцем *A*.

Введемо наступні позначення: $\varphi_1(A_i, B_j)$ – виграш гравця *A*;

$\varphi_2(A_i, B_j)$– виграш гравця *B*.

Виграші повинні задовольняти умові:

$$\varphi_1(A_i, B_j) + \varphi_2(A_i, B_j) = 0. \qquad (5.1)$$

Якщо позначимо, що

$$\varphi_1(A_i, B_j) = \varphi(A_i, B_j),$$

то, отже,

$$\varphi_2(A_i, B_j) = -\varphi(A_i, B_j).$$

Оскільки виграш гравця *A* дорівнює виграшу гравця *B* зі зворотним знаком, ми можемо цікавитися тільки виграшем $\varphi(A_i, B_j)$ гравця *A*. Природно, *A* прагне максимізувати, а *B* – мінімізувати $\varphi(A_i, B_j)$.

Якщо гравець *A* обирає деяку стратегію A_i, то це само по собі не може впливати на значення функції $\varphi(A_i, B_j)$, тобто вплив A_i на величину значення $\varphi(A_i, B_j)$ є невизначеним. Визначити j можна тільки після вибору своєї стратегії B_j гравцем *B*.

Наслідки ігри $m \times n$ повністю визначаються матрицею (**платіжною матрицею** або **матрицею гри**)

$$A = (a_{ij})_{m \times n},$$

де $a_{ij} = \varphi(A_i, B_j)$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$.

Матриця гри – це таблиця, у яку зведені правила гри в такий спосіб:

а) кількість рядків у матриці *A* відповідає кількості стратегій гравця *A*, а кількість стовпців – кількості стратегій гравця *B*;

б) номер рядка матриці *A* відповідає номеру стратегії A_i гравця *A*, а номер стовпця – номеру застосовуваної стратегії B_j гравця *B*;

в) на перетині рядка A_i й стовпця B_j перебуває елемент a_{ij}, тобто виграш гравця *A* (відповідний до застосовуваних стратегій) або програш гравця *B*. Таким чином, елементи a_{ij} матриці *A* є платою гравця *B* гравцю A у випадку вибору гравцем A стратегії A_i (i-го рядка), а гравцем B – стратегії B_j (j-го стовпця). Кількість таких ситуацій дорівнюватиме $(m \times n)$.

Елементи a_{ij} матриці A можуть бути додатними, від'ємними або рівними нулю:

– якщо елемент a_{ij} матриці є додатним ($a_{ij} > 0$), то це означає, що гравець B в певній ситуації повинен сплатити гравцю A суму, яка дорівнює значенню цього елемента a_{ij};

– якщо елемент a_{ij} – від'ємний ($a_{ij} < 0$), то це означає, що гравець A сплачує гравцю B суму, яка дорівнює абсолютному значенню цього елемента a_{ij};

– якщо елемент $a_{ij} = 0$, то це означає, що ніякої виплати не проводиться.

Отже, в грі двох осіб з нульовою сумою один гравець виграє стільки ж, скільки програє інший (всі виплати проводяться з «кишень» супротивників). Це і пояснює назву – гра з нульовою сумою.

При складанні моделі гри платіжну матрицю зручно попередньо подати у табличній формі виду:

	B_1	B_2	$\ldots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Зведення гри до матричної форми є досить складним, а іноді і нездійсненним завданням через незнання стратегій, їх значну кількість та складність оцінки виграшу, що свідчить про обмеженість можливостей теорії ігор при розв'язанні задач.

Оскільки скінченну парну гру з нульовою сумою можна представити у вигляді матриці, таку гру називають *матричною*.

За загальним виглядом платіжні матриці (в умовах конфлікту) та матриці рішень (в умовах невизначеності й ризику) є подібними. Відмінність між ними полягає в тому, що:

– <u>в умовах конфлікту</u> в якості розумних суперників (гравців) виступають свідомі суб'єкти керування, які будують свою стратегію відповідно до дій один одного;

– <u>в умовах невизначеності та ризику</u> «супротивником» суб'єкта керування є середовище (природа), протидія якого не є свідомою та яке не може реагувати на дії суб'єкта керування.

Тому ігри, які відповідають конфліктним ситуаціям, називаються *стратегічними*, а ігри, що відповідають умовам невизначеності та ризику – *статистичними*.

Аналіз платіжної матриці дозволяє розробити рекомендації щодо вибору оптимальних рішень гравців.

Отже, після побудови матриці гри необхідно обрати оптимальну (ефективну) стратегію, тобто вирішити гру, для чого, в першу чергу, потрібно ознайомитися з принципами, на які спираються гравці *A* та *B* при виборі своїх стратегій A_i $(i=\overline{1,m})$ та B_j $(j=\overline{1,n})$.

Принципи вибору стратегій гравцями *A* и *B*. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях

Нехай гравець *A* обирає деяку стратегію A_i.

Тоді в найгіршому випадку (коли його вибір стане відомий супротивникові) він одержить виграш, що дорівнює

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Передбачаючи таку можливість, гравець *A* повинен обрати таку стратегію A_{i0}, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$\alpha = \alpha_{i0} = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (5.2)$$

Величина α гарантує виграш гравця *A* та називається **нижньою ціною гри**, яка показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі гравець *A*, застосовуючи свої стратегії при будь-яких діях гравця *B*.

Стратегія A_{i0}, що забезпечує одержання α називається **максимінною стратегією**, ідея якої полягає в тому, що гравець *A* не розраховує на можливі помилки гравця *B* та одержує **гарантований виграш** α.

Гравець *B*, обираючи стратегію виходить із наступного принципу: при виборі деякої стратегії B_j його програш не перевищить максимального зі значень елементів *j*-го стовпця матриці, тобто

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Розглядаючи всі значення β_j, гравець *B* обирає таке значення β_{j0}, при якому його максимальний програш буде мінімальним, тобто

$$\beta = \beta_{j0} = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}. \qquad (5.3)$$

Величина β називається **верхньою ціною гри**, яка показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може гарантувати собі гравець *A*.

Відповідна до виграшу β стратегія B_{j0} називається **мінімаксною стратегією.**

Ситуація (i, j), яка відповідає парі стратегій (A_i, B_j) та якій поставлено у відповідність число a_{ij}, визначає результат вибору кожним гравцем своєї стратегії.

Якщо гравці *A* та *B* прийняли відповідно стратегії A_{i0} й B_{j0}, то говорять, що вони використовують **принцип міні-максу (принцип гарантованого результату)**:

> *поступай таким чином, щоб при найгіршій для тебе поведінці супротивника одержати максимальний виграш.*

Розглянемо декілька прикладів.

<u>Приклад 1:</u> Визначити нижню й верхню ціну гри із платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$\begin{array}{rc|l} & A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 2 \\ 3 = \alpha = \max\limits_i \alpha_i \\ 1 \end{array} \\ \hline \beta_j = \max\limits_i a_{ij} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 5 \end{matrix} & \end{array}$$

Тоді нижня ціна гри визначається у вигляді

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{ 2 \quad 3 \quad 1 \} = 3,$$

верхня ціна гри визначається у вигляді

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{ 4 \quad 5 \quad 6 \quad 5 \} = 4.$$

Отже, $\alpha = 3 < \beta = 4$.

Щоб визначити $(i, j)-$ситуацію, потрібно визначити номер рядка та номер стовпця, які відповідають нижній та верхній цінам гри $(i = 2, j = 1)$.

Тоді $(2,1)-$ ситуація.

<u>Приклад 2:</u> Визначити нижню й верхню ціну гри із платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$A = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\right| \quad \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\beta_i = \max_i a_{ij} = 3 \quad 2 \quad 4 \quad 5$$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{3 \quad 2 \quad 4 \quad 5\} = 2.$$

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{0 \quad 2 \quad -1\} = 2.$$

$$\alpha = \beta = 2.$$

Отже, $\alpha = \beta = 2$. $\qquad (i = 2, j = 2) \Rightarrow (2,2) -$ ситуація.

У випадку, коли $\alpha = \beta$, ми маємо справу із **сідловою точкою** або **точкою рівноваги**.

Сідлова точка – це такий елемент $a_{i_0 j_0}$ матриці *A*, який одночасно є мінімальним у рядку й максимальним у стовпці.

Стратегії (i_0, j_0), які є відповідними до сідлової точки $a_{i_0 j_0}$, називаються **оптимальними чистими стратегіями**.

Ознака наявності сідлової точки й урівноваженої пари стратегій (пари стратегій A_{i_0}, B_{j0}, що володіють властивістю рівноваги) – це рівність нижньої й верхньої ціни гри

$$V = \alpha = \beta.$$

Значення $V = \alpha = \beta$ називається **чистою ціною гри**.

Ціна гри V й набір стратегій (i_0, j_0) утворюють **розв'язок гри в чистих стратегіях**, тобто набір

$$\{(i_0, j_0), V\}.$$

<u>*Твердження 1*</u>: Ситуація (i_0, j_0) в матричній $m \times n$-грі є **рівноважною (сідловою точкою)**, якщо для будь-якого $i = 1,\ldots,m$ й кожного $j = 1,\ldots,n$ виконується нерівність

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}.$$

У грі може існувати не одна сідлова точка, наприклад

$$(i_0, j_0),\ (i_{10}, j_{10}),\ (i_{20}, j_{20}).$$

Твердження 2: У випадку існування сідлової точки платіжної матриці говорять, що гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Вірним є й *зворотне твердження*: гра має розв'язок у чистих стратегіях тоді й тільки тоді, коли платіжна матриця гри має сідлову точку.

Теорема 1: У матричній грі нижня ціна гри α не перевершує верхньої ціни гри β, тобто $\alpha \le \beta$.

Доведення

За визначенням маємо:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij} \quad \left(\forall i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right);$$

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \ge a_{ij} \quad \left(\forall i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right).$$

Тоді:

$$\alpha_i \le a_{ij} \le \beta_j \quad \left(\forall i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right),$$

звідки $\alpha_i \le \beta_j$.

Оскільки отримана нерівність виконується для довільних α_i та β_j, то вона виконується й для α та β, тобто:

$$\max_i \alpha_i = \alpha \le \beta = \min_j \beta_j$$

Отже, доведено, що $\alpha \le \beta$.

Теорема доведена.

Приклад 3:

$$\begin{array}{rcl} & & \min\limits_j a_{ij} \\ & & \parallel \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & \cancel{2} \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\ \max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{matrix} 2 & 5 & 4 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2} & \end{array}$$

Сідловою точкою є пара $(i_0 = 3;\ j_0 = 1)$, при якій $V = \alpha = \beta = 2$.

Помітимо, що хоча виграш у ситуації (3,3) також дорівнює 2, вона не є сідловою точкою, оскільки цей виграш не є максимальним серед виграшів третього стовпця.

<u>Приклад 4:</u>

$$\begin{array}{lcl} & \min\limits_{j} a_{ij} & \\ A=\begin{pmatrix}10 & 30\\ 40 & 20\end{pmatrix} & \begin{matrix}\rightarrow\\ \rightarrow\end{matrix} & \left.\begin{matrix}10\\ 20\end{matrix}\right\}\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}=20 \\ \max\limits_{i} a_{ij}\ \downarrow\quad\downarrow & & \\ \qquad\ \ \underbrace{40\quad 30} & & \\ \min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij}=30 & & \end{array}$$

З аналізу матриці виграшів видно, що $\alpha<\beta$, тобто дана матриця не має сідлової точки.

Якщо гравець *А* обирає свою чисту максимінну стратегію $i=2$, то гравець *В*, обравши свою мінімаксну $j=2$, програє тільки 20.

У цьому випадку гравцеві *А* вигідно обрати стратегію $i=1$, тобто відхилитися від своєї чистої максимінної стратегії та виграти 30.

Тоді гравцеві *В* буде вигідно обрати стратегію $j=1$, тобто відхилитися від своєї чистої мінімаксної стратегії й програти 10.

У свою чергу гравець *А* повинен обрати свою 2-гу стратегію, щоб виграти 40, а гравець *В* відповість вибором 2-ї стратегії і т.д.

Завдання для лаборатрної роботи 3

Завдання 1

Побудуйте матрицю гри для задач 1-7 та знайдіть оптимальні стратегії гравців і ціну гри в чистих стратегіях, якщо вони існують в чистих стратегіях.

Задача № 1

Кожен з двох гравців показує один або два пальці, і якщо загальне число показаних пальців парне, то гравець А отримує суму, що дорівнює цьому числу, а якщо непарне, то гравець В отримує суму, що дорівнює цьому числу. Побудуйте матрицю гри та знайдіть оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Задача № 2

Гравці показують один одному один або два пальці. В платить А суму, що дорівнює добутку чисел показаних пальців. А платить В суму, що дорівнює загальному числу показаних пальців. Побудуйте матрицю гри, що показує чистий виграш гравця А. Знайдіть верхню та нижню ціни гри. Встановіть, чи існує в цій грі рішення в чистих стратегіях.

Задача № 3

Бомбардувальники атакують об'єкт, що захищається винищувачами. При цьому бомбардувальники можуть кожного разу атакувати або "високо", або "низько". Низька атака робить бомбардування більш влучною. Точно також винищувачі можуть кожного разу шукати бомбардувальників або "високо", або "низько". Бомбардувальникам приписуються 6 очок, якщо вони відхиляться від винищувачів, і 0 очок, якщо винищувачі їх виявлять. Крім того, бомбардувальникам приписуються 3 додаткові очки за влучність, якщо вони летять низько. Побудуйте матрицю гри. Знайдіть верхню та нижню ціни гри. Встановіть, чи існує в цій грі рішення в чистих стратегіях.

Задача № 4

Гравець А розшукує гравця В в одному з трьох міст *X, У* і *Z*. Відстань між *X* і *У* дорівнює 5 милям, відстань між *У* і *Z* дорівнює 5 милям і відстань між *Z* і *X* дорівнює 10 милям. Гравець В може попрямувати в одне і тільки одне з цих трьох міст. Якщо гравець А попрямує в те ж місто, що і гравець В, то А затримує В, в протилежному ж випадку В вислизає. Гравець А отримує 10 очок, якщо він затримує В, а гравець В - число очок, що дорівнює відстані його від гравця А, якщо В вислизає. Випишіть матрицю цієї гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Задача № 5

Кожен з двох гравців показує від одного до п'яти пальців, і загальне число показаних пальців ділиться на 3. Якщо сума ділиться на 3 без залишку, то ніяких виплат не робиться. Якщо залишок дорівнює 1, то гравець А виграє суму, рівну загальному числу показаних пальців, якщо залишок дорівнює 2, то гравець В виграє суму, рівну загальному числу показаних пальців. Випишіть матрицю цієї гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Задача № 6

Два гравці домовилися грати в наступну гру. Перший гравець показуватиме 1, 2 або 4 пальці. Одночасно другий гравець показуватиме 2, 3 або 5 пальців. Якщо загальне число показаних пальців дорівнює 3, 5 або 9, то перший гравець отримує таку ж суму. У протилежному ж випадку не робиться ніякої виплати. Випишіть матрицю цієї гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Задача № 7

У відомій дитячій грі кожен з двох гравців вимовляє слово "камінь", "ножиці" або "папір". Якщо один вимовляє "камінь", а інший "ножиці", то перший виграє монету. Аналогічно, "ножиці" виграють у "паперу", а "папір" у "каменю". Якщо обидва гравці називають один і той же предмет, то гра вважається зіграною в нічию. Випишіть матрицю цієї гри, знайдіть верхню та нижню ціни гри і вкажіть, в яких стратегіях ця гра має рішення.

Завдання 2

Розв'яжіть матрічну гру, яка задана матрицею. Знайдіть верхнюю, нижнюю ціну гри, седлову точку (якщо існує):

$$\begin{pmatrix} -25 & \frac{35}{N} & -\frac{N}{4} & 55 \\ 2*N & \frac{3*N}{4} & -6 & 45 \\ -1 & N & -N & -5*N \\ -25 & 13 & N*2 & 0 \\ 45 & \frac{N}{10} & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

N - номер студента в журналі.

Питання для самоконтролю

1. Надайте визначення гри двох осіб з нульовою сумою виграшу?
2. Якій умові повинні задовольняти виграші у гри двох осіб з нульовою сумою виграшу?
3. Що таке матриця гри?
4. Яка величина називається верхньою ціною гри?
5. Що називають нижньою ціною гри?
6. У чому полягає принцип міні-макса (принцип гарантованого результату?
7. Що означає поняття гарантований виграш?
8. Чому гра називається парною грою?
9. Яку стратегію називається максимінною стратегією?
10. Що означає поняття сідлова точка, що це за такий елемент?
11. Які стратегії називаються чистими стратегіями.?
12. Що означає знайти розв'язок гри в чистих стратегіях?
13. Яке значення називається чистою ціною гри?
14. Що таке конфліктна ситуація? Наведіть основні риси конфліктної ситуації.
15. У чому полягає задача теорії ігор?
16. Що називається грою?
17. Що таке партія?
18. Які ігри розрізняють в залежності від характеру взаємодії?

19.Які ігри розрізняють в залежності від доступності інформації?
20.Які ігри розрізняють в залежності від виду функцій виграшу?
21.Що називають виграшем?
22.Які елементи містить у собі будь яка гра?
23.Яка стратегія називається оптимальною стратегією?

Рекомендована література

1. Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навч. посіб. Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. 272 с.

2. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2001. 170 с.

Лабораторна робота 4

Тема. Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях. Властивості розв'язків матричних ігор.

Короткі теоретичні відомості

Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях

Дослідження в матричних іграх починається зі знаходження її сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha = \beta,$$

то знаходженням цієї сідлової точки закінчується дослідження гри.

Якщо ж у грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha < \beta,$$

то гра має розв'язок у змішаних стратегіях.

Змішаною стратегією першого гравця називається вектор

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

де:

$$p_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Змішаною стратегією другого гравця називається вектор-стовпець

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

де:

$$q_j \geq 0\,,\; j=\overline{1,n}\,,\quad \sum_{j=1}^{n} q_i = 1\,.$$

Вектор p є вектором імовірності застосування $i-$ї стратегії першим гравцем. Аналогічно, **вектор** q є вектором імовірності застосування $j-$ї стратегії другим гравцем.

Частним випадком змішаної стратегії є чиста стратегія. Наприклад, застосуванню чистої стратегії A_3 буде відповідати вектору $p^{(3)} = (0,0,1,0,\ldots,0)$, а застосуванню чистої стратегії B_2 буде відповідати вектору $q^{(2)} = (0,1,0,0,\ldots,0)$. Тобто, якщо в змішаній стратегії яка-небудь i-я чиста стратегія застосовується з імовірністю 1, те всі інші чисті стратегії не застосовуються. І ця i-я чиста стратегія є частним випадком змішаної стратегії.

Оскільки гравці вибирають свої чисті стратегії випадково й незалежно друг від друга, то гра має випадковий характер. Тому випадкової стає й величина виграшу (програшу).

У цьому випадку **середня величина виграшу**, тобто математичне очікування, є функцією від двох змішаних стратегій, яку ми будемо визначати в такий спосіб:

$$f(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i q_j\,, \tag{4}$$

де $f(p,q)-$ це **платіжна функція гри** з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$.

Стратегії $p^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$, $q^* = (q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*)$ називаються **оптимальними**, якщо для довільних стратегій p $(\forall p = (p_1, p_2, \ldots, p_m))$ і q $(\forall q = (q_1, q_2, \ldots, q_n))$ виконується умова:

$$f(p,q^*) \leq f(p^*,q^*) \leq f(p^*,q). \tag{5}$$

Це означає, що використання в грі оптимальних змішаних стратегій забезпечує:

- першому гравцеві виграш, не менший, чим при використанні їм будь-якої іншої стратегії p;
- другому гравцеві програш, не більший, ніж при використанні їм будь-якої іншої стратегії q.

Сукупність оптимальних стратегій і ціни гри становить **розв'язок гри**.
Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає ціну гри:

$$V = f(p^*,q^*).$$

Тоді фактично розв'язком гри є набір (трійка):

$$(p^*,q^*,V).$$

<u>Теорема 2 (фон Неймана):</u> У змішаних стратегіях будь-яка кінцева матрична гра має розв'язок.

Нехай маємо матричну гру з матрицею $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ й деякі оптимальні змішані стратегії p^* й q^* гравців А и В, що забезпечують суму виграшу *V*.

<u>Виникає питання:</u> як перевірити, що набір $\left(p^*, q^*, V\right)$ є розв'язком гри? Для цього необхідно перевірити справедливість нерівності (5) для довільних змішаних стратегій, у тому числі й для стратегій p^* і q^*.

Однак різних змішаних стратегій, серед яких і оптимальні стратегії – нескінченна множина. І в цьому випадку неможливо перевірити справедливість нерівності (5).

На це питання дозволяє відповісти наступна теорема.

<u>Теорема 3:</u> (Критерій оптимальності змішаних стратегій)

Для того, щоб змішані стратегії $p^* = \left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*\right)$ й $q^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$ були оптимальними для гравців А та В у грі з матрицею $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ й виграшем V, необхідно й достатнє виконання нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq V, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \leq V \tag{7}$$

Доведення:

1. *Необхідність.*

Нехай p^*, q^* – оптимальні змішані стратегії. Доведемо, що для них виконуються співвідношення (6) і (7).

Тому що це оптимальні стратегії, то вони по визначенню задовольняють співвідношенню (5).

Використовуючи (4) і нерівність (5) ми можемо записати:

$$f\left(p, q^*\right) \leq f\left(p^*, q^*\right) \leq f\left(p^*, q\right)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* \leq V \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j\,. \tag{8}$$

Нерівність (8) одержуємо з нерівності (5) шляхом явного опису функцій $f\left(p, q^*\right)$, $f\left(p^*, q^*\right)$ і $f\left(p^*, q\right)$.

Розглянемо праву частину співвідношення (8).

Значення $V \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j$ – виконується для будь-яких змішаних стратегій q, де $q = (q_1,\dots,q_j,\dots,q_n) = \left(0,\dots,\overset{(j)}{1},\dots,0\right)$ – виконується для будь-яких змішаних стратегій, у тому числі й для чистої стратегії.

Тоді $V \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$, що свідчить про виконання нерівності (6).

Співвідношення (7) перевіряється аналогічним образом: шляхом підстановки в ліву частину нерівності (8) вектора стратегії q^*:

$$V \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*,$$

у тому числі $p = (p_1,\dots,p_i,\dots,p_m) = \left(0,\dots,\overset{(i)}{1},\dots,0\right)$.

У такий спосіб ми довели співвідношення (7): $V \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*$.

2. *Достатність.*

Нехай виконуються умови (6) і (7). Покажемо, що p^*, q^* – оптимальні змішані стратегії. З урахуванням співвідношення (6) перетворимо праву частину співвідношення (8), а з урахуванням співвідношення (7) – ліву частину співвідношення (8).

Нехай q – довільний вектор.

Тоді: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*\right) \underset{\text{на основании (6)}}{\ge} \sum_{j=1}^{n} q_j V = V \sum_{j=1}^{n} q_j = V$.

Аналогічно для лівої частини співвідношення (8).

Нехай p – довільний вектор.

Тоді: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*\right) \underset{\text{на основании (6)}}{\le} \sum_{i=1}^{m} p_i V = V \sum_{i=1}^{m} p_i = V$.

Що й було потрібно довести.

<u>Зауваження до Теореми 3:</u> На підставі теореми 3 можна зробити висновок: якщо гравець А ухвалює оптимальну змішану стратегію p^*, а гравець В – будь-яку чисту стратегію B_j, то виграш гравця А буде не менше ціни гри V.

Аналогічне твердження слушне й для другого гравця: якщо гравець В ухвалює оптимальну змішану стратегію q^*, а гравець А – будь-яку чисту стратегію A_i, то виграш гравця В буде не більше ціни гри V.

Чисті стратегії, що входять у його оптимальну змішану стратегію з імовірностями, відмінними від нуля, називаються **активними стратегіями**.

Для активних стратегій справедлива наступна теорема 4.

<u>Теорема 4:</u> Якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, те його виграш залишається незмінним і рівним ціні гри не залежно від того, яку стратегію приймає інший гравець, якщо тільки той (другий гравець) не виходить за межі своїх активних стратегій.

<u>Теорема 5:</u> Оптимальні змішані стратегії p^* й q^* відповідно гравців А и В у матричній грі з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ й із ціною V будуть оптимальними й у матричній грі з матрицею $(ba_{ij}+c)_{m\times n}$ й із ціною гри $V' = bV + c$, де $b > 0$.

На підставі теореми 5 платіжну матрицю, що містить від'ємні числа, можна перетворити в матрицю з додатними числами.

<u>Приклад:</u> Дана матриця гри $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Знайдемо ціну гри для матриці A:

$$\begin{array}{rc|c} & & \min \\ A = & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -3 \end{array} \\ \hline \max & \begin{array}{cc} -1 & \quad 1 \end{array} & \end{array}$$

Тоді $\left.\begin{array}{l} \alpha = \max\limits_i \alpha_i = -1 \\ \beta = \min\limits_j \beta_j = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad V = \alpha = \beta = -1.$

Нехай $c = 4, b = 1$. Щоб перейти від негативних елементів матриці A до додатних, додамо до всіх елементів матриці величину з

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

і знайдемо ціну гри для матриці A':

$$\begin{array}{c|c} & \min \\ A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \\ \hline \max \quad 3 \quad 5 & \end{array}$$

Тоді $\left.\begin{aligned} \alpha = \max_i \alpha_i = 3 \\ \beta = \min_j \beta_j = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad V' = \alpha = \beta = 3.$

Тому що $V' = V + c$, те $V = V' - c = 3 - 4 = -1.$

Таким чином, умова теореми 5 виконане.

Властивості розв'язків матричних ігор

Домінування чистих стратегій

Застосування принципу домінування дозволяє іноді зменшити кількість стратегій гравців, тобто зменшити розмірність матриці *A*. Це випливає з того факту, що домінуючі стратегії можуть бути виключені, при цьому ціна гри не змінюється.

Рядок з номером *i* домінує рядок з номером *k*, якщо виконується умова:

$$a_{ij} \geq a_{kj} \quad \text{для } j = \overline{1, n}.$$

Причому існує хоча б один стовпець із номером m, для якого виконується умова: $a_{im} > a_{km}$.

Домінуючий рядок можна викреслити з матриці, тому що цією стратегією перший гравець ніколи не скористується, оскільки його виграш при виборі стратегії i завжди буде не менше, чим при виборі стратегії k.

Стовпець *j* домінує стовпець із номером *k*, якщо виконується умова:

$$a_{ij} \leq a_{ik} \quad \text{для } i = \overline{1, m}.$$

Причому існує хоча б один рядок з номером p, для якої виконується умова:

$$a_{pj} < a_{pk}.$$

Домінуючий стовпець також може бути викреслять із матриці, тому що другий гравець не буде вибирати цю стратегію, оскільки його програш при такому виборі стратегії j буде не менше, чим якби він побрав домінуючу стратегію k.

<u>Приклад:</u> Спростити матрицю гри *A*:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Тут рядок A_1 домінує рядок A_2. Отже, викреслюємо другий рядок A_2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Тоді матриця *А* прийме вид:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці стовпець B_2 домінує стовпці B_3, B_4, B_5. Отже, викреслюємо третій, четвертий і п'ятий стовпці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ 1 & 2 & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця *А* приймає остаточний вид, який більше вже не можна спростити:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Теорема 6:</u> Якщо елементи одному рядка (стовпця) не усе менше (більше) або дорівнюють відповідним елементам іншим рядків, але усе менше (більше) або рівні деяким опуклим лінійним комбінаціям відповідних елементів інших рядків (стовпців), те цю стратегію можна виключити, замінивши її змішаною стратегією з відповідними частотами використання чистих стратегій.

<u>Приклад:</u> Спростити матрицю гри *А*:

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для перших двох чистих стратегій A_1 і A_2 гравця А поберемо частоти їх застосування (імовірності) рівними 0,25 і 0,75. Третя стратегія гравця А домінується лінійною опуклою комбінацією стратегій A_1 і A_2, узятих із частотами 0,25 і 0,75 відповідно, тобто змішаною стратегією:

$$\begin{array}{l} 24 \cdot 0{,}25 + 0 \cdot 0{,}75 = 6 > 4 \\ 0 \cdot 0{,}25 + 8 \cdot 0{,}75 = 6 > 5 \end{array}.$$

Тому стратегію A_3 можна виключити, використовуючи замість неї зазначену змішану стратегію.

Аналогічно, якщо кожний елемент деякого стовпця більше або рівний деякої опуклої лінійної комбінації відповідних елементів деяких інших стовпців, те цей стовпець можна виключити з розгляду.

Приклад: Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

третя стратегія B_3 гравця В домінується змішаною стратегією зі стратегій B_1 і B_2, узятих із частотами 0,5 і 0,5:

$$\begin{gathered} 10 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 5 < 6 \\ 0 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}5 = 5 < 7 \end{gathered}.$$

Таким чином, вихідна матриця гри еквівалентна матриці наступного виду:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Як видно, можливості домінування змішаними стратегіями на відміну від чистих є значно менш прозорими (потрібно належним чином підібрати частоти застосування чистих стратегій), але такі можливості є й ними корисно вміти користуватися.

Строго детерміновані й не строго детерміновані ігри з матрицею (2×2). Принципи розв'язання.

Розглянемо, що часто зустрічаються в теорії ігор або, що зводяться до них у результаті застосування властивості домінування матрична ігри з (2×2)-матрицею.

Будемо говорити, що гра з (2×2)-матрицею **строго детермінована**, якщо ця матриця містить елемент, скажемо V, який одночасно є мінімальним елементом в утримуючому його рядку й максимальним елементом в утримуючому його стовпці.

Тоді оптимальні стратегії гравців полягають у наступному:

- для гравця А: «вибрати рядок, що містить V»;
- для гравця В: «вибрати стовпець, що містить V».

Ціною гри й буде число V.

Матрична гра називається **необразливої**, якщо її ціна дорівнює нулю ($V = 0$).

Властивість: Матрична гра з матрицею *А*, у якій в одному рядку або в одному стовпці стоять однакові елементи, є **строго детермінованою**.

Деякі матричні ігри не є строго детермінованими, тобто відповідна їм матриця не містить елемента, який був би одночасно мінімальним у своєму рядку й максимальним у своєму стовпці. Не строго детерміновані матричні ігри з (2(2)-матрицею можна охарактеризувати в такий спосіб.

<u>Теорема 7:</u> Гра з матрицею

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

не є строго детермінованою тоді й тільки тоді, коли виконано одне з наступних двох умов:

а) $a < b, a < c$ і $d < c$;

б) $a > b, a > c$ і $d > c$.

Доведення:

Якщо виконується яке-небудь із умов (а) або (б), те, як неважко перевірити, жоден елемент матриці не може бути одночасно мінімальним у тому рядку, якому він належить, і максимальним у тому стовпці, якому він належить; отже, гра не буде строго детермінованою.

Щоб довести другу частину теореми, згадаємо, що гра є строго детермінованої, якщо у відповідній їй матриці рівні два елементи якого-небудь рядка або стовпця. Отже, можна припустити, що ніякі два елементи однієї й тієї ж рядка або того самого стовпця не рівні.

Припустимо тепер, що $a < b$. Тоді $a < b$, інакше елемент a буде мінімальним елементом свого рядка й максимальним елементом свого стовпця. Крім того, $c > d$, інакше, елемент *із* буде мінімальним елементом свого рядка й максимальним елементом свого стовпця. Нарешті, $d < b$, інакше елемент d буде мінімальним елементом рядка й максимальним елементом стовпця. Отже, припущення $a < b$ приводить до відзначеного вище випадку (а).

Аналогічне припущення $a > b$ приводить до випадку (б).

Теорема доведена.

<u>Приклад:</u> Розглянемо карткову гру з матрицею гри виду

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ця гра не є строго детермінованою.

<u>Приклад:</u> Нехай матриця гри має вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ця гра також не є строго детермінованою.

Розглянемо не строго детерміновану гру з матрицею

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Для не строго детермінованої гри з матрицею G число V називається **ціною** цієї **гри**, а вектори $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ й $q^* = \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix}$ – **оптимальні стратегії** гравців А та В, якщо мають місце наступні нерівності[1]:

$$p^* G = (p_1^*, p_2^*) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \geq (v, v); \tag{9}$$

$$G q^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Нехай гравець А вибирає змішану стратегію $p = (p_1, p_2)$ й (незалежно) гравець У вибирає змішану стратегію $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. Тоді гравець А виграє суму a з імовірністю $p_1 q_1$, суму b з імовірністю $p_1 q_2$, суму з c імовірністю $p_2 q_1$ й суму d з імовірністю $p_2 q_1$.

Отже, середнє значення його виграшу має величину

$$a p_1 q_1 + b p_1 q_2 + c p_2 q_1 + d p_2 q_2 = pGq.$$

Аналогічно перебуває й середнє значення виграшу гравця В. Воно рівно цьому ж вираженню, але зі зворотним знаком.

Щоб виправдати дане вище визначення, ми повинні показати, що якщо для матриці G існують V, p^*, q^* із зазначеними властивостями, то гравець А може зробити середнє значення свого виграшу рівним V або більшим V, а гравець В може зробити це середнє значення рівним V або меншим V. Нехай q – будь-яка стратегія для В. Помноживши (9) праворуч на q, ми одержимо співвідношення $p^* G q \geq (V, V) q = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця В гравець А може забезпечити собі виграш, середнє значення якого щонайменше рівно V.

Аналогічно нехай p буде будь-який вектор стратегії для гравця А. Помноживши (10) ліворуч на p, ми одержимо співвідношення $pGq^* \leq p \begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix} = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця А гравець У може зробити середнє значення виграшу А рівним якнайбільше V. Саме в цьому змісті стратегії p^* і q^* є оптимальними. Ми бачимо далі, що якщо обидва гравця відіграють оптимальним образом, то для гравця А середнє значення виграшу рівно V, а для гравця В середнє значення виграшу рівно $-V$.

Тепер ми повинні розв'язати питання про існування стратегій p^* і q^* в не строго детермінованій грі. Тоді як при більш складних іграх знаходження оптимальних стратегій виявляється важкою задачею, розв'язок цього питання у випадку не строго детермінованої гри з (2x2)-матрицею може бути отримане по наступних формулах:

$$p_1^* = \frac{d-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{11}$$

$$p_2^* = \frac{a-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{12}$$

$$q_1^* = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{13}$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{14}$$

$$v = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}. \tag{15}$$

Легко перевірити, що знайдені по формулах (11)-(15) вектори p,q й число V задовольняють умовам (9)-(10). У дійсності нерівності (9) і (10) у цьому простому випадку переходять у рівності. Цей факт не має місця в загальному випадку не строго детермінованих ігор, матриця яких має більше число рядків або стовпців.

Знаменник кожної з формул (11)-(15) являє собою різниця між сумами елементів по двом діагоналям.

Оскільки для не строго детермінованої гри елементи по одній діагоналі повинні перевершувати елементи по іншій діагоналі, то знаменник не може звернутися в нуль. У чисельнику дроби для V стоїть визначник

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$

<u>Приклад:</u> Нехай задана гра з матрицею 2×2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо нижню й верхню ціни гри:

$$\begin{array}{lccl}
 & & \min\limits_{j} a_{ij} & \\
A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} & \left.\begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix}\right\} & \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = -2 \\
\max\limits_{i} a_{ij} \downarrow \quad \downarrow & & & \\
\qquad \underbrace{5 \quad 4} & & & \\
\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = 4 & & &
\end{array}$$

Отже, $\alpha = -2$ і $\beta = 4$. Тому що $\alpha < \beta$, те в матриці A немає сідлових точок. Отже розв'язок гри слід шукати в змішаних стратегіях.

Кожний із гравців А.і В має єдину оптимальну змішану стратегію відповідно $p^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$ й $q^* = \left(q_1^*, q_2^*\right)$, які визначаються формулами (11)-(14):

$$p_1^* = \frac{d-c}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-3-5}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{4}{7},$$

$$p_2^* = \frac{a-b}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-2-4}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{3}{7} = 1-p_1^*,$$

$$q_1^* = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-3-4}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{1}{2},$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-2-5}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{1}{2} = 1-q_1^*.$$

Отже, оптимальною змішаною стратегією гравця А є стратегія $p^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, а оптимальною змішаною стратегією гравця В є стратегія $q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ціну гри підрахуємо по формулі (15):

$$v = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)} = \frac{(-2)(-3)-4\cdot 5}{(-2-3)-(4+5)} = 1.$$

Тоді розв'язок гри – набір $\left(p^*, q^*, V\right)$, тобто $\left(\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), 1\right)$.

Завдання до лабораторної роботи 4

Завдання 1

Спростити матрицю гри та знайти рішення матричної гри заданою матрицею виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & N+1 & N+2 \\ 4 & N/100 & N^2 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & N \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

де N -номер фамілії студента в журналі академічної групи).

Проведіть аналіз отриманих результатів.

Лабораторна робота 5

Тема. Методи розв'язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях. Графоаналітичний метод розв'язання ігр зплатіжною матрицею розмірністю $2\times n$ і $m\times 2$.

Короткі теоретичні відомості

Цей метод застосований тільки до ігор, в яких хоч би один гравець має тільки 2 стратегії, тобто до ігор з матрицею гри $2\times n$ або $m\times 2$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}_{2\times n}; \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}_{m\times 2}.$$

Передбачається, що цей метод застосовується у випадках відсутності у грі седловой точки. Розглянемо гру виду $(2\times n)$

	q_1	q_2	$\cdots$	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
$p_2=1-p_1$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}

Оскільки гравець *A* має тільки 2 стратегії, то, отже, $p_2=1-p_1$ (це витікає з властивості, що $\sum_{i=1}^{2} p_i=1$). При цьому $p_1\ge 0$, $p_2\ge 0$.

Очікувані виграші гравця *A*, що відповідають чистим стратегіям гравця *B*, представляються таблиці 1.

Таблиця 1

Чисті стратегії гравця *B*	Очікувані виграші гравця *A*
1	$p_1a_{11}+(1-p_1)a_{21}=(a_{11}-a_{21})p_1+a_{21}$
2	$p_1a_{12}+(1-p_1)a_{22}=(a_{12}-a_{22})p_1+a_{22}$
…	………
n	$p_1a_{1n}+(1-p_1)a_{2n}=(a_{1n}-a_{2n})p_1+a_{2n}$

Очевидно з таблиці 1, що очікуваний виграш гравця *A* лінійно залежить від p_1.

Відповідно до критерію мінімакса для ігор в змішаних стратегіях гравець *A* повинен вибирати p_1 таким чином, щоб максимізувати свій мінімальний виграш.

Аналогічно, для гравця B: гравець B повинен обирати свою змішану стратегію q_1 таким чином, щоб мінімізувати свій максимальний програш.

Ця задача може бути розв'язана графічно побудовою прямих ліній, що відповідають лінійним функціям від змінної p_1 (для гравця А) або від змінної q_1 (для гравця В).

Розглянемо процедуру застосування графічного методу розв'язання ігор на конкретному прикладі.

Приклад: Розглянемо гру, задану платіжною матрицею

$$\text{игрок B:}$$

$$\text{игрок A:}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

На площині pOy введемо систему координат і на осі Op відкладемо відрізок одиничної довжини A_1, A_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця A $(p_1, 1-p_1)$. Зокрема, точці $A_1(0,0)$ відповідає стратегія A_1, точці $A_2(1,0)$ – стратегія A_2 і т.д. (рисунок 1).

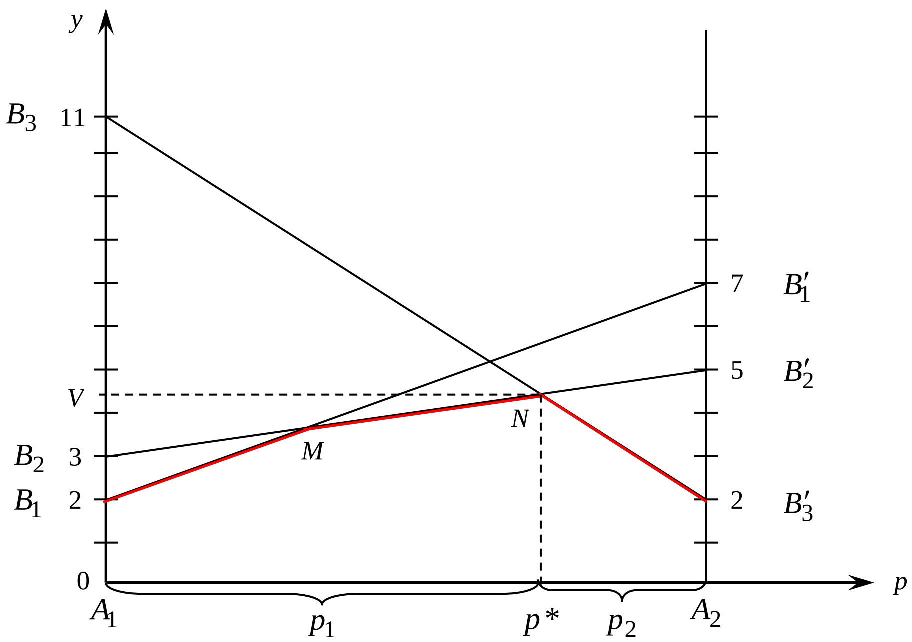


Рисунок 1

В точках A_1 и A_2 встановимо перпендикуляр і на отриманих прямих відкладатимемо виграші гравців.

На першому перпендикулярі (в даному випадку він співпадає з віссю $0y$) відкладемо виграш гравця A при стратегії A_1, а на другому - при стратегії A_2. Якщо гравець A застосує стратегію A_1, то виграє при стратегії B_1 гравця B – 2, при стратегії B_2 – 3, а при стратегії B_3 – 11. Числам 2, 3, 11 на осі *0x* відповідають точки B_1, B_2 та B_3.

Якщо ж гравець *A* застосує стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1 дорівнює 7, при B_2 – 5, а при B_3 – 2. Ці числа визначають точки B_1', B_2', B_3' ,, на перпендикулярі, відновленому в точці A_2. Сполучаючи між собою точки B_1 та B_1', B_2 та B_2', B_3 та B_3' отримаємо три прямі, відстань до яких від осі *0p* визначає середній виграш при будь-якому поєднанні відповідних стратегій.

Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізку B_1B_1' до осі *0p* визначає середній виграш V_1 при будь-якому поєднанні стратегій A_1A_2 (з частотами p_1 і $1-p_1$) і стратегією B_1 гравця *B*. Ця відстань дорівнює $2p_1+7(1-p_1)=V_1$. (Згадайте планіметрію і розгляньте трапецію $A_1B_1B_1'A_2$).

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній B_1MNB_3' визначають мінімальний виграш гравця *A* при застосуванні їм будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці *N* (тобто точка *N* визначає максимум серед мінімумів). Отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $p^*=(p_1,1-p_1)$, а її ордината дорівнює ціні гри V .

Координати точки *N* знаходимо як точку перетину прямих B_2B_2' і B_3B_3'. Відповідні два рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 3p_1+5(1-p_1)=V \\ 11p_1+2(1-p_1)=V \end{cases} \Rightarrow p_1=\frac{3}{11},\quad p_2=1-p_1=\frac{8}{11},\quad V=\frac{49}{11}.$$

Відповідно $p^*=\left(\frac{3}{11},\frac{8}{11}\right)$, при ціні гри $V=\frac{49}{11}$.

Оскільки при виборі оптимальної стратегії ми не використали B_1, то таким чином ми можемо знайти оптимальну стратегію за допомогою матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, зображуватимемо графічно стратегії гравця В (див. рисунок 2). На площині *qOy* введемо систему координат і на осі *Oq* відкладемо відрізок одиничної довжини B_2,B_3, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця В $(q_1,1-q_1)$. Зокрема, точці $B_2(0,0)$ відповідає стратегія B_2, точці $B_3(1,0)$ - стратегія B_3.

Далі діємо аналогічно випадку, розглянутому для гравця *A* з урахуванням того факту, що гравець *B* прагне мінімізувати свій максимальний програш.

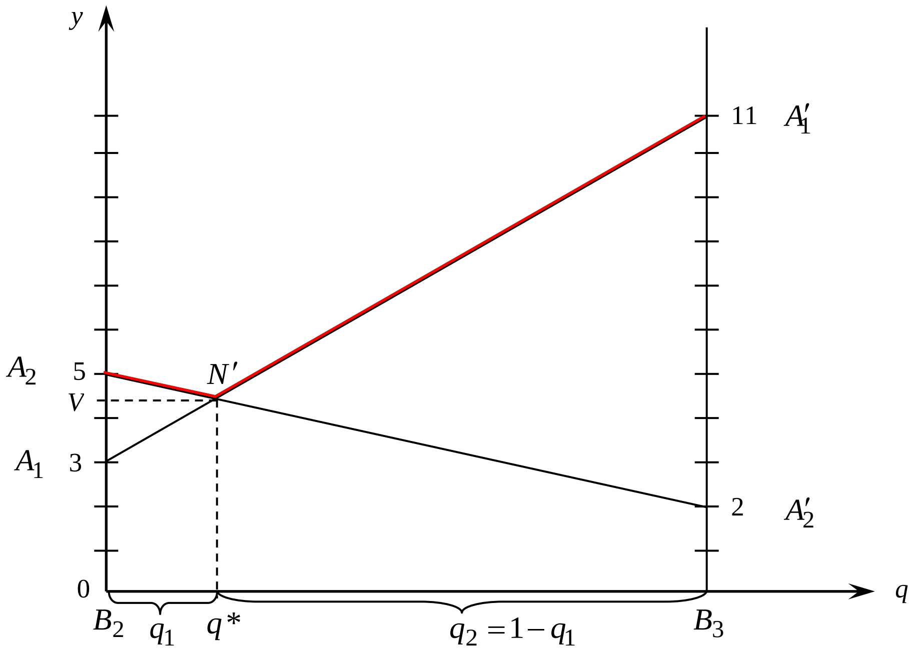


Рисунок 2

Оптимальні стратегії для гравця *B* можна знайти з системи рівнянь

$$\begin{cases} 3q_1 + 11(1-q_1) = V \\ 5q_1 + 2(1-q_1) = V \end{cases} \Rightarrow q_1 = \frac{9}{11}, \quad q_2 = 1 - q_1 = \frac{2}{11}, \quad V = \frac{49}{11}$$

та, відповідно, $q* = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$. З рисунку видно, що стратегія B_1 не увійде до оптимальної стратегії.

Отже, розв'язок гри має вигляд:

- для гравця А: $\left(\left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right), \frac{49}{11}\right)$;
- для гравця В: $\left(\left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right), \frac{49}{11}\right)$,

і, отже, загальний розв'язок гри запишеться у виді

- $\left(\left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right), \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right), \frac{49}{11}\right)$.

<u>Приклад</u>: Розглянемо гру, задану платіжною матрицею

$$\text{игрок B:}$$

$$\text{игрок A:}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{c|cc} & B_1 & B_2 \\ \hline A_1 & 6 & 5 \\ A_2 & 4 & 6 \\ A_3 & 2 & 7 \\ A_4 & 1 & 8 \end{array}$$

На площині qOy введемо систему координат і на осі Oq відкладемо відрізок одиничної довжини B_1, B_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця B $(q_1, 1-q_1)$. Зокрема, точці $B_1(0,0)$ відповідає стратегія B_1, точці $B_2(1,0)$- стратегія B_2 (див. рисунок 3).

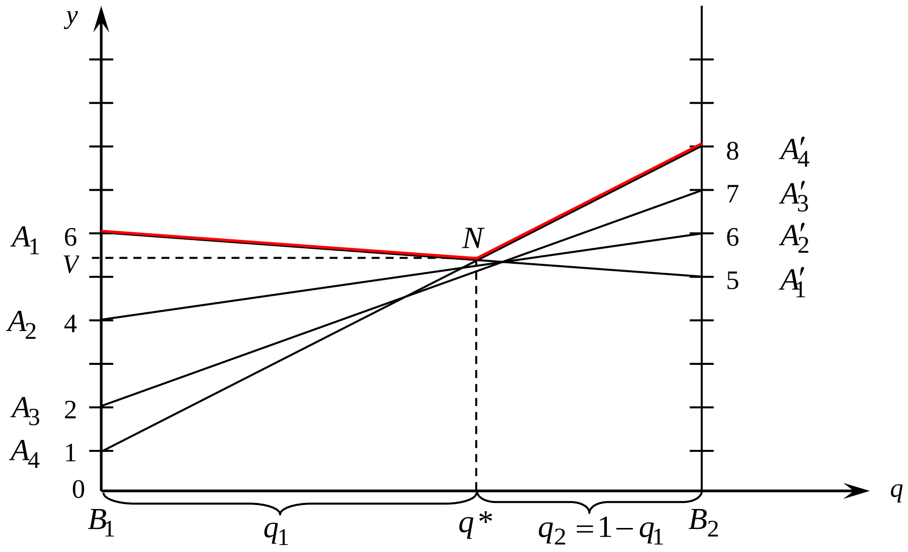


Рисунок 3

У точках B_1 і B_2 встановимо перпендикуляр і на отриманих прямих відкладатимемо виграш гравців.

На першому перпендикулярі (в даному випадку він співпадає з віссю *0y*) відкладемо виграш гравця *B* при стратегії B_1, а на другому - при стратегії B_2 . Якщо гравець *B* застосує стратегію B_1, то виграє при стратегії A_1 гравця *A* - 6, при стратегії A_2 - 4, при стратегії A_3 - 2, а при стратегії A_4 - 1. Числам 6, 4, 2, 1 на осі *0y* відповідають точки A_1, A_2, A_3 і A_4 .

Якщо ж гравець *B* застосує стратегію B_2, то його виграш при стратегії A_1 дорівнює 5, при A_2- 6, при A_3 - 7, а при A_4- 8. Ці числа визначають точки A_1', A_2', A_3', A_4' на перпендикулярі, відновленому в точці B_2.

Сполучаючи між собою точки A_1 та A_1', A_2 та A_2', A_3 та A_3', A_4 та A_4', отримаємо чотири прямі, відстань до яких від осі 0q визначає середній виграш при будь-якому поєднанні відповідних стратегій.

Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізку A_1A_1' до осі $0q$ визначає середній виграш V_1 при будь-якому поєднанні стратегій B_1B_2 (з частотами q_1 і $1-q_1$) і стратегією гA_1 гравця *А*. Ця відстань дорівнює $6q_1+5(1-q_1)=V_1$. (Згадайте планіметрію і розгляньте трапецію $B_1A_1A_1'B_2$).

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній A_1NA_4' визначають максимальний програш гравця *В* при застосуванні їм будь-яких змішаних стратегій. Ця максимальна величина є мінімальною в точці N (тобто точкаN визначає мінімум серед максимумів). Отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $q^*=(q_1,1-q_1)$, а її ордината дорівнює ціні гри V.

Координати точки N знаходимо як точку перетину прямих A_1A_1' і A_4A_4'. Відповідні два рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 6q_1+5(1-q_1)=V \\ q_1+8(1-q_1)=V \end{cases} \Rightarrow q_1=\frac{3}{8},\quad q_2=1-q_1=\frac{5}{8},\quad V=\frac{43}{8}.$$

Отже $q^*=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$, при ціні гри $V=\frac{43}{8}$.

Поскольку при выборе оптимальной стратегии мы не использовали A_2 и A_3, то таким образом мы можем найти оптимальную стратегию при помощи матрицы

Оскільки при виборі оптимальної стратегії ми не використали A_2 і A_3, то таким чином ми можемо знайти оптимальну стратегію за допомогою матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, зображуватимемо графічно стратегії гравця *А* (див. рисунок 4). На площині *pOy* введемо систему координат і на осі *Op* відкладемо відрізок одиничної довжини A_1, A_4, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця *А* $(p_1,1-p_1)$. Зокрема, точці $A_1(0,0)$ відповідає стратегія A_1, точці $A_4(1,0)$ – стратегія A_4. Далі діємо аналогічно випадку, розглянутому для гравця *В*, з урахуванням того факту, що гравець *А* прагне максимізувати свій мінімальний виграш.

Оптимальні стратегії для гравця *А* можна знайти з системи рівнянь

$$\begin{cases} 6p_1+1(1-p_1)=V \\ 5p_1+8(1-p_1)=V \end{cases} \Rightarrow p_1=\frac{7}{8},\quad p_2=1-p_1=\frac{1}{8},\quad V=\frac{43}{8}$$

і, отже, $p^* = \left(\frac{7}{8}, 0, 0, \frac{1}{8}\right)$. З рисунка 4 видно, що стратегії A_2 і A_3 не увійдуть до оптимальної стратегії.

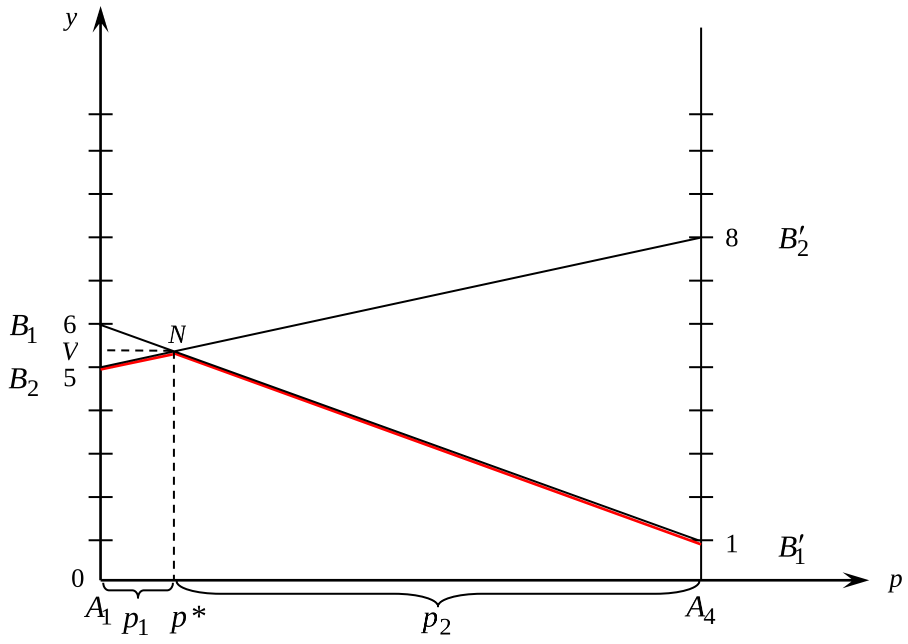


Рисунок 4

Отже, рішення гри має вигляд:

- для гравця ***A***: $\left(\left(\frac{7}{8}, 0, 0, \frac{1}{8}\right), \frac{43}{8}\right)$;
- для гравця ***B***: $\left(\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \frac{43}{8}\right)$,

отже, загальний розв'язок гри запишеться у виді

$$\left(p^*, q^*, V\right) = \left(\left(\frac{7}{8}, 0, 0, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \frac{43}{8}\right).$$

Відповідь: Розв'язок гри з матрицею A:

$$\left(\left(\frac{7}{8}, 0, 0, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \frac{43}{8}\right).$$

Завдання до лабораторної роботи 5

Завдання 1

Розв‘язати матричну гру з платіжною матрицею A графоаналітичним методом:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$ (k=n+1, n- номер студента у журналі академічної групи).

Лабораторна робота 6

Тема. Розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику

Короткі теоретичні відомості

Невизначені фактори, закон розподілу яких невідомий, є найбільш характерними при розв'язанні задач прийняття рішень. Саме на цей випадок слід орієнтуватися при виборі гнучких конструкторських рішень. Методичний облік таких факторів базується на формуванні спеціальних критеріїв, на основі яких приймаються рішення. Критерії МініМакса (Вальда), Севіджа, Гурвіца, Лапласа та інших вже давно і міцно увійшли в теорію прийняття рішень. Розглянемо класичні, похідні й розширені критерії прийняття рішень, а також приклади їх застосування.

1. Матриця рішень та оціночні функції

Всяка діяльність завжди є тісно пов'язаною з невизначеністю та ризиком щодо майбутніх результатів прийняття рішень.

Припустимо, що потрібно вибрати найкращу з m альтернатив у випадку, коли остаточний результат кожної альтернативи E_i ($i=\overline{1,m}$) буде визначатися конкретним станом навколишнього середовища („природи”) F_j ($j=\overline{1,n}$).

Під результатом рішення $e_{ij} = e(E_i\ ;\ F_j\ )$ тут можна розуміти оцінку, що відповідає варіанту E_i і умовам F_j та що характеризує прибуток, корисність або надійність. Звичайно ми будемо називати такий результат корисністю рішення. Звичайно ми будемо називати такий результат ***корисністю рішення***.

Дані, необхідні для ухвалення рішення в умові невизначеності, звичайно задаються у формі матриці, рядки якої відповідають можливим діям, а стовпці – можливим станам системи, тобто сімейство (матриця) рішень має вигляд:

	F_1	F_2	...	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	...	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	...	e_{2n}
...	...	...	...	...
E_m	e_{m1}	e_{m2}	...	e_{mn}

Щоб прийти до однозначного й по можливості найвигіднішому варіанту рішення необхідно ввести ***оціночну (цільову) функцію***. При цьому матриця рішень зводиться до одного стовпця виду

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
E_3	e_{3r}
$\vdots$	$\vdots$
E_i	e_{ir}
$\vdots$	$\vdots$
E_m	e_{mr}

Кожному варіанту E_i приписується деякий результат e_{ir}, що характеризує, у цілому, всі наслідки цього рішення. Такий результат ми будемо надалі позначати тим же символом e_{ir}.

Виникає, однак, проблема, який вкласти зміст у результат e_{ir}. Якщо, наприклад, наслідки кожного з альтернативних рішень характеризувати комбінацією з його найбільшого й найменшого результатів, то можна прийняти

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}. \tag{1.1}$$

Найкращий у цьому змісті результат має вигляд

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\min_j e_{ij} + \max_j e_{ij} \right). \tag{1.2}$$

Формуючи в такий спосіб бажаний результат, особа, що приймає рішення (ЛПР), виходить із ***компромісу між оптимістичним та песимістичним підходами***.

Розглянемо тепер деякі інші оціночні функції, а також відповідні до них вихідні позиції.

Оптимістична позиція:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\max_j e_{ij} \right). \tag{1.3}$$

З матриці результатів рішень e_{ij} обирається варіант (рядок), що містить в якості можливого наслідку найбільший із всіх можливих результатів. ОПР стає на точку зору азартного гравця й робить ставку на те, що випаде найвигідніший випадок.

Позиція нейтралітету:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right). \tag{1.4}$$

ОПР виходить з того, що всі відхилення результату рішення від «середнього» випадку, що зустрічаються, припустимі, та приймає рішення, оптимальне з цього погляду.

Песимістична позиція:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left(\min_j e_{ij} \right). \tag{1.5}$$

ОПР виходить з того, що треба орієнтуватися на найменш сприятливий випадок і приписує кожному з альтернативних варіантів найгірший з можливих результатів. Після цього він обирає самий вигідний варіант, тобто очікує найкращого результату в найгіршому випадку. Для кожного іншого зовнішнього стану результат може бути тільки рівним цьому або кращим.

Позиція відносного песимізму:

$$\min_i e_{ir} = \min_i \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right). \tag{1.6}$$

Для кожного варіанта рішення ОПР оцінює втрати в результаті в порівнянні з певним по кожному варіанту найкращим результатом, а потім із сукупності найгірших результатів обирає найкращий відповідно до представленої оціночної функції.

На основі оцінних функцій будуються критерії прийняття рішень.

2. Класичні критерії прийняття рішень

<u>Мінімаксний критерій</u>

При

$$Z_{\text{MM}} = \max_i e_{ir}, \tag{2.1}$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} \tag{2.2}$$

справедливо співвідношення

$$\text{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \text{E} \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} \right\}, \tag{2.3}$$

де Z_{MM} – оціночна функція ММ-критерія.

Правило вибору рішення відповідно до ММ-критерію (Вальда, песимістична позиція):

Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем з найменших результатів e_{ir} кожного рядку. Обирати належить ті варіанти E_{i0}, у рядках яких стоять найбільші значення e_{ir} цього стовпця.

Критерій Байєса–Лапласа

Нехай q_j (j=1,2,..,n)– ймовірність появи зовнішнього стану F_j ; тоді для BL-критерія

$$Z_{\mathrm{BL}} = \max_i e_{ir}, \tag{2.4}$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}. \tag{2.6}$$

Правило вибору рішення:

Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що включає математичне очікування значень кожного з рядків. Обираються ті варіанти E_{i0}, в рядках яких стоїть найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

Критерій Севіджа

За допомогою позначень

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}, \tag{2.7}$$

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \tag{2.8}$$

формується оціночна функція

$$Z_{\mathrm{S}} = \min_i e_{ir} = \min_i \left[\max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right] \tag{2.9}$$

та будується множина оптимальних варіантів рішення

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir} \right\}. \tag{2.10}$$

Відповідне до S-критерію правило вибору:

Кожний елемент матриці рішень $\|e_{ij}\|$ віднімається з найбільшого результату $\max\limits_i e_{ij}$ відповідного стовпця. Різниці a_{ij} утворюють матрицю залишків $\|a_{ij}\|$. Ця матриця поповнюється стовпцем найбільших різниць

e_{ir}. Обираються ті варіанти E_{i0}, в рядках яких стоїть найменше для цього стовпця значення.

3. Похідні критерії прийняття рішень

Критерій Гурвиця

$$Z_{\mathrm{HW}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.1}$$

$$e_{ir} = c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij}. \tag{3.2}$$

Тоді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ Ei_0 \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left[c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le c \le 1 \right\}, \tag{3.3}$$

де c – ваговий множник.

Правило вибору згідно HW-критерію:

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, що містить середні зважені найменшого й найбільшого результатів для кожного рядка (3.2). Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких стоять найбільші елементи e_{ir} цього стовпця.

Для $c = 1$ HW-критерій перетворюється на MM-критерій.
Для $c = 0$ він перетворюється на критерій азартного гравця.

Критерій Ходжа–Лемана

Оціночна функція визначається рівністю

$$Z_{\mathrm{HL}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.4}$$

$$e_{ir} = \nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij}, \quad 0 \le \nu \le 1, \tag{3.5}$$

а множина HL-оптимальних рішень записується у вигляді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left[\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le \nu \le 1 \right\}. \tag{3.6}$$

Правило вибору, що відповідає HL-критерію:

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, складеним з середніх зважених (з постійними вагами) математичного очікування та найменшого результату кожного рядка (3.5). Обираються ті варіанти рішень E_{i0}, у рядках яких стоїть найбільше значення цього стовпця.

Для $\nu = 1$ HL-критерій перетворюється на BL-критерій.
Для $\nu = 0$ перетворюється на MM-критерій.

Критерій Гермейєра

Цей критерій є орієнтованим на величини втрат, тобто на від'ємні значення усіх e_{ij}, тобто $e_{ij} < 0$.

В якості оціночної функції виступає

$$Z_{\mathrm{G}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.7}$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j. \tag{3.8}$$

За Критерієм Гермейєра

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} q_j \wedge e_{ij} < 0 \right\}. \tag{3.9}$$

Правило вибору згідно критерію Гермейєра (G):

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного у неї результату на ймовірність відповідного стану F_j. Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходиться найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

У випадку рівномірного розподілу $q_j = 1/n$, $j = 1,...,n$, G-критерій становиться ідентичним до ММ-критерію.

4. Розширені критерії прийняття рішень

BL (ММ) – критерій

Вихідним для побудови BL(ММ)-критерію є BL-критерій. Внаслідок того, що розподіл ймовірностей $\mathbf{q} = (q_1,...,q_n)$ встановлюється емпірично та тому є відомим не точно, отже, відбувається, з одного боку, ослаблення критерію, а з другого, напроти, за допомогою заданих границь для ризику й за допомогою ММ-критерію забезпечується відповідна свобода дій.

Визначення оптимального варіанту за BL(ММ)-критерієм включає наступні етапи:

1 етап. Зафіксуємо опорне значення, що задається ММ-критерієм:

$$Z_{\mathrm{MM}} = \max_i \min_j e_{ij} = e_{i_0 j_0},$$

де i_0 и j_0 – індекси, які є оптимальними для варіантів рішень та, відповідно, станів, що розглядаються за ММ-критерієм.

2 етап. Визначення першої індексної множини I_1.

2.1 Для цього визначається $\varepsilon_i := e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$ для всіх $i \in \{1,..m\}$.

2.2 За допомогою деякого заданого або обраного рівня допустимого ризику $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ визначимо деяку множину згоди, що є підмножиною множини індексів $\{1,...,m\}$:

$$I_1 := \left\{ i \;\middle|\; i \in \{1,\ldots,m\} \wedge e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\}. \tag{3.10}$$

Величина $\varepsilon_i := e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$ для всіх $i \in I_1$ характеризує найбільші можливі втрати в порівнянні зі значенням $e_{i_0 j_0}$, що задається ММ-критерієм. З іншого боку, в результаті такого зниження відкриваються й можливості для збільшення виграшу в порівнянні з тим, що забезпечується ММ-критерієм.

3 етап. Визначення другої індексної множини I_2.

$$I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\ldots,m\} \wedge \max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j} \ge e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} = \varepsilon_i \right\}. \tag{3.11}$$

Величина $\max_j e_{i_0\, j}$ це максимальне число, яке зафіксоване в тому рядку, де визначено опорне значення за ММ-критерієм.

4 етап. Визначення оптимального варіанту за BL(MM)-критерієм.

Для цього на множині-перетинання $I_1 \cap I_2$ ми обираємо тільки такі варіанти рішень, для яких, з одного боку, у певних станах можуть мати місце втрати в порівнянні зі станом, що задається ММ-критерієм, але в інших станах мається хоча б такий самий приріст виграшу.

Отже, оптимальними в смислі BL(MM)-критерію будуть рішення з множини

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \right\}. \tag{3.12}$$

Правило вибору для цього критерію формулюється наступним чином:

Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще трьома стовпцями. У першому з них записуються математичні очікування кожного з рядків, у другому – різниці поміж опорним значенням $e_{i_0 j_0} = Z_{\text{ММ}}$ та найменшим значенням $\min_j e_{ij}$ відповідного рядка. В третьому стовпці містяться різниці між найбільшим значенням $\max_j e_{ij}$ кожного рядка й найбільшим значенням $\max_j e_{i_0 j}$ того рядка, у якому знаходиться значення $e_{i_0 j_0}$. Обираються ті варіанти E_{i_0}, рядки яких дають найбільше математичне очікування. А саме, відповідне значення $e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$ з другого стовпця має бути меншим або рівним деякому заздалегідь заданому рівню ризику $\varepsilon_{\text{доп}}$. Значення ж з третього стовпця має бути більшим за значення з другого стовпця.

BL(S)-критерій

Розглянемо комбінацію критерію Байєса-Лапласа з критерієм Севіджа, що називається BL(S)-критерієм; для цього порівняємо співвідношення (2.3), (2.4) и (2.5) с (2.6)-(2.9). За опорну величину приймемо

$$Z_{\mathrm{S}} = \min_i \max_j a_{ij} = a_{i_0 j_0},$$

де $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$.

Через $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ знову визначимо припустиму границю ризику.

Тоді

$$I_1 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\ldots,m\} \wedge \max_j a_{ij} - a_{i_0 j_0} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\},$$

$$I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\ldots,m\} \wedge \min_j a_{i_0 j} - \min_j a_{ij} \ge \varepsilon_i \right\},$$

де $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ – припустима границя ризику, $\varepsilon_i = \max_j a_{ij} - a_{i_0 j_0}$.

Для E_0 маємо:

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}.$$

Критерій добутків

Цей критерій орієнтований на величини виграшів, тобто на позитивні значення e_{ij}.

Визначимо оціночну функцію:

$$Z_{\mathrm{P}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.13}$$

$$e_{ir} = \prod_j e_{ij}. \tag{3.14}$$

Тоді

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \prod_j e_{ij} \wedge e_{ij} > 0 \right\}. \tag{3.15}$$

Правило вибору:

Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється новим стовпцем, що містить добуток всіх результатів кожного рядку. Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходяться найбільші значення цього стовпця.

5. Приклад застосування класичних критеріїв

При роботі ЕОМ необхідно періодично припиняти обробку інформації й перевіряти ЕОМ на наявність у ній вірусів. Припинення в обробці інформації приводять до певних економічних витрат. У випадку ж якщо вірус є вчасно виявленим не буде, можливою є втрата деякої частини інформації, що приведе до ще більших збитків.

Варіанти рішення є наступними:
E_1 – повна перевірка;
E_2 – мінімальна перевірка;
E_3 – відмова від перевірки.

ЕОМ може перебувати в наступних станах:
F_1 – вірус є відсутнім;
F_2 – вірус є, але він не встиг ушкодити інформацію;
F_3 – є файли, які потребують відновлення.

Результати, що включають витрати на пошук вірусу та його ліквідацію, а також витрати, пов’язані з відновленням інформації, мають вигляд, наведений у табл. 1.

Таблиця 1

	F_1	F_2	F_3	*ММ*-критерій		Критерій *BL*	
				$e_{ir} = \min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$	$e_{ir} = \sum\limits_j e_{ij} q_j$	$\max\limits_i e_{ir}$
E_1	-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	$\underline{\underline{-25.0}}$	-22.33	
E_2	-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		-22.67	
E_3	0	-24.0	-40.0	-40.0		-21.33	$\underline{\underline{-21.33}}$

Згідно ***ММ-критерію*** (Вальда) (див. табл. 1) слід проводити повну перевірку.

За ***критерієм Байєса-Лапласа***, у припущенні, що всі стани машини є рівновірогідними, тобто

$$P(F_j) = q_j = 1/3,$$

рекомендується відмовитися від перевірки (див. табл. 1).

Матриця залишків $A = (a_{ij})$, де $a_{ij} = \max\limits_i e_{ij} - e_{ij}$, для цього прикладу та їх оцінка (у тисячах) згідно ***критерію Севіджа*** має вигляд:

	F_1	F_2	F_3	Критерій Севіджа	
				$e_{ir} = \max\limits_j a_{ij}$	$\min\limits_j e_{ir}$
E_1	+20.0	0	0	+20.0	
E_2	+14.0	+1.0	+6.0	+14.0	$\underline{\underline{+14.0}}$
E_3	0	+2.0	+15.0	+15.0	

Даний приклад спеціально є підібраним таким чином, щоб кожний з критеріїв пропонував нове рішення. Невизначеність стану, у якому перевірка застає ЕОМ, перетворюється в неясність, якому критерію віддавати перевагу.

Оскільки різні критерії є пов'язаними з різними умовами, у яких приймається рішення, краще за все для порівняльної оцінки рекомендацій тих або інших критеріїв, отримати додаткову інформацію про саму ситуацію. Зокрема, якщо прийняте рішення відноситься до сотень машин з однаковими параметрами, то рекомендується застосовувати критерій Байєса-Лапласа. Якщо ж число машин є не великим, то краще користуватися критеріями мінімакса або Севіджа.

6. Приклад прийняття рішень згідно похідним та розширеним критеріям

Розглянемо той самий приклад (див. табл. 1).

Побудова оптимального рішення для матриці рішень про перевірки за ***критерієм Гурвиця*** має вигляд (при $C = 0{,}5$, в 10^3):

$\Vert e_{ij} \Vert$			$C \min\limits_j e_{ij}$	$(1-C)\max\limits_j e_{ij}$	$e_{ir} = C \min\limits_j e_{ij} + (1-C)\max\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-12.5	-10.0	-22.5	
-14.0	-23.0	-31.0	-15.5	-7.0	-22.5	
0	-24.0	-40.0	-20.0	0	-20.0	-20.0

У даному прикладі у рішення є поворотна точка щодо вагового множника C:
до $C = 0{,}57$ у якості оптимального обирається E_3, а при великих значеннях – E_1.

Застосування ***критерію Ходжа-Лемана*** ($q_j = \frac{1}{3}$, $\nu = 0{,}5$, в 10^3) :

$\sum\limits_j e_{ij} q_j$	$\min\limits_j e_{ij}$	$\nu \sum\limits_j e_{ij} q_j$	$(1-\nu)\min\limits_j e_{ij}$	$e_{ir} = \nu \sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu)\min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$
-22.33	-25.0	-11.17	-12.5	-23.67	-23.67
-22.67	-31.0	-11.34	-15.5	-26.84	
-21.33	-40.0	-10.67	-20.0	-30.76	

Критерій Ходжа-Лемана рекомендує варіант E_1 (повна перевірка) – так само як і *ММ*-Критерій. Зміна рекомендованого варіанта відбувається тільки при $\nu = 0{,}94$. Тому рівномірний розподіл станів розглянутої машини має розпізнаватися з дуже високою ймовірністю, щоб його можна було обрати за більшим математичним очікуванням. При цьому число реалізацій рішення завжди залишається довільним.

Критерій Гермейєра при $q_j = 1/3$, $j = \overline{1,3}$, дає наступний результат (в 10^3):

$\Vert e_{ij} \Vert$			$\Vert e_{ij} q_j \Vert$			$e_{ir} = \min\limits_j e_{ij} q_j$	$\max\limits_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-6.67	-7.33	-8.33	-8.33	-8.33
-14.0	-23.0	-31.0	-4.67	-7.67	-10.33	-10.33	
0	-24.0	-40.0	0	-8.0	-13.33	-13.33	

У якості оптимального обирається варіант E_1. Порівняння варіантів за допомогою величин e_{ir} показує, що спосіб дії критерію Гермейєра є навіть більш гнучким, ніж у *ММ*-критерії.

У таблиці, наведеній нижче, рішення вибирається відповідно до ***BL(MM)-критерію*** при $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$ (дані в 10^3).

$\Vert e_{ij} \Vert$			$\min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i(\min\limits_j e_{ij})$	$\varepsilon_i = e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_j e_{ij} - \max\limits_j e_{i_0 j}$	$\sum\limits_j e_{ij} q_j$
-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	$-25.0 = e_{i_0 j_0}$	0	-20.0-(-20.0)=0	-23.33
-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		+6.0	-14.0-(-20.0)=+6.0	-22.67
0	-24.0	-40.0	-40.0		+15.0	0-(-20.0)=+20.0	-21.33

В якості $\varepsilon_{доп} > 0$ можна обрати довільне додатнє число.

Якщо обрати $\varepsilon_{доп} = 6 \times 10^3$, то індексна множина $I_1 := \left\{ i \mid i \in \{1,\ldots,m\} \wedge e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\}$ буде включати два перших варіанти рішень за умови виконання нерівності $e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij} \le \varepsilon_{\text{доп}}$, тобто $I_1 = \{1, 2\}$ при $\varepsilon_{доп} = 6 \times 10^3$. Щоб побудувати індексну множину $I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\ldots,m\} \wedge \max\limits_j e_{ij} - \max\limits_j e_{i_0 j} \ge e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij} = \varepsilon_i \right\}$, за елементами передостаннього стовпця таблиці, обираємо ті варіанти, які є більшими або дорівнюють знайденим ε_i. В даному впадку $I_2 = \{1, 2, 3\}$. Оптимальний варіант за BL(MM)-критерієм знаходиться при використанні BL-критерію на перетині першого та другого індексних множин, тобто на $I_1 \cap I_2$, яким в даному випадку буде множина $I_1 \cap I_2 = \{1, 2\}$. З урахуванням цього BL-критерій обирає оптимальний варіант тільки з двох перших варіантів: $\max\limits_{i \in I_1 \cap I_2} \sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} q_j = \max\limits_{i \in I_1 \cap I_2} (-23.33; -22.67) = -22.67$. Отже, оптимальний варіант рішення за BL(MM)-критерієм буде: $E_0 = E_2$ (мінімальна перевірка).

Якщо ж обрати $\varepsilon_{доп} = 15 \times 10^3$, то індексна множина I_1 буде включати всі варіанти рішень, тобто $I_1 = \{1, 2, 3\}$. В такому впадку $I_2 = \{1, 2, 3\}$. Перетин $I_1 \cap I_2 = \{1, 2, 3\}$, а, отже оптимальним варіантом рішення за BL(MM)-критерієм буде: $E_0 = E_3$ (відмова від перевірки).

Зауважимо, що варіант E_3 (відмова від перевірки) приймається цим критерієм тільки тоді, коли ризик наближається до $\varepsilon_{доп} = 15 \times 10^3$. У противному випадку оптимальним виявляється варіант E_2.

У багатьох технічних і господарських задачах припустимий ризик буває набагато нижчим, становлячи звичайно тільки незначний відсоток від загальних витрат. У подібних випадках буває особливо корисним, якщо неточне значення розподілу ймовірностей оказує не дуже сильний вплив.

Якщо при цьому виявляється неможливим установити припустимий ризик $\varepsilon_{доп}$ заздалегідь, не залежно від прийнятого рішення, то допомогти може обчислення очікуваного ризику $\varepsilon_{доп}$.

Тоді стає можливим подумати, чи є виправданим подібний ризик. Таке дослідження звичайно дається легше.

Результати ***застосування критерію добутку*** при $a = 41 \cdot 10^3$ та $a = 200 \cdot 10^3$ мають вигляд:

	$\lVert e_{ij} + a \rVert$			$e_{ir} = \prod_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
a=41	+21	+19	+16	6384	6384
	+27	+18	+10	4860	
	+41	+17	+1	697	
a=200	+180	+178	+175	5607	
	+186	+177	+169	5563	
	+200	+176	+160	5632	5632

Умова $e_{ij} > 0$ для даної матриці є не виконуваною. Тому до елементів матриці додається (за зовнішнім бажанням) спочатку $a = 41 \cdot 10^3$, а потім $a = 200 \cdot 10^3$. Для $a = 41 \cdot 10^3$ оптимальним виявляється варіант E_1, а для $a = 200 \cdot 10^3$ – варіант E_3. Отже, залежність оптимального варіанта від a є очевидною.

Завдання до лабораторної роботи 6

Завдання 1

Розв'язати задачу вибору оптимального рішення в умовах неповної інформації та ризику, використовуючи:

1. мінімаксний критерій;
2. критерій Байєса-Лапласа;
3. критерій Севіджа
4. критерій Гурвиця;
5. критерій Ходжа-Лемана;

6. критерій Гермейєра;
7. BL (MM) – критерій;
8. BL (S) – критерій;
9. критерій добутків.

при заданих: q_j $\left(j=\overline{1,4} \right)$ $q_1 = 0{,}1$;

$q_2 = 0{,}5$;

$q_3 = 0{,}2$;

$q_4 = 0{,}2$,

при заданих: q_j $\left(j=\overline{1,5} \right)$ $q_1 = 0{,}2$;

$q_2 = 0{,}1$;

$q_3 = 0{,}3$;

$q_4 = 0{,}2$;

$q_5 = 0{,}2$,

при заданих: q_j $\left(j=\overline{1,6} \right)$ $q_1 = 0{,}2$;

$q_2 = 0{,}1$;

$q_3 = 0{,}3$;

$q_4 = 0{,}2$;

$q_5 = 0{,}05$;

$q_6 = 0{,}15$,

при заданому ваговому множникові критерію Гурвиця:

$$C = 0{,}5,$$

при параметрі ν критерію Ходжа-Лемана, який дорівнює:

$$\nu = 0{,}6.$$

Зауваження: 1. Кожен студент обирає вектор q_j (з трьох наданих варіантів), який відповідає розмірності матриці у варіанті завдання, що обирається студентом згідно номеру в журналі академічної групи.

Варіанти завдань до лабораторної роботи 6:

1	$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 1 & -5 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}$	**10**	$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix} -2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 8 & -4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$	**11**	$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 & 8 \\ -6 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	**12**	$A=\begin{pmatrix} 54 & -54 & 54 & 38 \\ 49 & 81 & -77 & 33 \\ -46 & 78 & 94 & -30 \end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 & 6 \\ 1 & -3 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	**13**	$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 & 14 & 5 \\ 9 & -8 & 6 & 5 & 7 \\ -4 & 9 & 20 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 & 5 \\ -7 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$	**14**	$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 & 7 \\ 6 & 4 & -5 & 3 \\ 8 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$	**15**	$A=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 8 & 3 \\ 10 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	**16**	$A=\begin{pmatrix} 8 & -9 & 6 & 7 & 5 \\ 8 & 12 & -4 & 9 & -1 \\ 10 & 3 & 15 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & -3 \\ 4 & 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$	**17**	$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 1 & 6 \\ 6 & -2 & 1 & 4 & 9 \\ 17 & 5 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	**18**	$A=\begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -3 & 7 & 11 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 10 & 13 \end{pmatrix}$

19	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$	**25**	$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 1 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
20	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & -5 & 8 \\ -5 & 9 & 3 & 6 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 & -3 & 9 & 17 \end{pmatrix}$	**26**	$A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 & -4 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & 8 & 9 & 11 \end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -8 & 2 \end{pmatrix}$	**27**	$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 10 & 2 \\ 7 & -3 & 6 & 5 & 7 \\ -3 & 9 & 14 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
22	$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 8 & 5 \\ 8 & -5 & 6 & 2 & 1 \\ -4 & 19 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	**28**	$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & -2 & 9 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -7 \end{pmatrix}$	**29**	$A=\begin{pmatrix} -12 & 7 & 13 & 11 & 5 \\ 18 & 9 & 15 & 8 & 17 \\ 10 & 3 & -14 & 7 & 2 \end{pmatrix}$
24	$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 & 5 \\ -5 & 4 & -3 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$	**30**	$A=\begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 4 & 2 \\ 7 & -2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

Питання для самоконтролю

1. Що таке величина ризику в грі з природою?
2. Опишіть критерій мінімакса (Вальда).
3. Опишіть критерій Севіджа.
4. Опишіть критерій Байєса–Лапласа.
5. Що таке коефіцієнт песимізму в критерії Гурвіца?
6. Опишіть критерій Ходжа–Лемана.
7. Опишіть критерій Гермейєра.
8. З яким критерієм становиться ідентичним критерій Гермейєра у випадку рівномірного розподілу ймовірностей станів середи?
9. Що визначає ваговий множник критерію Ходжа–Лемана (HL)?
10. Що таке опорне значення в критерії BL (MM)?

Рекомендована література

1. Ус С. А., Коряшкіна Л. С. Моделі й методи прийняття рішень : навч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2018. 299 с.
2. Файнзільберг Л. С., Жуковська О. А., Якимчук В. С. Теорія прийняття рішень : підручник. Київ : Освіта України, 2018. 246 с.
3. Мушик Э., Мюллер П. Методи прийняття технічних рішеннь. Київ: Освіта України, 1990. 208 с.
4. Полінкевич О. М., Волинець І. Г. Обґрунтування господарських рішень та оцінювання ризиків : навч. посіб. Луцьк : ВежаДрук, 2018. 336 с.
5. Пономаренко В. С., Павленко Л. А., Беседовський О. М. та ін. Методи та системи підтримки прийняття рішень в управлінні еколого-економічними процесами підприємств : навч. посіб. Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. 272 с.
6. Катренко А. В., Пасічник В. В. Прийняття рішень: теорія та практика : підручник Львів : Новий Світ – 2000, 2020. 447 с.