І. М. ВАСИЛЬКІВ

ОСНОВИ
ТЕОРІЇ
ЙМОВІРНОСТЕЙ
І
МАТЕМАТИЧНОЇ
СТАТИСТИКИ

Навчальний посібник

Львів
ЛНУ ім. Івана Франка
2020

УДК 516.(075.8)
В 28

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор О. Б. Скасків
(Львівський національний університет імені Івана Франка);
доктор фізико-математичних наук, професор А. З. Мохонько
(національний університет "Львівська політехніка")

Васильків І. М.

В 28 Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. – 184 с.

ISBN 978–617–10–0354–5

У посібнику стисло викладено основи теорії ймовірностей і математичної статистики. Подання теорії супроводжується розв'язуванням задач, зокрема й економічного змісту.

Уміщено задачі для самостійного розв'язування.

Для студентів економічних і природничих спеціальностей.

УДК 516.(075.8)

Рекомендовано до друку
кафедрою вищої математики
Протокол № ___ від ___________ 2019 р.

ISBN 978–617–10–0354–5

ЧАСТИНА I. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Випадкові події. Повна група подій

Одне з основних понять теорії ймовірностей – поняття події. *Подія* – це будь-який факт, що є наслідком випробування (експерименту, досліду). Під випробуванням розуміють здійснення певного *комплексу умов*.

Події позначають великими літерами латинської абетки: A, B, C, ...

Часто трапляються події, котрі залежать від обставин (факторів), що не піддаються облікові чи взагалі невідомі. Навіть за незмінного комплексу основних факторів результат не можна передбачити, бо комплекс умов не враховує всіх факторів. Невраховані фактори – випадкові.

Подію, яка може настати або не настати за даних умов, називають *випадковою подією* (*можливою подією*). Наприклад, підкинувши монету, не можна наперед сказати, що появиться – цифра чи герб.

Випадкові події вивчає теорія ймовірностей. Точніше, теорія ймовірностей вивчає масові однорідні події, тобто такі події, які можуть багато разів повторюватися за незмінних умов. До масових однорідних подій відносять і ті, що не можуть бути відтворені, але аналогічні події можуть спостерігатися необмежено: радіоактивний розпад, телефонні виклики певних служб тощо.

Подію, яка неминуче настане під час випробування, називають *вірогідною*. Вірогідну подію позначають Ω. Подію, яка не може відбутися за умов даного випробування, називають *неможливою* і позначають $\emptyset$. Так, якщо випробуванням є кидання грального кубика, то поява кількості очок, меншої від семи, є вірогідною подією, а поява восьми очок є неможливою подією.

Випадкові події A і B називають *несумісними* в якомусь випробуванні, якщо вони не можуть відбутися водночас (спільно). Приміром, внаслідок одного кидання монети можуть настати дві події: подія A – поява герба, і подія B – поява цифри. Очевидно, що події A і B – несумісні: настання однієї з них виключає можливість появи іншої.

Події A і B називають *сумісними*, якщо вони можуть відбутися разом (тобто можливе суміщення подій A і B). Події A_1, A_2, ..., A_n називають *попарно несумісними* в якомусь випробуванні, якщо жодні дві з них не можуть відбутися водночас у цьому випробуванні.

Кажуть, що сукупність подій в якомусь випробуванні утворює *повну групу*, якщо внаслідок випробування настане принаймні одна із цих подій. Наприклад, при одному кидані грального кубика може настати шість подій, які полягають у тому, що появиться одна з шести цифр: 1, 2, 3, 4, 5 або 6. Ці події утворюють повну групу в даному досліді.

Події A_1, A_2, ..., A_n уважають *рівноможливими*, якщо нема підстав сподіватися, що котрась із них появлятиметься частіше за іншу під час випробувань, які відбуваються багато разів за однакових умов.

Найпростіші несумісні наслідки випробування, які утворюють повну групу, називають *елементарними подіями*.

Розгляньмо приклади.

Випробування	Елементарні події					
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Кидання однієї монети	A	B				
Кидання двох монет	AA	AB	BA	BB		
Кидання гральної кості	1	2	3	4	5	6

Тут літера A означає появу герба, а літера B – появу цифри; аналогічно, запис AB означає, що при киданні першої монети появився герб, а при киданні другої – цифра і под.

(1;1)	(1;2)	…	(1;6)
(2;1)	(2;2)	…	(2;6)
…	…	…	…
(6;1)	(6;2)	…	(6;6)

Сукупність усіх можливих наслідків певного випробування називають *простором елементарних подій* (*фазовим простором*), а самі елементарні події – *точками* простору. При киданні двох кубиків точками простору елементарних подій є 36 пар чисел, заданих таблицею.

Подія C = {сума очок дорівнює 5} – це множина таких чотирьох точок простору: $(1;4)$, $(2;3)$, $(3;2)$, $(4;1)$.

Простір елементарних подій випробування може бути скінченним або нескінченним. Якщо множина точок простору елементарних подій злічення, то простір називають *дискретним*.

1.2. Означення ймовірності

1.2.1. Класичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності (історично саме це означення було першим) 1) ґрунтується на інтуїтивному понятті *рівноможливості* і 2) стосується лише тих випробувань, простір елементарних подій яких є скінченним. Отже, класичне означення ймовірності не охоплює всіх можливих випадкових подій, і далі буде дано ще два інші означення ймовірності – статистичне та геометричне.

Тут ідеться про випробування, результати яких можна подати у вигляді повної групи попарно несумісних і рівноможливих подій.

Розгляньмо приклад. У лотереї 1200 білетів, з яких – 200 виграшів. Навмання беруть один білет. Будемо цікавитися можливістю настання події A, яка полягає в тому, що взятий білет – виграшний.

Очевидно, що в цьому прикладі всього є 1200 різних елементарних подій (шансів, випадків), а події A, яка нас цікавить – навмання взяти виграшний білет – сприяють 200 елементарних подій. (Кажуть також, що 200 елементарних подій *породжують* подію A.)

К л а с и ч н е о з н а ч е н н я й м о в і р н о с т і. *Ймовірністю випадкової події* A називають відношення кількості елементарних подій, що сприяють події A, до загальної кількості елементарних подій:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

де n – загальна кількість елементарних подій, m – кількість елементарних подій, що сприяють події A.

Позаяк $m \le n$, то, як випливає з означення, ймовірність – це невід'ємне число, яке не перевищує одиниці: $0 \le P(A) \le 1$.

Отже, чисельною характеристикою події A (можливість взяти виграшний білет) у нашому прикладі буде відповідна ймовірність:

$$P(A)=\frac{200}{1200}=\frac{1}{6}.$$

Очевидно, якщо події сприяють усі n елементарних подій $(m=n)$, що утворюють повну групу рівноможливих несумісних подій, то це *вірогідна подія* Ω. Ймовірність вірогідної події дорівнює 1: $P(\Omega)=\frac{m}{n}=1$.

Якщо ж події не сприяє жодна з n елементарних подій $(m=0)$, то подія *неможлива* $\emptyset$. Ймовірність неможливої події дорівнює 0: $P(\emptyset)=0$.

Протилежне твердження, як побачимо далі, неправильне: з того, що ймовірність події дорівнює нулеві, ще не випливає, що ця подія неможлива.

Приклад 1. Двічі кидають монету. Яка ймовірність того, що принаймні раз випаде герб?

Розв'язання. Простір елементарних подій випробування має вигляд:

$$\{AA,\ AB,\ BA,\ BB\},$$

де, наприклад, запис AB означає, що при першому киданні випав герб, а при другому – цифра. Зрозуміло, що події

$$C = \{\text{принаймні раз випаде герб}\}$$

сприяють три перші елементарні події. Тому

$$P(C) = \frac{3}{4}.$$

Цей результат означає, що в достатньо довгій серії випробувань приблизно в 75 % випадків настане подія C. ►

1.2.2. Статистичне означення ймовірності. Класичне означення ймовірності зводиться до простішого поняття – рівноможливості подій, до того ж кількість наслідків випробування скінченна. Сфера застосування класичної ймовірності до опису випадкових явищ обмежена. В її рамках, наприклад, неможливо передбачити ймовірність розпаду атома радіоактивної речовини за певний проміжок часу, ймовірність влучення в ціль стрільцем тощо. Визначення ймовірностей у таких випадках ґрунтується лише на досліді.

Нехай проводиться серія однотипних випробувань, одним із можливих наслідків яких є подія A. Досвід засвідчує, що за незмінного комплексу умов для широкого кола явищ кількість появ події A підлягає стійким закономірностям. Точніше, йдеться ось про що. Нехай n – кількість випробувань, m – кількість появ події A. Виявляється, що за достатньо великої кількості випробувань *відносна частота*

$$w(A) = \frac{m}{n},\ \ 0 \le w(A) \le 1,$$

події A буде приблизно однаковою у багатьох серіях спостережень, до того ж зі збільшенням n розбіжність між відносними частотами різних серій має тенденцію до зменшення. Відносні частоти появи певної події в досить довгих серіях дослідів групуються біля деякого сталого числа.

Дослід свідчить: у разі, коли застосовне класичне означенням ймовірності, за великої кількості випробувань значення відносної частоти мало відрізняється від імовірності p (окрім рідкісних випадків).

Той факт, що в дослідах, де застосовне класичне означення ймовірності, частота близька до ймовірності, дає підстави зробити припущення, що і в загальному випадку існує стала величина, біля якої коливаються відносні частоти появ події в різних серіях випробувань. Цю сталу і називають *статистичною ймовірністю* випадкової події. Фактично, на підставі великої кількості дослідів постулюють існування статистичної ймовірності p події A – сталої, котра за великої кількості випробувань приблизно дорівнює відносній частоті $w(A) = m/n$ (або числові, близькому до неї):

$$p \approx w(A).$$

На практиці проводять обмежену кількість випробувань, але *принциповою* є можливість у незмінних умовах повторити їх необмежену кількість разів.

Об’єктом вивчення в теорії ймовірностей є лише такі випадкові події, які володіють властивістю стійкості відносних частот.

1.2.3. Геометричне означення ймовірності. Класичне і статистичне означення ймовірності стосуються лише тих випадків, коли простір елементарних подій зліченний. Тепер розгляньмо ймовірності випробувань, простір елементарних подій яких є незліченним.

У загальному випадку задачу можна сформулювати так.

Нехай в області G міститься область g (рис. 1.2). Ці області можуть бути відрізками, плоскими чи просторовими фігурами. *Мірою* областей G і g називатимемо довжину (якщо G і g відрізки), площу (якщо G і g плоскі фігури), об’єм (якщо G і g просторові фігури).

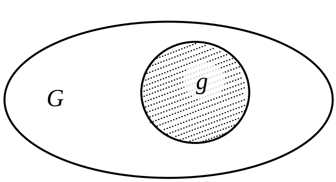


Рис. 1.2

На область G навмання кидають крапку. Відшукаймо ймовірність події A, яка полягає в тому, що ця крапка потрапить в область g .

Припустімо, що положення навмання кинутої крапки (елементарні події) рівномірно розподілені в області G, тобто крапка з однаковою ймовірністю може потрапити в будь-яку точку області. Зрозуміло, що простір елементарних подій цього випробування складається з усіх точок області G , а сукупність сприятливих елементарних подій складається з точок області g . Природно вважати, що ймовірність потрапляння крапки в будь-яку частину області G пропорційна мірі цієї частини і не залежить від її форми.

Тоді можна ввести геометричне означення ймовірності:

$$p = \frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G},$$

де символ mes (від латинського mesure – міра) означає міру області (довжину в R^1, площу в R^2, об’єм в R^3).

Геометрична ймовірність є узагальненням класичної на випадок незлічених рівноможливих подій. У цьому разі числа m і n у формулі $p = m/n$ замінюють на міри множин сприятливих і всіх можливих наслідків.

Приклад 2. На відрізку довжиною l навмання ставлять точку, яка поділяє його на дві частини. Яка ймовірність того, що менший відрізок не коротший, ніж $l/5$?

Розв'язання. Позначмо подію, ймовірність якої треба визначити, літерою A.

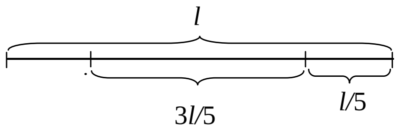


Рис. 1.3

Як видно з рис. 1.3, події A сприяють усі точки, що віддалені від кінців відрізка не менше, ніж $l/5$. Довжина відрізка, що сприяє події A, дорівнює $l - \left(\frac{l}{5} + \frac{l}{5}\right) = 0{,}6 \cdot l$. Тому

$$p = \frac{0{,}6 \cdot l}{l} = 0{,}6 . \blacktriangleright$$

Ми розглянули три різні означення ймовірності, кожне з яких застосовне в тому чи іншому випадку. Цей недолік усуває аксіоматичний підхід до побудови теорії ймовірностей, який дає змогу підійти до означення ймовірності більш загально, з єдиних позицій. Фактично аксіоматичне означення ймовірності базується на геометричному означенні і включає в себе класичне та статистичне означення як окремі випадки. В основу аксіоматики покладено можливість ототожнення подій із множинами. Сьогодні загальноприйнятою є група аксіом, запропонованих російським математиком А. М. Колмогоровим у 1933 р.

РОЗДІЛ 2

ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ І МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1. Операції над подіями

На практиці знайти ймовірність безпосередньо за означенням непросто. Насамперед це пов'язано з тим, що не для кожного досліду можна побудувати ймовірнісний простір елементарних подій. З елементарних подій можна побудувати складніші. Отже, можна вести мову про алгебру подій, тобто про правила оперування з подіями. Для теорії ймовірностей ці правила важливі не самі по собі, а з огляду на те що на них ґрунтуються методи визначення ймовірностей одних подій через імовірності інших. Ці методи зводяться до застосування основних теорем теорії ймовірностей: теорем додавання ймовірностей і множення ймовірностей.

Алгебричні операції над подіями можна звести до операцій над множинами. Для цього простір елементарних подій Ω ототожнюють з універсальною множиною, а події інтерпретують як деякі підмножини цього простору. Якщо події розглядати як підмножини деякої множини елементарних подій, то відношення між подіями можна тлумачити як відношення між множинами, і нескладно ввести поняття (по суті, означення) суми та добутку подій.

Сумою (*об'єднанням*) двох подій A і B називають подію C, яка полягає в появі принаймні однієї з цих подій, тобто подія C полягає в настанні або події A, або події B, або обох цих подій водночас. Суму подій позначають

$$C = A + B, \quad \text{або} \quad C = A \cup B.$$

Наприклад, якщо подія A – це поява парної кількості очок при киданні гральної кості ($A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$), а подія B – поява кількості очок, що кратна трьом ($B = \{\omega_3, \omega_6\}$), то подія $A \cup B$ складається з елементарних подій ω_2, ω_3, ω_4 й ω_6, тобто

$$A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}.$$

У прикладі, який ми щойно розглянули, наслідок ω_6 входить і в подію A і в подію B. Якщо події A і B несумісні, то сума подій полягає в настанні або лише події A, або лише події B.

Добутком (*перерізом, суміщенням*) двох подій A і B називають подію C, яка полягає в настанні і події A, і події B. Пишуть

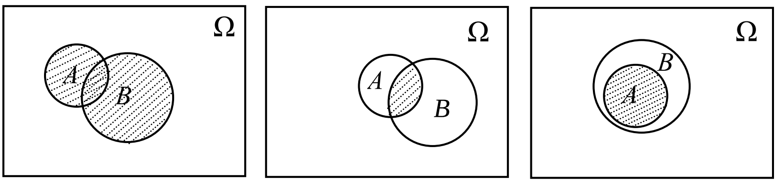
$$C = A \cdot B, \text{ або } C = A \cap B.$$

Так, у прикладі, який ми розглянули, $A \cap B = \{\omega_6\}$.

Очевидно, якщо події A і B несумісні, то їхній добуток – неможлива подія: $A \cap B = \varnothing$.

Добутком кількох подій A_1, A_2, ..., A_m називають подію A, яка полягає у спільній появі цих подій.

Події й операції над ними ілюструють геометрично. Так, якщо, подія A – потрапляння точки в область A, подія B – потрапляння точки в область B, то подія $A + B$ – це потрапляння точки в заштриховану область, що зображена на рис. 2.1. *а*). Добуток подій A і B, очевидно, зобразиться як область суміщення областей A і B (рис. 2.1, *б*), *в*)).



а) *б*) *в*)

Рис. 2.1

2.2. Теореми додавання ймовірностей. Протилежні події

Розгляньмо спочатку несумісні події A і B, тобто такі, що не містять спільних елементів простору елементарних подій (не можуть відбутись одночасно). Нехай імовірності подій A та B відомі й дорівнюють $P(A)$ і $P(B)$ відповідно. Справедлива теорема.

Теорема 1 (про ймовірність суми несумісних подій). Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто

$$\text{якщо } A \cap B = \varnothing, \text{ то } P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (1)$$

Доведення (для класичної ймовірності). Нехай n – загальна кількість можливих результатів випробування, m_1 кількість випадків, що сприяють появі події A, m_2 – кількість випадків, що сприяють появі події B. Позаяк події A та B несумісні, то кількість випадків, що сприяють одночасній появі подій A та B, дорівнює 0, а кількість випадків, що сприяють появі або події A, або події B, дорівнює $m_1 + m_2$. Тому

$$P(A \cup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B). \blacktriangle$$

Для довільної кількості попарно несумісних подій A_1, A_2, ... A_n

$$P\ (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P\ (A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

або, у згорненому вигляді,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Приклад 1. Стрілець має влучити в область, яка складається з трьох зон. Ймовірність влучення в першу зону дорівнює $\frac{6}{25}$, у другу – $\frac{7}{50}$, у третю – $\frac{8}{25}$. Яка ймовірність влучення в область при одному пострілі?

Розв'язання. Нехай A_1, A_2 та A_3 – події, які полягають у тому, що стрілець влучив відповідно в першу, другу і третю зони. За умовою ймовірності цих подій дорівнюють відповідно

$$P(A_1) = \frac{6}{25},\ P(A_2) = \frac{7}{50},\ P(A_3) = \frac{8}{25}.$$

Очевидно, що події A_1, A_2, A_3 несумісні (неможливо в одному пострілі влучити в дві зони). Влучення в область (подія A) є сумою несумісних подій A_1, A_2, A_3: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

За щойно доведеною теоремою

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{6}{25} + \frac{7}{50} + \frac{8}{25} = \frac{35}{50} = 0{,}7. \blacktriangleright$$

Дві події називають *протилежними*, якщо вони несумісні й утворюють повну групу подій. Подію, протилежну до події A, позначають $\overline{A}$.

Події A і $\overline{A}$ несумісні, тому $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Події A і $\overline{A}$ утворюють повну групу, тому під час випробування одна з них обов'язково настане, тобто сума протилежних подій є вірогідна подія:

$$A \cup \overline{A} = \Omega.$$

Позначатимемо $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = q$. Тоді

$$P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1,$$

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = p + q = 1.$$

Звернімо увагу на прості наслідки останньої формули, які часто використовують при розв'язуванні задач, а саме:

$$q = 1 - p, \quad p = 1 - q.$$

Приклад 2. В урні 15 куль: 10 білих, 5 чорних. Яка ймовірність того, що з чотирьох навмання взятих куль 1) одна чорна; 2) принаймні одна чорна?

Розв'язання. 1) Скористаймося формулою $P = m/n$. Розгляньмо подію

$$A_1 = \{\text{з чотирьох куль одна чорна}\}.$$

Кількість усіх елементарних подій дорівнює кількості способів, яким можна вибрати 4 кулі з 15, тобто $n = C_{15}^4$. Кількість елементарних подій, які сприяють події A_1, дорівнює кількості способів, якими можна вибрати 3 білі кулі з 10 і 1 чорну з 5, тобто $m = C_{10}^3 \cdot C_5^1$. Отже, ймовірність того, що серед чотирьох навмання взятих куль є одна чорна

$$P(A_1) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_5^1}{C_{15}^4} = \frac{10! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 11!}{3! \cdot 7! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 15!} = \frac{40}{91}.$$

2) Нехай подія

$$A = \{\text{з чотирьох куль принаймні одна чорна}\}.$$

Ця подія є сумою чотирьох несумісних подій A_1, A_2, A_3, A_4, які полягають у тому, що серед чотирьох куль є відповідно одна, дві, три, чотири чорні:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

За теоремою про ймовірність суми несумісних подій

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4).$$

Ймовірності $P(A_2)$, $P(A_3)$, $P(A_4)$ знаходимо так само, як $P(A_1)$:

$$P(A_2) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_5^2}{C_{15}^4} = \frac{30}{91}; \quad P(A_3) = \frac{C_{10}^1 \cdot C_5^3}{C_{15}^4} = \frac{20}{273}; \quad P(A_4) = \frac{1}{273}.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{40}{91} + \frac{30}{91} + \frac{20}{273} + \frac{1}{273} = \frac{11}{13}.$$

Ймовірність події A можна знайти й інакше. Справді, подією, протилежною до події A, є подія

$$\overline{A} = \{\text{серед чотирьох куль немає жодної чорної (усі 4 кулі білі)}\}.$$

Тоді

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{10}^4 \cdot C_5^0}{C_{15}^4} = 1 - \frac{10! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 11!}{4! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 15!} = 1 - \frac{2}{13} = \frac{11}{13}. \ ►$$

Теорема 1 стосувалася лише несумісних подій. Розгляньмо тепер сумісні події A і B. Сума подій A і B – це подія, що полягає в настанні або події A, або події B, або двох цих подій разом (тобто події $A \cap B$).

Теорема 2 (про ймовірність суми подій). Ймовірність суми двох подій дорівнює сумі їхніх імовірностей мінус імовірність їхнього добутку:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \ ▲ \qquad (2)$$

Формула (2) справедлива як для сумісних, так і для несумісних подій. Справді, якщо події A і B несумісні, то $A \cap B = \varnothing$ ($\varnothing$ – неможлива подія), тому в цьому разі $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$, і формула (2) обертається на формулу (1) для ймовірності суми несумісних подій.

Оскільки $P(A \cap B) \ge 0$, то з останньої формули випливає, що

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B),$$

Це співвідношення обертається на рівність, якщо події A і B несумісні.

2.3. Умовна ймовірність

Коли говорять про ймовірність події A, то мають на увазі певну сукупність умов S, за яких подія відбувається. Якщо при визначенні ймовірності $P(A)$ інших обмежень, окрім комплексу умов S, немає, то ймовірність називають *безумовною.* Однак часто трапляються задачі, коли доводиться знаходити ймовірність події A за умови, що відбулася (або не відбулася) інша випадкова подія B. Таку ймовірність називають *умовною ймовірністю події A за умови B* і позначають $P(A|B)$ або $P_B(A)$.

Приклад 1. В урні 3 білих і 2 чорних кулі. Беруть одну кулю, потім – другу. Розгляньмо події:

$$B = \{\text{перша куля біла}\}, \quad A = \{\text{друга куля біла}\}.$$

Тоді ймовірність події A за умови, що B відбулася, $P(A|B) = \frac{2}{4}$, а ймовірність події A за умови, що B не відбулася, $P(A|\overline{B}) = \frac{3}{4}$. ►

Приклад 2. Кинули дві гральні кості. Яка ймовірність того, що сума очок дорівнює 10, якщо відомо, що ця сума більша за 7?

Розв'язання. Усі наслідки досліду можна зобразити у вигляді таблиці розміром 6×6. У клітинах таблиці перша цифра вказує кількість очок, що випали на першій кості, а друга – кількість очок, що випали на другій кості.

Розгляньмо, наприклад, такі події:

$$A = \{\text{сума очок дорівнює } 10\}, \quad B = \{\text{сума очок більша } 7\}.$$

1; 1	2; 1	...	...	...	6; 1
1; 2	2; 2	...	...	...	6; 2
...	...	...	...	5; 3	...
...	...	...	4; 4	...	...
...	...	3; 5	...	...	...
1; 6	2; 6	...	...	...	6; 6

Відшукаймо спочатку безумовну ймовірність події A. У цьому разі простір елементарних подій Ω складається із $6^2 = 36$ елементарних подій:

$$\Omega = \left\{(i,\ j)\right\},\ i = \overline{1,6},\ \ j = \overline{1,6}.$$

Події A сприяють три елементарні події: $A = \left\{(4;6),\ (5;5),\ (6;4)\right\}$. Тому

$$P(A) = \tfrac{3}{36} = \tfrac{1}{12}.$$

Відшукаймо ймовірність події A за умови, що відбулася подія B. Тепер ймовірнісний простір складається з 15 елементарних подій: він містить лише ті клітини, сума цифр у яких більша семи (у таблиці вони розташовані нижче жирної ламаної). Нескладно знайти ймовірність події A за умови B:

$$P(A|B) = \tfrac{3}{15} = \tfrac{1}{5}.$$

Такий самий результат для $P(A|B)$ можна отримати за формулою

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

Тут $A \cap B = A$, а події B сприяють 15 елементарних подій. Отже,

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{12},\ \ P(B) = \tfrac{15}{36},\ \ P(A|B) = \tfrac{1}{12}\Big/\tfrac{5}{36} = \tfrac{1}{5}.$$

Як бачимо, результати для $P(A|B)$, знайдені безпосередньо за означенням і на підставі формули (1), збігаються. ►

У загальному випадку (не лише для класичної ймовірності) формулу (1) беруть за означення умовної ймовірності. Формула справедлива, якщо $P(B) > 0$; якщо $P(B) = 0$, то умовна ймовірність $P(A|B)$ невизначена.

2.4. Незалежні події. Множення ймовірностей

Події поділяють на *залежні* і *незалежні*.

Дві події A і B називають *незалежними*, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від появи іншої, тобто

$$P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B}), \quad P(B) = P(B|A) = P(B|\overline{A}). \tag{1}$$

Дві події A і B називають *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від того, появилася чи не появилася інша. Якщо A і B залежні, то $P(A) \neq P(A|B)$.

З означення умовної ймовірності випливає така теорема.

Теорема 1 (про ймовірність добутку подій). Ймовірність добутку подій A і B дорівнює добуткові ймовірності однієї з них на умовну імовірність іншої:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B), \tag{2}$$

або

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A). \blacktriangle \tag{3}$$

Першу із цих рівностей ми по суті довели в попередньому параграфі, друга може бути доведена аналогічно (для класичної ймовірності).

Методом індукції можна довести, що формула для ймовірності добутку довільної кількості подій має вигляд:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \tag{4}$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}),$$

тобто ймовірність спільної появи n подій дорівнює добуткові ймовірності однієї з них на умовні ймовірності решти, якщо ймовірність кожної наступної події вираховувати за умови, що всі попередні відбулися. Порядок подій не важить: будь-яку з них можна вважати першою, другою і т. д.

Останню формулу для трьох подій просто довести безпосередньо. Зробіть це самотужки.

Позаяк для незалежних подій A і B $P(B|A) = P(B)$, то, як випливає з формул (2)–(3), ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добуткові їхніх імовірностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{5}$$

Якщо події A і B незалежні, то події A і $\overline{B}$ також незалежні.

Приклад 1. Двоє стрільців роблять по одному пострілу. Ймовірність влучення першим стрільцем дорівнює 0,8, а другим – 0,9. Яка ймовірність того, що два стрільці влучили?; перший влучив, а другий – ні?

Розв'язання. Нехай подія A – перший стрілець влучив, подія B – другий стрілець влучив. За умовою задачі $P(A)=0{,}8$, $P(B)=0{,}9$. Події A і B, очевидно, незалежні. Тому ймовірність суміщення подій A і B дорівнює добуткові їхніх імовірностей:

$$P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}72.$$

Аналогічно знаходимо ймовірність того, що перший стрілець влучив, а другий промахнувся (подія $\overline{B}$). Ймовірність $P(\overline{B})=1-P(B)=0{,}1$.

Отже,

$$P(A \cap \overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0{,}8\cdot 0{,}1=0{,}08. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Партія зі 100 одиниць товару підлягає вибірковому контролю. Умовою непридатності партії є наявність принаймні однієї бракованої одиниці продукції серед п'яти, відібраних для контролю. Яка ймовірність того, що партію буде забраковано, якщо вона містить 4 % неякісного товару?

Розв'язання. Розгляньмо події: $A=\{$партію товару забраковано$\}$, $A_k=\{$ k -а перевірена одиниця товару з п'яти відібраних – якісна$\}$, $k=\overline{1,\ 5}$. Тоді подію $B=\{$ серед п'яти вибраних одиниць товару всі якісні $\}$ можна подати у вигляді:

$$B=A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4\cdot A_5.$$

Якщо відбулася подія B, то, за умовою, партію товару буде прийнято, тобто події A й B – протилежні: $B=\overline{A}$. Отже,

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5).$$

Очевидно, що події A_k залежні. Тому, за формулою (4),

$$P(A)=1-P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdot$$

$$\cdot P(A_4|A_1A_2A_3)\cdot P(A_5|A_1A_2A_3A_4),$$

тобто

$$P(A)=1-\frac{96}{100}\cdot\frac{95}{99}\cdot\frac{94}{98}\cdot\frac{93}{97}\cdot\frac{92}{96}\approx 0{,}19.$$

Цю задачу можна розв'язати й інакше, використовуючи поняття класичної ймовірності. Зробіть це самотужки. ►

2.5. Формула повної ймовірності

Нехай подія A може настати лише за умови, що настала одна з подій H_1, H_2, ..., H_n, які несумісні й утворюють повну групу, тобто

$$H_i \cap H_j = \varnothing, \text{ якщо } j \neq i, \text{ і } \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$$

Події H_1, H_2, ..., H_n називають *гіпотезами*.

Нехай імовірності гіпотез $P(H_i)$ й умовні ймовірності $P(A|H_i)$ ($i = \overline{1, n}$) події A відомі. Тоді ймовірність настання події A визначається такою теоремою.

Теорема (формула повної ймовірності). Ймовірність події A дорівнює сумі добутків імовірностей гіпотез на відповідні їм умовні ймовірності події A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i) \text{ . } \blacktriangle \qquad (1)$$

Приклад. Магазин реалізує продукцію певного виду, отриману від трьох виробників. Продукція першого виробника складає 50 %, другого – 30 %, третього – 20 %. У продукції першого виробника нестандартна складає 2 %, другого – 3 %, а третього – 5 %. Відшукаймо ймовірність того, що навмання придбана одиниця продукції нестандартна.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що навмання придбана одиниця продукції нестандартна, а події H_1, H_2, H_3 – гіпотези про те, що придбана одиниця продукції виготовлена відповідно першим, другим, третім виробниками. За умовою, ймовірності того, що одиниця продукції виготовлена першим, другим, третім виробниками дорівнюють відповідно $P(H_1) = 0{,}5$; $P(H_2) = 0{,}3$; $P(H_3) = 0{,}2$. Умовна ймовірність того, що нестандартна одиниця продукції виготовлена першим виробником, $P(A|H_1) = 0{,}02$, другим – $P(A|H_2) = 0{,}03$, третім – $P(A|H_3) = 0{,}05$. Ймовірність того, що навмання куплена одиниця продукції нестандартна, описується формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A|H_i) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}029 \text{ . } \blacktriangleright$$

2.6. Ймовірність гіпотез. Формула Байєса

Нехай несумісні події (гіпотези) H_1, H_2, ..., H_n утворюють повну групу, і відомі їхні ймовірності: $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$. Подія A може настати лише сумісно з однією з гіпотез H_i, $i=\overline{1,n}$, до того ж гіпотези приписують події A ймовірності $P(A|H_i)$, які також відомі.

Припустімо, що подія A відбулася. Це змінить імовірності гіпотез $P(H_i)$. Оскільки A залежить від H_i, то й H_i залежить від A. Завдання полягає в тому, щоб, маючи нову інформацію – подія A відбулася, – переоцінити ймовірності гіпотез. Іншими словами, слід визначити умовні ймовірності гіпотез за умови, що подія A відбулася, тобто треба знайти $P(H_i|A)$, $i=\overline{1,n}$. Зокрема, очевидно, що гіпотези, які заперечують появу події A, треба відкинути.

Нехай подія A настала разом з H_i, тобто відбулася подія $H_i \cap A$. За теоремою про ймовірність добутку подій

$$P(A \cap H_i) = P(A)P(H_i|A) = P(H_i)P(A|H_i),$$

звідки

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)\cdot P(H_i)}{P(A)}. \qquad (1)$$

$P(A)$ знаходимо за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)\cdot(A|H_k).$$

Підставивши цей вираз у попередній, отримаємо формулу для відшукання ймовірностей гіпотез H_i за умови, що подія A відбулася – *формулу Байєса*:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n}(A|H_k)P(H_k)}. \qquad (2)$$

Подія A може настати лише разом з однією із подій H_1, H_2, ..., H_n, які утворюють повну групу, тому зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^{n}(H_i|A) = 1.$$

Приклад. Нехай у трьох ящиках є по 100 деталей. Відомо, що кількість бракованих деталей у першому ящику дорівнює 8, у другому – 5, у третьому – 13. Навмання вибирають ящик, а з нього навмання вибирають деталь. Якщо вибрана деталь бракована (подія A), то найімовірніше, що ця деталь із третього ящика, позаяк у ньому найбільша частка браку, хоча спочатку гіпотези H_1, H_2, H_3 – вибір першого, другого, третього ящиків – були рівноможливими:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \tfrac{1}{3}.$$

Отже, після того як відбулася подія A, є підстави для переоцінки ймовірностей гіпотез H_1, H_2, H_3. Точніше, потрібно визначити ймовірності гіпотез H_i за умови, що настала подія A, тобто потрібно відшукати ймовірності $P(H_i|A)$.

Відшукаймо ймовірності гіпотез для цього прикладу.

Ймовірності взяти браковану деталь відповідно з першого, другого і третього ящиків дорівнюють відповідно

$$P(A|H_1) = 0{,}08, \quad P(A|H_2) = 0{,}05, \quad P(A|H_3) = 0{,}13.$$

Значення знаменника у формулі (2) (ймовірність події A):

$$\sum_{k=1}^{3} P(A|H_k)P(H_k) = 0{,}08 \cdot \tfrac{1}{3} + 0{,}05 \cdot \tfrac{1}{3} + 0{,}13 \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{13}{150}.$$

Тоді ймовірність того, що взята бракована деталь – із першого ящика,

$$P(H_1|A) = \frac{0{,}08 \cdot (1/3)}{13/150} = \frac{4}{13}.$$

Аналогічно знаходимо ймовірності того, що взята бракована деталь із другого ящика; із третього ящика:

$$P(H_2|A) = \tfrac{5}{26}, \quad P(H_3|A) = \tfrac{1}{2}.$$

Позаяк події $H_1|A$, $H_2|A$, $H_3|A$ утворюють повну групу, то

$$\sum_{k=1}^{3} P(H_k|A) = \tfrac{4}{13} + \tfrac{5}{26} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Отже, найімовірніше, що деталь взято з третього ящика. ►

Задачі до розділів 1–2

1. Кидають дві гральні кості, яка ймовірність того, що 1) сума очок дорівнює 3, 4, 8, 11; 2) різниця очок дорівнює 1, 2, 0?

2. В урні 100 куль, пронумерованих від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер навмання взятої кулі не містить цифри 1.

3. Що ймовірніше: при двох киданнях монети отримати принаймні раз герб чи двічі цифру?

4. n дівчат і n хлопців розташовуються довільним способом на $2n$ місць. Яка ймовірність того, а) що жодні дві дівчини не сидітимуть поруч? б) що всі дівчата сидітимуть поруч?

5. Яка ймовірність вгадати 3, 4, 5 номерів із 10?

6. Двоє гравців кидають гральний кубик по одному разу. Яка ймовірність того, що в першого випаде більше очок?

7. Пофарбований куб із ребром 10 см розрізали на кубики з ребром 1 см. Знайти ймовірність того, що взятий навмання кубик а) має одну пофарбовану грань; б) має дві пофарбовані грані; в) має три пофарбовані грані; г) не має пофарбованих граней.

9. Абонент, набираючи номер телефону, забув дві останні цифри і набрав їх навмання. Яка ймовірність того, що номер набрано правильно?

10. У записі телефонного номера стерлися три останні цифри. Вважаючи, що всі комбінації стертих цифр рівноймовірні, знайти ймовірність того, що стерлися різні цифри, відмінні від 1, 3, 5.

11. Зі слова "південь" навмання одну за одною вибирають шість букв. Яка ймовірність того, що послідовність цих букв утворить слово "Відень"?

12. З колоди, що містить 52 карти, навмання взято три карти. Яка ймовірність того, що це дві сімки й туз?

13. Серед 17 гостей двоє закоханих. Гості навмання розсідаються на 17 місцях. Яка ймовірність того, що закохані сядуть поруч?

14. У лотереї 10 білетів – 5 виграшів і 5 програшів. Навмання беруть два білети. Яка ймовірність принаймні одного виграшу?

15. Серед 10 книг, що стоять на полиці, 4 – з математики. Яка ймовірність того, що всі книги з математики стоять поряд?

16. З десяти карток, які пронумеровано натуральними числами від 1 до 10, навмання беруть дві. Знайти ймовірність того, що сума номерів взятих карток – непарне число.

17. Слово "рахувати" розрізали на окремі букви. Навмання беруть три букви. Яка ймовірність отримати слово "рух"?

18. Яка ймовірність того, що навмання взяте чотиризначне число містить рівно дві однакові цифри; принаймні дві однакові цифри?

19. Ймовірність влучення в ціль із першої гармати – 0,9, із другої – 0,8. Знайти ймовірність принаймні одного влучення.
20. У двох коробках міститься по 10 куль. Відомо, що в кожній коробці є 1 чорна куля, а решта – білі. З кожної коробки навмання беруть по одній кулі. Яка ймовірність того, що одна з них чорна; принаймні одна з них чорна?
21. Вироби розкладено у 100 ящиків по 100 штук у кожному. У кожному ящику є 1 нестандартний виріб. З кожного ящика навмання беруть по одному виробу. Яка ймовірність того, що принаймні один із них нестандартний?
22. Кидають три гральні кості. Знайти ймовірність появи 4 очок принаймні на одній із костей.
23. Гральний кубик кидають 3 рази. Яка ймовірність того, що принаймні один раз не появиться 4 очки?
24. Яка ймовірність того, що з 4 цифр номера машини три однакові?
25. Одночасно кидають чотири гральні кості. Знайти ймовірність того, що: 1) появиться рівно одна шістка (подія A); 2) не появиться жодної шістки (подія B); 3) появиться принаймні одна шістка (подія C); 4) на всіх костях появиться різна кількість очок (подія D).
26. Ймовірність того, що один із чотирьох пристроїв працює в довільний момент часу t, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що в момент часу t працює принаймні один пристрій.
27. 10 приладів увімкнено в мережу послідовно. Яка ймовірність розриву кола, якщо ймовірність перегоряння приладу $0{,}1$?
28. Ймовірність влучення в ціль 0,9. Яка ймовірність того, що влучними будуть а) три послідовні постріли; б) принаймні один із трьох?
29. У першому ящику 40 % виробів першого сорту, а в другому – 30 %. З кожного ящика взяли по одиниці продукції. Яка ймовірність того, що а) обидва вироби першого сорту? б) першого і не першого?
30. Ймовірність отримати брак під час першої обробки деталі дорівнює 1 %, під час другої – 2 %, під час третьої – 3 %. Вважаючи операції обробки незалежними подіями, знайти ймовірність виготовлення стандартної деталі.
31. Коли ймовірніше вгадати результат: якщо відомо, що сума очок при киданні двох костей дорівнює 10 чи якщо сума очок дорівнює 7?
32. У першій урні 8 чорних і 2 білі кулі, у другій 7 чорних і 3 білі. Навмання беруть по кулі з кожної урни. Яка ймовірність того, що: а) принаймні одна чорна; б) дві чорні; в) дві білі; г) одна біла і одна чорна?
34. У круг радіуса 3 см вписано квадрат. У круг навмання ставлять крапку. Яка ймовірність того, що крапка потрапить у квадрат?
35. У квадрат зі стороною a вписано менший квадрат так, що його вершини поділяють сторони більшого квадрата у відношенні $1:2$. У більшому квадраті навмання ставлять крапку. Яка ймовірність того, що крапка потрапить у менший квадрат?

36. На відрізку довжиною l навмання ставлять дві точки, які поділяють його на три частини. Яка ймовірність того, що з отриманих частин можна скласти трикутник?

37. У партії з 30 виробів 8 нестандартних. Для контролю навмання беруть 5 виробів. За домовленістю партія приймається, якщо серед узятих виробів усі стандартні. Яка ймовірність того, що партію буде прийнято?

38. Серед продукції виробника $4\,\%$ браку. Знайти ймовірність того, що навмання взята одиниця продукції має найвищу якість, якщо $75\,\%$ стандартної продукції має найвищу якість.

39. В урні є 49 куль, номери яких від 1 до 49. Серед усіх номерів – 6 виграшних. З урни навмання одна за одною без повернення беруть 6 куль. Яка ймовірність того, що номери всіх шести взятих куль – виграшні?

40. Ймовірність банкрутства першої фірми дорівнює 0,4, а другої – на 25 % менша. Яка ймовірність банкрутства принаймні однієї фірми?

41. В урні 20 чорних і 5 білих куль. З урни навмання одна за одною беруть (не повертаючи) кулі доти, доки не появиться біла куля. Яка ймовірність того, що буде взято менше ніж 4 кулі?

42. Серед 35 виробів 20 виробів вищого ґатунку, решта – першого. Яка ймовірність того, що два навмання взяті вироби вищого ґатунку?

43. У мішку 3 білі і 5 чорних куль. З мішка беруть по одній усі кулі. Яка ймовірність того, що остання куля буде білою?

44. В одному мішку 5 білих куль і 3 чорні, у другому – 6 білих і 4 чорні. З першого мішка беруть кулю і кладуть у другий. Ретельно перемішавши кулі у другому мішку, беруть одну і кладуть у перший. Знайти ймовірність того, що співвідношення куль у мішках не змінилося.

48. В автобусі їдуть n пасажирів. На наступній зупинці кожен із них може вийти з імовірністю p. На зупинці в автобус може зайти не більше ніж один пасажир, до того ж імовірність того, що в автобус ніхто не зайде, дорівнює p_1. Яка ймовірність того, що коли автобус знову рушить, у ньому, як і раніше, буде n пасажирів?

49. На кожному з чотирьох курсів вишу навчається однакова кількість студентів. Відомо, що спортивний зал регулярно відвідує: 85 % студентів I курсу, 50 % студентів II курсу, 35 % студентів III курсу, 70 % студентів IV курсу. Яка ймовірність того, що випадково вибраний студент регулярно відвідує спортивний зал?

50. В урні 5 білі і 4 чорні кулі. Навмання беруть кулю, а потім другу. Яка ймовірність того, що друга куля біла (вийняті кулі в урну не повертають)?

51. На фабриці верстати I, II, III виготовляють 25 %, 35 % і 40 % усіх виробів відповідно. У їхній продукції брак становить 5 %, 4 % і 2 % відповідно. Яка ймовірність того, що навмання взятий виріб бракований?

52. В урну, де є 3 кулі, кладуть білу кулю і всі кулі ретельно перемішують. Після цього навмання беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що куля біла, якщо всі можливі припущення про кількість білих куль, які були в урні спочатку, рівноможливі.

53. Відомо, що 33 % людей мають першу групу крові, 37 % – другу, 22 % – третю і 8 % – четверту. Кров будь-якої групи можна перелити людям тієї самої групи або людям, група крові яких вища. Хворому потрібне переливання крові. Яка ймовірність того, що переливання можливе, якщо є лише один донор?

54. У першій урні 20 куль, 16 з яких білі. У другій урні 30 куль, 8 з яких білі. З кожної урни навмання взяли по 1 кулі, а потім з-поміж тих двох куль навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що вона біла?

55. В урні 9 куль, 5 з яких помічено. Навмання беруть одну кулю, помічають її і повертають в урну. Потім з урни навмання знову беруть кулю. Яка ймовірність, що взята куля – помічена?

57. По мішені здійснено три постріли. Ймовірність влучення в першому пострілі $p_1 = 0{,}3$, у другому – $p_2 = 0{,}6$, у третьому – $p_3 = 0{,}8$. Ймовірність знищення цілі за одного влученні $g_1 = 0{,}4$, за двох влучень – $g_2 = 0{,}7$, за трьох влучень – $g_3 = 1$. Яка ймовірність того, що ціль знищено після трьох пострілів?

58. Два працівники заповнюють документи і складають їх у спільну папку. Ймовірність помилки в документах, заповнених першим працівником, дорівнює 0,05, а другим – 0,1. Перший працівник заповнив 40 документів, а другий – 60. У навмання взятому з папки документі є помилка. Яка ймовірність того, що його заповнив перший працівник?

59. У лівій кишені в хлопчика 3 шоколадні цукерки й 1 карамель, у правій – 2 шоколадні і 2 карамелі. Хлопчик вийняв із кишені 2 цукерки, і вони виявилися різними. Яка ймовірність того, що цукерки з лівої кишені; з правої?

60. З 20 гвинтівок – 4 з оптичним прицілом. Ймовірність влучення в ціль із гвинтівки з оптичним прицілом дорівнює 0,95, а без оптичного прицілу – 0,85. З навмання взятої гвинтівки зроблено один постріл і знищено ціль. Яка ймовірність того, що гвинтівка з оптичним прицілом?

61. 30 % приладів складає спеціаліст високої кваліфікації, 70 % – середньої. Надійність приладів, складених першим спеціалістом, дорівнює 0,9, другим – 0,8. Вибраний прилад надійний. Яка ймовірність того, що його зібрав перший спеціаліст?

Задачі з комбінаторики

1. Скільки чотиризначних чисел можна утворити з цифр 3, 4, 6, 7, якщо цифри в числах не повторюються?

2. Скількома способами можна розсадити за круглим столом четверо хлопців і четверо дівчат так, щоб жодні дві дівчини не сиділи поруч?

3. В автомобілі 8 місць включно з місцем водія. Скількома способами 8 осіб можуть сісти в авто, якщо лише 3 з них можуть зайняти місце водія?

4. Визначити кількість чотиризначних чисел, які діляться на 5, складених із цифр 0, 1, 2, 5, 6, якщо жодне число не містить однакових цифр.

5. У колоді 36 карт. Знайти кількість варіантів розташування карт, коли усі тузи будуть поряд.

6. Скількома способами можна скласти денний розклад на 5 предметів, якщо всього предметів 10?

7. Скількома способами на шахівниці можна вибрати білий і чорний квадрати так, щоб вони не лежали на одній горизонталі або вертикалі?

8. Визначити кількість способів позначення п'ятикутника, якщо кожну з його вершин можна позначити однією з 23 літер латинської абетки.

9. Знайти кількість способів, якими можна вибрати для опитування 4 студентів із 25.

10. В одного студента 11 книг, у другого – 15. Скількома способами студенти можуть обмінятися будь-якими трьома книжками?

11. З шести осіб для участі в конференції треба вибрати трьох. Скількома способами можна це зробити?

12. Шифр складається з 5 символів: три перші – цифри, два останні – літери латинської абетки (у латинському алфавіті 23 літери). Яка кількість різних варіантів кодів, якщо кожний символ використовують один раз?

13. Розв'язати попередню задачу за умови: усі п'ять символів коду (три цифри і дві букви) різні, але розташовані в довільному порядку.

14. Три особи піднімаються у ліфті шестиповерхового будинку. Скількома способами вони можуть вийти, якщо кожен може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого?

15. У грі "Спортлото" потрібно закреслити 6 чисел з 49. Скільки карток треба купити, щоб обов'язково відгадати виграшну шістку чисел?

16. Скільки сторін має опуклий многокутник, в якому 35 діагоналей?

17. Скільки різних послідовностей можна отримати з літер слова "математика"?

18. Скількома способами можна переставити букви у слові "соловейко" так, щоб три букви "о" не стояли поряд?

20. Скількома способами можна переставити букви слова "комета" так, щоб не змінився порядок голосних?

24. Кожна сторона квадрата точками поділена на шість частин. Скільки можна побудувати трикутників з вершинами у точках поділу?

РОЗДІЛ 3

ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ

3.1. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі

На практиці те саме випробування може повторюватися багато раз. Це може бути, зокрема, квартальна звітність, виробництво продукції на певному устаткуванні за сталого технологічного режиму тощо. Тоді подією A може бути, наприклад, виробництво стандартної одиниці продукції, а протилежною подією $\overline{A}$ – виробництво бракованої одиниці продукції.

Випробування називають *незалежними щодо події* A, якщо ймовірність появи події A в кожному окремому випробувані не залежить від наслідків решти випробувань.

Модель (*схема*) *Бернуллі* – це серія незалежних повторних випробувань, у кожному з яких ймовірність p настання події A та сама. Ймовірність появи події A не залежить від номера випробування. Отже, ймовірність появи події $\overline{A}$ також є сталою величиною в серії випробувань: $q = 1 - p$.

При дослідженні послідовності випробувань Бернуллі інтерес становить не результат окремого досліду, а загальна кількість появ події A в серії дослідів, до того ж порядок появ події не важить. Так, якщо подія A – поява герба при киданні монети, то для події $B =$ {при трьох киданнях монети двічі появиться герб} маємо три сприятливі серії: $AA\overline{A}$, $A\overline{A}A$, $\overline{A}AA$.

Можна довести, що ймовірність $P_n(m)$ того, що в n випробуваннях подія A настане рівно m разів, визначається формулою (*формула Бернуллі*):

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} . \qquad (1)$$

Приклад. Статистичне обстеження показало, що чверть працівників підприємства займається спортом. Яка ймовірність того, що з п’яти навмання вибраних працівників троє займаються спортом?

Розв’язання. Нехай подія A полягає в тому, що навмання вибраний працівник займається спортом. Тоді

$$P(A) = p = \tfrac{1}{4}, \quad q = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

Тут випробуванням є випадковий вибір працівника; $n = 5$, $m = 3$. За формулою Бернуллі отримаємо:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 \left(\tfrac{3}{4}\right)^{5-3} = \tfrac{5!}{3!\cdot 2!} \cdot \tfrac{1}{64} \cdot \tfrac{9}{16} = \tfrac{90}{1024} \approx 0{,}088. \ ►$$

3.2. Найімовірніша кількість появ події у випробуваннях Бернуллі

З формули Бернуллі $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ видно, що за сталої кількості випробувань n імовірність є функцією m. *Найімовірніша кількість появ події* A в n випробуваннях дорівнює такому числові m_0, що ймовірність $P_n(m_0)$ є принаймні не меншою від імовірності решти можливих кількостей появи події A. (Число m_0 називають *модою*.)

Доведено, що найімовірніша кількість m_0 появ події в n незалежних випробуваннях Бернуллі задовольняє умови

$$np - q \le m_0 \le np + p. \qquad (1)$$

Довжина інтервалу, який визначає ця нерівність, дорівнює одиниці:

$$(np + p) - (np - q) = p + q = 1,$$

а число m_0 – ціле. Тому:

1) якщо $np - q$ — ціле число, то дістанемо два значення найімовірнішої кількості появ події: $m_0 = np - q$ та $m_0 = np + p$;

2) якщо $np - q$ — дробове, то m_0 дорівнює цілій частині числа $np + p$: $m_0 = [np + p]$.

Приклад. Ймовірність влучення в ціль в одному пострілі дорівнює 0,6. Відшукаймо найімовірнішу кількість влучень у 14 пострілах; у 20 пострілах.

Розв’язання. Тут: $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$. Для $n = 14$ дістанемо:

$$np - q = 14 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 = 8.$$

Позаяк $np - q$ — ціле, то найімовірніша кількість влучень має два значення: $m_0 = 8$, $m_0 = 9$. Ймовірність влучень

$$P_{14}(8) = C_{14}^8 p^8 q^{14-8} = P_{14}(9) \approx 0{,}207.$$

Для $n=20$ знаходимо: $np-q=11{,}6$, $np+p=12{,}6$. Отже, найімовірніша кількість влучень $m_0=12$; ймовірність цієї кількості влучень

$$P_{20}(12)\approx 0{,}18.$$

Зауважмо: те, що $P_{14}(8)=P_{14}(9)$, є лише наслідком поєднання конкретних значень n та p і не має якогось глибшого змісту. ►

3.3. Граничні випадки формули Бернуллі

Відшуканя ймовірності за формулою Бернуллі

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \tag{1}$$

є у принципі нескладною процедурою, але за великих m та n розрахунки стають надто громіздкими. Тоді на практиці часто жертвують точністю, замінюючи точну формулу (1) наближеними, але зручнішими в користуванні формулами. Здебільшого така заміна однієї формули іншою можлива тоді, коли певна величина (чи величини), що входять у формулу, прямують до нескінченності чи до нуля.

3.3.1. Локальна теорема Муавра – Лапласа.

Теорема 1 (локальна теорема Муавра – Лапласа). За достатньо великої кількості n випробувань імовірність того, що в моделі Бернуллі подія A, ймовірність появи якої в одному випробуванні стала і дорівнює p, $0<p<1$, настане рівно m разів,

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x), \tag{2}$$

де

$$q=1-p,\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}},\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}. \ ▲$$

Наближення, яке дає рівність (2) тим краще, чим більше n; відносна похибка формули прямує до нуля, якщо $n\to\infty$.

Можна довести, що формула (2) справджується з прийнятним рівнем точності, якщо $npq\geq 10$. Важливо, що при цьому $p\neq 0$ і $p\neq 1$, точніше, ймовірність не повинна бути надто близькою до 0 або до 1 (кажуть: "ймовірність p не мала і не велика"). За інших однакових умов наближення для $P_n(m)$, яке дає формула (2), тим краще, чим p ближче до $0{,}5$.

Функцію $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ називають *функцією Гаусса.*

Очевидно, що функція Гаусса – парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Графік функції Гаусса називають *кривою Гаусса* (рис. 3.1).

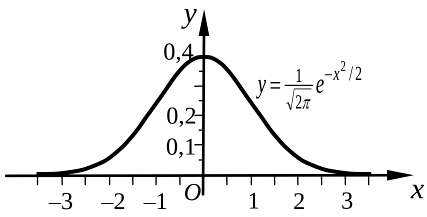


Рис. 3.1

Для значень функції $\varphi(x)$ укладено детальні таблиці (додаток 1). Якщо $|x| > 4$, то, як видно з додатку 1, $\varphi(x)$ практично дорівнює 0.

Приклад 1. Річний прибуток $80\ \%$ малих підприємств регіону перевищує 1 млн. гр. од. Навмання вибирають 300 підприємств. Яка ймовірність, що серед них є а) 190, б) 230, в) 245 малих підприємств, прибуток яких перевищує 1 млн. гр. од.?

Розв'язання. Як нескладно зрозуміти, тут $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $n = 300$, а m набуває значень 190, 230 та 245. Оскільки $npq = 48 > 10$, то для відшукання ймовірностей можна скористатися локальною теоремою Муавра – Лапласа, тобто формулою (2).

Тоді для $m = 190$ маємо:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{190 - 240}{\sqrt{48}} \approx -7{,}2169 .$$

З огляду на те що $\varphi(|x| > 4) = 0$, отримаємо:

$$P_{300}(190) \approx \frac{1}{\sqrt{48}} \varphi(-7{,}22) = 0 ,$$

тобто подія практично неможлива.

Для $m = 230$ $x = \dfrac{230 - 240}{\sqrt{48}} \approx -1{,}4434$, і в додатку 1 (з огляду на парність функції Гаусса) знаходимо: $\varphi(-1{,}44) = \varphi(1{,}44) \approx 0{,}1415$.

Отже,

$$P_{300}(230) \approx \frac{1}{\sqrt{48}} \varphi(1{,}44) \approx 0{,}1445 \cdot 0{,}1415 \approx 0{,}02 .$$

Аналогічно, для $m = 245$ маємо:

$$x \approx 0{,}72 ,\ \varphi(0{,}72) = 0{,}3079 ,\ P_{300}(245) \approx 0{,}04 . \ \blacktriangleright$$

3.3.2. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа. Часто в умовах схеми Бернулі потрібно визначити не ймовірність $P_n(m)$ того, що випадкова подія в n випробуваннях настане рівно m разів, а ймовірність того, що в n дослідах подія з'явиться не менше m_1 і не більше m_2 разів. Позначатимемо цю ймовірність $P_n(m_1,\ m_2)$.

Теорема 2 (інтегральна теорема Муавра – Лапласа). За досить великої кількості n випробувань в умовах схеми Бернуллі ймовірність $P_n(m_1,\ m_2)$ того, що випадкова подія A настане не менше ніж m_1 і не більше ніж m_2 разів, визначають за *інтегральною формулою Муавра – Лапласа*:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{3}$$

де

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, \tag{4}$$

(p – ймовірність появи події A в одному випробуванні, $q = 1 - p$), а $\Phi(x)$ – *функція Лапласа* (*стандартний інтеграл імовірностей*)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt, \tag{5}$$

значення якої табульовано (додаток 2). ▲

Як відомо, невизначений інтеграл $\int e^{-t^2/2} dt$ не можна подати через елементарні функції за допомогою скінченної кількості арифметичних дій і суперпозиції цих функцій. Для відшукання визначених інтегралів у таких випадках розглядають складніші функції, одним із прикладів яких і є функція (5). Значення інтеграла (5) можна вирахувати з будь-якою потрібною точністю. Для зручності ці значення табульовано.

З точністю до тисячних $\Phi(x) \approx 0{,}5$, якщо $x > 3$.

Очевидно, що функція Лапласа непарна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Приклад 2. Серед виробів підприємства 10% нестандартних. Яка ймовірність того, що серед 500 навмання взятих виробів стандартних буде від 440 до 455?

Розв'язання. Нехай подія

$$A = \{\text{взято стандартний виріб}\}.$$

Тоді

$$p = P(A) = 0{,}9, \ q = 0{,}1, \ n = 500, \ m_1 = 440, \ m_2 = 455,$$

$$x_1 = \frac{440 - 450}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -1{,}49\,, \quad x_2 = \frac{455 - 450}{\sqrt{500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 0{,}75\,.$$

За формулою (8), використовуючи таблицю значень функції Лапласа (додаток 2), знаходимо:

$$P_{500}(440,\ 455) = \Phi(0{,}75) - \Phi(-1{,}49) =$$

$$= \Phi(0{,}75) + \Phi(1{,}49) = 0{,}2735 + 0{,}4320 = 0{,}7055\,. \blacktriangleright$$

3.3.3. Теорема Пуассона. Розбіжності між наближеними результатами для $P_n(m)$ і $P_n(m_1, m_2)$, отриманими на підставі теорем Лапласа, і їх точними значеннями, знайденими за формулою Бернуллі, є малими за умови, що кількість випробувань n досить велика, а ймовірність p настання події в одному випробуванні – "не мала і не велика". Але навіть за великих n похибка, яку дають асимптотичні формули, є значною, якщо ймовірність p дуже близька до 0 або 1. Так, якщо $p = 0{,}001$, то для $n = 1000$ дістанемо $npq \approx 1$ і критерій застосовності теорем Лапласа не справджується.

На практиці часто трапляються події, коли значення p мале (*рідкісні події*). Асимптотичною формулою, яка дає добрі наближення для $P_n(m)$ за малих p і водночас зручна в користуванні, є *формула Пуассона*:

$$P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}\,,$$

яка придатна за умови, що $p < 0{,}1$, $n \geq 50$, $npq < 10$.

Зауважмо, що формула дає правильний результат і для $p = 0$.

Приклад 3. Ймовірність пошкодження одиниці продукції під час транспортування дорівнює $0{,}004$. Яка ймовірність того, що з 1000 одиниць 5 виявляться пошкодженими під час перевезення?

Розв'язання. Нехай подія

$A = \{$навмання взята одиниця продукції пошкоджена$\}$.

За умовою $p = 0{,}004$, $m = 5$, $q = 0{,}996$, $npq \approx 4$. Позаяк умови застосовності формули Пуассона справджуються, то за таблицею значень розподілу Пуассона (додаток 5) для $\lambda = 4$ і $k = 5$ знаходимо:

$$P_{1000}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0{,}1563\,.$$

Зауважмо, що значення $P_{1000}(5)$, отримане за формулою Бернуллі, дорівнює приблизно $0{,}1552$, а за локальною теоремою Лапласа – $0{,}1763$.

Порівнюючи абсолютні похибки, яких припускаємося, застосовуючи граничні теореми замість формули Бернуллі, отримуємо:

$$\frac{0{,}1763 - 0{,}1552}{0{,}1563 - 0{,}1552} \approx 19{,}2\,,$$

тобто для рідкісних подій абсолютна похибка розрахунків за формулою Лапласа майже у 20 разів більша за похибку, яку дає формула Пуассона. ►

3.4. Ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності у схемі Бернуллі

Доведено, що ймовірність події, яка полягає в тому, що відносна частота за абсолютною величиною буде відхилятися від імовірності p не більше ніж на задану величину ε, тобто ймовірність події $\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon$,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Приклад. Скільки разів треба підкинути монету, щоби з імовірністю $0{,}99$ можна було стверджувати, що відхилення відносної частоти появи герба від імовірності його появи в одному випробуванні за абсолютною величиною не перевищує $0{,}02$?

Розв'язання. За умовою задачі

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 0{,}99\,,$$

де $p = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}02$. Необхідно визначити n.

З огляду на формулу (2) $2\Phi(x) = 0{,}99$, або $\Phi(x) = 0{,}495$, де $x = \varepsilon\sqrt{n/pq}$. У таблиці значень функції Лапласа (додаток 2) є значення $0{,}4948$ для $x = 2{,}56$ і $0{,}4951$ для $x = 2{,}58$. Зрозуміло, що для гарантії треба вибрати більше з цих значень. Тоді

$$0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{n}{0{,}5 \cdot 0{,}5}} \approx 2{,}58\,,$$

звідки отримуємо: $\sqrt{n} \approx 64{,}5$. Позаяк n – ціле число, то $n \approx 4161$. ►

Задачі до розділу 3

1. Ймовірність виходу з ладу кожного приладу під час випробування не залежить від виходу з ладу інших приладів і дорівнює $0,2$. Випробувано 7 приладів. Знайти такі ймовірності: $P_7(0)$; $P_7(m < 3)$; $P_7(m \geq 3)$.

2. За статистикою митного контролю $15\,\%$ усіх осіб, що повертаються із-за кордону, не декларують весь товар, що підлягає оподаткуванню. Яка ймовірність того, що з 5 осіб 3 не задекларувало весь товар?

3. Що ймовірніше: виграти в рівносильного суперника не менше ніж три партії з чотирьох чи не менше ніж п'ять із восьми?

4. Вивчивши попит на ринку, організація вирішила продати партію з 9 автомобілів. Ймовірність того, що реалізація одного автомобіля дасть прибуток, дорівнює $0,8$. Реалізація вважається успішною, якщо впродовж дня буде продано не менше семи автомобілів. Продаж автомобілів проводиться незалежно. Яка ймовірність успішної реалізації?

5. Статистичні обстеження свідчать, що $80\,\%$ родин мають комп'ютер. Яка ймовірність того, що три з п'яти навмання вибраних родин мають комп'ютер?

6. Ймовірність того, що в даний момент працює кожен з 10 комп'ютерів, дорівнює $0,8$. Яка ймовірність того, що а) працює половина комп'ютерів; б) працюють усі комп'ютери; в) не працює жоден комп'ютер?

7. Знайти ймовірність того, що при киданні чотирьох гральних кубиків на трьох випаде по два очки.

8. Подія B може настати лише за умови, що не менше ніж три рази настане подія A. Знайти ймовірність настання події B, якщо проведено сім незалежних спроб, у кожній з яких подія A може настати з імовірністю $0,3$.

11. Скільки разів необхідно підкинути гральний кубик, щоб найімовірніша кількість появи шести очок дорівнювала 15?

12. У сім'ї 5 дітей. Ймовірність народження хлопчика $0,51$. Яка ймовірність того, що кількість хлопчиків не менша від двох і не більша від m_0, де m_0 – найімовірніша кількість хлопчиків у сім'ї?

13. Скільки разів треба повторити випробування, щоб з імовірністю, не меншою від g, можна було стверджувати, що принаймні раз настане подія, ймовірність якої в кожному випробуванні дорівнює p?

14. Скільки разів треба кинути гральний кубик, щоби ймовірність появи принаймні один раз шести очок була не меншою а) від $0,5$; б) від $0,8$; в) від $0,9$?

16. Ймовірність несвоєчасної сплати податку кожним із 500 підприємств дорівнює $0{,}1$. Знайти найімовірнішу кількість підприємств, які несвоєчасно сплатять податок, і визначити відповідну ймовірність.

17. Схожість насіння деякої культури становить 70 %. Яка ймовірність того, що а) з 10 посіяних насінин проросте 6; б) зі 100 проросте 70; в) зі 100 проросте від 65 до 90?

18. Ймовірність появи події в одному випробуванні дорівнює $0{,}4$. Знайти ймовірність того, що в 100 випробуваннях подія настане не менше 35 і не більше 80 разів.

19. У середньому 70 студентів зі 100 займаються у спортивних секціях. Яка ймовірність того, що з 2100 студентів навчального закладу не менше 1470 відвідують спортивні секції?

20. 80 % продукції підприємства становлять вироби вищої якості. Скільки одиниць продукції слід узяти, щоб з імовірністю $0{,}99$ можна було стверджувати, що серед узятих вироби вищої якості становлять від 75 % до 85 %?

22. Виробник відправив замовникові 1000 виробів. Ймовірність пошкодження виробу в дорозі дорівнює $0{,}002$. Яка ймовірність пошкодження рівно 3 виробів?

23. Військовий підрозділ веде стрільбу по рухомій мішені. Знайти ймовірність того, що буде не менше двох влучень у мішень, якщо зроблено 5000 пострілів, а ймовірність влучення в кожному пострілі дорівнює $0{,}001$.

24. Пристрій складається з 1000 елементів. Ймовірність відмови окремого елемента впродовж року дорівнює $0{,}001$ і не залежить від стану інших елементів. Знайти ймовірність відмови а) двох елементів; б) не менше ніж двох елементів.

26. 90 % продукції виробника становлять вироби найвищого ґатунку. Для контролю випадковим способом відібрано 300 одиниць продукції. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи продукції найвищого ґатунку у вибірці не перевищить за модулем імовірності більше ніж на $0{,}04$. В яких межах тоді буде знаходитися кількість виробів найвищого ґатунку у вибірці?

27. Ймовірність настання події A в кожному з 1000 незалежних випробувань дорівнює $0{,}01$. Знайти межі, в яких з імовірністю $0{,}99$ знаходиться відносна частота появи події A.

28. Серед усіх виробів 10 % становлять нестандартні. Яка ймовірність того, що у випадковій вибірці з 400 виробів відносна частота появи нестандартних виробів відхиляється за абсолютною величиною від імовірності не більше ніж на $0{,}03$?

РОЗДІЛ 4

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

4.1. Випадкова величини. Ряд розподілу

Випадковою величиною називають змінну величину, яка в результаті випробування залежно від випадкових обставин може набувати того або іншого наперед невідомого значення.

Прикладами випадкових величин є 1) кількість очок, яка може появитися при киданні гральної кості (випадкова величина може набути одного із шести значень 1, 2, 3, 4, 5, 6); 2) кількість гербів, яка може появитися при киданні трьох монет (0, 1, 2, 3); 3) час обслуговування клієнта в банку; 4) віддаль від центру мішені до точки влучення тощо.

Випадкові величини позначають великими літерами латинської абетки, зазвичай це X, Y, Z, а можливі значення випадкових величин – відповідними малими літерами.

Випадкові величини поділяють дискретні і неперервні.

Випадкову величину називають *дискретною*, якщо вона набуває окремих, ізольованих одне від одного значень. Множина значень дискретної випадкової величини може бути як скінченною, так і нескінченною, важить лише, щоби вона була зліченною, тобто щоб її елементи можна було занумерувати числами 1, 2, 3, ...

Якщо значення випадкової величини неперервно заповнюють проміжок, то таку величину називають *неперервною*.

Закон розподілу випадкової величини (або *розподіл імовірностей випадкової величини*) – це правило, що дає змогу вказати ймовірність, з якою випадкова величина набуває того чи іншого значення. Про випадкову величину кажуть, що вона підлягає даному законові розподілу.

Задати випадкову величину означає задати її закон розподілу.

Дві випадкові величини називають *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від значень, яких набула друга. В іншому разі випадкові величини називають *залежними*.

Закон розподілу випадкової величини можна задати у вигляді таблиці, графічно або аналітично.

Таблиця є найпростішою формою задання розподілу ймовірностей і придатна лише для опису дискретних випадкових величин. Табличну форму задання закону розподілу називають *рядом розподілу*. Ряд розподілу містить перелік можливих значень x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n випадкової величини X і відповідних їм імовірностей p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n:

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Те, що випадкова величина X обов'язково набуде одного зі своїх значень x_1, x_2, ..., x_n, є подія вірогідна, і тому справджується умова $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, де n може бути й нескінченним.

Для графічного зображення ряду розподілу дискретної випадкової величини використовують *многокутник розподілу*. Для цього на осі абсцис відкладають можливі значення x_i випадкової величини, а на осі ординат – відповідні ймовірності p_i. З'єднавши одержані точки $(x_i;\ p_i)$ прямолінійними відрізками, одержимо фігуру, яку називають *многокутником розподілу* (рис. 4.1).

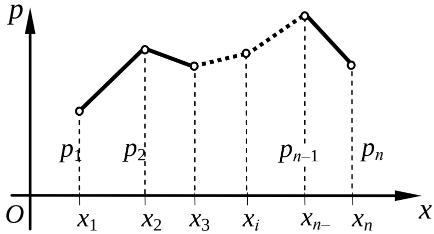


Рис. 4.1

Випадкова величина є функцією елементарних подій. Якщо множина елементарних подій скінченна, то випадкову величину можна задати, вказавши її значення на всіх елементарних подіях.

Приклад. Мисливець має три набої і стріляє в ціль до першого влучення. Випадковою величиною є кількість використаних набоїв. Побудуймо закон розподілу випадкової величини, якщо ймовірність влучення в одному пострілі $0{,}7$.

Розв'язання. Ймовірність влучення з першого пострілу $p_1 = 0{,}7$.

Два набої буде використано, якщо в першому пострілі – промах, а в другому – влучення. Відповідна ймовірність

$$p_2 = (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}7 = 0{,}21 .$$

Мисливець використає всі три набої, якщо промахнеться у перших двох пострілах. Ймовірність двох промахів

$$p_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09 .$$

Ряд розподілу має вигляд:

X	1	2	3
P	0,7	0,21	0,09

Зауважмо, що ймовірність p_3 можна знайти інакше. Справді, подія

$$A = \{\text{використано три набої}\}$$

є сумою двох несумісних подій:

$$A_1 = \{\text{три постріли невлучні}\},$$

$$A_2 = \{\text{перші два постріли невлучні, а третій – влучний}\}.$$

Тому зрозуміло, що $p_3 = P(A_1) + P(A_2)$, тобто

$$p_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}09 . \blacktriangleright$$

4.2. Функція розподілу випадкової величини

Функція розподілука є найзагальнішою формою задання закону розподілу випадкової величини. Функція розподілу придатна для опису як дискретної, так і неперервної випадкової величини.

Нехай число x – можливе значення випадкової величини X. *Функцією розподілу випадкової величини* X називають функцією $F(x)$, яка дорівнює ймовірності того, що випадкова величина набуває значення, меншого за $x : F(x) = P(X < x)$.

Якщо випадкову величину X розглядати як випадкову точку осі Ox, то очевидним стає геометричне тлумачення функції розподілу: $F(x)$ є ймовірність того, що внаслідок випробування випадкова точка X потрапляє лівіше від точки x (рис. 4.2).

Рис. 4.2

Функцію $F(x)$ називають також *інтегральною функцією розподілу* або *інтегральним законом розподілу*.

Як і ймовірність, $F(x)$ є безрозмірною (неіменованою) величиною.

Побудуймо графік функції розподілу дискретної випадкової величини. Зрозуміло, що в цьому разі

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i),$$

де нерівність $x_i < x$ (під знаком суми) означає, що підсумовуються ймовірності тих значень x_i, які менші за x.

З огляду на означення інтегральної функції розподілу, для дискретної випадкової величини просто знайти її значення для окремих проміжків:

$F(x) = P(X < x_1) = 0$, якщо $x \le x_1$;

$F(x) = P(X < x_2) = P(X = x_1) = p_1$, якщо $x_1 < x \le x_2$;

$F(x) = P(X < x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2$, якщо $x_2 < x \le x_3$;

. . . .

$F(x) = P(X < x_n) = p_1 + p_2 + ... + p_{n-1}$, якщо $x_{n-1} < x \le x_n$;

$F(x) = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$, якщо $x > x_n$.

На рис. 4.3 зображено графік інтегральної функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини. Це розривна східчаста лінія, неперервна ліворуч у кожній точці x_i. Функція розподілу дискретної величини має розриви (*стрибки*) в точках, де випадкова величина набуває конкретних значень, вказаних у ряді розподілу. На проміжках між цими значеннями $F(x)$ стала. Сума стрибків дорівнює одиниці.

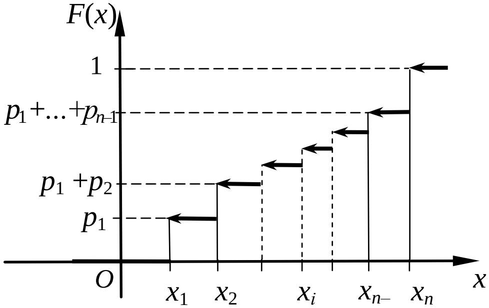


Рис. 4.3

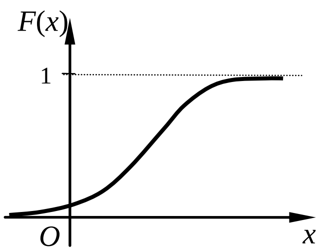


Рис. 4.4

Неперервна випадкова величина – це випадкова величина, інтегральна функція розподілу якої неперервна. Така величина набуває всіх значень із деякого проміжку. Графік інтегральної функції розподілу неперервної випадкової величини є неперервною кривою (рис. 4.4).

Приклад. Проводять три незалежні постріли по мішені. Ймовірність влучення в одному пострілі дорівнює $0{,}6$. Побудуймо функцію розподілу кількості влучень.

Розв'язання. Випадкова величина X – кількість влучень – може набувати значень 0, 1, 2, 3. Ймовірності набуття цих значень знаходимо за формулою Бернулі:

$$P_3(0) = C_3^0 (0{,}6)^0 (0{,}4)^3 = 0{,}064 ,$$

Аналогічно,

$$P_3(1) = 0{,}288 , \quad P_3(2) = 0{,}432 , \quad P_3(3) = 0{,}216 .$$

Отже, закон розподілу випадкової величини X виглядає так:

X	0	1	2	3
P	0,064	0,288	0,432	0,216

Можливі значення випадкової величини розбивають числову вісь на п'ять проміжків. За означенням інтегральна функція розподілу

$$F(x) = P(X < x_i), \text{ якщо } x \le x_i .$$

Тоді отримуємо:

$F(x) = P(X < 0) = 0$, якщо $-\infty < x \le 0$;

$F(x) = P(X < 1) = P(x = 0) = 0{,}064$, якщо $0 < x \le 1$;

$F(x) = P(X < 2) = P(x = 0) + P(x = 1) = 0{,}064 + 0{,}288 = 0{,}352$, якщо $1 < x \le 2$;

$F(x) = P(X < 3) = 0{,}352 + 0{,}432 = 0{,}784$, якщо $2 < x \le 3$;

$F(x) = P(X > 3) \equiv P(X < +\infty) = 0{,}784 + 0{,}216 = 1$, якщо $3 < x < +\infty$.

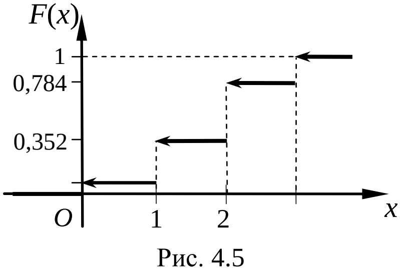


Рис. 4.5

Остаточно функцію розподілу можна записати у вигляді:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < x \le 0, \\ 0{,}064, & \text{якщо } 0 < x \le 1, \\ 0{,}352, & \text{якщо } 1 < x \le 2, \\ 0{,}784, & \text{якщо } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{якщо } 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

Графік функції зображений на рис. 4.5. ►

4.3. Властивості функції розподілу

Властивість 1. Функція розподілу $F(x)$ набуває значень, що лежать на відрізку $[0;\ 1]$:

$$0 \le F(x) \le 1. \qquad (1)$$

Ця властивість випливає з означення функції $F(x)$ як імовірності того, що в результаті настання події справджується нерівність $X < x$. ▲

Властивість 2. Ймовірність того, що випадкова величина потрапить у проміжок $[a;\ b)$, дорівнює приростові функції розподілу на цьому проміжку:

$$P(a \le x < b) = F(b) - F(a)\ . ▲ \qquad (2)$$

Властивість 3. Функція розподілу випадкової величини є неспадною функцією:

$$F(b) \ge F(a)\text{, якщо } b > a\ . ▲$$

Властивість 4. Функція розподілу дорівнює нулеві на мінус нескінченності й одиниці на плюс нескінченності, тобто

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\,,\quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1\,. ▲$$

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ кожному значенню x випадкової величини X ставить у відповідність імовірність

$$p = F(x) = P(X < x)\,.$$

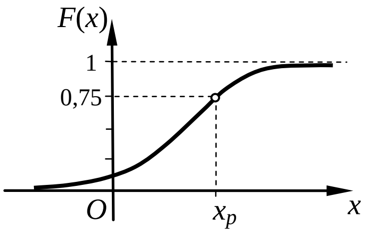


Рис. 4.6

Можна розглядати й обернену задачу: для заданої функції за відомою ймовірністю p знайти значення випадкової величини x_p таке, що $F(x_p) = p$. *Квантиль*, що відповідає рівневі ймовірності p (100p%-й квантиль), – це таке значення випадкової величини $x = x_p$, для якого функція розподілу набуває значення p, тобто $F(x_p) = p$. На рис. 4.6 точка x_p відповідає 75 %-му квантилю.

4.4. Диференціальна функція розподілу

Інтегральна функція розподілу придатна для опису як дискретних, так і неперервних випадкових величини. Однак на практиці неперервну випадкову величину зручніше характеризувати не інтегральною, а диференціальною функцією розподілу.

Функцію

$$f(x) = F'(x) \tag{1}$$

називають *диференціальною функцією* (*диференціальним законом*) *розподілу* випадкової величини X. Часто вживають іншу назву $f(x)$ – *щільність розподілу ймовірностей* або, коротше, *щільність імовірності*.

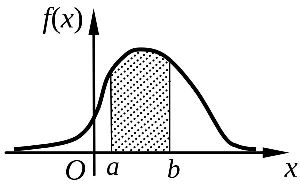


Рис. 4.7

Ґрунтуючись на властивостях інтегральної функції розподілу $F(x)$, для неперервної випадкової величини нескладно схематично зобразити графік щільності ймовірності $f(x)$. Справді, оскільки за $x \to \pm\infty$ $F(x) \to \text{const}$, то $f(x) \to 0$, якщо $x \to \pm\infty$. Отже, в загальному випадку графік функції $f(x)$ має вигляд, показаний на рис. 4.7.

Криву $f(x)$, що зображає диференціальну функцію розподілу випадкової величини, називають *кривою розподілу*.

Розгляньмо властивості диференціальної функції розподілу $f(x)$.

Властивість 1. Диференціальна функція розподілу є невід'ємною функцією:

$$f(x) \geq 0\,. \blacktriangle \tag{2}$$

Властивість 2. Ймовірність того, що випадкова величина X потрапляє у проміжок $[a;b)$, дорівнює визначеному інтегралові від диференціальної функції, взятому в межах від a до b:

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

Геометрично ймовірність $P(a \leq X < b)$ чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції (рис. 4.7). ▲

Властивість 3. Зв'язок між інтегральною та диференціальною функціями розподілу описує формула

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\,. \blacktriangle \tag{4}$$

Властивість 4 (умова нормування щільності ймовірності). Невласний інтеграл від диференціальної функції розподілу ймовірностей, взятий у межах від $-\infty$ до $+\infty$, дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{5}$$

Справді, з огляду на формулу (3) ліва частина рівності описує ймовірність вірогідної події, яка полягає в тому, що випадкова точка потрапляє в інтервал $(-\infty; +\infty)$ (рис. 4.7). ▲

Приріст функції розподілу на проміжку $[x; x+\Delta x)$ дорівнює ймовірності потрапляння випадкової величини в цей проміжок:

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = P(x \le X < x+\Delta x)\,.$$

Отже,

$$P(x \le X < x+\Delta x) \approx f(x)\Delta x\,.$$

Величину $f(x)\Delta x$ називають *елементом імовірності*.

Ймовірнісний зміст густини розподілу: ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $(x; x+\Delta x)$ наближено дорівнює відповідному елементові ймовірності $f(x)\Delta x$. Геометрично суть наближення полягає в тому, що площу криволінійної трапеції з основою $[x; x+\Delta x]$ замінюють площею прямокутника з тією самою основою і висотою $f(x)$ (рис. 4.8):

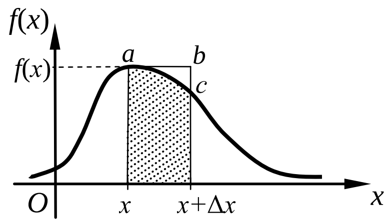


Рис. 4.8

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(x)dx \approx f(x)\Delta x\,.$$

Як видно з рис. 4.8, похибка чисельно дорівнює площі криволінійного трикутника abc і тим менша, чим менша довжина інтервалу Δx.

Опис розподілу неперервної випадкової величини за допомогою щільності ймовірності $f(x)$ зручніший, аніж за допомогою функції $F(x)$, позаяк дає змогу наочніше передати його особливості на різних проміжках зміни випадкової величини.

Приклад. Щільність ймовірності випадкової величини має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ a\cos x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Потрібно 1) визначити сталу a; 2) знайти $F(x)$; 3) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$; 4) розрахувати ймовірність потрапляння випадкової величини у проміжок $[0; \pi/6]$.

Розв'язання. 1) За властивістю щільності ймовірності має бути

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a\cos x dx = a\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x dx = a\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2a = 1,$$

звідки знаходимо: $a = \frac{1}{2}$.

2) Побудуймо інтегральну функцію розподілу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

З огляду на те що диференціальна функція розподілу залежить від проміжку зміни аргументу, слід розглянути три випадки.

а) Якщо $x \le -\frac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0\cdot dx = 0 .$$

б) Якщо $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{x}\cos x dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2} .$$

в) Якщо $x > \frac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) + \int_{\pi/2}^{x} 0\cdot dx = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$$

3) Графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$ схематично показано на рис. 4.9. (Крива $F(x)$ має перегин у точці $x = 0$; покажіть це самотужки.)

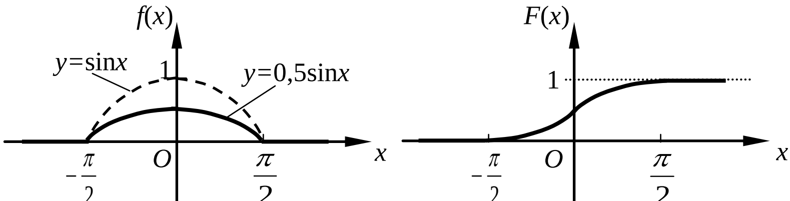


Рис. 4.9

4) Для відшукання ймовірності скористаймося формулою (3):

$$P\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) = \int_{0}^{\pi/6}\frac{1}{2}\cos x dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4} .$$

Зауважмо, що випадкова величина, яка характеризується щільністю ймовірності (а), неперервна, і тому $P(0 < x < \pi/3) = P(0 \le x \le \pi/3)$.

Зрозуміло, що для відшукання ймовірності можна було би скористатися також формулою $P(a \le x < b) = F(b) - F(a)$ (п. 4.3). Зробіть це самі. ►

4.5. Функція випадкового аргументу і закон її розподілу

Випадкову величину Y називають *функцією випадкового аргументу* X, якщо кожному можливому значенню X поставлено у відповідність єдине значення Y:

$$Y = \varphi(X). \tag{1}$$

Відшукаймо зв'язок між законами розподілу випадкових величин X та Y, що пов'язані співвідношенням (1).

Нехай величина X дискретна і ряд її розподілу має вигляд

X	x_1	x_2	...	x_k	...
p	p_1	p_2	...	p_k	...

Якщо величина X набуває значення x_1, то функція $\varphi(X)$ з імовірністю p_1 набуває значення $\varphi(x_1)$. Отже, можна записати таку відповідність:

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_k)$	...
p	p_1	p_2	...	p_k	...

Для того щоб із цієї таблиці дістати ряд розподілу, треба розташувати значення $\varphi(x_k)$ в порядку зростання й об'єднати стовпці з рівними значеннями Y, додавши при цьому відповідні ймовірності.

Нехай тепер аргумент X – неперервна випадкова величина, диференціальна функція розподілу $f(x)$ якої є диференційовною. Потрібно побудувати диференціальну функцію розподілу випадкової величини $Y = \varphi(X)$. Ця задача особливо проста, якщо функція $\varphi(x)$ монотонна. У цьому разі справджується така теорема.

Теорема. Якщо функція $Y = \varphi(X)$ є монотонною функцією випадкової величини X зі щільністю розподілу $f(x)$, то щільність розподілу випадкової величини Y визначається формулою

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|, \tag{2}$$

де функція $x = \varphi^{-1}(y)$ обернена до функції (1). ▲

Якщо функція $\varphi(x)$ на проміжку можливих значень X не монотонна, то цей проміжок необхідно розбити на інтервали монотонності і за формулою (2) на кожному з інтервалів визначити $g_i(y)$. Щільність $g(y)$ дорівнює сумі щільностей $g_i(y)$.

Приклад. Побудуймо щільність розподілу $g(y)$ лінійної функції $Y = aX + b$, якщо щільність $f(x)$ відома.

Розв'язання. Оскільки лінійна функція монотонна, то можна скористатися формулою (2). З огляду на те що

$$x = \frac{y-b}{a} \quad \text{і} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a},$$

отримуємо:

$$g(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}. \blacktriangleright$$

4.6. Операції над випадковими величинами

Лінійними операціями над випадковими величинами називають множення випадкової величини на число і додавання випадкових величин. Розгляньмо ці операції докладніше.

Добутком дискретної випадкової величини X із законом розподілу

X	x_1	x_2	...	x_k	...
p	p_1	p_2	...	p_k	...

на число C називають дискретну випадкову величину CX із законом розподілу

CX	Cx_1	Cx_2	...	Cx_k	...
p	p_1	p_2	...	p_k	...

Отже, при множенні випадкової величини X на сталу C треба на цю сталу помножити всі значення випадкової величини, залишивши ймовірності незмінними.

Дві випадкові величини називають *незалежними*, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких значень набуває друга.

Дискретні випадкові величини X і Y незалежні, якщо для довільних i ($i = \overline{1, n}$) та j ($j = \overline{1, m}$) незалежними є події $(X = x_i)$ та $(Y = y_j)$.

Ймовірність $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ суміщення цих подій дорівнює добуткові їхніх імовірностей $p_i = P(X = x_i)$ і $p_j = P(Y = y_j)$:

$$p_{ij} = p_i p_j .$$

Ця рівність – необхідна і достатня умова незалежності двох дискретних випадкових величин. (Докладніше систему двох випадкових величин розглянемо у розділі 8.)

Сумою випадкових величин X і Y називають величину $Z = X + Y$, значеннями якої є всі можливі суми $z_{ij} = x_i + y_j$, а ймовірності цих значень дорівнюють: а) добуткові ймовірностей доданків, якщо X і Y незалежні; б) добуткові ймовірності одного з доданків на умовну ймовірність другого, якщо X і Y залежні. Може виявитися, що серед сум є кілька однакових. Тоді ймовірність появи цієї суми дорівнює сумі ймовірностей суміщень $(X = x_i)$ і $(Y = y_j)$, коли отримується ця сума. Тому рівні суми слід об'єднати і записати в одній клітині, а ймовірність буде дорівнювати сумі відповідних імовірностей.

Приклад. Кидають дві гральні кості. Побудуймо розподіл імовірностей сум очок, які можуть появитися.

Розв'язання. Нехай X і Y – кількості очок, що випали відповідно на першій та другій костях, а $X + Y$ – їхня сума. Оскільки кількість очок, що випали на одній кості, не залежить від кількості очок, що появилися на іншій, то ймовірність кожного суміщення дорівнює $1/36$. Однак якщо сума 12 може появитися лише внаслідок єдиного суміщення – $(6;\ 6)$, то появі суми, наприклад, 5 сприяють 4 різні суміщення – $(1;4)$, $(2;3)$, $(3;2)$, $(4;1)$. Тому розподіл імовірностей величини $X + Y$ має вигляд:

X+Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Просто пересвідчитися, що сума ймовірностей дорівнює одиниці. ►

Для незалежних випадкових величин можна ввести поняття добутку.

Добутком незалежних випадкових величин X і Y називають таку величину $Z = X \cdot Y$, значення якої дорівнюють усім можливим добуткам $x_i y_j$, а ймовірності – відповідним добуткам ймовірностей $p_i q_j$.

Задачі до розділу 4

1. По мішені роблять три постріли. Ймовірності промахів у першому, другому і третьому пострілах дорівнюють відповідно $0{,}1$, $0{,}2$ і $0{,}3$. Скласти ряд розподілу кількості промахів. Побудувати функцію розподілу і її графік.

2. На шляху автомобіля є 3 світлофори, які забороняють рух зі ймовірностями $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}6$ відповідно. Побудувати ряд розподілу кількості світлофорів, які автомобіль проїде до першої зупинки.

3. В урні 10 куль, 8 з яких білі. Водночас беруть 2 кулі. Скласти ряд розподілу кількості білих куль серед узятих. Побудувати функцію розподілу і її графік.

4. Нехай випадкова величина X – кількість появ герба у 6 киданнях монети. Побудувати ряд і многокутник розподілу випадкової величини.

5. З п’яти ключів лише один підходить до замка. Побудувати ряд розподілу кількості спроб відкрити замок за умови, що використаний ключ із подальших спроб а) вилучають; б) не вилучають.

6. Функція розподілу неперервної випадкової величини має вигляд:

$$1)\ F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ (x+1)^2, & -1 < x \le 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} \qquad 2)\ F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3/8, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Потрібно: а) побудувати функцію $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$; в) знайти $P(-0{,}5 < X \le 1)$.

7. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини виглядає так:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ c, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3; \end{cases} \qquad 2)\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ c\ln x, & 1 < x \le e, \\ 0, & x > e. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти сталу c; б) зобразити графік $f(x)$; в) побудувати інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і зобразити її графік; г) знайти $P(1 < X < 2)$.

8. Випадкова величина X розподілена експоненційно зі щільністю ймовірності (λ – параметр розподілу)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; визначити ймовірність того, що випадкова величина має значення в межах від 0 до 1.

9. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X

$$f(x)=\begin{cases} c, & 0<x<1, \\ 0, & x\le 0,\ x\ge 1. \end{cases}$$

Побудувати щільність імовірності випадкової величини $Y = X^3$.

13. Скласти ряд розподілу випадкової величини $X+Y$, якщо ряди розподілу випадкових величин X і Y мають вигляд:

а)

X	4	15
p	0,3	0,7

Y	1	12
p	0,6	0,4

б)

X	4	6
p	0,3	0,7

Y	0	2	4
p	0,2	0,3	0,5

14. Скласти ряд розподілу випадкової величини $X-Y$, якщо випадкові величини X і Y задано такими рядами розподілу:

а)

X	–3	5
p	0,4	0,6

Y	1	9
p	0,2	0,8

б)

X	–1	1
p	0,3	0,7

Y	0	2	4
p	0,1	0,4	0,5

15. Незалежні випадкові величини X і Y задано рядами розподілу:

X	–1	0	1
p	0,3	0,2	0,5

Y	0	1	3
p	0,3	0,4	0,3

Побудувати ряд розподілу добýтку цих величин.

РОЗДІЛ 5

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

5.1. Математичне сподівання випадкової величини

Задання дискретної випадкової величини за допомогою закону розподілу є вичерпним, але незручним через громіздкість. Тому на практиці віддають перевагу числовим характеристикам, які хоча й не так повно, як функція розподілу, зате стисло й достатньою мірою відображають властивості випадкової величини.

Основними і найуживанішими числовими характеристиками випадкової величини є математичне сподівання й дисперсія, а також мода, медіана, коефіцієнти асиметрії та ексцесу.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X – це сума добутків можливих значень величини на їхні ймовірності:

$$M(X) \equiv m_X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,, \tag{1}$$

а *математичне сподівання неперервної випадкової величини*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \,, \tag{2}$$

де $f(x)$ – щільність розподілу ймовірностей випадкової величини.

Математичне сподівання пов’язане із середнім значенням: за великої кількості випробувань середнє значення прямує до математичного сподівання: $\overline{X} \underset{n\to\infty}{\to} M(X)$. На числовій осі математичне сподівання є середнім значенням, навколо якого групуються всі можливі значення випадкової величини. Тому m_X називають також *центром розподілу ймовірностей випадкової величини*.

5.2. Властивості математичного сподівання

Властивість 1. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)\,. \blacktriangle \tag{1}$$

Властивість 2. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добуткові їхніх математичних сподівань:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)\,. \blacktriangle \tag{2}$$

Методом математичної індукції нескладно довести, що ці властивості поширюються на довільну скінченну кількість випадкових величин.

Властивість 3. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій: $M(C)=C$. ▲

Властивість 4. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання: $M(C\cdot X)=M(C)\cdot M(X)=C\cdot M(X)$. ▲

5.3. Мода і медіана

Окрім математичного сподівання, яке описує розташування середнього значення випадкової величини на числовій осі, є ще дві характеристики розташування випадкової величини – мода і медіана.

Модою $\mathrm{Mo}X$ *дискретної випадкової величини* X називають її найімовірніше значення; *модою неперервної випадкової величини* називають таке її значення, для якого крива розподілу має максимум.

Геометрично моду неперервної випадкової величини можна тлумачити як абсцису точки максимуму кривої розподілу. Мода може бути не єдиною. Якщо крива розподілу має два максимуми, то розподіл називається *двомодальним*, у разі трьох максимумів – *тримодальним* і т. д. Є також *антимодальними* розподіли, які мають мінімум, але не мають максимуму.

Деякі квантилі мають спеціальні назви. Квантиль, що відповідає значенню $p=0{,}5$, називають *медіаною* і позначають $\mathrm{Me}X=x_{0,5}$:

$$F(\mathrm{Me}X)=P(X<\mathrm{Me}X)=0{,}5\,.$$

Зрозуміло, що випадкова величина з однаковою ймовірністю може набувати значень як більших, так і менших за медіану.

Геометрично медіана $\mathrm{Me}X$ неперервної випадкової величини – це така точка з абсцисою x, що пряма $x=\mathrm{Me}X$ поділяє площу, обмежену кривою розподілу, навпіл. Якщо крива одномодального розподілу (або многокутник розподілу) випадкової величини X симетрична щодо деякої прямої $x=a$, то математичне сподівання, мода і медіана рівні між собою:

$$m_X=\mathrm{Mo}X=\mathrm{Me}X=a\,.$$

5.4. Дисперсія випадкової величини

Математичне сподівання є характеристикою центра групування випадкової величини, але воно не дає уявлення про ступінь розсіяння цієї величини навколо центра групування. Справді, розгляньмо дві випадкові величини X та Y, які характеризуються такими рядами розподілу:

X	1	3	5
p	0,3	0,4	0,3

Y	2	3	4
p	0,3	0,4	0,3

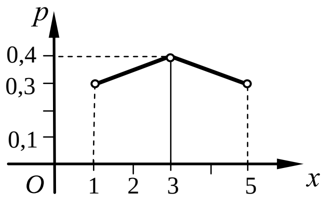
Многокутники розподілу величин X та Y показано на рис. 5.1.

Відшукаймо математичні сподівання випадкових величин X та Y:

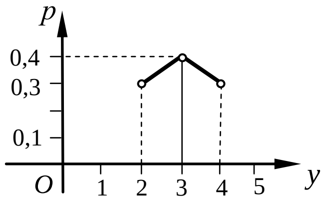
$$M(X) \equiv m_X = 1 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}3 = 3,$$

$$M(Y) \equiv m_Y = 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 = 3.$$

Попри те що математичні сподівання величин X і Y рівні, ці величини характеризується різною щільністю групування можливих значень навколо середнього значення, що наочно ілюструє рис. 5.1. Отже, потрібно ввести характеристику, яка є мірою розсіяння значень випадкової величини навколо її математичного сподівання. Для цього розгляньмо відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.



а)



б)

Рис. 5.1

Відхиленням називають різницю між випадковою величиною X та її математичним сподіванням m_X: $\overset{\circ}{X} = X - m_X$.

Відхилення називають також *центрованою випадковою величиною*.

Очевидно, якщо випадкова величина X набуває значення x_i з імовірністю p_i, то ймовірність відповідного значення відхилення $x_i - m_X$ також буде дорівнювати p_i: якщо ряд розподілу величини X має вигляд

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

то ряд розподілу відхилення $X - m_X$ має вигляд:

$X - m_X$	$x_1 - m_X$	$x_2 - m_X$	...	$x_n - m_X$
p	p_1	p_2	...	p_n

Теорема. Математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює нулеві. Справді,

$$M(X - m_X) = M(X) - m_X = m_X - m_X = 0\,. \blacktriangle \qquad (1)$$

Цей результат має зрозуміле тлумачення. Відхилення окремих значень x_i випадкової величини X від середнього значення m_X набувають як додатних, так і від'ємних значень, а середнє значення відхилень дорівнює нулеві.

Для характеристики розсіяння випадкової величини навколо її центра розподілу використовують середнє значення квадрата відхилення – дисперсію випадкової величини.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення. Дисперсію випадкової величини X позначають $D(X)$, $\sigma^2(X)$ або σ_X^2:

$$D(X) \equiv \sigma_X^2 = M\left((X - m_X)^2\right). \qquad (2)$$

Формули для визначення дисперсій дискретної і неперервної випадкових величин мають відповідно вигляд:

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2 p_i\,, \qquad \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x)dx. \qquad (3)$$

Очевидно, що дисперсія – величина невід'ємна: $D(X) \geq 0$.

Можна довести, що

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)\,, \qquad (4)$$

або, в компактніших позначеннях,

$$\sigma_X^2 = m_{X^2} - m_X^2\,. \qquad (5)$$

Тоді формули (3) для дисперсій дискретної і неперервної випадкових величин набирають відповідно вигляду:

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_X^2\,, \qquad \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m_X^2\,. \qquad (6)$$

Так само як і математичне сподівання, дисперсія є іменованою величиною, але вимірюється не в одиницях випадкової величини, а в одиницях квадрата цієї величини, що не дуже зручно для практики. Тому, окрім дисперсії, як міру розсіяння випадкової величини використовують також величину, яка дорівнює квадратному кореневі з дисперсії – *середнє квадратичне відхилення випадкової величини*: $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$.

Середні квадратичні відхилення дискретної і неперервної випадкових величин визначають відповідно за формулами:

$$\sigma_X = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2 p_i} , \qquad \sigma_X = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx} .$$

Середнє квадратичне відхилення σ_X має таку саму одиницю виміру, як і випадкова величина, і тому є зручнішою (і більш наочною) характеристикою розсіяння, ніж дисперсія. Це ілюструє поданий нижче приклад.

Приклад. Відшукаймо дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкових величин X і Y , многокутники розподілу яких подано на рис. 5.1.

Розв'язання. Ряди розподілу квадратів відхилень величин X та Y мають вигляд:

$(X - m_X)^2$	$(-2)^2$	$(0^2$	2^2
p	0,3	0,4	0,3

$(Y - m_Y)^2$	$(-1)^2$	0^2	1^2
p	0,3	0,4	0,3

Тепер просто знайти, що

$$\sigma_X^2 = 4 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 = 2{,}4 , \quad \sigma_X \approx 1{,}55 ,$$

$$\sigma_Y^2 = 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}6 , \quad \sigma_Y \approx 0{,}775 = \sigma_X / 2 . \blacktriangleright$$

5.5. Властивості дисперсії

Спираючись на означення дисперсії і властивості математичного сподівання, нескладно дістати властивості дисперсії випадкової величини.

Властивість 1. Дисперсія суми двох випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) . \blacktriangle \tag{1}$$

Аналогічне співвідношення справедливе для довільної кількості взаємно незалежних випадкових величин.

Властивість 2. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю: $D(C) = 0$. ▲

Властивість 3. Дисперсія добутку сталої на випадкову величину X дорівнює добуткові квадрата сталої на дисперсію величини X :

$$D(CX) = C^2 D(X) . \tag{2}$$

Доведення. Справді

$$D(CX) = M\left(\left(CX - M(CX)\right)^2\right) = M\left(\left(CX - CM(X)\right)^2\right) =$$
$$= M\left(C^2\left(X - M(X)\right)^2\right) = C^2 M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) = C^2 D(X)\,. \ \blacktriangle$$

Властивість 4. Якщо до випадкової величини додати сталу, то дисперсія залишиться незмінною:

$$D(C + X) = D(X)\,. \tag{3}$$

Властивість 5. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)\,. \tag{4}$$

Доведення. Спираючись на вже доведені властивості, виконаймо низку очевидних перетворень:

$$D(X - Y) = D\left(X + (-Y)\right) = D(X) + D(-Y) =$$
$$= D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)\,. \ \blacktriangle$$

5.6. Нормована випадкова величина

Для того щоб характеристики випадкової величини не залежали від одиниць вимірювання і центра розсіяння, її лінійними перетвореннями зводять до *стандартного* вигляду (*стандартизують*, або *нормують*).

Нормованою випадковою величиною називають відношення відхилення випадкової величини до її середнього квадратичного відхилення:

$$X_\sigma = \frac{\overset{\circ}{X}}{\sigma} = \frac{X - m_X}{\sigma}\,.$$

Властивості нормованої випадкової величини виражає така теорема.

Теорема. Математичне сподівання нормованої випадкової величини X_σ дорівнює нулеві, а дисперсія – одиниці:

$$M(X_\sigma) = 0\,, \quad D(X\sigma) = 1\,.$$

Доведення. За властивостями математичного сподівання й дисперсії

$$M(X_\sigma) = M\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X} M(X - m_X) = 0\,,$$

$$D(X_\sigma) = D\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X^2} D(X - m_X) = \frac{1}{\sigma_X^2} D(X) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1\,. \ \blacktriangle$$

5.7. Моменти випадкової величини. Характеристики форми кривої розподілу

Початковим моментом k *-го порядку* називають математичне сподівання k -го степеня випадкової величини:

$$\nu_k = M(X^k). \tag{1}$$

Початкові моменти k -го порядку дискретної і неперервної випадкових величин визначають відповідно за формулами:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \qquad \nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx. \tag{2}$$

Центральним моментом k *-го порядку* називають математичне сподівання k -го степеня відхилення випадкової величини:

$$\mu_k = M\left((X - m_X)^k\right). \tag{3}$$

Центральні моменти k -го порядку дискретної і неперервної випадкових величин визначають за такими формулами:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (m_i - m_X)^k p_i, \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^k f(x)dx \tag{4}$$

Початковий момент першого порядку, як видно з формул (2), є математичним сподіванням, а центральний момент другого порядку дорівнює дисперсії.

Центральний момент першого порядку завжди дорівнює нулеві.

Окрім моментів першого і другого порядків важливе значення мають моменти третього й четвертого порядків.

Якщо крива розподілу не є симетричною, то її центральні моменти непарних порядків (окрім першого) відмінні од нуля і можуть використовуватися як характеристика (міра) асиметрії. Для цього природно скористатися центральним моментом третього порядку.

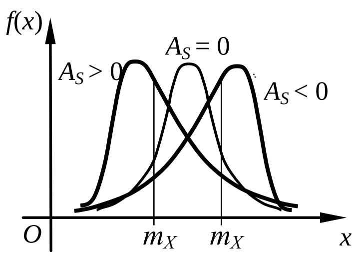


Рис. 5.3

Величину асиметрії (*скошеність*) описує безрозмірний *коефіцієнт асиметрії*:

$$A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \tag{5}$$

де σ – середнє квадратичне відхилення. Залежно від знака коефіцієнта асиметрії розрізняють додатну (лівобічну) або від’-ємну (правобічну) асиметрію розподілу.

Якщо $A_S > 0$, то асиметрію називають *додатною* (*лівобічною*). У цьому разі переважають варіанти, більші за середнє значення (рис. 5.3).

Якщо $A_S < 0$, то асиметрію називають *від'ємною* (*правобічною*). У цьому разі переважають варіанти, менші за m_X.

Ще однією характеристикою форми кривої розподілу є *ексцес* (*коефіцієнт крутості*), який визначають за формулою:

$$E_S = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (6)$$

За стандартне значення ексцесу беруть ексцес нормального розподілу, який часто трапляється в науці і практиці. Крива нормального розподілу схематично зображена на рис. 5.4 пунктиром. Докладно про нормальний розподіл мовиться в наступній главі.

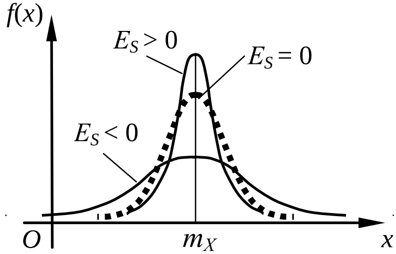


Рис. 5.4

Криві, для яких $E_S < 0$, менш круті порівняно з кривою нормального розподілу, мають плоскішу вершину і називаються *плосковершинними*. Криві, для яких $E_S > 0$, крутіші порівняно з кривою нормального розподілу, мають гострішу вершину і називаються *гостровершинними* (рис. 5.4).

Приклад. Функція розподілу випадкової величини має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3, \\ 0{,}1, & -3 < x \le -1, \\ 0{,}4, & -1 < x \le 0, \\ 0{,}7, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}9, & 1 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Побудувати многокутник розподілу випадкової величини. Знайти σ_X^2, σ_X, MoX, MeX, A_S, E_S.

Розв'язання. За означенням функції розподілу побудуємо ряд розподілу:

X	–3	–1	0	1	4
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Відшукаймо математичне сподівання й дисперсію:

$$m_X = M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = -0{,}3 - 0{,}3 + 0 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0 .$$

$$D(X) = M(X^2) - m_X^2 = M(X^2) =$$

$$= \sum x_i^2 p_i = (-3)^2 \cdot 0{,}1 + (-1)^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ 4^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}9 + 0{,}3 + 0 + 0{,}2 + 1{,}6 = 3 .$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3} \approx 1{,}73 .$$

Розподіл двомодальний: найбільшу ймовірність $p = 0{,}3$ мають два значення випадкової величини: $(\text{Mo}X)_1 = -1$, $(\text{Mo}X)_2 = 0$.

Медіана (центр ряду розподілу випадкової величини): $\text{Me}X = 0$.

Судячи з вигляду многокутника розподілу (рис. 5.5), є підстави сподіватися, що коефіцієнт асиметрії $A_S > 0$.

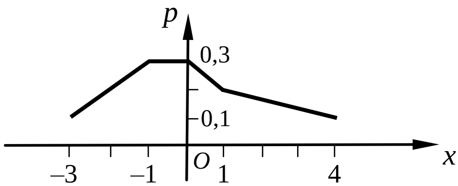


Рис. 5.5

За значенням $A_S = \dfrac{\mu_3}{\sigma_X^3}$. Несkладно знайти:

$$\mu_3 = \sum (x_i - m_X)^3 p_i = \sum x_i^3 p_i = -2{,}7 - 0{,}3 + 1{,}2 + 6{,}4 = 4{,}6 .$$

Отже, $A_S \approx \dfrac{4{,}6}{5{,}2} \approx 0{,}88$.

Можна довести, що $E_S = \dfrac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 \approx 0{,}95$. ►

Задачі до розділу 5

1. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, що задана рядом розподілу:

а)

X	2	3	5
P	0,1	0,3	0,6

б)

Y	4	10	20
P	0,25	0,5	0,25

Побудувати многокутник розподілу випадкової величини.

2. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості очок, що появиться внаслідок одного кидання гральної кості.

3. Пристрій складається з чотирьох модулів, які працюють незалежно. Ймовірність відмови модулів $0{,}3$, $0{,}4$, $0{,}5$, $0{,}6$ відповідно. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості модулів, які відмовили.

4. Роблять три постріли зі ймовірностями влучень $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}6$. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості влучень.

5. Знайти математичне сподівання добутку кількості очок, які можуть випасти при одному киданні двох гральних кубиків.

6. Випадкова величина набуває лише двох значень $+C$ і $-C$ зі ймовірностями $0{,}5$. Знайти дисперсію випадкової величини.

7. Два стрільці з однаковими ймовірностями влучення роблять по одному пострілу в мішень. Математичне сподівання кількості влучень дорівнює $0{,}8$. Відшукати дисперсію кількості влучень.

8. Побудувати ряд розподілу випадкової величини, яка може набувати двох значень x_1 та x_2, якщо її математичне сподівання $m_X = 3{,}8$, дисперсія – $\sigma^2 = 7{,}56$, а ймовірність $p_1 = 0{,}7$.

10. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Z, якщо відомі математичні сподівання і дисперсії незалежних випадкових величин X і Y: 1) $m_X = -1$, $\sigma_X^2 = 5$, $Z = 3X + 5$; 2) $m_X = 2$, $m_Y = 6$, $\sigma_X^2 = 4$, $\sigma_Y^2 = 8$, $Z = 7X - 5Y$.

11. Дискретна випадкова величина X може набувати трьох значень. Значення $x_1 = 2$ вона набуває зі ймовірністю $p_1 = 0{,}4$, а значення $x_2 = 4$ – зі ймовірністю $p_2 = 0{,}3$. Відомо, що $m_X = 6$. Побудувати ряд розподілу і многокутник розподілу випадкової величини X.

12. Дев’ять випадкових величин, дисперсія кожної з яких дорівнює 72, однаково розподілені і взаємно незалежні. Знайти середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного цих величин.

13. Дисперсія середнього арифметичного 16-ти однаково розподілених і взаємно незалежних випадкових величин дорівнює $6{,}25$. Визначити середнє квадратичне відхилення кожної з цих величин.

14. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$1)\,F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}\quad 2)\,F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3/125, & 0<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Знайти моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини і $P(-1<X<2)$.

15. Функція розподілу неперервної випадкової величини

$$1)\,F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin 2x, & 0<x\le \pi/4,\\ 1, & x>\pi/4.\end{cases}\quad 2)\,F(x)=\begin{cases}0, & x\le \pi/4,\\ -\cos 2x, & \pi/4<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти функцію $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$; в) визначити $P(-\pi/6<X\le\pi/6)$, m_X, σ_X^2, σ_X.

18. Щільність імовірності випадкової величини X виглядає так:

$$f(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & \text{якщо } x\ge 0,\\ 0, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$$

Знайти початкові моменти першого і другого порядків, а також центральний момент другого порядку.

19. Випадкова величина X розподілена за законом “прямокутного трикутника” в інтервалі $(0;a)$ (рис. 5.8). Необхідно: 1) знайти a і записати $f(x)$; 2) побудувати $F(x)$; 3) визначити ймовірність того, що X потрапить в інтервал $\left(\frac{a}{2};\,a\right)$; 4) знайти числові характеристики випадкової величини: математичне сподівання, дисперсію, початковий момент третього порядку.

20. Функцію розподілу випадкової величини задано графічно рис. 5.9. Потрібно: побудувати функції $F(x)$ і $f(x)$; розрахувати m_X і σ_X^2.

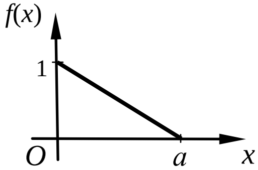


Рис. 5.8

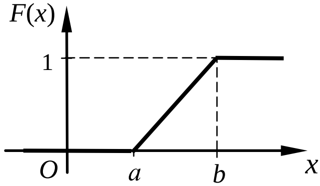


Рис. 5.9