



НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ



ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ
НАПН УКРАЇНИ

МЕТОДИКА компетентісно орієнтованого навчання математики в ліцеї на рівні стандарту

Методичний
посібник



Київ-2021

*Рекомендовано вченою радою
Інституту педагогіки НАПН України
(протокол №12 від 17 грудня 2020 року)*

Рецензенти:

В. Г. Бевз — доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри математики і теорії та методики навчання математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова;

Н. С. Мініна — учитель математики ліцею “Престиж”.

Васильєва Д. В., Вашуленко О. П., Волошена В. В.

Методика компетентнісно орієнтованого навчання математики в ліцеї на рівні стандарту : методичний посібник.[Електронне видання]. Київ : КОНВІ ПРІНТ, 2021. -175 с.

ISBN 978-617-8124-15-1

У методичному посібнику висвітлено методику навчання математики в ліцеї на рівні стандарту: загальні питання організації навчання математики, наскрізні лінії ключових компетентностей та їх реалізація в курсі математики, окремі питання методики навчання алгебри і початків аналізу та стереометрії в ліцеях на рівні стандарту. Розглядаються сучасні форми, методи і засоби навчання алгебри і початків аналізу та стереометрії, а також подаються конкретні методичні рекомендації щодо здійснення навчально-пізнавальної діяльності старшокласників у ліцеї.

Методичний посібник складається з чотирьох розділів, кожен з яких поділено на окремі пункти. Весь поданий матеріал супроводжується конкретними прикладами організації навчання математики в ліцеях на рівні стандарту, які вчителі можуть використовувати в реальному освітньому процесі.

Рекомендовано учителям математики ліцеїв та інших закладів загальної середньої освіти, а також студентам і магістрантам педагогічних університетів.

УДК 373.5.016:51](072)

© Васильєва Д. В., Вашуленко О. П.,
Волошена В. В., 2021

© Інститут педагогіки НАПН України, 2021

© КОНВІ ПРІНТ, 2021

ISBN 978-6178124-15-1

ЗМІСТ

Передмова 5

**Розділ I. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ
НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЛІЦЕЯХ 6**

1.1. Провідні методологічні підходи у навчанні математики 6

1.2. Компетентнісний підхід — основа
нової парадигми навчання 17

1.3. Урізноманітнення форм навчання математики 34

1.4. Методи навчання математики 43

1.5. Сучасні засоби навчання математики 52

Література до розділу 61

**Розділ II. НАСКРІЗНІ ЛІНІЇ КЛЮЧОВИХ
КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ТА ЇХ РЕАЛІЗАЦІЯ
В КУРСІ МАТЕМАТИКИ В ЛІЦЕЯХ НА РІВНІ СТАНДАРТУ 63**

2.1. Оновлені ключові компетентності
для навчання упродовж життя 63

2.2. Екологічна безпека та сталий розвиток 68

2.3. Громадянська відповідальність 72

2.4. Здоров'я і безпека 78

2.5. Підприємливість та фінансова грамотність 82

Література до розділу 87

Розділ III. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ	
В ЛІЦЕЯХ НА РІВНІ СТАНДАРТУ	88
3.1. Мета компетентнісного навчання стереометрії в ліцеях на рівні стандарту та засоби її досягнення	88
3.2. Коротка характеристика змістових ліній курсу стереометрії в ліцеях на рівні стандарту	107
3.3. Паралельність прямих і площин у просторі	108
3.4. Перпендикулярність прямих і площин у просторі	116
3.5. Координати і вектори	120
3.6. Многогранники	124
3.7. Тіла обертання	127
3.8. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл	130
Література до розділу	133

Розділ IV. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ АЛГЕБРИ	
І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ В ЛІЦЕЯХ НА РІВНІ СТАНДАРТУ	134
4.1. Коротка характеристика змістових ліній курсу алгебри і початків аналізу	134
4.2. Числа і вирази	138
4.3. Функції	145
4.4. Рівняння та нерівності	152
4.5. Початки математичного аналізу	156
4.6. Елементи стохастичності	164
Література до розділу	173

ПЕРЕДМОВА

Світ змінюється надзвичайно швидкими темпами і характеризується невинною глобалізацією, інноваційним типом розвитку, інформатизацією, демократизацією та гуманізацією. Зміни, що відбуваються в усіх сферах суспільного життя, спричиняють потребу перегляду основних засад навчання математики в закладах освіти різного рівня. За цих умов суттєво змінюються вимоги до формування підростаючого покоління, оскільки сьогодні йому недостатньо передати знання, важливіше — навчити користуватися цими знаннями.

Математика — це велика складова загальнолюдської культури. Її навчання слід здійснювати на засадах компетентнісного, діяльнісного, особистісно орієнтованого, розвивального та аксіологічного підходів, а також з урахуванням передового досвіду провідних країн світу.

Методичний посібник створено відповідно до сучасних нормативних документів і потреб сучасних учителів математики. Сучасні вчителі потребують конкретних розробок компетентісно орієнтованого навчання математики, що відповідають вимогам інформаційного суспільства.

Особливістю методичного посібника є висвітлення освітніх трендів, які доцільно використовувати в процесі навчання математики в ліцеях на рівні стандарту, а також подання значної кількості різних програмних засобів, які допомагають суттєво осучаснити навчально-пізнавальну діяльність учнів і професійну діяльність учителів. Висвітлено методику навчання математики в ліцеї на рівні стандарту: загальні питання організації навчання математики, наскрізні лінії ключових компетентностей та їх реалізація в курсі математики, окремі питання методики навчання алгебри і початків аналізу та стереометрії в ліцеях на рівні стандарту.

Розглядаються сучасні форми, методи і засоби навчання алгебри і початків аналізу та стереометрії, а також конкретні методичні рекомендації щодо здійснення навчально-пізнавальної діяльності старшокласників у ліцеї. Весь поданий матеріал супроводжується конкретними прикладами організації навчання математики в ліцеях на рівні стандарту, які вчителі можуть використовувати в реальному освітньому процесі.

РОЗДІЛ І

ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЛІЦЕЯХ

Васильєва Д. В.

1.1. ПРОВІДНІ МЕТОДОЛОГІЧНІ ПІДХОДИ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Стрімкі зміни, що відбуваються в усіх сферах суспільного життя, спричиняють потребу перегляду основних засад функціонування системи освіти. У цьому контексті у Концепції Нової української школи зазначається про необхідність *докорінної реформи, що зупинить негативні тенденції, перетворить українську школу на важіль соціальної рівності та згуртованості, економічного розвитку і конкурентоспроможності України*. У цьому контексті актуальною стає проблема про сучасні методологічні підходи організації освітнього процесу. Під методологічним підходом розуміємо сукупність способів, прийомів і процедур, що забезпечують реалізацію обраної стратегії в розбудові системи освіти.

В основу реформування системи освіти загалом і навчання математики зокрема слід покласти такі методологічні підходи, які зможуть реалізувати принцип пріоритетності людини — забезпечити особистісний розвиток учнів згідно з їх індивідуальними здібностями та потребами на основі навчання протягом життя. Усе це потребує ретельного вивчення та аналізу існуючих методологічних підходів до організації навчання математики.

До загальноновизнаних методологічних підходів відносять: діяльнісний, особистісно зорієнтований, індивідуальний, розвивальний, аксіологічний тощо. Розглянемо деякі з них.

Діяльнісний підхід передбачає формування особистості учня через діяльність, тобто таку форму його активності, яка характеризує здатність людини бути творцем змін у навколишньому середовищі, повсякденному бутті, особистісних вподобаннях, стосунках і відносинах. Активна пізнавальна, творча та комунікативна діяльність учня — важлива умова його розвитку.

У навчанні математики діяльнісний підхід реалізується у кількох напрямках:

- 1) розв'язування задач (самостійне і під керівництвом учителя);
- 2) конструювання моделей, що розкривають сутність окремих математичних понять і відношень;
- 3) створення моделей до задач з теми, що вивчається;
- 4) самостійне складання учнями задач чи доповнення відкритих задач;
- 5) виконання проєктних й інших дослідницьких робіт.
- 6) використання різноманітних сервісів для створення математичних об'єктів різної природи.

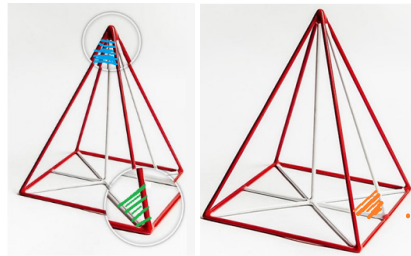
Розглянемо короткі приклади до кожного з визначених напрямів.

1. Оскільки навчальна діяльність учнів — це процес свідомої та активної їх взаємодії з довкіллям, у результаті чого здобуваються нові знання та розвиваються здібності, то пропоновані задачі мають бути цікавими для учнів і відображати їхні потреби. Наприклад, для мотивації навчально-пізнавальної діяльності старшокласників доцільно пропонувати задачі, аналогічні тим, що використовувалися під час ЗНО. Також діяльнісний підхід реалізується під час розв'язування задач на побудову перерізів і побудову графіків функцій.

Варто зауважити, що в процесі розв'язування задач учні переважно здійснюють інтелектуальну діяльність, а саме аналізують, класифікують, порівнюють, систематизують, узагальнюють, здійснюють абстрагування тощо.

Інтелектуальна діяльність учнів може бути репродуктивною — спрямованою на розв'язання стандартних задач і застосування відомих алгоритмів, або творчою — спрямованою на розв'язання задач, які потребують нестандартного застосування відомих чи нових способів. Це слід враховувати в організації навчально-пізнавальної діяльності учнів різного рівня навчальних досягнень.

2. Учителям добре відомо, що учні часто не правильно розв'язують стереометричні задач, оскільки не завжди правильно визначають задані кути. Щоб краще розрізнити та уявляти кути між елементами піраміди, можна запропонувати учням обмотати відповідні кути на каркасній моделі нитками різних кольорів (мал. 1.1.1).

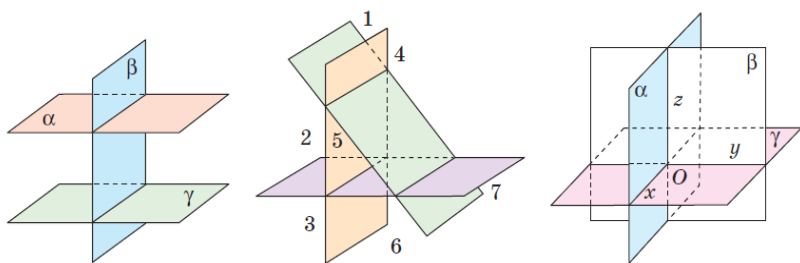


Мал. 1.1.1

Інший приклад. Використовуючи дрiт, учнi можуть утворювати форму графiкiв тих чи iнших функцiй, а потiм на зображеннi системи координат здiйснювати їх перетворення за визначеними формулами.

Такий пiдхiд активiзує рiзнi дiлянки мозку учнiв i у такий спiсiб вiдбувається краще усвiдомлення та запам'ятовування ними навчального матерiалу.

3. У 10 класi значне мiсце курсу математики вiдводиться на вивчення взаємного розташування прямих i площин у просторi. Для учнiв, що вивчають математику на рiвнi стандарту, доцiльно моделювати взаємне розташування прямих чи площин у просторi за допомогою моделювання пiдручними засобами. Наприклад, встановлюючи, на скiльки частин може подiлитися простiр трьома площинами, принаймнi двi з яких перпендикулярнi, доцiльно запропонувати учням виготовити з картону вiдповiднi моделi. Розглядаючи моделi поданi на малюнку 1.1.2, учнi роблять висновок, що такi площини можуть подiлити простiр на 6, 7 або 8 частин.



Мал. 1.1.2

4. Дiяльнiсний пiдхiд ефективно реалiзується пiд час самостiйного складання учнями задач, а саме:
- складання виразiв, спрощення яких має привести до заданого числа;
 - складання трансцендентних рiвнянь (чи їх систем), якi мають наперед встановлену кiлькiсть розв'язкiв;
 - задання функцiй з наперед заданими властивостями та побудова їх графiкiв;
 - добiр статистичного матерiалу для побудови дiаграм i гiстограм;
 - визначення точок на многограннику для побудови його перерiзу;
 - вибiр фiгури, яка обертається, для обчислення об'єму та поверхнi тiла обертання тощо.

Зацiкавлює учнiв дiяльнiсть, спрямована на розв'язування вiдкритих задач, в яких учнi самостiйно мають доповнити рiвняння графiк, функцiю

тощо. Такі задачі доцільно пропонувати як під час вивчення алгебраїчного матеріалу так і геометричного.

- Знайдіть корені рівняння: $x(x-4)^{-0,5} = \dots$
- Знайдіть значення виразу..., якщо $\sin \alpha = -0,6$.
- Оберіть 3 точки на ребрах прямокутного паралелепіпеда так, щоб перерізом цього прямокутного паралелепіпеда, що проходить через задані точки, був п'ятикутник.

5. Під час виконання учнями проектних й інших дослідницьких робіт створюються реальні умови для активізації навчально-пізнавальної діяльності старшокласників. Дослідницькі роботи доцільно пропонувати учням як для виконання у класі, так і вдома.

Наприклад. Учням можна запропонувати дослідити збільшення заряду телефона з часом і спробувати описати цю залежність таблицею чи графіком. Таке дослідження доцільно виконувати під час вивчення теми «Графічні подання інформації про вибірки».

6. Стосовно використання різноманітних сервісів для створення тематичних об'єктів різної природи можна рекомендувати учням вправлятися у побудові графіків функцій чи графічному розв'язуванні рівнянь і нерівностей за допомогою ППЗ.

Одним із методологічних підходів, що набуває актуальності в сучасних умовах функціонування суспільства і школи, є **аксіологічний**. Він полягає у спрямованості навчання на формування в учнів системи ціннісних орієнтацій, відповідних гуманістичній парадигмі освітнього процесу і адекватних потребам сьогодення. Аксіологічний підхід передбачає орієнтацію процесу навчання та виховання на формування в учнів системи загальнолюдських, національних, громадянських, особистісних та інших цінностей, що визначають ставлення підростаючого покоління до довкілля, до самих себе, до своєї діяльності

Аксіологічний підхід передбачає:

- визнання кожного учасника освітнього процесу активним ціннісно-мотивованим суб'єктом діяльності;
- спрямованість педагогічної діяльності на гуманістичний розвиток особистості;
- орієнтацію процесу навчання та виховання на формування в учнів системи загальнолюдських, національних, громадянських, особистісних та інших цінностей, що визначають ставлення підростаючого покоління до світу, своєї діяльності та до самих себе.

Розкриємо деякі шляхи реалізації аксіологічного підходу під час навчання математики в школі.

1. Включення до мотивації навчально-пізнавальної діяльності учнів аксіологічної складової.

Основне завдання мотивації — створити відповідне предметне та емоційне налаштування учнів до свідомої та активної роботи на уроці. Різноманітні психологічні установки та цілеспрямовані дидактичні завдання, подані вчителем на цьому етапі уроку, сприяють збудженню довільної та мимовільної пам'яті в учнів, активізації їх навчально-пізнавальної діяльності, а також ефективній підготовці до засвоєння нового теоретичного матеріалу чи формування умінь і навичок, що є основним джерелом його активності.

Мотивувати діяльність учнів на уроці можна незвичним формулюванням теми уроку. Наприклад: «Банківські операції» (замість «Задачі на відсотки») або «Заощаджуємо сімейний бюджет» (замість «Способи подання даних»). Такий прийом зацікавлює учнів і довгий час утримує їхній інтерес. Водночас виникає можливість природним чином звернути увагу учнів на сімейні цінності, пов'язані з економією та заощадженням. Звернути увагу учнів на загальнолюдські цінності можна за допомогою цитат видатних історичних постатей. Наприклад, перед вивченням теорему Фалеса учнів можна ознайомити з такими висловлюваннями давньогрецького геометра, одного з семи мудреців світу:

- Не збагачайся нечесним шляхом.
- Дотримуйся міри.
- Не довіряй усім підряд.
- Які послуги робиш батькам, такі і сам матимеш в старості від дітей.

Найбільш вдало мотивація проходить тоді, коли учень усвідомлює, що вивчення даної теми дійсно для нього важливе, а знання, здобуті на уроці, він зможе застосувати в житті. Зв'язок навчального матеріалу з життям як засіб мотивації вивчення нової теми доцільно використовувати під час вивчення теми «Функція». Якщо за допомогою мультимедійної дошки показати учням графіки залежності опору тіла людини і струму, що через нього протікає, від величини прикладеної напруги, то можна проілюструвати способи задання і властивості функцій, зокрема розкрити поняття зростаючої та спадної функції, а також показати взаємозв'язок між аналітичним і графічним способом задання функції тощо. Такі відомості спонукатимуть учнів замислитися над поведінкою поблизу електромереж, відповідальніше ставитися до вибору місця для самофотографування, збирання металобрухту, паркуру тощо. Учням слід пояснити, що їх розваги дуже дорого коштують для їх родин і держави.

3. Складання та розв'язування учнями задач, фабули яких певним чином стосуються загальнолюдських, національних, громадянських, особистісних та інших цінностей.

Деякою мірою такі види задач включено до сучасних підручників математики, але їх кількість незначна (обсяг підручника обмежений). Водночас такі задачі стають цікавими і актуальними для учнів, якщо вони стосуються сучасності. Інтерес і пізнавальну активність в учнів викликають, наприклад, такі задачі:

- У загальному обсязі забруднення атмосфери питома вага різних галузей промисловості й транспорту становить (у %): тепла енергетика — 25,7; чорна металургія — 23,4; нафтовидобувна і нафтохімічна — 13,7; транспорт — 11,6; кольорова металургія — 11,1; гірничодобувна — 7,1; підприємства будівельного комплексу — 3,4; машинобудування — 2,8; інші галузі — 1,2. Побудуйте секторну діаграму.
- Прочитайте вислів М. Амосова: *«У більшості хвороб винна не природа, не суспільство, а сама людина. Найчастіше вона хворіє через лінощі й жадобу. Щоб бути здоровим, потрібні власні зусилля, постійні й значні»*. Полічіть частоту використання у цьому вислові літери «і» [1].

В умовах особистісно зорієнтованого навчання бажано пропонувати учням самостійно складати задачі «ціннісної» тематики. З цією метою пропонуємо учням, окрім інших, таку тематику для фабул задач:

- здоровий спосіб життя;
- сімейний бюджет і особистісні потреби;
- енергозбереження в школі і вдома;
- екологія рідного краю;
- успіхи і невдачі українських спортсменів.

4. Формування ціннісних орієнтацій учнів під час позакласної навчально-пізнавальної діяльності. Цінності учнів поступово змінюються. Ці зміни можуть відбуватися у різних напрямках на основі багатьох факторів, оскільки саме підрастаюче покоління є об'єктом масових впливів інформаційних джерел і масмедіа. Добре, коли молодим людям, на яких спрямовано найрізноманітніші впливи з навколишнього середовища, екранів телевізорів, преси тощо, надати достойні зразки для наслідування. Ефективним засобом національно-патріотичного виховання учнів є позакласні заходи (тематичні бесіди, навчальні конференції, математичні вечори, диспути тощо). Варто виважено добирати визначні постаті для цих заходів, враховуючи вікові особливості учнів і рівень їхньої математичної підготовки. Доцільним є не детальний розгляд творчих здобутків і жит-

тевого шляху видатного вченого, а калейдоскоп окремих подій, зрозумілих і повчальних для учнів.

Математичні знання, як невід'ємна частина науки і культури, мають могутній аксіологічний потенціал для переорієнтації освіти на особистість, реалізацію здібностей і потреб учнів, інтелектуальний і творчий розвиток підростаючого покоління, а також на досягнення якісних змін кожної особистості. За цих умов реалізація аксіологічного підходу до навчання математики через проникнення в інші складові методичної системи (мету, засоби, форми і методи) розкриває один із шляхів модернізації сучасної математичної освіти і визначає її перспективи.

Розвивальний підхід, основою якого є психічний розвиток учня, базується на розумінні взаємозв'язку навчання і розвитку. Своєрідність розвивального підходу полягає у його спрямованості на розвиток пізнавальної сфери, інтелектуальних здібностей, здібностей до самовдосконалення, підвищення ефективності освітньої діяльності через підтримку пізнавального інтересу, активізацію пізнавальних процесів (мислення, пам'яті, уваги тощо), розумових операцій (аналізу, синтезу, порівняння, узагальнення, систематизації, групування), розвиток самостійності, критичності, глибини мислення, ознайомлення зі способами розумових дій. При цьому досить велика увага приділяється становленню емоційно-ціннісної та діяльнісно-практичної сфери.

Основною метою розвивального навчання є загальний розвиток учнів, перш за все розвиток інтелекту, мислення, волі, почуттів, відповідальності тощо. У процесі розвивального навчання здійснюється формування творчої особистості, здатної жити в швидкоплинному світі й постійно навчатися.

Концептуальними дидактичними положеннями даного підходу визначено:

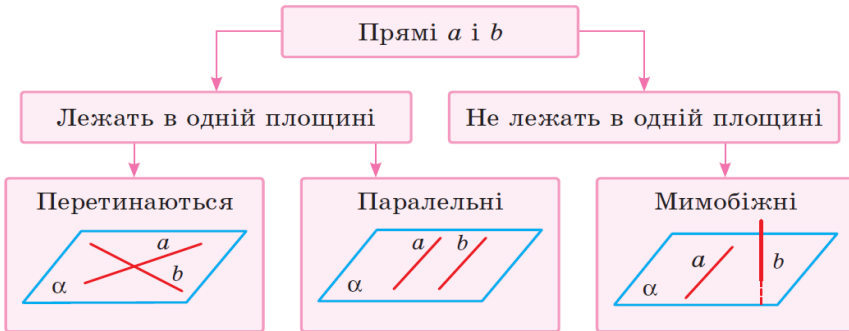
- цілеспрямований розвиток на основі комплексної розвивальної системи;
- системність і цілісність змісту навчання, провідна роль теоретичних знань;
- навчання на високому рівні складності;
- просування у навчанні швидкими темпами;
- усвідомлення дитиною процесу навчання;
- проблемність змісту та варіативність процесу навчання;
- розробка індивідуальних варіантів розвитку.

Багато дітей втрачає інтерес до математики саме тому, що з часом вивчення предмета математики в школі, стає все більш абстрактним і

алгоритмічним. Допитливість згасає. Саме тому варто пропонувати учням задачі з логічним навантаженням. Наприклад таку, як на ЗНО.

- Річка тече лугом і двічі перетинає шосе, утворюючи криву $y = 3x - x^2$. Яка площа луку між шосе та річкою, якщо вважати, що лінія шосе збігається з віссю Ox ? Одиниця довжини — 1 км.

З цією ж метою під час вивчення математики на рівні стандарту можна пропонувати завдання на встановлення істинності тверджень, відшукування помилок, конструювання тощо. Доцільно пропонувати учням зображати схематично співвідношення між обсягами деяких понять. Слід приділяти увагу завданням на порівняння та аналогію, систематизацію та класифікацію. Особливо важливими такі види задач є для вивчення стереометрії. Розглянувши за допомогою схеми взаємне розташування прямих у просторі (мал. 1.1.3), учням можна запропонувати самостійно побудувати схему, що стосується взаємного розміщення у просторі двох площин чи прямої і площини.



Мал. 1.1.3

Задачі з логічним навантаженням розв’язують і учні з середнім та достатнім рівнем знань з математики, яким не вистачає пам’яті чи витримки для того, щоб вивчити правило або застосувати його на практиці, але в них буває чудово від природи розвинуте логічне мислення. І для них розв’язання такої задачі — своєрідна перемога, що підвищує самооцінку і авторитет в класі. Також доцільно проводити позакласні заходи, в яких містяться завдання логічного навантаження. Щоб зацікавити учнів можна запропонувати їм складати кросворди та тести, а потім обмінюватися ними з однокласниками.

Особливості методики розвивального навчання:

- наявність в учнів внутрішніх пізнавальних мотивів, що йдуть від пізнавальних потреб;
- наявність мети свідомої самозміни (я цього досягну, розв’яжу, зрозумію),

-
- розуміння і прийняття учнем навчального завдання;
 - спрямованість на засвоєння теоретичних знань, цілеспрямовану навчальну діяльність;
 - пошук та побудову підстав для дії, відшукування закономірностей, принципів;
 - спрямованість навчання на вміння долати труднощі, досягати результату, розвиток працездатності, проблематизацію завдань;
 - проведення досліджень, дослідів, експериментування.

Особистісно орієнтований підхід базується на засадах гуманізму, теоретичних положень про особистісний розвиток суб'єкта навчання та про всебічне врахування його індивідуальних потреб і можливостей. Метою навчання математики, побудованого на особистісно орієнтованому підході, є створення умов для саморозвитку і самореалізації кожного учня на основі доцільно обраних мети, змісту і педагогічного інструментарію навчання. Саме з врахуванням цих аспектів визначено мету навчання математики для учнів, що навчаються за рівнем стандарту [2].

В основі особистісно орієнтованого підходу, як зазначає І. С. Якиманська [3], лежить визнання індивідуальності, самоцінності кожної людини, його розвитку не як колективного об'єкту, але, перш за все, як індивіда, наділеного своїм неповторним суб'єктивним досвідом. Такий підхід обумовлює зміну акценту в освітньому процесі від «навчання» (у сенсі викладання навчального матеріалу) до «учіння» (у сенсі активної цілеспрямованої діяльності учнів). Реалізація особистісно орієнтованого навчання передбачає, що основним суб'єктом навчання є учень, а метою навчання стає розвиток його індивідуальних здібностей на основі наявного досвіду і можливостей.

Індивідуальний розвиток учнів, крім фізіологічних умов, значною мірою залежить від соціального оточення — сім'ї, школи, позашкільних закладів освіти вулиці тощо. Під час навчання слід не лише враховувати індивідуальні якості учнів чи їх індивідуально-психологічні особливості, а й впливати на їх формування, забезпечувати умови для розвитку талантів і здібностей кожного.

Для організації освітнього процесу на засадах особистісно орієнтованого навчання математики характерними є:

- диференціація теоретичного й практичного навчального матеріалу відповідно до рівня підготовки класу загалом і окремих учнів зокрема;
- виявлення та використання суб'єктивного досвіду учня, набутого під час вивчення математики в попередніх класах й іншими способами;

-
- мотивування учнів до самовираження й рефлексії в процесі навчально-пізнавальної діяльності;
 - створення для кожного учня атмосфери радості, успіху, позитивного ставлення, взаємодопомоги тощо;
 - постійна констатація успіху старшокласників, надання переваги оцінюванню не стільки конкретних результатів вивчення учнями теми, скільки самому процесу навчання та протікання його окремих ланок.

В умовах особистісно орієнтованого підходу вчитель може пропонувати додаткові підтеми для опанування учнями, що проявляють більшу цікавість до математики, проводити консультації для немотивованих учнів, використовувати групові форми роботи, формуючи групи за рівнями навчальних досягнень учнів, пропонувати опрацювати різні джерела інформації тощо. Враховуючи індивідуальні особливості учнів, можна змінювати кількість вивчених підтем у навчальній темі, їх глибину, час на засвоєння теми, форму опрацювання нового для учнів матеріалу, кількість розв'язаних учнем завдань тощо.

Для реалізації особистісно орієнтованого навчання важливим є вибір адекватних форм, методів і засобів навчання. Наприклад, пропонуючи учням для виконання навчальний проєкт на тему «Тіла обертання», можна розподілити учнів у такий спосіб, щоб робота у групі і загальний результат проєктної діяльності класу була посиljena і цікава для кожного учня. А саме:

- *Історики* (розглядають питання, що стосуються історії дослідження тіл обертання);
- *Математики* (вивчають властивості тіл обертання та способи визначення площ поверхонь і об'ємів).
- *Маркетологи* (розробляють рекламу для кожного тіла обертання).
- *Модельєри* (розробляють способи виготовлення розгорток тіл обертання та конструювання з них відповідних геометричних фігур).
- *Дизайнери і фотографи* (фотографують тіла обертання з доквілля та конструюють цікаві предмети побуту).

За такої організації проєктної діяльності кожен з учнів зможе знайти той вид діяльності який відповідає його інтересам, можливостям й індивідуальним особливостям. У процесі захисту робіт створюються умови, щоб учні ознайомилися з роботою кожної групи і у такий спосіб усвідомили значну частину навчального матеріалу з теми.

Дотримання у навчальному процесі особистісно орієнтованого підходу уможлиблює глибоку повагу до особистості старшокласників, забезпечення у них внутрішньої мотивації й цілепокладання, організацію партнерської співпраці між учнями й вчителями. Діяльність учителів має спрямовуватися на організацію активної і продуктивної діяльності старшокласників, на створення сприятливих умов для їх розвитку і саморозвитку, на забезпечення успішності та власної спроможності, на врахування інтересів і здібностей, можливостей і потреб.

Реалізація особистісно орієнтованого навчання можлива за умови створення ефективного зворотного зв'язку і реальної підтримки починань учнів. Надати емоційну підтримку учням можна за допомогою таких фраз:

- Я впевнена, що Ви пам'ятатимете про...
- Це зовсім нескладно, спробуйте...
- Ось ця частина виконана дуже гарно!...
- Це дуже важливо, і Ви неодмінно зможете...
- Саме Ви і могли б зробити це.
- Сподіваюся, що наступного разу Ви виконаєте роботу краще.

У контексті цього підходу й реалій сьогодення ефективним є змішане навчання (поєднання традиційного та електронного навчання), коли частину інформації учень опановує самостійно в своєму темпі у зручному місці і у комфортний для нього час. Під час змішаного навчання старшокласники вчать самостійно здобувати знання, планувати свою діяльність і працювати з різними джерелами інформації. Частину матеріалу учень може опановувати у класі, а частину — вивчати чи закріплювати вдома за допомогою гаджетів. Змішане навчання також дає можливість інтенсифікувати навчальний процес, що є надзвичайно актуальним, враховуючи 3 год математики, що виділяється на вивчення математики на рівні стандарт.

Нормативним на сьогодні виступає компетентнісний підхід, який ґрунтується на особистісно орієнтованому, діяльнісному, розвивальному аксіологічному та інших підходах. Компетентнісний підхід, узагальнюючи, примножуючи та збагачуючи розглянуті методологічні підходи, спрямовує освітній процес на досягнення інтегральних результатів у навчанні, якими є базові, ключові й предметні компетентності суб'єктів навчання.

Розкриттю сутності цього методологічного підходу присвячено наступний параграф.

1.2. КОМПЕТЕНТІСНИЙ ПІДХІД – ОСНОВА НОВОЇ ПАРАДИГМИ НАВЧАННЯ

Вашуленко О.П.

У суспільстві одну з провідних ролей відіграє освіта. Сучасний рівень розвитку економіки, розбудова громадянського суспільства вимагають нову якість освіти, яка готуватиме людину до життя в соціумі. Потребують оновлення цілі і зміст освіти, організація навчального процесу, дидактико-методичне забезпечення, підходи до оцінювання результатів навчання з посиленням особистісної орієнтації освіти, її розвивального, компетентісного, демократичного характеру.

Загальна середня освіта має забезпечити становлення особистості учня, закласти фундамент для його успішної самореалізації. Школа має відійти від традиційного навчання, націленого здебільшого на засвоєння наявних знань. Необхідно формувати особистість, здатну вносити інноваційні зміни в середовище і культуру, успішно вирішувати проблеми окремої людини і суспільства в цілому. Таке навчання передбачає залучення учнів до активної пізнавальної діяльності з багатосторонньою комунікацією суб'єктів, обміном інформацією, результатами діяльності школярів між собою і вчителем, воно спонукає до ініціативності, творчого підходу та активної позиції у всіх видах зазначеної діяльності, передбачає не отримання, а здобування знань і вмінь, конструювання власного образу світу, формування ключових компетентностей самим учнем, що значно підвищує результативність освітнього процесу. Результати такого навчання полягають у значно глибшому й усвідомленому розумінні учнями сутності вивченого, сформованості умінь самостійно аналізувати і оцінювати інформацію, формулювати висновки, аргументовано відстоювати свої погляди, поважати альтернативну думку, працювати в групі, будувати конструктивні стосунки з її членами і визначати своє місце в колективі.

Система базових цінностей загальної середньої освіти, які утверджують соціально та особистісно значущий сенс її здобуття, слугує основою навчання, виховання і розвитку дітей на всіх етапах шкільної освіти, стає мотивом і регулятором пізнавальної діяльності учнів, визначає ставлення до себе, інших людей, суспільства, світу. Зокрема, в освітньому процесі важливим є врахування вікових особливостей, пізнавальних можливостей і потреб дитини.

За умови доступності знань, можливості залучення багатьох суб'єктів і джерел інформації навчальна функція школи (особливо ліцею) втрачає домінувальність. Набувають пріоритетності соціальна та інформаційна

функції, реалізація яких передбачає оволодіння школярами уміннями набувати соціальний досвід, співпрацювати в групах і колективі, самостійно вчитися, знаходити і обробляти інформацію, критично мислити, вирішувати нетипові задачі, застосовувати знання у життєвих ситуаціях, відповідально ставитися до своєї праці і шанувати працю інших.

Особливої ваги в умовах європейського вибору України, відкритості світу набуває формування у шкільному віці толерантності, яка виявляється у прийнятті і правильному розумінні багатоманітності культур різних народів, форм і способів виявлення людської індивідуальності, виваженому сприйнятті різних думок і поглядів. У педагогічному контексті це передбачає сформованість у вихованців умінь безконфліктного життя у класі, родині, суспільстві. Діти виховуються у відкритому соціумі, тому знання ними прав і обов'язків щодо ставлення до інших людей, набуття досвіду міжкультурного спілкування, оволодіння мовним і культурним словником демократичного суспільства є обов'язковою складовою ціннісного виміру сучасної школи [18].

Інструментом реалізації базових цінностей у сучасному шкільному просторі стають ключові компетентності, які поєднують навчальний, виховний і розвивальний потенціали, визначають нову філософію освіти, яка ґрунтується на ідеях якості, результативності, особистісній зорієнтованості змісту і результатів, технологічно забезпечує реформування загальної середньої освіти.

Поняття компетентнісної освіти, освітньої компетентності прийшло до нас із зарубіжних країн, де його широко вживають і досліджують уже тривалий період. Наприкінці минулого століття почалися зміни в парадигмі й методології освіти, передумови яких формувалися протягом усього століття. Парадигма, що відображала інтереси та сутність індустріального суспільства, усталеного пізнання й однозначності оцінок, поступово замінюється методологією інформаційного суспільства, плюралістичного пізнання й імовірнісної оцінки [18]. Головною вимогою реформи освіти стає перехід від засвоєння інформації до формування якостей, необхідних для творчої діяльності та постійного засвоєння нової інформації. Основним орієнтиром освіти стає формування творчої особистості, що здатна саморозвиватися. Спрямованість системи освіти на засвоєння системи знань, яка була традиційною й виправданою ще декілька десятиліть тому, вже не відповідає сучасному соціальному замовленню. Суспільство вимагає самостійних, ініціативних і відповідальних людей, здатних ефективно взаємодіяти у виконанні соціальних, виробничих і економічних завдань. Стає необхідним істотне посилення самостійної й продуктивної діяльності школярів, розвитку їхніх особистісних якостей і здібностей, умінь само-

стійно навчатися та вирішувати проблеми. На думку сучасних педагогів, саме набуття життєво важливих компетентностей може дати людині можливості орієнтуватись у сучасному суспільстві, інформаційному просторі, швидкоплинному розвитку ринку праці, подальшому здобутті освіти. Компетентнісно орієнтований підхід до формування змісту освіти став новим концептуальним орієнтиром шкіл зарубіжжя і породжує безліч дискусій як на міжнародному, так і на національних рівнях різних країн.

Фундаментальною основою євроінтеграції у XXI ст. стала ідея формування в Європі найбільш динамічної знаннево орієнтованої економіки у світі, яка забезпечує економічне зростання, створення більшої кількості привабливих робочих місць і соціальну злагоду, що проголошено Лісабонським порядком денним у 2000 р. До 2020 р. передбачалося досягнення державами-членами Європейського Союзу чотирьох ключових цілей: перетворення навчання протягом життя на реальність; підвищення якості і результативності освіти та професійної підготовки; утвердження рівності, соціальної злагоди та активного громадянства; сприяння розвитку креативності, включно з підприємливістю, на всіх рівнях освіти.

На рівні шкільної освіти підвищення якості реалізується через формування в учнів ключових і предметних компетентностей шляхом трансформації змісту на компетентнісних засадах; запровадження стандартизованого оцінювання навчальних досягнень учнів державного (національні, регіональні, локальні тести) та міжнародного (міжнародні порівняльні дослідження якості середньої освіти — TIMSS, PISA, PIRLS) рівнів.

Міжнародні організації (ЮНЕСКО, ЮНІСЕФ, ПРООН, Рада Європи, Організація європейського співробітництва та розвитку, Міжнародний департамент стандартів), що нині працюють у сфері освіти, протягом понад двох десятиліть вивчають проблеми, пов'язані з появою компетентнісно орієнтованої освіти. Науковці європейських країн вважають, що набуття молоддю знань, умінь і навичок спрямоване на вдосконалення їхньої компетентності, сприяє інтелектуальному й культурному розвитку особистості, формуванню в неї здатності швидко реагувати на запити часу. Саме тому важливим є усвідомлення самого поняття компетентності, розуміння, які саме компетентності і як їх формувати, що має бути результатом навчання.

Ідея компетентнісної освіти в європейському просторі розвивається від дискусій щодо базових характеристик цього поняття до рівня освітньої стратегії за трьома напрямками: оновлення змісту освіти, вдосконалення процесу та перегляд вимог до результатів навчання. А саме: переглядаються навчальні плани з огляду на актуальність змісту, потреб та можливостей учнів щодо його засвоєння; аналізується процес навчання щодо

психологічних механізмів і явищ. Результати навчання розглядаються як формування набору компетентностей (знань, умінь, навичок, ставлень тощо), котрих набувають учні на проміжних етапах і по закінченню школи. Важливим є набуття учнем набору необхідних життєвих компетентностей, необхідних для життя в суспільстві та швидкозмінному світі. У багатьох європейських країнах переглянуто навчальні програми та внесено до них зміни, спрямовані на створення підґрунтя для того, щоб основні результати навчання базувались на досягненні учнями необхідних компетентностей [16].

На початку XXI століття постала необхідність визначити, відібрати та ідентифікувати обмежений набір компетентностей, які є найважливішими, інтегрованими, ключовими, такими, що сприяють досягненню успіхів у житті, підвищенню якості суспільних інститутів. 18 грудня 2006 р. Рекомендацією Європейського Парламенту та Європейської Ради затверджено Європейську довідкову рамку ключових компетентностей для навчання впродовж життя, що розроблялася численною когортою науковців під егідою міжнародних організацій, починаючи з 2000-х років. На думку експертів, створення умов для набуття необхідних компетентностей протягом життя сприятиме: продуктивності та конкурентності людини на ринку праці; скороченню безробіття завдяки формуванню гнучкої (адаптивної) та кваліфікованої робочої сили; розвитку середовища для інноваційних перетворень у умовах глобальної конкуренції.

Через десять років після прийняття Європейської довідкової рамки ключових компетентностей для навчання впродовж життя (2006 р.) з метою її адаптації до нових політичних, економічних та суспільних реалій Європейський Союз ухвалив рішення про її модернізацію. Рекомендацією Ради від 22 травня 2018 р. «Про ключові компетентності для навчання впродовж життя» було затверджено оновлену Європейську довідкову рамку ключових компетентностей. В оновленій Рамці підтверджено позицію Європейського Союзу щодо розуміння компетентності як комбінації знань, умінь і ставлень та запропоновано трактування усіх цих трьох складових. Так, у трактуванні Європейського Союзу: знання охоплюють факти і дані, концепти, ідеї та теорії, що сприяють розумінню певної галузі чи предмета; уміння — це здатність здійснювати діяльність із застосуванням набутих знань для досягнення результатів; ставлення — це образ мислення щодо дій і реагування на ідеї, поведінку осіб чи ситуації. Інновацією стала ідея наскрізності ключових компетентностей — йдеться про проголошення цілісності освітнього простору для набуття компетентностей шляхом поєднання формальної, неформальної та інформальної освіти. «Ключові компетентності — це такі компетентності,

які потрібні всім індивідуумам для особистісної реалізації та розвитку, працевлаштування, соціальної інтеграції, сталого способу життя, успішного життя в мирних суспільствах, управління здоровим способом життя та активного громадянства. Вони набуваються в перспективі освіти впродовж життя, від раннього дитинства впродовж дорослого життя, а також засобами формальної, неформальної та інформальної освіти в усіх контекстах, охоплюючи сім'ю, школу, робоче місце, соціальне оточення та інші громади» — йдеться в документі. Важливим у новому баченні компетентностей є акцент на неперервності — компетентність є відкритим утворенням, яке індивід може розвивати в контексті освіти впродовж життя [6].

Компетентнісна ідея має потужний вплив на вітчизняну освітню політику. Продовжується поступальний рух у напрямі її трансформації. Процес трансформації української шкільної освіти на компетентнісно базовану розпочався на державному рівні, зокрема, з прийняттям Державного стандарту початкової загальної освіти (2011 р.) (постанова Кабінету міністрів України «Про затвердження Державного стандарту початкової загальної освіти» від 20 квітня 2011 р. №462) і Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти (2011 р.) (постанова Кабінету міністрів України «Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти» від 23 листопада 2011 р. №1392), що ґрунтуються на засадах особистісно зорієнтованого і компетентнісного підходів. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти (2011 р.) містить означення таких категорій: компетентнісний підхід — спрямованість навчально-виховного процесу на досягнення результатів, якими є ієрархічно підпорядковані; предметна (галузева) компетентність — набутий учнями у процесі навчання досвід специфічної для певного предмета діяльності, пов'язаної із засвоєнням, розумінням і застосуванням нових знань; ключова компетентність — спеціально структурований комплекс характеристик (якостей) особистості, що дає можливість їй ефективно діяти у різних сферах життєдіяльності і належить до загальногалузевого змісту освітніх стандартів; ключова компетенція — певний рівень знань, умінь, навичок, ставлень, які можна застосувати у сфері діяльності людини. До ключових компетентностей належить уміння вчитися, спілкуватися державною, рідною та іноземними мовами, математична і базові компетентності в галузі природознавства і техніки, інформаційно-комунікаційна, соціальна, громадянська, загальнокультурна, підприємницька і здоров'язбержувальна компетентності, а до предметних (галузевих) — комунікативна, літературна, мистецька, міжпредметна естетична, природничо-наукова і математична, проектно-технологічна та інформаційно-комунікаційна,

суспільствознавча, історична і здоров'язбережувальна компетентності. Предметні (галузеві) компетентності стосуються змісту конкретної освітньої галузі чи предмета, і для їх опису використовуються такі ключові поняття: «знає і розуміє», «уміє і застосовує», «виявляє ставлення і оцінює» тощо. На національному освітньому рівні компетентнісний підхід утверджений прийняттям Національної рамки кваліфікацій — системного і структурованого за компетентностями опису кваліфікаційних рівнів освіти. Кожен рівень — це завершений етап освіти, що характеризується рівнем складності освітньої програми, сукупністю компетентностей особистості, які визначені, як правило, стандартом освіти та відповідають певному рівню Національної рамки кваліфікацій (постанова Кабінету міністрів України «Про затвердження Національної рамки кваліфікацій» від 23 листопада 2011 р. №1341). Початкова, базова середня і профільна середня рівні шкільної освіти відповідають першому, другому і третьому рівням Національної рамки кваліфікацій з описом відповідних компетентностей (таблиця 1.2.1).

Таблиця 1.2.1

Відповідність рівнів шкільної освіти і рівнів Національної рамки кваліфікацій з описом відповідних компетентностей

Рівень освіти	Рівень Національної рамки кваліфікацій	Компетентності особи
Початкова освіта	перший рівень	здатність особи виконувати прості завдання в типових ситуаціях у чітко визначеній структурованій сфері роботи або навчання, виконувати завдання під безпосереднім керівництвом іншої особи
Базова середня освіта	другий рівень	здатність особи виконувати типові нескладні завдання у типових ситуаціях у чітко визначеній структурованій сфері роботи або навчання, виконувати завдання під керівництвом з елементами самостійності
Профільна середня освіта	третій рівень	здатність особи виконувати виробничі або навчальні завдання середньої складності за визначеними алгоритмами та встановленими нормами часу і якості

Підписання Угоди про асоціацію між Україною та Європейським Союзом (2014 р.) сприяло прискоренню європейського вектора розвитку України та синхронізації вимірів української освіти з європейськими характеристиками. 17 серпня 2016 р. Міністерство освіти і науки України оприлюднило для широкого обговорення першу версію «Концептуальних засад реформування середньої освіти». За результатами дискусій освітян і вчених Уряд схвалив Концепцію реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року.

Реалізація Концепції передбачає створення умов для реформування загальної середньої освіти з урахуванням досвіду провідних країн світу, розроблення нових стандартів змісту загальної середньої освіти, які ґрунтуватимуться на компетентнісному та особистісно-орієнтованому підході до навчання. Передбачено перехід до 12-річної середньої школи із трирічною профільною школою, що матиме академічне або професійне спрямування. Має реформуватися система управління загальною середньою освітою, зокрема, школа отримує право розробляти і впроваджувати власні освітні програми.

Державне регулювання нових засад шкільної освітньої системи забезпечено прийняттям нових законів «Про освіту» (2017 р.), «Про повну загальну середню освіту» (2020 р.). Законодавчими актами метою освіти проголошується всебічний розвиток людини як особистості та найвищої цінності суспільства, її талантів, інтелектуальних, творчих і фізичних здібностей, формування цінностей і необхідних для успішної самореалізації компетентностей, виховання відповідальних громадян, які здатні до свідомого суспільного вибору та спрямування своєї діяльності на користь іншим людям і суспільству, збагачення на цій основі інтелектуального, економічного, творчого, культурного потенціалу Українського народу, підвищення освітнього рівня громадян задля забезпечення сталого розвитку України та її європейського вибору. При цьому перелік ключових компетентностей, необхідних кожній сучасній людині для успішної життєдіяльності, що визначено Законом України «Про освіту», ідентичний європейському (таблиця 1.2.2).

Відповідність переліку ключових компетентностей у Законі України «Про освіту» і Європейській довідковій рамці ключових компетентностей для навчання впродовж життя (2018 р.)

Європейська довідкова рамка ключових компетентностей для навчання впродовж життя (2018 р.).	Закон України «Про освіту»
Грамотність	Вільне володіння державною мовою
Багатомовна компетентність	Здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами
Математична компетентність та компетентність з науки, технологій і техніки	Математична компетентність; компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій
Цифрова компетентність	Інформаційно-комунікаційна компетентність
Особистісна, соціальна компетентність та вміння вчитися	Навчання впродовж життя
Громадянська компетентність	Громадянські та соціальні компетентності, пов'язані з ідеями демократії, справедливості, рівності, прав людини, добробуту та здорового способу життя, з усвідомленням рівних прав і можливостей; екологічна компетентність
Підприємницька компетентність	Підприємливість та фінансова грамотність; інноваційність
Культурна обізнаність та самовираження	Культурна компетентність

У лютому 2018 р. затверджено новий Державний стандарт початкової освіти (постанова Кабінету міністрів України від 21 лютого 2018 р. № 87). Саме за ним з 2019–2020 навчального року почали навчатися усі перші класи початкової ланки шкільної освіти України. Робота над цим документом тривала близько року. Головна ідея нового Державного стандарту початкової освіти — навчання, побудоване на компетентно-

стях. Чинний Закон України «Про освіту» містить таке визначення компетентності: «динамічна комбінація знань, умінь, навичок, способів мислення, поглядів, цінностей, інших особистих якостей, що визначає здатність особи успішно соціалізуватися, провадити професійну та/або подальшу навчальну діяльність». Іншими словами – це здатність використовувати знання і навички в житті. У новому Державному стандарті початкової освіти визначено ключові компетентності та шляхи їх реалізації на рівні початкової школи. Наприклад, щодо підприємливості і фінансової грамотності: «У початковій школі розвиток цієї групи компетентностей виявляється через ініціативність здобувачів, їхню готовність брати відповідальності за власні рішення, вміння організувати свою діяльність для досягнення цілей, усвідомлення етичних цінностей ефективної співпраці. Учні готові втілювати в життя ініційовані ними ідеї, приймати власні рішення». Одна з найважливіших тез стандарту про те, що компетентнісний потенціал кожної освітньої галузі забезпечує формування всіх ключових компетентностей.

На початку 2020 року групою вчених і педагогів завершено розроблення нового Державного стандарту базової середньої освіти, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. №898. Документ містить конкретні вимоги до результатів навчання, при цьому вчителю лишається повна свобода у виборі навчальних інструментів. Державний стандарт базової середньої освіти встановлює вимоги до компетентностей, якими мають оволодіти всі учні середньої школи. До таких компетентностей належать: математична, екологічна, інформаційно-комунікаційна, культурна, вільне володіння державною мовою, здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами, компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій, інноваційність, навчання впродовж життя, громадянські та соціальні компетентності, пов'язані з ідеями демократії, моралі, справедливості, рівності, свободи, прав людини, добробуту та здорового способу життя, нетерпимості до проявів корупції, підприємливість та фінансова грамотність. Ключові компетентності необхідні всім людям для підвищення особистого потенціалу і розвитку, розширення можливостей працевлаштування, соціальної інтеграції та активного громадянства. Такі компетентності розвиваються в процесі навчання протягом усього життя, починаючи з раннього дитинства шляхом формального, неформального та інформального навчання. Усі ключові компетентності вважаються однаково важливими: кожна з них сприяє успішному життю людини в суспільстві. Розвиваючи компетентності, важливі для однієї життєвої сфери, одночасно розвиваються й пріоритетні компетентності

для іншої. Такі навички, як критичне мислення, аналітичне мислення, уміння вирішувати проблеми, творчість, робота в команді, вміння спілкуватися та здійснювати переговори, приймати рішення, саморегуляція, стійкість, емпатія, повага до різноманітності, враховуються у всіх ключових компетентностях. Державний стандарт базової середньої освіти є основою для розробки типових та інших освітніх програм.

Математична освітня галузь, як і інші освітні галузі, описується у нових Державних стандартах, а також у Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти (2011 р.) з огляду на відповідні інструменти формування в учнів ключових компетентностей, а також очікуваних результатів цього процесу.

У Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти (2011 р.) основною метою освітньої галузі «Математика» визначено формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції. Завданнями освітньої галузі є: розкриття ролі та можливостей математики у пізнанні і трактуванні реальних процесів і явищ дійсності, забезпечення усвідомлення математики як універсальної мови природничих наук та органічної складової загальної людської культури; розвиток логічного, критичного і творчого мислення учнів, здатності чітко та аргументовано формулювати і висловлювати свої судження; забезпечення оволодіння учнями математичною мовою, розуміння ними математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ; формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи в процесі розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів; розвиток умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті; формування здатності оцінювати правильність і раціональність розв'язання математичних задач, обґрунтовувати твердження, розпізнавати логічно некоректні міркування, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації. Зокрема, завданнями освітньої галузі, що визначають зміст математичної освіти у старшій школі, є роз-

ширення суто математичної компетентності, завершення формування математичних понять, ознайомлення з ідеями і методами математики та їх практичним застосуванням тощо. Зазначені завдання виконуються в процесі опанування навчального змісту освітньої галузі.

Слід зазначити, що у Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти (2011 р.) ідею компетентнісного підходу було лише закладено. У новому Державному стандарті початкової освіти (2018 р.) і Державному стандарті базової середньої освіти відбувається перехід до її системної реалізації. Новизна документів полягає в тому, що вони визначають спільні очікувані результати навчання для всіх освітніх галузей — формування ключових компетентностей. «Вимоги до обов'язкових результатів навчання визначаються з урахуванням компетентнісного підходу, в основі якого лежать Рекомендації Ради Європейського Союзу від 22 травня 2018 р. щодо ключових компетентностей для освіти впродовж життя. Усі ключові компетентності однаково важливі; кожна з них сприяє успішному життю у суспільстві» — йдеться в документі. Основою формування ключових компетентностей є особисті якості, здібності, попередній особистісний, соціальний, культурний і навчальний досвід учнів; їхні потреби, які мотивують до навчання; знання, уміння та ставлення, що формуються в освітньому, соціокультурному та інформаційному середовищах, а також у різних життєвих ситуаціях. Наскрізними у всіх ключових компетентностях є такі вміння:

- читання з розумінням, що передбачає здатність сприймати, розуміти інформацію, записану (передану) різним способом або відтворену технічними пристроями. Це охоплює вміння виявляти припущення та інформацію, надану в тексті в неявному вигляді, доводити надійність аргументів, підкріплюючи власні висновки фактами з тексту та неявними доказами, висловлювати ідеї, пов'язані з новим розумінням тексту після його аналізу та добору контраргументів;
- висловлення власної думки усно й письмово, тобто вміння словесно передавати власні думки, почуття, переконання, зважаючи на мету та учасників комунікації та обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії;
- критичне та системне мислення, що виявляється у визначенні характерних ознак явищ, подій, ідей, умінні аналізувати й оцінювати доказовість і вагу аргументів у судженнях, враховувати протилежні думки і контраргументи, розрізняти факти та їхні інтерпретації, розпізнавати спроби маніпулювання даними, використовуючи

-
- різноманітні ресурси й способи оцінювання надійності кількісних і якісних доказів та достовірності інформаційних джерел;
- творчість, що передбачає творче мислення, продукування нових ідей, використання ідей інших та їх доопрацювання, застосування знань з різних предметів і галузей для створення нових об'єктів, ідей, уміння випробовувати нові ідеї з обґрунтованим ризиком під час висловлення та впровадження нового;
 - ініціативність, яка передбачає активний пошук і пропонування рішень для розвитку і перевірки ідей та вирішення проблем (створення цінностей);
 - логічне обґрунтування позиції, що передбачає вміння висловлювати послідовні, несуперечливі, обґрунтовані міркування у вигляді висновків/ суджень, що є виявом власного ставлення до подій, явищ і процесів;
 - конструктивне керування емоціями, що передбачає здатність розпізнавати власні емоції та емоційний стан інших, розуміти, як емоції можуть допомагати і заважати в діяльності, та вживати заходів, які відповідають емоційному стану, на основі усвідомлення того, що особа може керувати емоціями, знає способи налаштування себе на продуктивну діяльність;
 - оцінювання ризиків, що передбачає вміння розрізняти прийнятні і неприйнятні ризики, зважаючи на велику кількість факторів;
 - ухвалення рішень, що передбачає здатність оцінювати способи розв'язання проблем, враховуючи їхні етичні, правові, екологічні та суспільні наслідки;
 - розв'язування проблем, що передбачає вміння формулювати проблеми і представляти їх різними способами, обирати й отримувати дані для вирішення проблем з надійних джерел, застосовуючи різні прийоми і стратегії розв'язання проблем;
 - співпраця з іншими, що передбачає вміння обґрунтовувати користь взаємодії під час спільної діяльності, планувати свою і групову роботу, підтримувати учасників групи, допомагати та заохочувати інших до досягнення спільної мети.

Для кожної освітньої галузі у Державному стандарті базової середньої освіти (2020 р.) визначено мету, єдину для всіх рівнів загальної середньої освіти, компетентнісний потенціал, що відображає здатність кожної освітньої галузі формувати всі ключові компетентності через розвиток умінь і ставлень. Зокрема, метою математичної освітньої галузі є формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та професійної

діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, вдосконалення умінь і способів дій для розв'язування суто математичних та практичних задач; розвиток логічного мислення та психологічних якостей особистості; розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті. Вимоги до обов'язкових результатів навчання учнів з математичної освітньої галузі передбачають, що учні: виокремлюють проблеми і досліджують ситуації, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів; моделюють процеси і ситуації, розробляють стратегії, плани дій для розв'язання проблемних ситуацій; критично оцінюють процес та результат розв'язання проблемних ситуацій; розвивають математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіють математичною мовою. Отже, під результатами навчання математики учнів ліцею слід розуміти засвоєння відповідної програми з математики з одного боку, і формування ключових компетентностей засобами вивчення математики — з іншого.

У сучасному розумінні освітній процес охоплює навчання, виховання і розвиток. Виховний процес є невід'ємною складовою всього освітнього процесу і орієнтується на загальнолюдські цінності, зокрема морально-етичні (гідність, чесність, справедливість, турбота, повага до життя, повага до себе та інших людей), соціально-політичні (свобода, демократія, культурне різноманіття, повага до рідної мови і культури, патріотизм, шанобливе ставлення до довілля, повага до закону, солідарність, відповідальність). Тому ознаками сформованості ключових компетентностей є уміння і ціннісні ставлення людини (табл. 1.2.3)

Таблиця 1.2.3

Формування ключових компетентностей на уроках математики

Уміння	Ставлення
<i>Вільне володіння державною мовою</i>	
Чітко і зрозуміло формулювати думку, аргументувати, ставити запитання і розпізнавати проблему; ормулювати висновки на основі інформації, поданої в різних формах; доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, вести критичний та конструктивний діалог; поповнювати свій словниковий запас	Визнання важливості чітких та лаконічних формулювань та повага до державної мови

Уміння	Ставлення
<i>Здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами</i>	
<p>Розуміти і перетворювати тексти математичного змісту рідною мовою; зіставляти математичні терміни та поняття рідною та державною мовами; правильно та доречно вживати математичну термінологію усно і письмово, грамотно висловлюватися; поповнювати словниковий запас математичними термінами іншомовного походження; зіставляти математичний термін чи його буквене позначення з аналогами з іноземної мови для пошуку інформації в іншомовних джерелах</p>	<p>Розуміння цінності мовного різноманіття та повага до рідної мови; усвідомлення важливості правильного використання математичних термінів та їх позначення в різних мовах у навчанні та повсякденному житті</p>
<i>Математична компетентність</i>	
<p>Оперувати текстовою і числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі; встановлювати кількісні і просторові відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); обирати, будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; робити прогнози в контексті навчальних та практичних задач; доводити правильність тверджень; застосовувати логічні способи мислення під час розв'язування пізнавальних і практичних задач, пов'язаних з реальними об'єктами; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях</p>	<p>Пошанування істини; готовність шукати пояснення та оцінювати правильність аргументів; усвідомлення важливості математики як універсальної мови науки, техніки та технологій</p>
<i>Компетентності в галузі природничих наук, техніки й технологій</i>	
<p>Будувати та досліджувати математичні моделі природних явищ і процесів; робити висновки на основі міркувань та свідчень; обґрунтовувати рішення</p>	<p>Критичне ставлення до досягнень науково-технічного прогресу; усвідомлення важливості математики для опису та пізнання навколишнього світу</p>

Уміння	Ставлення
<i>Інноваційність</i>	
Генерувати нові ідеї щодо розв'язання проблемної ситуації, аналізувати та планувати їх втілення	Відкритість до інновацій; позитивне оцінювання та підтримка конструктивних ідей інших
<i>Екологічна компетентність</i>	
Розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі, які можна розв'язати, використовуючи засоби математики; Оцінювати, прогнозувати вплив людської діяльності на довкілля через побудову та дослідження математичних моделей природничих процесів і явищ	Зацікавленість у дотриманні умов екологічної безпеки та сталого розвитку; Визнання ролі математики у розв'язанні проблем довкілля
<i>Інформаційно-комунікаційна компетентність</i>	
Структурувати дані; діяти за алгоритмом та складати алгоритми; визначати достатність даних для розв'язання задачі; використовувати різні знакові системи; оцінювати достовірність інформації; доводити істинність тверджень	Критичне осмислення інформації та джерел її отримання; усвідомлення важливості ІКТ для ефективного розв'язування математичних задач
<i>Навчання впродовж життя</i>	
Організовувати та планувати свою навчальну діяльність; моделювати власну освітню траєкторію, аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати результати навчальної діяльності; доводити правильність чи помилковість суджень	Усвідомлення власних освітніх потреб та цінності нових знань і вмінь; зацікавленість у пізнанні світу та розуміння важливості вчитися впродовж життя; прагнення вдосконалювати результати людської діяльності
<i>Громадянські та соціальні компетентності, пов'язані з ідеями демократії, справедливості, рівності, прав людини, добробуту та здорового способу життя, з усвідомленням рівних прав і можливостей</i>	

Уміння	Ставлення
<p>Висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів; аналізувати і критично оцінювати соціально-економічні події в державі на основі статистичних даних; розпізнавати інформаційні маніпуляції; вносити свою частку в роботу групи для розв'язання проблеми; аргументувати та відстоювати власну позицію; ухвалювати аргументовані рішення на основі аналізу усіх даних та виявлення причиново-наслідкових зв'язків проблемної ситуації; орієнтуватися в широкому колі послуг і товарів на основі чітких критеріїв, робити споживчий вибір, використовуючи, зокрема, математичні вміння</p>	<p>Налаштованість на логічне обґрунтування позиції без передчасного переходу до висновків; ощадливість і поміркованість; рівне ставлення до інших осіб та відповідальність за спільну справу</p>
<i>Культурна компетентність</i>	
<p>Бачити математику у творах мистецтва; зображати фігури, графіки, рисунки, схеми, діаграми, унаочнювати математичні моделі; здійснювати необхідні розрахунки для встановлення пропорцій, відтворення перспектив, створення об'ємно-просторових композицій</p>	<p>Усвідомлення взаємозв'язку математики та культури на прикладах з живопису, музики, архітектури тощо; розуміння важливості внеску математиків у загальносвітову культуру</p>
<i>Підприємливість та фінансова грамотність</i>	
<p>Генерувати нові ідеї, аналізувати, ухвалювати оптимальні рішення, вирішувати життєві проблеми; аргументувати та захищати свою позицію, вести дискусію; використовувати різні стратегії, шукати оптимальні способи розв'язання проблемних ситуацій; будувати та досліджувати математичні моделі економічних процесів; планувати та організовувати діяльність для досягнення цілей; аналізувати власну економічну ситуацію, родинний бюджет, користуючись математичними методами</p>	<p>Відповідальність та ініціативність, впевненість у собі; відповідальність за власні рішення; розуміння важливості математичних розрахунків та оцінювання ризиків</p>

Математична компетентність на сьогодні є у переліку як ключових так і предметних компетентностей. Математична компетентність – це вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну

модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень. Математична компетентність визначається рівнями навчальних досягнень, для яких суттєвим є набуття математичних умінь. До них належать: уміння математичного мислення, аргументування, математичного моделювання; уміння постановки та розв'язування математичних задач, презентації даних; уміння оперування математичними конструкціями; уміння математичних спілкувань; уміння використання математичних інструментів [19].

Предметна компетентність учня з математики є ознакою високої якості його навчальних умінь, можливості встановлювати зв'язки між набутими математичними знаннями та реальною ситуацією, здатності знаходити метод розв'язання, відповідно до проблеми, та успішно використовувати свої вміння, сформовані протягом вивчення математики. Предметні компетентності формуються в процесі засвоєння учнями математичного змісту. Вони є соціально значущим результатом навчання, репрезентованим у Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти (2020 р.) [15], закріпленим у навчальних програмах.

Математична компетентність містить п'ять структурних компонентів: мотиваційний — система мотивів, цілей, потреб і прагнень до вивчення математики; когнітивний — сукупність теоретичних і практичних знань; діяльнісний — комплекс математичних умінь, спроможність розв'язувати практичні завдання за допомогою математичного апарату; ціннісно-рефлексивний — сукупність особистісно значущих прагнень, ідеалів, переконань, поглядів, ставлень у галузі математики, розуміння ролі математичної компетентності як соціальної цінності, прагнення до саморозвитку, самоаналіз і самооцінка власної математичної діяльності; емоційно-вольовий — розуміння власного емоційного стану у процесі математичної діяльності, наполегливість і цілеспрямованість у розв'язуванні математичних задач, почуття власної гідності.

Виділяють функціональні складники математичної компетентності: процедурну компетентність — уміння розв'язувати типові математичні задачі; логічну компетентність — володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень; технологічну компетентність — володіння сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями підтримки математичної діяльності; дослідницьку компетентність — володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих завдань за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій і математичних методів; методологічну компетентність — уміння оцінювати доцільність використання математичних методів і засобів інформацій-

но-комунікаційних технологій для розв’язання індивідуально і суспільно значущих задач [19].

Традиційна освітня парадигма, зорієнтована на знаннєві результати навчання, поступається місцем новій, в основі якої — формування життєвої компетентності учня, що передбачає здатність використовувати набуті знання та вміння в житті, переносити їх у різні практичні ситуації, критично мислити, робити висновки. Математика залишається провідним навчальним предметом сучасної школи і набуває ролі інструменту формування в учнів усіх ключових компетенцій. За таких умов посилюється роль і значення методичного забезпечення компетентнісного навчання математики.

1.3. УРІЗНОМАНІТНЕННЯ ФОРМ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Васильєва Д.В.

Форма — це зовнішній вияв цілісного двостороннього процесу педагогічної діяльності вчителя та навчально-пізнавальної діяльності учнів. Традиційно розрізняють організаційні форми навчання відповідно певних ознак:

- за місцем навчання: класна і позакласна;
- за кількістю учнів: індивідуальна, групова, колективна, масова;
- за особливостями організації навчання: стаціонарна, заочна, дистанційна;
- за способом управління пізнавальною діяльністю учнів: урок, лекція, семінар, лабораторна робота, науково-дослідна робота тощо.

Розглянемо деякі з них. За місцем навчання традиційно розрізняють класну і позакласну форми навчання. Основною формою **класної** роботи є **урок**. Окрім класичної типології уроків виокремлюють ще й нетрадиційні уроки, а саме:

Урок-проект;	Бінарний урок;
Урок-консультація	Білінгвальний урок;
Урок-самооцінка;	Урок рецензування;
Урок-лекція;	Урок-вернісаж;
Урок-залік;	Урок-виставка;
Урок-лабораторна робота	Урок-аукціон;
Урок-конференція;	Урок з елементами лотереї;
Урок – творчий звіт	Урок-змагання;
Урок – «круглий стіл»;	Урок-веб-квест
Урок взаємоконтролю;	Уроки-ділові, рольові ігри

Кожен з цих видів нетрадиційних уроків можна використати для навчання математики у 10-11 класах на рівні стандарту. Розглянемо детальніше кілька таких уроків.

Урок з елементами лотереї. На такому уроці усі запропоновані вчителем вправи пишуть на листочках та кладуть у барабан, мішечок чи коробочку. Учень виходить до дошки, витягає папірець та розв'язує біля дошки (в зошиті) запропоноване завдання. За бажанням учителя в одній коробці завдання можуть бути різних рівнів складності, або ж учитель може пропонувати декілька коробок, в кожній з яких будуть міститися завдання відповідного рівня. Доцільно, окрім типових завдань з теми, подавати завдання з логічним навантаженням. Або й бонусом може бути якесь завдання з іншого предмету чи опис фізичної вправи, що має виконати учень. Уроки такого типу викликають емоції в учнів і збуджують інтерес до навчання.

Урок — веб-квест. Веб-квест — це організації освітньої діяльності учнів з елементами рольової гри, що проявляється у спільній діяльності учнів і вчителя. На такому уроці учні здійснюють інтернет-пошук, метою якого є навчання або закріплення знань та навичок з використання Інтернету. Результатом роботи учнів з веб-квестом зазвичай є публікація робіт учнів у вигляді веб-сторінок, веб-сайтів або презентацій. Для старшокласників вміння знайти інформацію, проаналізувати її, критично оцінити — важлива навичка.

Основними завданнями уроків у формі Веб квесту є поглиблення знань учнів, розвиток їх мислення, дослідницьких і творчих здібностей, підвищення комп'ютерних навичок і особистісної самооцінки.

Урок — конференція. У такій формі уроки доцільно проводити на початку вивчення нової теми (з метою зацікавлення учнів) або наприкінці (з метою узагальнення та систематизації вивченого матеріалу). На урок конференцію можна виносити різну тематику: від історизмів («Хто і як створив логарифми» або «Похідна у І.Ньютона і Г. Лейбніца») до суто програмних питань («Види кутів у стереометрії» чи «Правильні многогранники»). Питання, які планується розглянути на конференції, заздалегідь роздаються бажаним учням. Учні (або групи учнів) самостійно готують виступи, роблять презентації та після консультації з вчителем виступають з короткими повідомленнями на уроці.

Урок-вернісаж. Вернісаж — це урочисте відкриття художньої виставки. Тож урок у такій формі має нагадувати виставку і бути цікавим. Для учнів 11 класу можна провести урок-вернісаж на тему «Многогранники». Заздалегідь учитель готує моделі різних видів многогранників — від найпростіших (куб, призма піраміда) до зірчастих (тіла Пуансо). Добре, якщо в школі є кольорові моделі усіх правильних і напівправильних

многогранників. Це суттєво прикрасить виставку і підніме інтерес учнів. Добре, якщо на дошці чи стінах будуть подані репродукції зображень многогранників в архітектурі (Єгипетські піраміди) чи мистецтві (картини Далі), а також предмети довкілля, що містять різного виду многогранники.

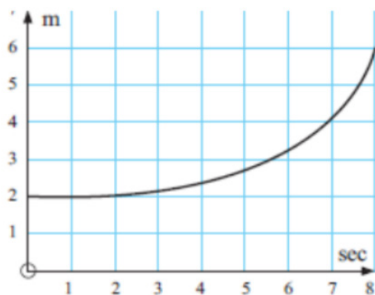
Учні мають можливість вільно пересуватися класом, розглядати моделі, з'ясувати їхні назви, та назви окремих елементів. Добре, якщо кілька учнів зможуть виступити експертами чи екскурсоводами для інших. Для цього їх потрібно заздалегідь підготувати до такого виду діяльності.

Білінгвальний урок. У навчальній програмі [2] визначено, що навчання математики має зробити певний внесок у формування ключових компетентностей. Серед 10 визначених ключових компетентностей друге місце посідає «Спілкування іноземними мовами», а саме: вміння: спілкуватися іноземною мовою з використанням числівників, математичних понять і найуживаніших термінів; ставити запитання, формулювати проблему; зіставляти математичний термін чи буквене позначення з його походженням з іноземної мови, правильно використовувати математичні терміни в повсякденному житті.

Для формування цієї компетентності доцільно використовувати білінгвальні уроки — математика і англійська мова чи математика і німецька мова (французька, польська тощо). Англійською мовою може проводитися весь урок, або окремі його частини. Це залежить від знання мови учнями і вчителем математики. Одним із засобів для проведення таких уроків може стати підручник «Алгебра і початки аналізу», 10 клас [10], в якому англійською мовою подані деякі ключові слова кожної теми, завдання окремих видів, а також деякі задачі. У темі «Функція» можна розглянути такі задачі.

- If the value of photocopier t years after purchase is given by $V(t) = 9650 - 860t$ dollars: 1) find $V(4)$ and state what $V(4)$ means; 2) find t when $V(t) = 5780$ and explain what this represents; 3) find the original purchase price of photocopier.
- Given $T(x) = ax^2 + bx + c$, find a , b and c if $T(1) = -2$ and $T(2) = 6$.
- For the travel graph given alongside find estimates of the average speed:

1. in the first 4 seconds;
2. in the last 4 seconds;
3. in the 8 second interval.



Мал. 1.3.1

Такі уроки розширюють мовну і математичну компетентність учнів, сприяють співпраці учнів, що мають різну підготовку з математики й іноземної мови.

Зрозуміло, що такі уроки доцільно проводити в класах, де учні знають іноземну мову на досить високому рівні.

Форми проведення позакласної роботи.

Позакласна робота з математики — це заняття, які відбуваються в позаурочний час. Її організація ґрунтується на принципі добровільної участі й має на меті підвищення рівня математичного розвитку учнів і цікавості до предмета завдяки поглибленню і розширенню основного змісту програми [11]. Такі заняття проводяться в школах і поза ними під керівництвом учителів чи інших фахівців. Позакласні заняття з математики — це одночасно одна з форм організації дозвілля учнів, а також один із видів навчально-виховної роботи з старшокласниками.

Поняття *позакласна робота* багатоаспектне і включає різні види занять за змістом, методикою та способом проведення. Це може бути математичний гурток у школі чи математичний гурток у Центрах дитячої творчості, шкільна олімпіада чи міська олімпіада, вікторина між учнями 10-х класів школи чи Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру» тощо. Якщо в закладі освіти позакласну роботу організовано майстерно, з урахуванням вікових особливостей учнів і їхніх інтересів, то у такий спосіб створюються умови для розвитку особистості старшокласників, підвищення у них мотивації до навчання математики, формування самостійності й самореалізації особистості.

До форм позакласної роботи відносять:

математичні гуртки; тиждень математики; математичні вечори; математичні олімпіади; математичні екскурсії; математичні конференції;	математичні вікторини; навчальний практикум; квести та інші конкурси; позакласне читання; математичні дебати; виступи КВК.
---	---

Розглянемо декілька з них.

Навчальний практикум проводиться для формування, розвитку та закріплення знань, які стосуються конкретної теми. Учням пропонується у певний термін в позаурочний час розв'язати самостійно 10 — 20 завдань, до яких подаються відповіді. Після відведеного часу учні ма-

ють можливість ознайомитися з правильними способами розв'язання та перевірити себе за допомогою розв'язування аналогічних завдань.

Навчальний практикум доцільно проводити після вивчення, наприклад таких тем:

- Розв'язування показникових (логарифмічних) рівнянь і нерівностей.
- Правила диференціювання функцій.
- Побудова перерізів многогранників.
- Обчислення об'ємів тіл обертання.

Така форма роботи стимулює в учнів самоконтроль, самоорганізацію, удосконалює самооцінку, спонукає до самоаналізу, виховує відповідальність, активність та самостійність.

Математичні дебати — рольова гра, що являє собою певну форму дискусії математичного змісту і проводиться за визначеним регламентом. У математичних дебатах змагаються дві команди: «Ствердження» і «Заперечення». В кожній команді по три спікера і один аналітик. Спікери по черзі виголошують промову (6-8 хв), аргументуючи ствердження чи заперечення якогось факту, а потім аналітики підводять підсумки (4 хв), наголошуючи на сильних сторонах промов своєї команди і на слабких сторонах промов команди суперника. Дебати мають не лише пізнавальне значення, а й розвивають критичне мислення і виховують культуру комунікативної діяльності, тобто сприяють гуманізації математичної освіти. Наведемо кілька прикладів тем і вихідних тез математичних дебатів, які можуть бути проведені у якості позакласного заходу або нестандартного уроку:

1. Статистика. Вихідна теза: «Уміння оперувати даними — необхідна складова обізнаності сучасної людини».
2. Криволінійна трапеція. Вихідна теза: «Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, можна обчислити площу будь-якої геометричної фігури».

У старших класах з вивченням математики на рівні стандарту існують два види додаткових позакласних занять математики (робота з учнями, відстаючими від інших у вивченні програмного матеріалу; робота з учнями, які проявляють до вивчення математики підвищений, в порівнянні з іншими, інтерес і здібності), які традиційно не відносять до позакласної роботи, оскільки вони безпосередньо пов'язані з вивченням на різному рівні програмного матеріалу [11].

Розглянемо детальніше, як розрізняють організаційні форми навчання за кількістю учнів (індивідуальна, групова, колективна, масова).

Індивідуальна форма навчання передбачає взаємодію вчителя одним учнем. Таке навчання може бути самостійним або з безпосередньою допомогою вчителя. Індивідуальна робота може досить часто використовуватись на уроках математики у 10-11 класах, бо учні вже володіють певним рівнем самостійності, ініціативності, наполегливості і сили волі. Важливо, щоб у процесі навчання поступово зростав рівень самостійності учнів. Наприклад, на кожному уроці можна приділяти 5 хв для самостійної роботи учнів. Це може бути самостійна робота, спрямована на самостійне розв'язування визначених задач або розгляд окремої частини теоретичного матеріалу. По закінченню самостійної роботи, її результати слід обговорити і зробити висновки. Такий підхід надає можливість учням усвідомити переваги і недоліки своїх можливостей у навчанні, сприяє розвитку відповідальності й самооцінці рівня знань учнями.

Групова форма передбачає роботу учнів у групах і взаємодію декількох учнів. Групи можуть створюватися на різних засадах. Груповою формою передбачає спільне планування навчальної діяльності учнями, вибір методів та засобів її здійснення. Групи можуть складатись з учнів одного рівня, або навпаки, в кожній мають бути учні різних рівнів. Наприклад після пояснення навчального матеріалу вчитель може розділити учнів на групи за допомогою вправи «Світлофор» (учні піднімають зелену картку, якщо їм все зрозуміло, жовту — якщо залишились запитання, червону — якщо учень нічого не зрозумів). Вчитель ділить учнів на групи, щоб у кожній був хоча б один учень з зеленою карткою і один з червоною. Учні самостійно в групах ще раз проговорюють почуте (скоріше за все учень з зеленою карткою буде пояснювати учню з жовтою і червоною). Потім на обговорення виносяться запитання, що залишились у групі без відповіді. Групову форму роботи на уроках математики у класах, що працюють на рівні стандарту, можна організовувати і з учнями, що вивчають математику на одному рівні навчальних досягнень. Для учнів, які передбачають складати ЗНО для вступу у ВНЗ, вчитель може організувати кілька груп і запропонувати самостійно розв'язувати завдання підвищеного рівня складності. У цей час учні, які будуть складати ЗНО у формі ДПА, працюють разом з учителем над формуванням умінь з вивченої теми.

Парну роботу можна розглядати підвидом групової форми роботи, де основна взаємодія відбувається між двома учнями. У парі передбачається взаємонавчання та взаємоконтроль. Важливо, щоб робота в парі не зводилась лише до роботи в постійних парах (наприклад постійно працюють в парі учні, що сидять за однією партою). Бажано,

щоб учні в процесі такої форми навчання здобули навички комунікації з різними учнями.

Колективна форма. Під час колективної форми клас виступає в ролі колективу, у якого наявна спільна мета та розподіл обов'язків. Ця форма навчання передбачає роботу вчителя відразу з усіма учнями в єдиному темпі і з загальними завданнями. Для колективної роботи, крім традиційної, доцільно пропонувати інтерактивні прийоми: «Знайди помилку», «Мікрофон», «Мозковий штурм» тощо.

Масова форма навчання математики набуває особливої актуальності останнім часом. Це пов'язано з швидким поширенням інформатизації освіти й усього суспільства. За цих умов всі види діяльності розглядаються як складна система процесів переробки інформації. Щоб опанувати ту чи іншу навчальну тему учні можуть, крім ознайомлення з нею в класі під керівництвом учителя, використати багато інших шляхів — від вивчення теми самостійно за підручником до перегляду відеороликів чи вебінарів. Обов'язковою складовою сучасного освітнього середовища стали відеолекції, презентації, форуми, вебінари тощо.

За допомогою ІКТ можна організувати синхронне чи асинхронне навчання математики. Добре себе зарекомендували навчальні вебінари, які охоплюють широку зацікавлену аудиторію учнів, незалежно від місця їх проживання. Сьогодні в інтернеті є багато різних відеороликів, які стосуються тем, що вивчаються у курсах стереометрії та алгебри і початків аналізу.

Навчальне відео з математики — це не просто запис звичайного уроку чи пояснення вчителя, а логічно завершений фрагменту навчального матеріалу, що створений на основі певного педагогічного сценарію. Цікаві навчальні відео можуть зацікавити учнів, мотивувати та стимулювати їх пізнавальну діяльність. Обираючи те чи інше відео з теми, учні звертають увагу на те, скільки учнів до того переглянули це відео, у який спосіб ведеться пояснення (статично чи динамічно), чи є анімація, інтерактив тощо.

Найбільш розгалуженим є поділ форм навчання за особливостями організації навчання:

- інституційна (очна (денна, вечірня), заочна, дистанційна, мережева)
- індивідуальна (екстернатна, сімейна (домашня), педагогічний патронаж).

Подано коротку характеристику деяких з них. Нормативними документами [12] визначено, що для організації будь-якої форми здо-

буття освіти можуть застосовуватися дистанційні технології. Надання освітніх послуг у такий спосіб забезпечує підростаючому поколінню можливості реалізації рівного права на здобуття освіти. Дистанційна освіта — це можливість навчатися та отримувати необхідні знання віддалено від навчального закладу в будь який зручний час. Ця форма навчання є рівноцінною з очною, вечірньою, заочною та екстернатом і реалізується, в основному, за технологіями дистанційного навчання.

У Положенні про дистанційну форму здобуття повної загальної середньої освіти подається таке визначення: «дистанційне навчання — організація освітнього процесу (за дистанційною формою здобуття освіти або шляхом використання технологій дистанційного навчання в різних формах здобуття освіти) в умовах віддаленості один від одного його учасників та їх як правило опосередкованої взаємодії в освітньому середовищі, яке функціонує на базі сучасних освітніх, інформаційно-комунікаційних (цифрових) технологій [12].

Положення про дистанційну освіту регулює права та обов'язки учасників навчального процесу. Там же визначено і суб'єктів дистанційного навчання. Це - учні, педагогічні працівники, батьки або інші законні представники неповнолітніх учнів (далі — батьки), асистенти дітей, які беруть участь в освітньому процесі за дистанційною формою здобуття освіти або з використанням технологій дистанційного навчання. Пропонуємо вчителям, перш ніж організувати дистанційне навчання математики, детально ознайомитися з основними поняттями та тезами «Положення про дистанційну форму здобуття повної загальної середньої освіти» за посиланням <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0941-20#n8>.

У Розглянутому вище Положенні [12] значне місце відводиться використанню технологій дистанційного навчання в різних формах здобуття освіти. У цьому контексті окремої уваги заслуговує змішане навчання.

Змішане навчання — форма навчального процесу, що поєднує традиційне навчання, електронне навчання та самостійну роботу учнів. Змішане навчання здійснюється на основі сучасних педагогічних, інформаційних та телекомунікаційних технологій.

Залежно від співвідношення, в якому поєднуються традиційне та електронне навчання розрізняють такі моделі змішаного навчання:

- підкріплення традиційного навчання онлайн навчанням;
- ротаційна модель (план чергування традиційного і електронного навчання встановлюється вчителем (закладом));

-
- гнучка модель (план чергування традиційного і електронного навчання встановлюється відповідно до потреб учнів);
 - модель самостійного змішування (один з предметів (курсів) вивчається онлайн);
 - онлайн лабораторія (учні на уроках в школі під керівництвом помічників навчаються онлайн);
 - переважно онлайн навчання.

Чим більша самостійність учнів та краще технічне забезпечення, тим більший спектр вибору моделі змішаного навчання. Найчастіше українські вчителі математики використовують підкріплення традиційного навчання та ротаційну модель (її підвид «перевернутий клас»).

Під час «перевернутого класу» учні опановують новий матеріал самостійно вдома, а в школі з учителем обговорюють вивчене та закріплюють матеріал, працюючи в групах, парах чи виконуючи практичні роботи. Важливо, щоб додому учень отримав завдання не лише ознайомитися з новим теоретичним матеріалом, а й дати відповіді на питання чи розв'язати найпростіші завдання. Лише так учень може самостійно усвідомити, чи все він зрозумів і чи може застосувати ці знання. Наведемо приклад тем, які доцільно пропонувати для навчання за такою технологією:

- Способи задання функцій.
- Графічне подання інформації про вибірку.
- Взаємне розміщення площин у просторі.
- Правильні многогранники.
- Куля і сфера. Переріз кулі площиною.

У контексті COVID-2019 активно також використовується ротаційна модель, коли учні навчаються традиційно лише у визначені будні дні (чи визначені тижні), а решту часу учні опановують матеріал самостійно за допомогою гаджетів.

Змішане навчання надає суб'єктам освітнього процесу можливість:

- індивідуалізувати навчальний процес (опрацьовувати матеріал учень може у будь-який час у будь-якому місці і у зручному для себе темпі);
- навчити учнів самостійно здобувати знання за допомогою різних джерел (підручник, статті, відео, онлайн курси);
- інтенсифікувати процес навчання математики (особливо враховуючи кількість годин на вивчення математики на рівні стандарт);
- створити умови на уроці для розвитку в учнів не лише предметних компетентностей, а й ключових, оскільки вивільнений час

може використовуватись для організації парної та групової роботи, розв'язування задач з логічним навантаженням, дослідницьких завдань тощо.

Екстернатна форма навчання — це одна з форм здобуття повної загальної середньої освіти, що передбачає самостійне опанування суб'єктом освіти програмного матеріалу в обсязі, визначеному нормативними документами, для отримання документа про відповідний рівень освіти. Екстернатна форма навчання регламентується Положенням про індивідуальну форму здобуття загальної середньої освіти [12].

У цьому ж Положенні описано також сімейну (домашню) форму здобуття освіти й педагогічний патронаж. Ця форма навчання в Україні на сьогодні є досить актуальною. З одного боку, в умовах запровадження інклюзивної освіти й створення окремих інклюзивних класів у багатьох школах, кількість дітей, що навчається вдома за індивідуальними програмами узгодженими з відповідними закладами освіти, зменшується. З іншого боку багато батьків надають перевагу неформальній освіті, а тому обирають домашню освіту для своєї дитини з подальшим складанням необхідних іспитів екстерном. Такий стан свідчить про гуманізацію і демократизацію сучасного суспільства.

1.4. МЕТОДИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Васильєва Д.В.

Методи навчання — це один з компонентів цілісної методичної системи, яка крім цього включає мету, зміст, методи і форми навчання. Удосконалення методів навчання чи запровадження нових (інноваційних) надає можливість інтенсифікувати й урізноманітнити освітній процес. Без сучасних методів навчання неможливо реалізувати цілі, завдання та очікувані результати, які висувуються у нових нормативних документах.

Питання про методи навчання, їх різновиди та способи використання були предметом дослідження педагогів і методистів. Традиційно методи навчання поділяють на загальні та спеціальні. Загальні застосовують при вивченні різних навчальних предметів; спеціальні — під час вивчення окремих дисциплін. Педагоги, переважно, розглядають загальні методи навчання, а методисти, крім загальних методів, значну увагу присвячували спеціальним — методам, що стосуються конкретних методик.

Відомий педагог Н. Є. Мойсеюк подає детальне тлумачення цього поняття. «Метод (від гр. *methodos*) — шлях до чогось, спосіб пізнан-

ня. Метод навчання — шлях навчально-пізнавальної діяльності учнів до результатів, визначених завданнями навчання. Під методом навчання слід розуміти — спосіб упорядкованої, взаємопов'язаної діяльності учителя й учнів, спрямованої на досягнення завдань процесу навчання [13].

У роботі педагогів В. М. Галузинського і М. Б. Євтуха подається поділ методів навчання на такі великі групи:

- методи організації та самоорганізації навчально-пізнавальної діяльності;

- методи стимулювання і мотивації учіння;
- методи контролю і самоконтролю у навчанні;
- бінарні методи навчання [14].

Ці групи методів є актуальними для будь-якого рівня освітнього закладу, від початкової школи до вищої, і для будь-якого предмета (математика, природничі предмети, філологічні предмети, технології мистецтво тощо).

Зупинимося детальніше на тих методах, які характерні для навчання саме математики. Методи навчання математики та їх класифікація описані у роботі З. І. Слєпкань [13].

-за джерелом здобування знань (словесні, наочні, практичні),

-за способами організації навчальної діяльності учнів (методи здобування нових знань, методи формування умінь та навичок і застосування знань на практиці, методи перевірки й оцінювання знань, умінь та навичок),

-за характером навчально-пізнавальної діяльності учнів: а) пояснювально-ілюстративний (розповідь, лекція, пояснення, робота з підручником, демонстрації та ін.); б) репродуктивний (відтворення знань і способів дій, діяльність за алгоритмом, програмою); в) проблемний виклад; г) частково-пошуковий або евристична бесіда; д) дослідницький метод [13].

Слід зауважити, що не можна жорстко й однозначно ставитися до відбору методів навчання для вивчення тієї чи іншої теми. Обираючи метод навчання, учитель має усвідомлювати, що кожен метод має свої переваги й недоліки. Для досягнення високих результатів навчальних досягнень учнів з математики й формування у них позитивного ставлення до математики та її навчання слід використовувати кілька методів, розглядаючи їх у системі та взаємозв'язку.

Розглянемо, як деякі з цих методів реалізуються у навчанні математики в старших класах.

1. За джерелом здобування знань опишемо *практичні методи*, які сьогодні актуальні для всіх учнів, а особливо для тих, хто навчається на рівні стандарту. Практичні методи навчання охоплюють широкий діапазон різних видів діяльності учнів. Старшокласникам можна пропонувати кілька видів практичних робіт:

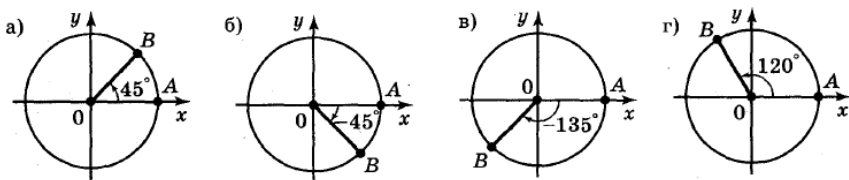
- Створення презентацій, які стосуються теоретичного матеріалу, історичних відомостей, практичних застосувань вивченої теми (показникова функція та її властивості; історія виникнення і використання логарифмів, використання тіл обертання у побуті).
- Виготовлення моделей до задач і теоретичного матеріалу, які суттєво спрощують розв'язування задач і запам'ятовування деяких понять і теорем (тригонометричний круг, модель, що демонструє спосіб утворення синусоїди, взаємне розташування прямої і площини)
- Використання ППЗ для побудови графіків функцій, графічного розв'язування рівнянь, нерівностей чи їх систем, побудова перерізів многогранників тощо.

Використовуючи практичні методи навчання на уроках математики, особливу увагу слід звертати на постановку практичного завдання, планування його виконання, мотивування і стимулювання учнів щодо його виконання, контроль діяльності учнів і аналіз підсумків практичної роботи.

2. За способами організації навчальної діяльності учнів опишемо *методи формування умінь та навичок*, що є невід'ємним у навчанні математики. Процес формування вмінь і навичок є довготривалим, вимагає наполегливої роботи протягом довгого часу й залежить від організації процесу вправлення, розуміння змісту завдання і способів його виконання. Суттєве значення для формування вмінь і навичок мають індивідуальні особливості учнів: інтереси і здібності, тип нервової системи й життєвий досвід, особливості мислення, уяви та пам'яті, активність і темп роботи тощо.

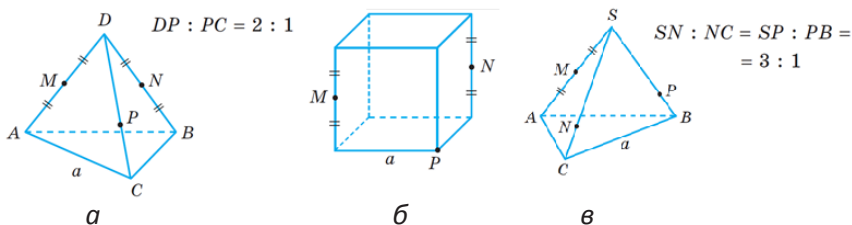
Ефективним методом формування умінь і навичок учнів є розв'язування задач за готовими малюнками. За невеликий проміжок часу учні можуть розв'язати більшу кількість завдань і у такий спосіб сформувати відповідні уміння та навички. Такі задачі можна використовувати як у навчанні алгебри і початків аналізу, так і у навчанні геометрії. Наприклад.

- Чому дорівнюють кути повороту, які показано на малюнку 1.4.1.



Мал. 1.4.1

- Побудуйте переріз правильного тетраедра і куба площиною (MNP) . Знайдіть периметр і площу перерізу (мал. 1.4.2).



Мал. 1.4.2

Метод формування умінь і навичок учнів у цьому випадку сприяє активізації навчально-пізнавального процесу, допомагає учням міцніше засвоїти навчальний матеріал і навчитися використовувати його на практиці.

За характером навчально-пізнавальної діяльності учнів розглянемо *дослідницький метод*.

Учням старших класів можна запропонувати дослідити, як між собою пов'язані об'єми тіл обертання. На першому етапі учні розбиваються на групи. Кожна з груп вдома створює з картону циліндр і конус, а також півкулю за допомогою пап'є маше. Ці фігури слід виготовити так, щоб циліндр і конус мали однакові радіуси основи і висоти, а радіус півкулі дорівнював висоті циліндра. На другому етапі в класі учні намагаються дослідити співвідношення об'ємів цих тіл, наповнюючи їх сухим піском чи дрібною крупою.

Учні помічають, що в циліндрі пісок з конуса поміщається тричі, а в півкулі — двічі. Створюються умови для того, щоб встановити цікаву властивість — «Сума об'ємів конуса і півкулі дорівнює об'єму циліндра».

Дослідницька діяльність учнів на уроці передбачає:

- дослідницький підхід до введення понять;
- виконання дослідницьких робіт;
- розв'язування задач на дослідження.

За дослідницького підходу вчитель не дає нову для учнів інформацію в готовому вигляді, а підводить учнів до усвідомлення поняття за допомогою навчально-пізнавальної діяльності.

Дослідницькі роботи можна пропонувати як для виконання у класі, так і вдома. Наприклад, під час вивчення теми «Центральне проєкування», учні можуть дослідити тінь, що відкидає квадратний аркуш паперу, якщо на нього світить настільна лампа, розглянувши різні способи розташування аркуша.

У навчанні математики використовують окремий вид задач — на дослідження. Це можуть бути задачі:

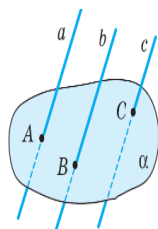
- а) на встановлення істинності висловлювань;
- б) на встановлення існування та кількості заданих об'єктів;
- в) на порівняння і встановлення залежностей;
- г) на встановлення умов;
- ґ) на встановлення відповідностей;
- д) на дослідження взаємного розташування фігур;
- е) на знаходження геометричних місць точок тощо.

Подамо кілька прикладів таких задач.

а) *На встановлення істинності висловлювань.*

Попарно паралельні прямі a , b і c перетинають площину α в точках A , B , C так, як показано на малюнку 1.4.3. Яке з тверджень є істинним:

- Дані прямі належать одній площині.
- Дані прямі не лежать в одній площині.



Мал. 1.4.3

б) *На встановлення відповідностей.*

- Установіть відповідність між рівнянням (1—4) та твердженням (А—Д), що є правильним для цього рівняння, визначеного на проміжку $[0; 2\pi]$.

1 $\sin x = -3$ А Рівняння має один корінь

2 $3 \cos x = 3$ Б Рівняння має два різні корені

3 $2 \sin x = 0$ В Рівняння має нескінчену множину розв'язків

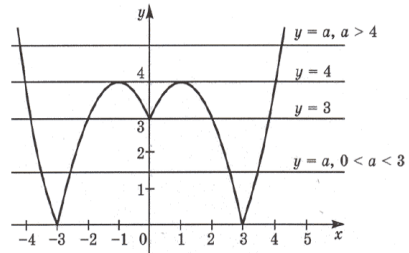
4 $\cos x = -1$ Г Рівняння має три різні корені

Д Рівняння не має коренів

в) *На встановлення існування та кількості заданих об'єктів.*

Скільки розв'язків має рівняння $f(x) = a$, залежно від значень параметра a , якщо $|x^2 - 2|x| - 3| = 0$.

Задача зводиться до того, щоб знайти кількість точок перетину графіка функції $y = |x^2 - 2|x| - 3|$ і прямої $y = a$ (мал. 1.4.4).



Мал. 1.4.4

Кількість точок перетину відповідає кількості розв'язків рівняння. Як видно з графіка рівняння може мати 2, 4, або 5 розв'язків, а може зовсім не мати розв'язків.

До специфічних методів навчання, характерних для шкільного курсу математики, З. І Слєпкань відносить метод доцільних задач, а також абстрактно-дедуктивний і конкретно-індуктивний методи навчання.

Іншого погляду дотримується методист і науковець Г.П. Бевз [15]. На його думку у процесі навчання математики вчителі послуговується такими методами навчання:

- методи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів (метод мотивації учіння, метод збудження інтересу, метод проблемних ситуацій, метод стимулювання);
- методи викладу нового матеріалу (метод доцільних задач, конкретно-індуктивний і абстрактно-дедуктивний, сократичний та евристичний, традиційний, дослідницький, метод укрупнення дидактичних одиниць, проскриптивний та інскриптивний методи);
- метод закріплення знань і вмінь (метод повторень, метод вправ);
- метод навчання розв'язування задач (метод поступового ускладнення задач, метод евристичних наставлянь).

Розкриємо детальніше ті методи навчання математики, що менш докладно висвітлені у методичній літературі.

Метод збудження інтересу полягає в активізації уваги учнів за допомогою збудження їхньої цікавості до теми, що вивчається. Робити це можна різними способами і на різних етапах уроку.

Доцільно привертати увагу учнів до нового матеріалу, чимось здивувавши їх, повідомивши щось несподіване, незвичайне. Наприклад, несподіваною може бути тема уроку геометрії в 10 класі — «Риштування» (замість «Взаємне розміщення прямих у просторі») або «Обід у їдальні» (замість «Правила комбінаторики»). Такий нетрадиційний початок викладу нового матеріалу, звичайно, привертає увагу учнів.

Інший спосіб зацікавити учнів — показати зв'язок теми, що вивчається з іншими предметами чи життєдіяльністю людей.

Розглядаючи тему «Вектори» можна показати учням малюнок, на якому зображено результат дії двох рівних векторів на шахтний шків (мал. 1.4.5). Учні розуміють, що напрям руху колеса буде різним. Виникає протиріччя, яке можна пояснити тим, що різними є точки прикладання рівних векторів. Тепер є сенс пояснити, що вектори бувають вільні, прикладені та інші. Вільний вектор визначається тільки довжиною і напрямом, а прикладений — довжиною, напрямом і точкою прикладання. Прикладені вектори частіше використовують у фізиці.



Мал. 1.4.5

Інтерес в учнів викликають цікаві розповіді про творців математики. Під час вивчення теми «Формула Ньютона -Лейбніца» учням доцільно повідомити про те, що Г. Лейбніц за освітою був юристом. Він працював бібліотекаром, історіографом, досліджував проблеми політичної економії, мовознавства, хімії, геології тощо.

Для зацікавленості учнів бажано використовувати інтерактивні форми і методи в процесі розв'язування задач особистісної та соціальної категорій. Розв'язування таких задач бажано супроводжувати відповідними розповідями чи дискусіями, демонстраціями статистичних даних чи влучних фото колажів. Складені учнями задачі можна вмещувати на сторінки в соціальних мережах для оцінки однокласниками, або збирати у спеціальні збірники задач, які з часом будуть передаватися учням, що приходитимуть на зміну.

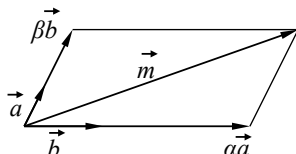
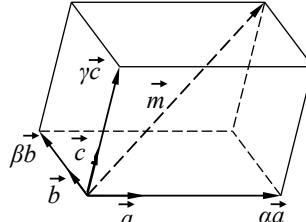
Традуктивний (лат. *traductio* — переміщення) метод — метод навчання, що передбачає рух від окремого до окремого, від одиничного до одиничного, від загального до загального через порівняння за ознаками подібності (аналогії) чи відмінності.

Сутність традуктивного методу полягає у з'ясуванні подібності деяких ознак двох чи більше явищ, на основі чого роблять висновок про подібність усіх інших ознак цих явищ, завдяки чому аналогія здійснюється за основною, суттєвою ознакою досліджуваного явища, а не за випадковою чи другорядною. Тому важливо чітко визначати основні і другорядні ознаки досліджуваних явищ і процесів. Аналогія не може існувати са-

можливо, тільки в єдності з іншими логічними методами (аналіз, синтез, індукція, дедукція) вона сприяє реалізації завдань навчання [16].

Прикладом традитивного методу є введення декартових координат у просторі на основі відомостей про декартові координати на площині. Інший приклад — розгляд операцій над векторами у просторі на основі відомостей про операції над векторами на площині. Як здійснюється пояснення розкладання векторів у просторі показано за допомогою таблиці 1.4.1.

Таблиця 1.4.1

Розкладання векторів	
<i>На площині</i>	<i>У просторі</i>
<p>\vec{m} – довільний вектор площини, \vec{a} і \vec{b} – не колінеарні вектори.</p> <p>Завжди існує розклад:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\vec{m} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \quad (\alpha \text{ і } \beta - \text{єдині}).$ </div> 	<p>\vec{m} – довільний вектор площини, \vec{a}, \vec{b} і \vec{c} – не компланарні (тобто не паралельні одній площині) вектори.</p> <p>Завжди існує розклад:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\vec{m} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \quad (\alpha, \beta \text{ і } \gamma - \text{єдині}).$ </div> 

Проскриптивний (pro — для, scripta — написане) та *інскриптивний* (in — без, scripta — написане) методи. Тобто, якщо в процесі навчання вчитель супроводжує пояснення докладними записами, то він використовує проскриптивний метод. Для учнів, які вивчають математику на рівні стандарту, наявність зразків для розв’язування основних видів задач є дуже важливим. Зрозуміло, що в підручниках подаються 1 — 2 зразки до розв’язування задач з теми. Але усвідомлення способу розв’язування тієї чи іншої задачі відбувається краще, якщо вчитель дає більше зразків детального розв’язання задач. Особливо це стає актуальним для задач, які на ЗНО слід розв’язувати з повним поясненням.

Однак, не слід думати, що всі завдання на уроках мають розв’язуватися з повним поясненням. Доцільно залишати простір для самостійного розмірковування учнів. Інскриптивний метод використовують у безпосередньо після проскриптивного (одна задача повністю описана, а кілька наступних розглядаються без детальних записів), для пояснен-

ня нескладних задач, задач за готовими малюнками, усних задач тощо. Інспіративний метод у класах, що навчаються на рівні стандарту можна використати перед самостійною роботою учнів. У цьому випадку вчитель подає дуже стисло підходи до розв'язування задач, аналогічним тим, що будуть пропонуватися на самостійній роботі. А учні мають реалізувати ці підходи, розв'язуючи завдання самостійної роботи.

Реалізація діяльнісного підходу передбачає широке застосування методів і прийомів активного навчання. Зокрема, набуває усе більшого поширення застосування методів інтерактивного навчання — навчання, яке передбачає взаємодію вчителя та учня, взаємодію учнів між собою. У навчанні математики можна використовувати такі форми інтерактивного навчання:

- проекти;
- діалоги;
- дискусії;
- мозкові атаки;
- ділові та рольові ігри;
- тренінги (групова форма навчання);
- кейс-метод (використання реальних ситуацій) та інші.

Конкретні розробки уроків та позакласних заходів, що містять такі форми роботи представлені на сторінках журналу «Математика в рідній школі» та інших періодичних виданнях.

Розглянемо, як у процесі вивчення математики на рівні стандарту в ліцях можна використовувати метод проєктів.

Метод проєктів — це спосіб навчання, при якому учень самостійно (чи за допомогою вчителя) формулює навчальну проблему, здійснює збір необхідної інформації, планує варіанти вирішення проблеми, робить висновки, аналізує свою діяльність, формуючи нове знання і набуваючи нового учбового і життєвого досвіду. Метод проєктів використовують, крім іншого, щоб показати тісні міжпредметні зв'язки між математикою та іншими предметами, а також її прикладну спрямованість. Проєктні роботи можуть бути індивідуальні, парні чи групові, довготривалими, середньотривалими або короткотривалими.

Для розвитку підприємливості учням можна запропонувати проєкт «Мій стартап», коли вони мають уявити себе на місці стартапера, вибрати галузь підприємництва, описати свою діяльність, розрахувати витрати на рекламу, написати бізнес-план тощо.

Проєктні роботи можуть стосуватися абстрактних питань навчальної програми (періодичні функції, диференціювання складеної функції) або

прикладних аспектів математики (створення орнаментів на основі періодичних функцій, застосування похідної в різних галузях науки).

Наприкінці слід зазначити, що різні методи навчання слід використовувати комплексно, раціонально поєднуючи традиційні, активні та інтерактивні, методи здобування нових знань, методи формування умінь та навичок і застосування знань на практиці, ті, що вимагають від учнів репродуктивної діяльності і ті, що потребують креативності і творчості. Саме такий підхід до вибору методів навчання математики зможе забезпечити високу результативність навчання.

1.5. СУЧАСНІ ЗАСОБИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Васильєва Д.В.

У вчителя в арсеналі мають бути різноманітні засоби навчання: слово учителя, підручник, роздатковий навчальний матеріал, засоби інформаційно-комунікаційних технологій тощо. Використовуючи названі засоби доцільно так, щоб один доповнював інший. У такому випадку можна досягнути високого результату навчання.

У Концепції нової української школи [17] зазначається, що наскрізне застосування інформаційно-комунікаційних технологій в освітньому процесі та управлінні закладами освіти і системою освіти має стати інструментом забезпечення успіху нової української школи. Запровадження ІКТ в освітній галузі має перейти від одноразових проектів у системний процес, який охоплює всі види діяльності. ІКТ суттєво розширяють можливості педагога, оптимізують управлінські процеси, таким чином формуючи в учня важливі для нашого сторіччя технологічні компетентності.

У колективній монографії «Засоби інформаційно-комунікаційних технологій єдиного інформаційного простору системи освіти України» [18] зазначається така класифікація засобів ІКТ, які необхідні для системи освіти:

- технічні засоби (комп'ютери, комп'ютерні комплекси, мультимедійні проектори, сенсорні дошки тощо);
- програмні засоби (системні, загального призначення, прикладне програмне забезпечення, у тому числі начального призначення);
- засоби для під'єднання до Інтернет та забезпечення можливості повноцінної роботи в ньому (сервери, лінії зв'язку, модеми, програми пошуку різноманітних даних в Інтернет);
- спеціально створене для системи освіти інформаційне наповнення (контент) в Інтернет;
- методичне забезпечення стосовно використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій в освіті.

У цьому пункті розглянемо програмні засоби та спеціально створений контент в Інтернеті для вивчення математики.

Застосування програмних засобів на різних етапах навчання допомагає вчителю: у подачі нового для учнів навчального матеріалу; у формуванні навичок розв'язання різних завдань учнями; у перевірці якості засвоєння компетентностей учнів; у наданні зворотного зв'язку чи організації комунікації з учнями; у творчій навчальній діяльності учнів на різних уроках. Розглянемо детальніше засоби, що можуть допомогти вчителю математики на кожному з цих етапів навчання.

Подання нового навчального матеріалу. Для того, щоб унаочнити і інтенсифікувати виклад нового навчального матеріалу вчителі вже звикли створювати презентації до уроків. Для цього достатньо розповсюдженим є програмний засіб PowerPoint. Бажано, щоб учителі завантажували свої презентації на Google диск чи трансформували їх у Google Презентації. У такому випадку в учнів вдома з'являється доступ до цих презентацій, тобто вони можуть за знайомими слайдами швидко відновити матеріал, про який йшлося на уроці. Вчителі також можуть одразу створювати онлайн презентації за допомогою Google Презентацій, Prezi (prezi.com) чи Sway (sway.office.com) і давати учням на них посилання для актуалізації почутого на уроці вдома.

Сучасному вчителю все частіше необхідно витримати конкуренцію з смартфоном і соціальними мережами, тож пасивне усвідомлення матеріалу швидко втомлює учнів. Свідома взаємодія з мультимедійним контентом у процесі навчання є фактором підвищення результатів учнів. З цієї метою використовують інтерактивні засоби навчання. Саме тому краще використовувати інтерактивні презентації, тобто такі, що вимагають від учнів давати відповіді на питання за допомогою власних гаджетів. Прикладами програмних засобів, що дають можливість вчителю створювати інтерактивні презентації є, наприклад, **Mentimeter** та **Zeetings**.

Mentimeter (<https://www.mentimeter.com>) — це онлайн ресурс для створення інтерактивних презентацій. Він дає можливість утримувати увагу учнів під час демонстрації вчителем презентації (наприклад, під час пояснення вчителем нового навчального матеріалу). Окремі слайди презентації є інтерактивними і, відповідно, учні, що мають гаджети (планшет, смартфон), можуть давати відповіді на поставлені на слайді запитання, і весь клас візуально бачить кількісні показники.

Zeetings (<https://www.zeetings.com/>) — ще один онлайн ресурс, що дає можливість створювати інтерактивні презентації. Учні можуть відповідати на питання, голосувати, залишати коментарі, виконувати тести (синхронно і асинхронно переглядаючи презентацію). А відповідно вчитель може швидко і легко перетворити свою презентацію з Power Point у інтерактивну пре-

зентацію, додавши відео з You Tube, створивши схему в Canva for education, створивши слайд з опитуванням чи завданням тестового характеру, завантажити PDF-файли чи додати html-кода з інших онлайн сервісів.

Створюючи презентації до уроків, учителі зазвичай використовують малюнки, схеми та відео. Їх можна знайти в Інтернеті і вставити у презентацію, або ж, можна самостійно створити за допомогою різних ресурсів. Найпростіші малюнки можна створити користуючись будь-яким графічним редактором, наприклад, Paint.

Для створення яскравих схеми можна використати Canva for education (<https://www.canva.com/education>), Piktochart (<https://piktochart.com>), Mindmeister (<https://www.mindmeister.com/ru>), MindMup (<https://www.mindmup.com>).

Сучасні учні краще сприймають інформацію, що подана компактно і яскраво. Вчитель може прикрасити яскравими і лаконічними схемами, де видно зв'язок між поняттями теми, що вивчається, слайди презентацій до уроків, розмістити їх в своїх соціальних мережах (акаунтах Інстаграм чи телеграм каналі, що присвячені вивченню математики). Для учнів, що вивчають математику на рівні стандарт, особливо корисним є постійний зоровий контакт з схемами, створеними вчителем (або учнями). Дає позитивний результат розміщення схем у класній кімнаті на одному й тому ж місці продовж вивчення теми. За можливістю на одній зі стін можна розміщувати декілька схем з різних тем. Учні також можуть створювати портфоліо з таких схем (паперове чи електронне).

Вчителі також можуть використовувати готові навчальні відео, знаходячи їх на різних ресурсах, наприклад на каналах You Tube, що присвячені вивченню математики. Важливо пам'ятати, що відео має бути короткотривалим, україномовним і безпечним для учнів (доцільно давати посилання на відео учням лише у випадку, коли канал, на якому розміщене відео, не дозволяє розміщення реклами). Наприклад, відео з Всеукраїнської школи онлайн, що були розміщені на каналі МОН (https://www.youtube.com/c/MONUKRAINE/playlists?view=50&sort=dd&shelf_id=20). Інколи доцільно використати лише частину відео. У такому випадку вчителю доведеться використати онлайн редактор відео.

Навчальні відео учителі можуть створювати самостійно за допомогою спеціального програмного забезпечення, наприклад, Camtasia Studio (<https://www.techsmith.com/video-editor.html>) чи інше — Screencast-o-matic (<https://screencast-o-matic.com/>). Наприклад, за допомогою Screencast-o-matic можна здійснити запис з екрану монітору, запис через веб-камеру та комбінувати ці два способи. Тобто, вчитель може створити презентацію, а потім записати відео з екрану, паралельно озвучивши його. Під час ство-

рення навчального відео варто звертати увагу на їх тривалість. Найкраще, якщо їх тривалість для старшокласників буде до 10 хвилин. Зверніть увагу на кількість тексту на екрані, бажано його зменшити. Чим коротше відео, тим легше воно сприймається учнями. Задля безпеки учнів бажано всі відео завантажувати на власний Google диск або канал YouTube, але з заборонаю реклами і вказівкою, що цей контент для дітей.

За допомогою PowToon (powtoon.com) чи Explee (explee.com) вчитель може створити анімоване відео, що схоже на мультфільм. Але у цьому випадку на виготовлення такого відео піде більше часу.

Будь-яке відео, знайдене в Інтернеті чи зроблене самостійно, можна перетворити на інтерактивне за допомогою сервісів EdPuzzle (edpuzzle.com) або H5P (h5p.org). Ці сервіси дають можливість переривати відео інтерактивними завданнями у формі тестів, заповнення пропусків, перетягування ярликів для встановлення відповідності та введення відповіді. Такі «інтерактиви» забезпечують активізацію пізнавальної діяльності учнів і підтримання в них уваги. Бажано, щоб відео переривалось запитаннями кожну хвилину. Саме через цей час спостерігається спад уваги учнів. «Інтерактив» допомагає зробити учню паузу, усвідомити і проаналізувати почуте. Під час самостійного опрацювання відео учнями вкраплення «інтерактивів» також стимулює формування навичок самоконтролю, самооцінки та самокорекції.

Вчителі можуть користуватися онлайн платформами, що містять вже готові навчальні відео з математики українською мовою для старшокласників або цілі онлайн курси.

Для повторення навчального матеріалу за 5-9 клас можна використати платформу GIOS (gioschool.com). Вона містить онлайн курси з математики, що розбиті на уроки, до кожного з яких подано відео, схеми, приклади розв'язаних завдань та серія завдань різної форми та складності.

10minschool (10minschoo1.ua/subject/bagrut;algebra). На платформі розміщені окремі відео з алгебри і геометрії тривалістю біля 10 хв українською мовою. Також вчитель і учень може вивантажити презентацію до кожного відео.

Мій клас (miyklas.com.ua/p/algebra). На платформі розміщено уроки, що містять теоретичний матеріал у вигляді тексту і практичні завдання до нього.

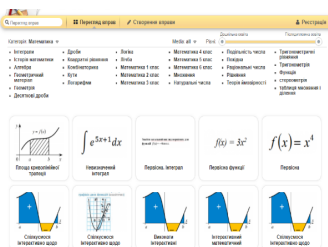
Академія Хана (uk.khanacademy.org). В україномовній версії є розділ Тригонометрія.

Курс «Математика. Просто» на платформі EdEra (courses.ed-era.com/courses/course-v1:EDERA-OSVITORIA+Math101+2019/about) — курс створений для підготовки учнів до ЗНО, але може бути використаний і для вивчення окремих тем з математики в 10-11 класах.

Курс з математики на платформі Be smart (course.besmart.study/podgotovka-k-zno-po-matematike) теж створений для підготовки до ЗНО, але містить теми, що вивчаються в 10-11 класах.

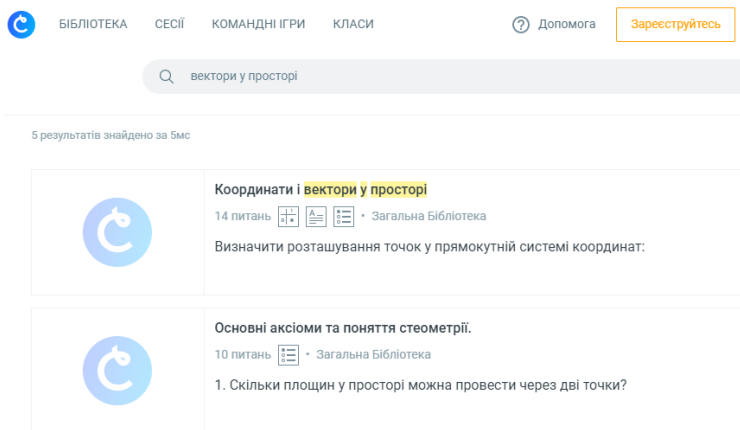
Формування навичок. Для урізноманітнення форм роботи з учнями та формування у них навичок розв'язування різного виду завдань доцільно вчителю використовувати різні ресурси: готові симуляції, сервіси для створення вікторин, інтерактивні листи, готові вправи, тести чи оболонки, що дають можливість їх створювати. Розглянемо деякі з них.

LearningApps.org (learningapps.org) — це онлайн платформа, що дає можливість створювати інтерактивні вправи різних за формою (мал. 1.5.1). Крім того, цей ресурс має вже готову бібліотеку готових завдань українською мовою. Наприклад, вправи до теми Логарифми можна знайти за посиланням <https://learningapps.org/index.php?category=2&subcategory=20494&s=>



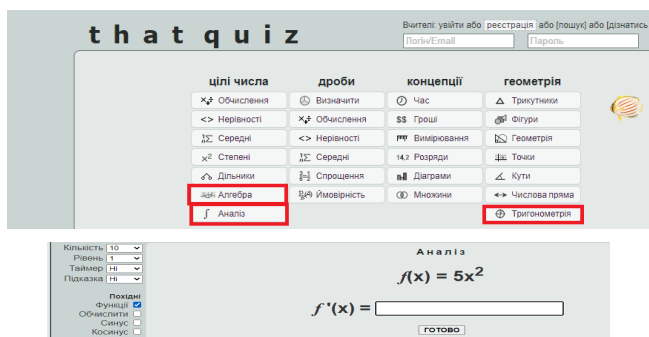
Мал. 1.5.1

Classtime (www.classtime.com) — платформа для створення інтерактивних завдань з українським інтерфейсом (мал. 1.5.2). Є також можливість використати бібліотеку завдань з шуканої теми. Вчитель може у режимі реального часу відслідковувати результати своїх учнів.



Мал. 1.5.2

Готові завдання також можна знайти на платформі ThatQuiz (<https://www.thatquiz.org/uk/>). У ресурсу є україномовний інтерфейс і декілька розділів присвячені темам 10 — 11 класів (мал. 1.5.3).



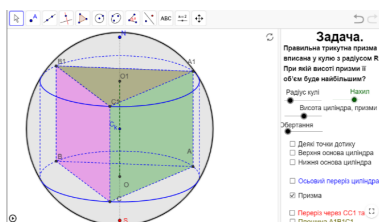
Мал. 1.5.3

Для продуктивного проведення уроків, що стосуються функцій та їх графіків, існують такі ресурси як Geometry Pad, Desmos та Advanced Grapher.

Desmos Calculator — потужний онлайн ресурс (<https://www.desmos.com/calculator?lang=uk>), що дає можливість легко і швидко побудувати графіки будь-яких функцій. Крім того, у вчителя, що використовує ресурс Teacher Desmos (<https://teacher.desmos.com/?lang=ru>) є можливість створювати динамічні моделі для пояснення нового матеріалу чи завдання для дослідницької діяльності учнів, а також використовувати готові розробки (моделі чи вправи) з бібліотеки та створювати власні інтерактивні завдання. Також існує додаток Desmos Calculator, який вчитель може завантажити на комп'ютер чи телефон за умови відсутності у класі Інтернету.

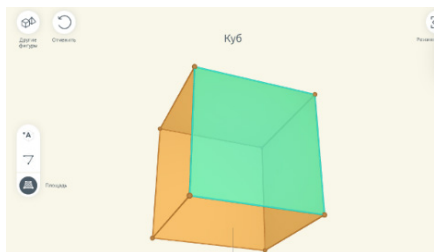
Аналогічний ресурс, який учитель може використовувати без доступу до Інтернету, є Advanced Grapher та Geometry Pad. Наприклад, на уроках в 11 класі під час вивчення тем «Дотична до графіка функції» і «Похідна показникової та логарифмічної функції», учні можуть побудувати графіки функцій і дотичну, проведену через дану точку до графіка. Учні будуть мати значення кутового коефіцієнта, тобто значення похідної в цій точці. Також за допомогою цього програмного засобу легко продемонструвати учням «Геометричні перетворення графіків функції».

Під час вивчення стереометрії в нагоді стануть ресурси такі як Shapes 3D та Geogebra. Використовуючи Geogebra (<https://www.geogebra.org/t/math>), учитель має можливість не лише створювати власні моделі, а й використовувати бібліотеку вже готових моделей та завдань для учнів. Серед них є і завдання українською мовою (мал. 1.5.4), наприклад, одне з завдань розміщене за посиланням <https://www.geogebra.org/m/Tm4Uts3b>

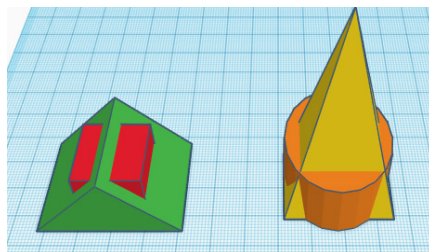


Мал. 1.5.4

За допомогою ресурсу Shapes 3D (shapes.learnteachexplore.com), що має дуже гарний дизайн, наочно можна показати учням розгортки кожної з фігур, розглянути утворення тіл обертання, знайти площу граней, тощо (мал. 1.5.5). Також для уроків стереометрії стануть у нагоді програмні засоби для попереднього моделювання фігур для 3D-принтинга (мал.1.5.6).



Мал. 1.5.5



Мал. 1.5.6

Це — Tinkercad, Thingiverse, Shapeways, Autodesk Fusion 360, Sketch Up тощо.

Учитель може використовувати в своїй педагогічній діяльності багато різноманітних сервісів для проведення тестувань та вікторин. Наприклад, Google форми, Kahoot, Quizizz, Quizalize, Triventy, Plickers, Proprofs, Genially, Learnis. Детальніше про них за посиланням <https://core.ac.uk/download/pdf/186336525.pdf> Для того, щоб за допомогою них створити цікаву серію завдань для учнів, вчитель має заповнити оболонку відповідним математичним контентом.

Сервіси Classtime, Google форми, Quizizz, Quizalize, Triventy, Proprofs надають статистики вчителям, також їх можна використовувати також для **контролю знань**.

У контексті змішаного та дистанційного навчання надзвичайно актуальним стає налагодження ефективного та швидкого **зворотного зв'язку** вчителя з учнями. Для організації учнів та комунікації з ними чудово підходить Google Classroom. Особливо це зручно для вчителя, що має декілька класів. Для проведення синхронних онлайн уроків вчителі можуть використовувати сервіси Zoom, Skype, Google Meet, Microsoft Teams. Також для комунікації вчителі можуть використовувати Viber, Instagram, Jitse meet, Discord, MyOwnConference, Liveboard, Miro, BitPaper тощо. Для вчителів математики важливо мати онлайн дошку, яку можуть одночасно використовувати вчитель і учні. Такі дошки є, наприклад, у Zoom або Miro. Також можна скористатися безкоштовними онлайн дошками Jamboard (jamboard.google.com), o-whiteboard (<https://o-whiteboard.com>) та Mathlearningcenter (apps.mathlearningcenter.org/whiteboard/). Але найзручнішою для вчителя математики є онлайн дошка Idroo (idroo.

com). До речі, Mathlearningcenter пропонує чудову добірку безкоштовних симуляцій (mathlearningcenter.org/apps), але вони більше підійдуть для 1-9 класів або ж для виконання творчих робіт старшокласниками.

На онлайн уроці в режимі реального часу працювати з підручником стає ще простіше і зручніше, якщо використати PDF файл підручника та програмний засіб Kami (<https://www.kamiapp.com>). За допомогою цього ресурсу можна виділяти текст у підручнику, його коментувати, а ще малювати, писати і це все синхронно. Таким чином можна пропонувати учням разом опрацювати параграфи підручника, статті чи працювати над матеріалами навчального проекту.

Чудово, якщо у вчителя є можливість використовувати не лише електронну версію підручника, а й електронний підручник чи електронний навчальний посібник (електронне навчальне видання, що доповнює або частково (повністю) замінює підручник). У такому випадку вчителю доведеться витратити значно менше часу на організацію дистанційного навчання і підготовку відповідних матеріалів.

Вибираючи електронний підручник чи електронний навчальний посібник вчитель має звернути увагу на:

- *відповідність навчальній програмі* (повністю покривають зміст і вимоги Навчальної програми з математики);
- *розгалуженість структури*;
- *забезпечення мотивації навчання* (окремі елементи видань привертають увагу учнів і мотивують їх);
- *інтерактивність* (надається можливість здійснювати зворотний зв'язок між користувачем та системою);
- *мультимедійність* (використані різні форми представлення інформації (текстової, звукової, графічної, відео, аудіо тощо));
- *диференційована система задач і вправ*.

Для **домашніх завдань** учням можна пропонувати роботи, що наперед заготовлені вчителем на інтерактивних робочих листах (дидактичні матеріали з використанням текстів, відео, аудіо, зображень, у тому числі і інтерактивних вправ (тести, відповідність, введення відповіді тощо)). Створювати такі листи можна за допомогою багатьох ресурсів. Наприклад, Wizer.me ([Wizer.me](https://wizer.me)), Classkick ([Classkick.com](https://classkick.com)) чи Liveworksheets ([Liveworksheets.com](https://livesheets.com)).

Сучасні учні швидко знаходять потрібну інформацію в Інтернеті, уміло використовують гаджети та мобільні додатки, легко створюють цікаві презентації, обмінюються дописами у соціальних мережах тощо. Їм не цікаво писати конспекти, але інша форма подачі матеріалу — чудова можливість мозку більш усвідомлено опрацювати матеріал, що подається, наприклад, у підручнику. Тож, старшокласникам можна запропону-

вати: створити самостійно схему за матеріалом параграфа, чи діаграму на основі опрацювання статистичної інформації у конкретній статті, чи створити онлайн стінівку чи відео на задану тематику. У цьому можуть допомогти різні ресурси. Наприклад:

Для створення учнями відео стане у нагоді онлайн редактор відео Animato (<https://animoto.com/business/education>). Цей сервіс дає можливість з фото і коротких роликів створити відео, додати підписи і звук (за потреби).

Для створення презентацій учні можуть використати Power Point, Google презентації, Sway (<https://sway.office.com>), Mentimeter (<https://www.mentimeter.com>), Zeetings (<https://www.zeetings.com>).

Для створення електронних стінівок підійдуть Google документи, Padlet (<https://padlet.com>), Smore (<https://www.smore.com>).

Для створення зображень, схем чи інфографік учні можуть використати Canva for education (canva.com/education), Piktochart (piktochart.com).

Перевірка домашніх завдань під час змішаного та дистанційного навчання займає багато часу, тож вчителю краще автоматизувати цей процес, використовуючи ресурси, що одразу надають учню зворотній зв'язок щодо правильності виконаних завдань, а вчителю надають статистики по всьому класу і по кожному учню для можливості аналізу результатів і подальшого планування роботи. Наприклад, GIOS, Classtime, Мій клас.

Під час дистанційного чи змішаного навчання важливо навчити учнів плануванню. За допомогою програмного засобу Miro (miro.com) можна створити дошку з системою Канбан, яка ідеально підходить для планування роботи окремого учня чи групи учнів.

Підсумовуючи усе вище сказане, можемо зробити висновок, що сучасні програмні засоби забезпечують усі види навчально-пізнавальної діяльності учнів і професійної діяльності вчителів.

Література до розділу

1. Бевз Г. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г.П. Бевз, В. Г. Бевз. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. — 288 с.
2. Навчальна програма з математики для 10-11 класу. Рівень стандарту. Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
3. Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе / И.С. Якиманская. — Издание 2-е. — Москва : Сентябрь, 2000. — 112 с.
4. Національна доповідь про стан і перспективи розвитку освіти в Україні / Нац. акад. пед. наук України ; [редкол.: В. Г. Кремень (голова), В. І. Луговий

-
- (заст. голови), А. М. Гуржій (заст. голови), О. Я. Савченко (заст. голови)] ; за заг. ред. В. Г. Кременя. — Київ : Педагогічна думка, 2016. — 448 с.
5. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи (Бібліотека з освітньої політики) Колективна монографія Колектив авторів: Бібік Н.М., Ващенко Л.С., Локшина О.І., Овчарук О.В., Паращенко Л.І., Пометун О.І., Савченко О.Я., Трубачева С.Е. Рецензенти: Мальований Ю.І., Сухомлинська О.В. Під загальною редакцією О.В.Овчарук.
 6. Локшина О.І. Європейська довідкова рамка компетентностей для навчання впродовж життя: оновлене бачення 2018 року Український педагогічний журнал. 2019. №3 <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2019-3-21-30>
 7. Постанова Кабінету Міністрів України від 21 лютого 2018 р. №87 «Про затвердження Державного стандарту початкової освіти»
 8. Раков С. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти. / С.Раков // Математика в школі. — 2007. — №5 — С. 2-7.
 9. Постанова Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. №1392 «Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти»
 10. Буковська О.І. Алгебра: підруч для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Буковська О.І., Васильєва Д.В., Сільвестрова І.А., Фурман М.С. — К. : Педагогічна думка. Режим доступу: http://undip.org.ua/news/library/pidruchniki_detail.php?ID=8978
 11. Слєпкань, З. І. Методика навчання математики : підруч. для студентів мат. спец. ВПНЗ / З. І. Слєпкань. — 2-е вид., доп. і перероб. — Київ : Вища шк., 2006. — 582 с.
 12. Положення про дистанційну форму здобуття повної загальної середньої освіти. Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0941-20#n8>.
 13. Мойсеюк Н.Є. Педагогіка : навч. посіб. / Н. Є. Мойсеюк. — 5-вид., доп. і перероб. — К. : [б.в.], 2007. — 656 с.
 14. Галузинський В.М., Євтух М.Б. Педагогіка: Теорія та історія — Рівне, 1996. — 237 с.
 15. Бєвз Г. П. Методи навчання математики / Г. П. Бєвз. — Х. : Видавнича група «Основа», 2003. — 96 с.
 16. Чайка В. М. Основи дидактики : Навчальний посібник / В. М. Чайка. — К. : Академвидав, 2011. — 240 с. Концепція НУШ
 17. Концепція Нової української школи. Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
 18. Лапінський В. В. Засоби інформаційно-комунікаційних технологій єдиного інформаційного простору системи освіти України: монографія / В. В. Лапінський, А. Ю. Пилипчук, М. П. Шишкіна, О. М. Спирін, В. Д. Руденко, В. М. Дем'яненко, В. В. Олійник, К. І. Скрипка, З. Савченко, В. І. Горбаченко;

ред.: В. Ю. Биков; Нац. акад. пед. наук України, Ін-т інформ. технологій і засобів навчання. — К. : Пед. думка, 2010. — 159 с.

19. Головань М.С. Математичні компетентності чи математична компетентність? / М.С. Головань // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс — 20012»: матеріали міжнародної науково-методичної конференції (6-7 грудня 2012 р.) : у 3-х частинах. — Суми : Виробничо-видавниче підприємство «Мрія», 2012. — Частина 1. — 36-38 с.
20. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи: Бібліотека з освітньої політики / Під заг. ред. О.В.Овчарук. — К.: «К.І.С.», 2004. — 112 с.
21. Локшина О.І. Європейська довідкова рамка компетентностей для навчання впродовж життя: оновлене бачення 2018 року. Український педагогічний журнал. 2019. №3 <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2019-3-21-30>
22. Національна доповідь про стан і перспективи розвитку освіти в Україні / Нац. акад. пед. наук України ; [редкол.: В. Г. Кремень (голова), В. І. Луговий (заст. голови), А. М. Гуржій (заст. голови), О. Я. Савченко (заст. голови)] ; за заг. ред. В. Г. Кременя. — Київ : Педагогічна думка, 2016. — 448 с. — Бібліогр.: с. 21. — (До 25-річчя незалежності України)
23. Раков С. Формування математичних компетентностей випускнива школи як місія математичної освіти. / С.Раков // Математика в школі. — 2007. — №5. С. 2-7.
24. Головань М.С. Математичні компетентності чи математична компетентність? / М.С. Головань // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс — 20012»: матеріали міжнародної науково-методичної конференції (6-7 грудня 2012 р.) : у 3-х частинах. — Суми : Виробничо-видавниче підприємство «Мрія», 2012. — Частина 1, 36-38 с.
25. Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи: Бібліотека з освітньої політики / Під заг. ред. О.В.Овчарук. — К.: «К.І.С.», 2004. — 112 с.
26. Локшина О.І. Європейська довідкова рамка компетентностей для навчання впродовж життя: оновлене бачення 2018 року. Український педагогічний журнал. 2019. №3 <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2019-3-21-30>.
27. Національна доповідь про стан і перспективи розвитку освіти в Україні / Нац. акад. пед. наук України ; [редкол.: В.Г. Кремень (голова), В.І. Луговий (заст. голови), А.М. Гуржій (заст. голови), О.Я. Савченко (заст. голови)] ; за заг. ред. В.Г. Кременя. — Київ : Педагогічна думка, 2016. — 448 с. — Бібліогр.: с. 21. — (До 25-річчя незалежності України)
28. Раков С. Формування математичних компетентностей випускнива школи як місія математичної освіти. / С. Раков // Математика в школі. — 2007. — №5, С. 2-7.

РОЗДІЛ II

НАСКРІЗНІ ЛІНІЇ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ТА ЇХ РЕАЛІЗАЦІЯ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ В ЛІЦЕЯХ НА РІВНІ СТАНДАРТУ

2.1. ОНОВЛЕНІ КЛЮЧОВІ КОМПЕТЕНТНОСТІ ДЛЯ НАВЧАННЯ УПРОДОВЖ ЖИТТЯ

Васильєва Д.В.

XXI століття — особливий період у розвитку людства і світової історії. Відбуваються суттєві зміни у функціонуванні суспільства і життєдіяльності людини. На зміну індустріальному суспільству прийшло інформаційне, в якому повсюдно домінує інформація та знання. Інформатизація повною мірою торкнулася розвитку різних сфер життя — соціальних явищ і процесів, професійної діяльності й способу життя, науки й освіти, культури і різного роду комунікацій.

Ми не можемо точно передбачити, як швидко будуть відбуватися зміни у найближчому майбутньому, але людство шукає шляхи для підготовки підростаючого покоління до таких змін. Одним з таких шляхів визначено **формування звички до постійного навчання**.

На Всесвітньому економічному форумі у Давосі (2015 і 2020 р) було встановлено 10 основних навичок, які необхідні сучасній людині. Як бачимо з таблиці 2.1.1, за 5 років відбулися певні зміни у самих навичках (відпали «активно слухати» і «контроль якості», а додалися «емоційний інтелект» і «гнучкість мислення») і у рейтингу кожної — креативність з десятої позиції переходить на третю, а креативність з четвертої — на другу.

Таблиця 2.1.1

2020	2015
Вирішення комплексних завдань	1. Вирішення комплексних проблем
Критичне мислення	2. Взаємодія з іншими
Креативність	3. Вміння керувати людьми
Вміння керувати людьми	4. Критичне мислення
Взаємодія з людьми	5. Вміння проводити переговори
Емоційний інтелект	6. Контроль якості
Вміння приймати рішення	7. Орієнтація на клієнта
Орієнтація на клієнта	8. Вміння приймати рішення
Вміння вести переговори	9. Активно слухати
Гнучкість мислення	10. Креативність

Розглянемо деякі з них.

Креативність — здатність людини дивитися на речі під «новим кутом», проявляти фантазію у вирішенні того чи іншого питання, не зациклюватися на старих правилах, а доносити свою думку власним способом. Саме це зараз цінується в працівниках будь-якої сфери діяльності.

Комунікація — один із основних чинників становлення і самовдосконалення особистості та необхідна передумова її успішної співпраці з суб'єктами професійної діяльності.

Критичне мислення — один із основних і універсальних інструментів діяльності майбутніх професіоналів кожного напрямку професій, який спрямований на розвиток уміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, розуміти суть проблеми, помічати протиріччя, доводити й робити правильні умовиводи, класифікувати, проводити аналогії, узагальнювати вибудовувати власну стратегію та ефективну методикую тощо.

Командна робота — ефективний інструмент професійної діяльності, використання якого забезпечує розвиток управлінських здібностей та уміння міжособистісної комунікації, здатності вирішувати конфлікти тощо. Це поняття напряму пов'язане з комунікацією. Тому що, коли учні працюють в групах, в команді, вони найбільше спілкуються між собою.

Так чи інакше, саме такі навички слід формувати у підростаючого покоління в школі, щоб забезпечувати формування особистості, яка підго-

товлена до життя і праці у світі, що постійно змінюється. В цих умовах реформування потребує організація освітнього процесу відповідно до вимог і потреб інформаційного суспільства.

Стратегію й основні напрями розвитку освіти у країні на найближчі часи визначено у Національній доктрині розвитку освіти в Україні, в якій зазначається: «Освіта є стратегічним ресурсом поліпшення добробуту людей, забезпечення національних інтересів, зміцнення авторитету і конкурентоспроможності української держави на міжнародній арені. Освіта і наука є найголовнішими умовами утвердження України на світовому ринку високих технологій» [1].

У Національній доктрині розвитку освіти в Україні визначено, що система освіти має забезпечувати:

- формування особистості, яка усвідомлює свою належність до українського народу, сучасної європейської цивілізації, орієнтується в реаліях і перспективах соціокультурної динаміки, підготовлена до життя і праці у світі, що змінюється;
- збереження і продовження української культурно-історичної традиції, виховання шанобливого ставлення до українських національних святинь, української мови, історії і культури всіх національностей, які проживають в Україні, формування культури міжетнічних і міжособистісних відносин;
- виховання людини демократичного світогляду, яка поважає громадянські права і свободи, традиції народів і культур світу, національний, релігійний, мовний вибір кожної людини;
- формування у дітей і молоді цілісної наукової картини світу, сучасного світогляду, творчих здібностей і здатності до самостійного наукового пізнання, самоосвіти і самореалізації особистості;
- підготовку людей високої освіченості і моралі, кваліфікованих спеціалістів, здатних до творчої праці, професійного розвитку, освоєння та впровадження наукомістких та інформаційних технологій, мобільності та конкурентоспроможності на ринку праці;
- створення необхідних умов для розвитку обдарованих дітей і молоді;
- підтримка дітей і молоді з особливими потребами;
- формування здорового способу життя, розвиток дитячого і юнацького спорту, туризму;
- етичне, естетичне та екологічне виховання;
- наступність і неперервність освіти;
- інноваційний характер навчально-виховної діяльності.

Сьогодні кожна людина потребує широкого набору знань і умінь, які вона має постійно розвивати протягом усього життя. Ідеологія змін в освіті розкривається у Концепції нової української школи [2], в якій зазначається, що нові освітні стандарти будуть ґрунтуватися на «Рекомендаціях Європейського Парламенту та Ради Європи щодо формування ключових компетентностей освіти впродовж життя», але не обмежуватимуться ними.

Для розвитку й виховання підростаючого покоління, для його успішної самореалізації у житті, потрібно не лише передати молодим людям знання, а ще більш важливо навчити користуватися ними, а тому кожна особистість у процесі навчання в закладах освіти має набути життєвих компетентностей — динамічної комбінації знань, способів мислення, поглядів, цінностей, навичок, умінь, ставлення, інших особистих якостей, що визначає здатність особи успішно провадити професійну та/або подальшу навчальну діяльність.

Розглянемо тлумачення деяких термінів, як воно подається у Рамковій програмі оновлених ключових компетентностей для навчання протягом життя (17 січня 2018) [3]:

- знання складається з фактів і цифр, концепцій, ідей та теорій, які вже встановлені та підтримують розуміння певної сфери або предмета;
- навички визначаються як здатність та спроможність виконувати процеси та використовувати наявні знання для досягнення результатів;
- ставлення описують диспозиції сприйняття і налаштованості щодо ідей, людини або ситуації й спонукають до відповідних реакцій або дій.

Ключовими компетентностями є ті, які необхідні всім людям для підвищення особистого потенціалу і розвитку, розширення можливостей працевлаштування, соціальної інтеграції та активного громадянства. Такі компетентності розвиваються в процесі навчання протягом усього життя, починаючи з раннього дитинства шляхом формального, неформального та інформального навчання.

Усі ключові компетентності вважаються однаково важливими: кожна з них сприяє успішному життю в суспільстві. Компетентності можуть застосовуватися у багатьох контекстах і в різних комбінаціях. Вони переплітаються та поєднуються: розвиваючи компетентності, важливі для однієї життєвої сфери, ми одночасно розвиваємо й пріоритетні для іншої.

У 2018 році було оновлено перелік і назви 8 ключових компетентностей, визначених Європейським Союзом, порівняно з попередньою редакцією 2006 року. Подамо порівняльну таблицю 2.1.2 за [3].

Таблиця 2.1.2

Було (2006)	Стало (2018)
1. Спілкування рідною мовою (Communication in the mother tongue)	1. Грамотність (Literacy competence)
2. Спілкування іноземними мовами (Communication in foreign languages)	2. Мовна компетентність (Languages competence)
3. Математична компетентність та основні компетентності у природничих і точних науках (Mathematical competence and basic competences in science and technology)	3. Математична компетентність та компетентність у науках, технологіях та інженерії (Mathematical competence and competence in science, technology and engineering)
4. Цифрова компетентність (Digital competence)	4. Цифрова компетентність (Digital competence)
5. Навчання вчитись (Learning to learn)	5. Особиста, соціальна та навчальна компетентність (Personal, social and learning competence)
6. Соціальна і громадянська компетентність (Social and civic competences)	6. Громадянська компетентність (Civic competence)
7. Почуття ініціативності та взаємодії (Sense of initiative and entrepreneurship)	7. Підприємницька компетентність (Entrepreneurship competence)
8. Культурна впевненість і самовираження (Cultural awareness and expression)	8. Компетентність культурної обізнаності та самовираження (Cultural awareness and expression competence)

У Концепції нової української школи [2] розглядаються 10 ключових компетентностей, тобто додатково визначено ще 2 ключові компетентності:

- Ініціативність і підприємливість.
- Екологічна грамотність і здорове життя.

У рамках запровадження компетентнісного підходу визначено, що навчання математики має зробити певний внесок у формування ключових компетентностей, а в Навчальних програмах з математики виокремлюються чотири наскрізні лінії ключових компетентностей, які спрямовані на формування в учнів здатності застосовувати знання й уміння у реальних життєвих ситуаціях. До наскрізних ліній ключових компетентностей віднесено:

- «Екологічна безпека та сталий розвиток»,
- «Громадянська відповідальність»,

-
- «Здоров'я і безпека»,
 - «Підприємливість та фінансова грамотність».

Кожну з цих наскрізних ліній та шляхи її реалізації в освітньому процесі детально розглянемо у наступних параграфах.

2.2. ЕКОЛОГІЧНА БЕЗПЕКА ТА СТАЛИЙ РОЗВИТОК

Васильєва Д.В.

Основна мета впровадження цієї наскрізної лінії — це інформування учнів про існуючі екологічні проблеми та причини їх виникнення, необхідність відповідального ставлення до довкілля, врахування екологічних наслідків власної діяльності та потреби особистого внеску в збереження природи, важливість сталого розвитку для майбутніх поколінь

Існують два підходи до організації екологічного виховання, екологізації навчальних предметів відповідно до їх змісту і введення до навчального плану спеціального навчального предмета екологічного змісту. Тобто, одні фахівці наполягають на включенні в навчальні плани основної школи факультативних курсів і окремих предметів, присвячених екології та охороні природи, а інші — на екологізації освіти. Змістове наповнення курсу математики має великий потенціал для ненав'язливого висвітлення екологічних питань і, відповідно, екологізації освіти.

У старшокласників поглиблюється та ускладнюється процес самопізнання, формується свідоме ставлення до довкілля та до себе. Це найкращий час для закладання основ ціннісних орієнтацій підростаючого покоління.

Формування в учнів екологічних знань у процесі навчання математики може відбуватися в різних формах навчально-пізнавальної діяльності учнів:

- розв'язування задач, дібраних учителем;
- складання задач учнями та їх розв'язування;
- виконання та складання частково-пошукових завдань (на передбачення результатів дослідів чи наслідків дії екологічних факторів; на планування дослідження; на осмислення певних ситуацій; на пояснення ситуацій; на передбачення можливих наслідків своєї діяльності чи діяльності інших людей);
- написання екологічно-алгебраїчних диктантів;
- короткі цікаві повідомлення на уроці;
- створення емоційно-моральних ситуацій;
- проведення інтегрованих уроків;

-
- організація екскурсії;
 - проведення пізнавальних екологічно-математичних ігор та інших позакласних заходів тощо.

У психологічній і педагогічній літературі зазначається, що на різних етапах свого життя учні по-різному сприймають навколишній світ. Тож, щоб засвоєння знань було свідомим і надалі принесло позитивні результати, потрібно враховувати вікові особливості учнів при виборі матеріалу, що пропонується до розгляду на уроках математики. У контексті формування наскрізної лінії «Екологія та сталий розвиток» для учнів старшої школи найкраще підійде змістове наповнення уроків математики, яке сприятиме формуванню загальнолюдських цінностей, що стосуються екології, збереження здоров'я та ресурсів.

Особливої уваги з метою екологічного виховання учнів заслуговують задачі, у яких міститься інформація про життєдіяльність людини та функціонування оточуючого середовища. Такі задачі мають відображати реальну ситуацію і містити пізнавальні відомості. Їх умови мають бути лаконічними з акцентом на математичний зміст і спосіб розв'язування.

Наприклад. *Кожна тонна розлитої у воді нафти вкриває тонкою плівкою приблизно 12 км² водної поверхні й забруднює близько 1 000 000 тонн води. Яка територія і яка маса води буде забруднена, якщо:*

1. *під час промивання танкера гарячою водою у море злили 1,5 тонни нафти;*
2. *під час аварії танкера тоннажністю 25 000 тонн у воду потрапив 1 % нафти?*

Також доцільними будуть задачі екологічного спрямування, зміст яких уможливує формування в учнів дбайливого ставлення до національних багатств і рідної природи. Виховний вплив задач краєзнавчого характеру здійснює не сама математика, не її закони і її стиль, а ті дані, які зустрічаються в задачі, і які без будь-якої зміни математичного змісту могли бути замінені будь-якими іншими аналогічними даними.

Проаналізуйте графік середнього індексу якості повітря у м. Києві (складеного SaveEcoBot) під час введення карантину у 2020 року. Які висновки можна зробити?



Мал. 2.2.1

Під час повторення і вивчення у 10 класі різного виду функцій значне місце відводиться формуванню в учнів умінь будувати й аналізувати графіки функцій, характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують, а також використанню функції як певної математичної моделі реального процесу.

Природньо буде ознайомлювати учнів з екологічними проблемами на уроках математики з тем: «Функції та їх графіки», «Елементи статистики та теорії ймовірностей» тощо.

Маса радіоактивної речовини після t років обчислюється за формулою $W = W_0 \cdot 2^{-0,001t}$. Знайдіть початкову масу радіоактивного матеріалу. Через який час залишиться лише 1% від початкової маси радіоактивної речовини?

Учням іноді корисно пропонувати задачі, розв'язання яких потребує статистичних даних, які в задачі не наведені. Такі задачі спонукають учнів до пошуку відомостей у книжках чи Інтернеті. Це є надзвичайно корисним, адже при такому стрімкому розвитку суспільства і величезній кількості відомостей, завданням людини є не якнайбільше запам'ятати, а навчитися в найкоротші терміни відшукати те, що її цікавить у даний момент. Приклади задач на відшукування додаткових даних.

1. *На кожного жителя міста припадає на рік x кг сміття: $150 \leq x \leq 600$. Користуючись цими цифрами, оцініть, скільки сміття на рік може утворитися в місті, де ви проживаєте.*

2. *За розробленим у Японії проектом з 1 кг пластмаси можна одержати 0,5 л бензину і 0,5 л гасу. Дізнайтесь про обсяги збору поліетилену в Україні. Розрахуйте кількість палива, яке можна одержати Україна при використанні даного проекту та повній переробці зібраного поліетилену.*

Під час вивчення дуже абстрактного матеріалу задачі екологічного змісту доцільно пропонувати для повторення матеріалу з попередніх класів. Уроки математики у 10-11 класах наповнені абстрактними задачами, які далекі від екології і за методикою, і за змістом. Але вчитель, проаналізувавши зміст уроку, зможе знайти місце для розгляду задач екологічного змісту. У такому випадку досягається не лише розширення знань учнів, а й встановлюються міжпредметні зв'язки, створюється особливий емоційний фон, що посилює виховний вплив на учнів. Звісно, всього має бути в міру і такі завдання мають бути просто вкрапленнями до уроку.

На уроках математики екологічне виховання учнів можна здійснювати в таких напрямках:

- розкриття математичних закономірностей природи через вступні бесіди вчителя відповідно до теми уроку;
- з'ясування ролі математики в розв'язуванні екологічних проблем;
- складання графіків і діаграм, які ілюструють функціональні залежності результатів впливу людської діяльності на природу;
- аналіз прикладів економного та ефективного використання природних ресурсів;
- розкриття математичних закономірностей певних явищ природи;
- виховання екологічного розуміння та екологічної культури, відповідальності за стан навколишнього середовища;
- розв'язання задач з метою розуміння окремих екологічних понять;
- обробка статистичного матеріалу.

Щоб підсилити інтерес учнів до екологічних проблем, вплинути на формування екологічної свідомості та світогляду учнів, вчителю варто проаналізувати і переосмислити свій світогляд. Вчитель має бути впевненим у необхідності бережливого ставлення до природи, розглядати виховання в учнів екологічних переконань як свій громадянський обов'язок.

Набута учнями екологічна компетентність сприятиме формуванню в учнів бережливого ставлення до природи, її збереження та примноження, готовності брати участь у вирішенні питань охорони довкілля і розвитку суспільства, соціальної активності, відповідальності та екологічної свідомості, умінь і досвіду критично оцінювати перспективи розвитку навколишнього середовища і людини тощо. Кожен громадянин має во-

лодіти основами екологічних знань, що дозволить розуміти й ефективно розв'язувати екологічні проблеми сьогодення і майбутніх поколінь.

2.3. ГРОМАДЯНСЬКА ВІДПОВІДАЛЬНІСТЬ

Васильєва Д.В.

Громадянська відповідальність — це моральна якість особистості з високорозвиненим громадянським обов'язком, що передбачає усвідомлення суті та значення своєї діяльності, її наслідків для суспільства і соціального розвитку, вчинків особи з погляду інтересів суспільства, держави тощо.

Наскрізна лінія «Громадянська відповідальність» базується на:

- усвідомленні учнями своєї громадянськості (розумове осягнення і внутрішнє прийняття того факту, що особа належить до певного соціуму);
- усвідомлення власної гордості за приналежність до своєї нації,
- сприйняття оточуючого світу крізь призму національних інтересів,
- уміння мислити на основі образів національної культури тощо.

Громадянське виховання взагалі і його складова — громадянська відповідальність зокрема — має значущість для держави, суспільства й особистості. Для поліетнічної України формування громадянської відповідальності в учнів відіграє особливо важливу роль ще й тому, що воно покликане сприяти формуванню соборності держави.

Набута учнями громадянська компетентність сприятиме формуванню в учнів здатності активно, відповідально й ефективно реалізовувати громадянські права та обов'язки з метою розвитку демократичного громадянського суспільства.

Складові громадянської відповідальності:

- громадянська ідентифікація;
- готовність свідомо приймати і добровільно виконувати закони;
- сформована система національних цінностей;
- усвідомлення власної відповідальності за все навколишнє;
- повага до державних символів, історії, культури;
- вмотивованість до суспільно значимих дій і вчинків;
- розвинена потреба допомагати іншим;
- вибір професії за здібностями;
- історичні, політико-правові знання;
- усвідомлена потреба в засвоєнні системи знань;
- толерантне ставлення до інших людей;

-
- здатність відстояти свої погляди;
 - активна участь у громадській діяльності.

У школі робота з виховання у молоді громадянської відповідальності проводиться в двох напрямках:

- на позакласних заходах (організація і проведення бесід, вікторин, дебатів і конференцій, випуск газет, публікація статей, перегляд фільмів, екскурсії, зустрічі з видатними людьми тощо);
- на уроках (проведення уроків математики з використанням матеріалу, що благодатний для здійснення виховання громадянської відповідальності).

На уроках математики для формування в учнів громадянської відповідальності вчитель може періодично пропонувати учням задачі на такі теми:

- права людини і механізми їх захисту, права та обов'язки громадянина України, права дитини;
- роль законів у житті суспільства;
- необхідність суспільно значимих дій і вчинків;
- демократична держава та активна участь громадян в її житті;
- процеси прийняття суспільних рішень і форми участі громадян у житті громади і суспільства в цілому;
- основи співпраці та спілкування з іншими та розв'язання конфліктних ситуацій;
- сутність демократії, демократичні цінності, права і свободи людини і громадянина, і механізми їх захисту, громадянські обов'язки;
- громадянське суспільство, процеси прийняття суспільних рішень і форми участі громадян у житті суспільства на місцевому, національному, європейському та світовому рівні, контроль громадян над владою;
- суть ринкових відносин, економічні чинники розвитку демократичного суспільства;
- демократичні та національні цінності;
- роль ЗМІ у суспільному житті;
- повага до державних символів, історії, культури;
- необхідність засвоєння знань, зокрема історичних і політико-правових.

Кожен учень має знати, які обов'язки і права він має і що може змінити в довкіллі. Наприклад, на початку уроку, щоб налаштувати учнів на роботу запропонуйте учням задачу: *«Електронна петиція — це особлива форма колективного звернення громадян (що дає можливість донести свої ініціативи) до Президента, Верховної Ради, Кабінету Мі-*

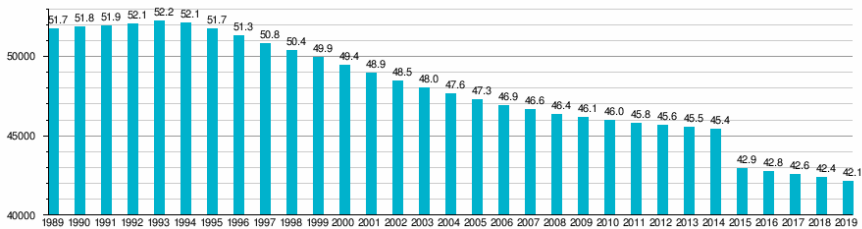
ністрів України, Київської міської ради тощо. З електронними петиціями громадяни можуть звернутися через офіційний веб-сайт органу, якому вона адресована. Електронна петиція, адресована відповідно Президенту України, Верховній Раді України, Кабінету Міністрів України, розглядається за умови збору на її підтримку не менш як 25 000 підписів громадян протягом не більше трьох місяців з дня оприлюднення петиції. А для розгляду петиції у Київській міській раді петиція має отримати не менше 10 000 підписів протягом не більше 90 днів. Уведіть потрібні позначення і запишіть за допомогою знаків нерівності умови, за яких петицію розглядатимуть у відповідному органі.» Ця задача покликана актуалізувати знання учнів про нерівності та інформувати учнів про можливість впливати на життя суспільства.

Можна також пропонувати задачу, що стосується відповідального ставлення до довкілля і громадянської відповідальності, для удосконалення обчислювальних навичок.

На уроках математики важливо також розвивати логічне мислення учня. Учням можна запропонувати проаналізувати графіки і діаграми процесів, що відбуваються в сучасній Україні.

Наприклад. Проаналізуйте діаграму «Населення України».

1. Яким було населення у 2000 році?
2. У якому році населення України було найбільшим?
3. Якими подіями можна пояснити спад населення в 2015 році?



Мал. 2.3.1

Останні питання стимулюють учнів до роздумів: «Чим міг бути спричинений такий різкий спад населення України? Події, що відбулися у 2014 році (Революція Гідності, Анексія Криму, Анти терористична операція на сході України, утворення ДНР і ЛНР), спричинили зменшення населення України (у діаграмі вже не враховані люди, що проживають на територіях, не підконтрольних Україні).

Доречними будуть також завдання, що стосуються здобутків українського суспільства чи його національних цінностей.

Наприклад. За даними таблиці діаграми дізнайтесь, яку частину грошей отримує Україна від експорту товарів до країн ЄС.

Структура експорту товарів з України до країн ЄС (2018 року)



Мал. 2.3.2

Або ж вчитель може проводити тематичні уроки-ігри. Наприклад, урок-подорож «Сім чудес України». Учні виконуючи математичні завдання знайомляться з визначними місцями, що є на території країни.

Громадянська відповідальність є однією зі складових патріотичного виховання. Відповідно до Конституції України, Законів України «Про освіту», «Про загальну середню освіту», «Концепції національно-патріотичного виховання дітей та молоді на 2015—2019 роки» одним із пріоритетних завдань освіти є патріотичне виховання молодих поколінь.

У Концепції національно-патріотичного виховання дітей та молоді на 2015—2019 рр. патріотичне виховання визначається як складова національного виховання, головною метою якого є становлення самодостатнього громадянина-патріота України, гуманіста і демократа, готового до виконання громадянських і конституційних обов'язків, до успадкування духовних і культурних надбань українського народу, досягнення високої культури взаємин. Воно сприяє єднанню українського народу, зміцненню соціально-економічних, духовних, культурних основ розвитку українського суспільства і держави.

Патріотичне виховання учнів під час навчання математики — це особистісно орієнтований педагогічний процес, спрямований на набуття учнями інтегративної якості, яка характеризує їхнє позитивне ставлення до

Батьківщини та її полікультурності, усвідомлення власної причетності до українського етносу та національної спадщини, відповідальне ставлення до розвитку особистості та вибору ціннісних орієнтацій.

Основні напрями в системі патріотичного виховання: духовно-моральне; історико-краєзнавче; громадянсько-патріотичне; соціально-патріотичне; героїко-патріотичне; спортивно-патріотичне; національно-патріотичне.

Для того щоб збільшити потенціал патріотичного виховання предмета математики, необхідно частіше включати в зміст уроку задачі, що викликають почуття гордості за рідну країну і стосуються державності, столиці, прапора тощо.

Варто пропонувати учням для розв'язування задачі краєзнавчого характеру, які допомагають виховувати в учнів бережливе ставлення до природних багатств, повагу до праці і традицій українського народу, любов до власного краю і своєї Батьківщини. Це можуть бути задачі про річки та озера, тварин чи рослин, задачі про історичні споруди та новобудови регіону, в якому проживають учні. Виховний вплив задач краєзнавчого характеру здійснює не сама математика, не її закони і її стиль, а ті дані, які зустрічаються в задачі, і які без будь-якої зміни математичного змісту могли бути замінені будь-якими іншими аналогічними даними.

Формуванню патріотизму в учнів, зокрема гордості за успіхи держави, сприяють задачі, що містять історичні чи статистичні відомості (загальнодержавні чи регіональні). Цікавими для учнів є задачі, що містять історичні дані регіону, популяризують історію, боротьбу українського народу за незалежність, мову та культуру. Коли вміння розв'язувати задачу сплітається з історією, задача стає більш значимою і може стати дійсно цікавою кожному учню.

На уроках математики виховання патріотизму доцільно здійснювати під час вивчення елементів статистики та опрацювання статистичних даних у вигляді різного роду діаграм. З цієї метою слід використовувати реальні досягнення українського народу.

Не варто вчителю оминати патріотичний матеріал, що міститься в діючих підручниках. Потрібно звертати увагу учнів на прізвища українських математиків, на їх внесок у розвиток математики. Знайомство зі знаменитими земляками виховує гордість за свою Батьківщину, рідний край.

Учням бажано якомога більше розповісти про таких справжніх патріотів України.

Коли йде мова про **позакласні заходи**, то виховання громадянської відповідальності можна здійснювати за рахунок прикладів духовно-моральної, історико-краєзнавчої та національно-патріотичної тематики.

Наприклад, можна організувати позакласний захід «Миттєвості життя М. В. Остроградського». Вчитель добирає і рекомендує учням літературу про життєвий і творчий шлях ученого, а учні добирають цікаві факти з біографії математика. Позакласний захід розпочинається з короткого повідомлення вчителя, який розповідає, що М. В. Остроградський — славетний український математик і механік, засновник наукової школи прикладної математики і механіки, талановитий педагога і прогресивний реформатора математичної освіти. Демонструються портрети математика, його друковані праці, фотографії пам'ятника тощо. Учні розповідають окремі факти з життя видатного вченого, які їх зацікавили, а саме:

- Походив Михайло Васильович Остроградський з відомого українського козацько-старшинського роду, чим завжди дуже пишався. Народився в селі Пашенна Кобеляцького повіту на Полтавщині, де і пройшли його дитячі та шкільні роки.
- М. В. Остроградський був знайомий з багатьма представниками передової української інтелігенції того часу: І.Котляревським, Т. Шевченком, С. Гулаком-Артемівським, М. Лисенком та іншими. Улюбленим його письменником був Т. Г. Шевченко, значну частину творів якого М. Остроградський знав напам'ять. З великою повагою й любов'ю ставився до Михайла Васильовича і великий Кобзар. У своєму щоденнику Т. Г. Шевченко так писав про їхню зустріч: «Великий математик прийняв мене з розкритими обіймами, як земляка і як сім'янина, що кудись надовго відлучився. Спасибі йому».
- Математичні нахили у М. В. Остроградського проявилися вже в дитячі роки. Усе, що його оточувало, він намагався вивчати насамперед з їх математичних характеристик: вимірював глибину колодязя, визначав розміри грядок і будівель, для чого завжди носив із собою мотузку з прив'язаним камінцем.
- На честь видатного українського математика і з нагоди 200-річчя від дня народження М. В. Остроградського Національна академія наук України та Українське математичне товариство організували в Києві 21—23 серпня 2001 р. математичний конгрес, а Національний банк випустив ювілейну монету.

2.4. ЗДОРОВ'Я І БЕЗПЕКА

Васильєва Д.В.

Сучасна державна освітня політика України спрямована на формування у підростаючого покоління здоров'я, здорового способу життя та культури здоров'я. Розвиток особистості, зокрема й у напрямі формування культури здорового способу життя є одним із головних напрямів модернізації освіти.

Ця наскрізна лінія стосується становлення учня як емоційно стійкого члена суспільства, здатного вести здоровий спосіб життя і формувати навколо себе безпечне життєве середовище.

Здоров'язбережувальна компетентність — здатність учня застосовувати в умовах конкретної ситуації сукупність здоров'язбережувальних компетентностей, дбайливо ставитися до власного здоров'я та здоров'я інших людей. Набута учнями здоров'язбережувальна компетентність сприятиме здоровому способу життя та застереженню від шкідливих звичок.

Для учнів цікавими є задачі, фабули яких стосуються режиму харчування, якості харчових продуктів, уміння складати харчовий раціон з урахуванням можливостей, потреб та користі.

У процесі розв'язування задач підлітків можна ознайомити з безпечним використанням електроприладів та інших технічних засобів, з негативним впливом шкідливих звичок на молодий організм, з особливостями використання ІКТ тощо.

Розглянемо можливості під час уроків математики сприяти формуванню основних складових здоров'язбережувальної компетентності учнів.

1. Розв'язування доцільних задач надає учням життєві знання і навички, що сприяють фізичному здоров'ю (раціональне харчування, рухова активність, санітарно-гігієнічний режим праці та відпочинку).

Хворому після харчового отруєння призначили пити двічі на день сорбенти. Але їх варто пити за 1,5 години після або за 1 год до прийому їжі. Скільки існує варіантів прийому сорбенту, якщо хворий харчується тричі на день? Який, на вашу думку, є найкращим?

Важливо звертати увагу учнів на питання безпеки: пожежної безпеки, безпеки дорожнього руху, безпеки праці, безпеки в Інтернеті тощо.

Наприклад. *За даними, поданими на малюнку, знайдіть кількість людей із зазначеної вибірки, що користуються ременями безпеки під час керування автомобілем: а) у вашій області; б) в усій Україні; г) в області, у якій цей показник найменший.*

Побудуйте стовпчасту діаграму.



Мал. 2.4.1

Задачі здоров'язбережувальної тематики можна розв'язувати на інтегрованих уроках, наприклад, математики і біології (природознавства), математики і фізики, математики і хімії. Доцільно також заохочувати учнів до проведення проектної роботи.

Наприклад, у 10 класі учні актуалізують способи задання і властивості функцій. За допомогою мультимедійної дошки доцільно розглянути кілька графіків функцій (що є моделями реальних процесів), завдяки яким з'ясувати властивості цих функцій.

На малюнку подано графіки залежності опору тіла людини (1) і струму, що через нього протікає (2), від величини прикладеної напруги.

Учням бажано повідомити особливості впливу струму на людину, зокрема, що струм (змінний і постійний) понад 50 мА спричинює зупинку дихання. Небезпека дії струму на організм людини залежить від: величини струму (основний фактор); тривалості дії струму; шляху струму в тілі людини; виду і частоти струму; індивідуальних якостей людини та оточуючого середовища. Опір тіла людини наближено визначають за законом Ома.

За допомогою розглянутих графіків можна проілюструвати поняття зростаючої та спадної функції, а також показати взаємозв'язок між аналітичним і графічним способом задання функції $I = UR$. Такі відомості спонукатимуть учнів замислитися над поведінкою поблизу електромереж,

відповідальніше ставитися до вибору місця для самофотографування, збирання металобрухту, паркуру тощо.

2. У сучасних умовах функціонування суспільства у молоді бажано сформувати навички, що сприяють соціальному здоров'ю (ефективне спілкування, співчуття, розв'язання конфліктів, поведінка в умовах тиску, погроз, дискримінації, спільна діяльність та співробітництво).

До навичок поведінки в умовах тиску, погроз, дискримінації, крім іншого, відносять уміння відмовлятися від небажаних пропозицій, зокрема й пов'язаних із залученням до куріння, вживання алкоголю, наркотичних речовин.

Униканню небезпечних ситуацій та відстоюванню власної позиції допоможуть конкретні цифри, що містяться у таких задачах.

Для мотивації учнів 10-11 класів вести здоровий спосіб життя і формувати навколо себе безпечне життєве середовище доцільно використовувати статистичні дані про шкідливі звички та їх вплив на розвиток молодого організму. Необхідні відомості можна брати, наприклад, з результатів «Європейського опитування учнів щодо вживання алкоголю та наркотиків — ESPAD».

Наприклад. *За даними, поданими на малюнку, проаналізуйте динаміку змін кількості людей, що хоч раз пробували палити в Україні. Порівняйте дані, подані для України, і загальні дані по 25 європейських країнах. Яку інформацію можна ще отримати з поданих наочно статистичних даних.*



Мал. 2.4.2

Десятикласникам до цієї задачі можна запропонувати підготувати анкети і здійснити власний моніторинг молодіжних проблем, а потім обговорити його результати на позакласному заході.

Спільну діяльність учнів та співробітництво з однокласниками та вчителем забезпечує проектна діяльність.

3. У процесі навчання математики можна формувати навички, що сприяють духовному та психічному здоров'ю (самоусвідомлення та самооцінка, аналіз проблем і прийняття рішень, визначення життєвих цілей і програм, самоконтроль, мотивація успіху та тренування волі).

У процесі компетентнісного підходу до навчання математики важливо не тільки забезпечити учнів певним запасом знань, способів дій, а й сформуванню у них критичне ставлення до своїх можливостей та успіхів, навчити контролювати власні дії в навчально-пізнавальній діяльності, тобто здійснювати самоконтроль.

Самоконтроль — усвідомлена регуляція людиною своєї поведінки і діяльності для забезпечення відповідності їх результатів поставленим цілям, вимогам, нормам, правилам. Мета самоконтролю полягає в попередженні помилкових дій, операцій і їх виправленні.

Формування навичок самоконтролю слід починати з перших років навчання і культивувати протягом усього періоду навчання. З цією метою вчителі ще в молодших класах починають вимагати від учнів, щоб вони перевіряли результати своєї діяльності, уважно стежили за ходом виконання класної і домашньої роботи, самостійно виявляли і виправляли допущені помилки. Набуті в школі стійкі навички самоконтролю сприяють правильній та своєчасній оцінці будь-якого виду діяльності в майбутньому.

З часом самоконтроль стає суттєвою складовою особистості людини, визначаючи відповідальне ставлення до виконуваної роботи, правильну самооцінку, організованість.

У 11 класі учні вивчають елементи математичної статистики, зокрема графічне подання інформації про вибірку. Під час цих уроків бажано пропонувати учням завдання, що стосуються складу харчових продуктів, визначення денного раціону відповідно до індекса маси тощо.

Наприклад. *Визначили масову частку жирів (у %) у 30 різних сирів з групи Голландського. Отримали такі результати:*

30, 40, 45, 42, 50, 50, 45, 42, 55, 42,
42, 40, 45, 42, 50, 55, 42, 45, 45, 40,
55, 42, 55, 55, 30, 42, 55, 42, 45, 42.

Побудуйте частотну таблицю і визначте моду та медіану вибірки. Скільки жирів містять 50 грамів сиру, що відповідає середньому значенню цієї вибірки?

Набута на уроках математики здоров'язбережувальна компетентність сприятиме підвищенню культури здоров'я підростаючого покоління.

2.5. ПІДПРИЄМЛИВІСТЬ ТА ФІНАНСОВА ГРАМОТНІСТЬ

Васильєва Д.В.

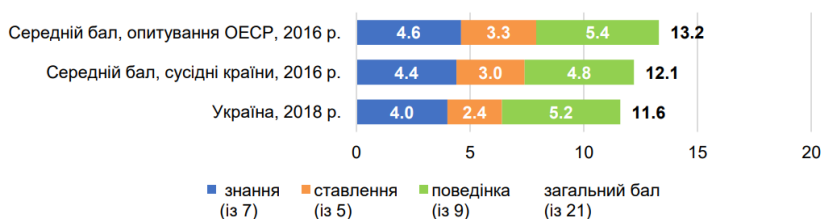
Фінансова грамотність — вміння застосовувати фінансові знання та використовувати здобуті фінансові навички, щоб отримувати максимальну користь від управління власними фінансами та використання фінансових послуг.

Фінансова грамотність впливає на прийняття рішень про доходи, витрати і заощадження, на вибір фінансових інструментів, планування бюджету, нагромадження коштів на майбутнє.

Громадяни, які неефективно розпоряджаються своїми фінансовими зобов'язаннями, стають незахищеними перед обличчям фінансових криз. Це загрожує стабільності фінансової системи на національному. Уряди розвинених держав інвестують значні кошти для підвищення рівні фінансової грамотності населення. Особливий акцент ставиться на молоді покоління, оскільки воно вже може бути споживачем фінансових послуг, користуватися послугами банків.

У 2018 році було проведено дослідження фінансової грамотності в Україні з використанням методики Організації економічного співробітництва і розвитку (ОЕСР) [4]. Рейтинг дослідження свідчить, що Україна разом з Польщею знаходиться на 30-ому (останньому місці). В Україні Індекс фінансової грамотності ОЕСР (знання, ставлення, поведінка) становить 11,6 балів (проти 13,2, що є середнім показником тридцяти країн).

БАЛИ З ФІНАНСОВОЇ ГРАМОТНОСТІ ОЕСР: ПОРІВНЯННЯ З ІНШИМИ КРАЇНАМИ



Мал. 2.5.1

В процесі дослідження було виявлено, що рівень фінансової грамотності є найнижчим у віковій групі 18-24 роки (10,6 балів проти 12,1 у віковій групі 25-34 роки). Отже, важливо підвищувати рівень фінансової грамотності підлітків та молоді.

За результатами дослідження МОН рекомендувало впровадити курс за вибором «Фінансова грамотність» для учнів 10, 11 класів. Програму, навчальний посібник та робочий зошит «Фінансова грамотність. Фінанси. Що? Чому? Як?» було створено 2019-го і розміщено у вільному доступі на сайті МОН [5].

Але математика теж містить потенціал для підвищення рівня фінансової грамотності старшокласників. Розв'язування задач фінансової спрямованості під час вивчення математики сприяє формуванню в учнів умінь та навичок використання математичних знань в практичній діяльності та покращенню обізнаності молоді у питаннях оподаткування та фіскальної діяльності держави. Поширення та популяризація елементарних фінансових і податкових знань уможливорює розкриття міжпредметних зв'язків та ролі математики в теорії фінансів, у житті людини і держави, розвиток у школярів пізнавального інтересу, підвищенню якості математичної підготовки підростаючого покоління тощо.

Саме тому у 2017 році програми з математики були оновлені, і з'явилась наскрізна лінія «Фінансова грамотність і підприємливість», що сприяє формуванню фінансової грамотності учнів і може реалізовуватися під час вивчення навчальних тем математики за 10-11 клас. А найбільше — «Функції, їхні властивості та графіки» (10 клас), «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики» (11 клас).

Наприклад, В деякій фірмі різні співробітники мають різні заробітні плати: 5 000, 9 000, 10 000, 10 000, 25 000, 10 000, 8 000, 9 000, 5 000, 30 000, 9 000, 50 000.

1. *Яка мінімальна і максимальна зарплата у цій компанії?*
2. *Знайдіть розмах вибірки.*
3. *Знайдіть моду цієї вибірки. Поясніть що це число означає.*
4. *Знайдіть середню заробітну плату у компанії.*
5. *На скільки середнє значення відрізняється від моди?*
6. *Побудуйте гістограму.*

Для розвитку у учнів фінансової грамотності бажано пропонувати учням задачі, що стосуються фінансових операцій, вартості товарів і послуг, благодійності, податків тощо.

Чи вистачить 3400 грн на виготовлення конусоподібного намету радіусом 2 м та висотою 3 м, якщо ціна одного метру брезенту коштує 150 грн?

Для сучасних учнів цікавими будуть задачі про розподіл фінансів у родині, про ринок цінних паперів та криптовалют, податки та їх розподіл, правила нарахування пенсій, про банківські послуги, страхування та ризики тощо.



Мал. 2.5.2

Для реалізації наскрізної лінії «Фінансова грамотність і підприємливість» необхідно розширити систему задач курсу математики за рахунок задач відповідного змісту. Доцільно також залучати учнів до складання задач фінансової тематики.

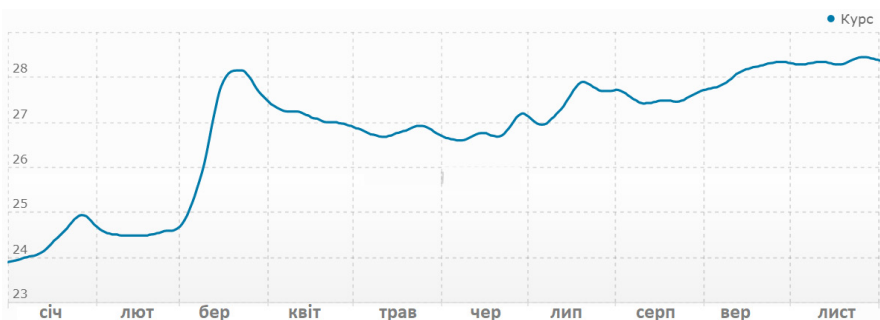
Задачі фінансового змісту корисно пропонувати під час вивчення теми «Функції», де особливе значення надається дослідженню функцій і побудові графіків, що стосуються різних залежностей.

Наприклад: «Готель для тварин А пропонує проживання і догляд домашнього улюбленця на таких умовах: 750 грн — заїзд тварини та проходження медичного огляду, а потім щоденна оплата 300 грн. Готель для тварин Б проводить медогляд безкоштовно, але щоденна оплата у нього становить 350 грн. В який готель краще поселити домашнього улюбленця родини, що їде на відпочинок на n днів?

1. Зобразіть пропозицію від кожного з готелів у вигляді функцій та їх графіків. Для якої кількості днів перебування зручно обрати той чи інший готель?

2. А що якщо родина має двох собак. До речі, Готель А надає знижку 10% у разі поселення двох собак.

Корисно пропонувати учням завдання на прочитання графіків і діаграм, аналіз ситуації або ж статистичних даних. Цікавим для учнів, наприклад, є завдання на прочитання графіка «Курс долара, 2020».



Мал. 2.5.3

Завдання, які може запропонувати вчитель.

1. Для якого проміжку часу був побудований графік?
2. Яке найбільше значення для купівлі було зафіксоване за цей проміжок? Яке найменше?
3. Накресліть таблицю, куди занесіть курс для покупки і продажу валюти для кожне перше число місяця.
4. Знайдіть середнє значення для купівлі долара за цей проміжок часу.
5. За таблицею побудуйте відповідну стовпчасту діаграму.

Розв'язання задач на оподаткування передбачає формування у школярів уявлення про умови сплачування податків та принцип їхнього нарахування. Це сприятиме в майбутньому уникненню багатьох помилок у важливих питаннях щодо оподаткування.

Наприклад. До загальнодержавних податків належить податок на додану вартість — це непрямий податок, який входить в ціну товарів (робіт, послуг) та сплачується покупцем, але його облік та перерахування до державного бюджету здійснює продавець (податковий агент). Знайдіть, яка сума надійде до бюджету кожної країни, якщо її мешканець здійснить покупку на суму 345 євро, та заповніть таблицю 2.5.1.

Таблиця 2.5.1

Країна	Надходження до бюджету країни	
Бельгія	21 %	
Данія	25 %	
Німеччина	19 %	
Іспанія	18 %	
Італія	22 %	
Кіпр	15 %	
Латвія	22 %	
Україна	20 %	

Підприємливість — це вміння генерувати нові ідеї й ініціативи та втілювати їх у життя з метою підвищення власного соціального статусу та добробуту, розвитку суспільства і держави. Підприємливість включає вміння раціонально вести себе як споживач, ефективно використовувати індивідуальні заощадження, приймати доцільні рішення у сфері зайнятості, фінансів тощо.

Під час вивчення теми: «Похідна та її застосування» учням можна запропонувати наступну задачу. *Вітрова електростанція щомісячно виробляє x кВт·год електроенергії. Встановлено, що залежність фінансових прибутків підприємства від кількості виробленої електроенергії виражається формулою $f(x) = -0,02x^3 + 500x - 1000$. Визначте за якої кількості електроенергії, яку виробить підприємство, буде досягтися максимальний прибуток.*

Заохотити учнів до розвитку підприємливості можна за допомогою сторітелінгу про Фалеса Мілетського. Передбачаючи на основі астрономічних даних багатий урожай оливок, Фалес ще зимою дав завдаток власникам всіх маслобоєнь у Мілеті і на Хіосі. Маслобійні Фалес законтрактував дуже дешево, бо не мав у той час конкурентів. Коли настав час збору оливок почався одночасно несподіваний попит багатьох осіб на маслобійні. Фалес тоді віддавав на відкуп законтрактовані ним маслобійні за значно більшу ціну, заробивши таким чином багато грошей. Фалес показав, що і філософам, при бажанні, розбагатіти не важко, тільки не це становить предмет їх інтересів.

Підприємливість можна розвивати за допомогою різноманітних вправ. Наприклад, їх виконання може бути здійсненим в рамках позакласних заходів.

Збільшення інвестиції. Учням дають конверт з грошима (або записку з зазначенням суми грошей). Сума грошей у конверті дуже мала — близько 50 гривень. Учні мають запланувати двогодинну діяльність, щоб збільшити первинну інвестицію, що надана їм у конверті. Завдяки цій вправі учні здобувають впевненість у здатності заробляти гроші.

Врахування всіх затрат та свого зиску. Визначити яку націнку необхідно встановити на товар, щоб окрім собівартості покрити витрати на доставку. Не забудьте закласти свій зиск (він залежить від затраченого вами часу та сил)!

«Перевернутий клас». Перегляд учнями вдома коротких, цілеспрямованих відео, в яких описується підприємницька діяльність. Наприклад, функціонування біржі криптовалют. В класі учні обговорюють побачене. Задають питання. Після цього вчитель може запропонувати декілька завдань на обчислення, що мають відношення до біржі криптовалют.

Стимулюючи учнів до проектної діяльності, можна запропонувати їм порівняти витрати та дохід своєї сім'ї за місяць, що минув, або ж придумати і спланувати свій «Старт ап».

Наприклад, в рамках проекту «Мій старт ап» учням можна запропонувати такі наступні завдання.

- Придумати і описати ідею для свого маленького START UP.
- Проаналізувати конкурентів на ринку і визначити особливості свого проекту.
- Придумати назву і створити логотип.
- Проаналізувати можливі шляхи здійснення реклами.
- Створити свій сайт (сторінку у соц. мережі).
- Розрахувати затрати реклами (створення візиток, контекстна реклама тощо).
- Написати бізнес-план.

Набута учнями компетентність у сфері підприємливості та фінансової грамотності сприятиме виробленню в учнів умінь застосовувати фінансові знання та використовувати здобуті фінансові навички, щоб отримувати максимальну користь від управління власними фінансами та застосування фінансових послуг.

Література до розділу

1. Указ президента України Про Національну доктрину розвитку освіти. Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/347/2002#Text>
2. Концепція Нової української школи. Режим доступу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
3. Рамковій програмі оновлених ключових компетентностей для навчання протягом життя (17 січня 2018). Режим доступу: <http://dlse.multycourse.com.ua/ua/page/15/53>
4. Фінансова грамотність, фінансова інклюзія та фінансовий добробут в Україні. Режим доступу: http://www.fst-ua.info/wp-content/uploads/2019/06/Financial-Literacy-Survey-Report_June2019_ua.pdf?fbclid=IwAR2AlpnGNn8big9d0_v6YEhNBwL69ErT0ToDVmY5Rq8dIJqSvLVndCm5ueM
5. Навчальні матеріали «фінансова грамотність. Фінанси. Що? Чому? Як?» для учнів 10, 11 класів. Режим доступу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi-pidruchniki-ta-navchalno-metodichni-posibniki-rekomendovani-mon/navchalni-materiali-finansova-gramotnist-finansi-sho-chomu-yak-dlya-uchniv-10-11-klasivv>

РОЗДІЛ III

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ В ЛІЦЕЯХ НА РІВНІ СТАНДАРТУ

3.1. МЕТА КОМПЕТЕНТІСНОГО НАВЧАННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ В ЛІЦЕЯХ НА РІВНІ СТАНДАРТУ ТА ЗАСОБИ ЇЇ ДОСЯГНЕННЯ

Вашуленко О.П.

Геометрія як навчальний предмет є лише складником процесу навчання у ліцеї. Тому важливо розуміти роль формування геометричних знань і умінь у загальному освітньому процесі.

Геометрія як навчальний предмет містить у собі такі структурні елементи:

- геометричні факти, поняття, теоретичні закономірності, доступні для розуміння і усвідомлення учнями певної вікової категорії;
- світоглядні, етичні та естетичні цінності, які формуються засобом геометрії;
- методи дослідження і наукового мислення, без яких неможливе засвоєння геометричних знань;
- історичні факти, відомості про видатних математиків, що мають виховне і мотиваційне значення;
- уміння і навички (зокрема, практичного застосування геометричних знань);
- способи пізнавальної діяльності, математичне мислення;
- показники формування і розвитку здібностей, емоцій і почуттів, необхідних для різних видів діяльності.

Провідними складниками предмету «стереометрія» в ліцеї є: геометричні наукові знання; характерні для геометрії способи діяльності; цілісне бачення світу на основі геометричних знань.

Знаннева парадигма освіти обмежувала зміст навчального предмету переважно переліком знань. За умови компетентісного навчання шкільні предмети не є сукупністю лише законів, понять і методів відповідної науки, а містять ще й інші освітні і виховні компоненти. Очевидно, що такий підхід до реалізації навчального предмету «стереометрія» в ліцеї потребує осмислення і вдосконалення методики його викладання. Не-

обхідно дослідити вплив цього навчального предмету на формування в учнів ліцею ключових компетентностей.

Системотвірним чинником побудови методики навчання будь-якого шкільного предмету є його мета. Компетентнісний підхід до навчання має за мету всебічний розвиток особистості, формування ключових компетентностей учнів.

Зазначимо, що математична компетентність передбачає здатність розвивати й застосовувати математичне мислення для розв'язання широкого спектру проблем у повсякденному житті, моделювання процесів і ситуацій із застосуванням математичного апарату; усвідомлення ролі математичних знань і вмінь в особистому й суспільному житті людини. Основою формування ключових компетентностей є особисті якості, здібності, попередній особистісний, соціальний, культурний і навчальний досвід учнів; їхні потреби, які мотивують до навчання; знання, уміння та ставлення, що формуються в освітньому, соціокультурному та інформаційному середовищах, а також у різних життєвих ситуаціях.

За новими освітніми документами мета математичної освітньої галузі визначається як формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та професійної діяльності впродовж життя, що передбачає *засвоєння системи знань, вдосконалення умінь і способів дій для розв'язування суто математичних та практичних задач; розвиток логічного мислення та психологічних якостей особистості; розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті.*

Для формування цілей навчання учнів ліцею стереометрії на рівні стандарту необхідно враховувати: зазначену вище мету математичної освітньої галузі, визначення понять ключових і математичної компетентностей, психологічні особливості школярів відповідної вікової категорії; відповідність строгості викладу навчального матеріалу рівню його сприйняття учнями; глибину вивчення предмету на рівні стандарту.

На сьогодні зрозуміло, що метою навчання математики не може бути тільки засвоєння учнями певної суми попередньо накопичених людством знань і навичок. Надважливим є розвиток особистісних якостей школярів. Традиційно вважалося, що цей процес пропорційно залежить від кількості засвоєних математичних фактів, доведених теорем і розв'язаних задач. Однак практика і життєвий досвід свідчать про те, що в сучасній діяльності людини математичні теореми і формули не використовуються, а за потреби їх легко знайти на просторах Інтернету. Тому знання, які так важко здобувалися, швидко втрачаються. Залишаються набуті психічні і розумові якості, вміння орієнтуватися в інформаційному про-

сторі, відшукувати потрібну інформацію, оцінювати її якість. У діяльності сучасної людини важливим є поведінка у нестандартних ситуаціях, вміння знаходити креативні способи вирішення проблем. Формуванню саме таких якостей особистості має сприяти компетентнісний підхід у навчанні стереометрії в ліцеї на рівні стандарту.

У формуванні ключових компетентностей школярів значну роль відіграє навчання геометрії. Геометрія, як наука, виникла з життєвих потреб людини у глибоку давнину. Змінюючись від практичної до суто дедуктивної, вона перетворилася на феномен загальнолюдської культури. Геометричні знання і вміння, геометрична культура є сьогодні професійно значущими для багатьох сучасних спеціальностей: дизайнерів, конструкторів, вчених і робітників. Серед шкільних предметів математичного циклу геометрія вирізняється вільнодумністю, небажанням підкорятися алгоритмам, а інколи навіть логіці. Вона є потужним засобом розвитку особистості. Геометрія допомагає пізнати навколишній світ, у якому більшість предметів нагадують різні геометричні фігури. Ми живемо у світі геометрії. Щоб орієнтуватися в ньому, потрібно навчитися розуміти, як він влаштований. Геометрія формує в людини просторову уяву, знайомить з просторовими формами і законами їх сприйняття. З іншого боку, геометрія має всі можливості для розвитку обох півкуль головного мозку людини, оскільки в ній інтуїтивно зрозумілі факти логічно обґрунтовуються і доводяться. Геометрія — це єдиний шкільний предмет, що базується на послідовному доведенні всіх тверджень. А якщо людина розуміється на доведенні, нею неможливо маніпулювати. Роль геометрії у навчанні не вичерпується її змістом. Наочні інтерпретації допомагають кращому розумінню властивостей геометричних фігур, їх прояву у реальному житті. Водночас, геометрія — один з найскладніших для засвоєння учнями навчальний предмет. Для того, щоб шкільний курс геометрії став ефективним засобом формування компетентностей в учнів ліцею, діяльність щодо його засвоєння має бути організована на науково обґрунтованих психологічних засадах цього процесу. Особливої уваги потребує організація вивчення стереометрії в ліцеї на рівні стандарту. Оскільки такий курс вивчається у класах гуманітарного профілю, мотивація його вивчення залежить від привабливості, лаконічності, результативності предмета, усвідомлення учнями його користі.

Для вироблення методики навчання стереометрії в ліцеї на рівні стандарту потрібно з'ясувати роль предмету у формуванні ключових і предметних компетентностей старшокласників. Важливо також розуміти, що справа не в кількості змістових одиниць і навчальних годин з геометрії, а в тому, як організувати навчальний процес, які його мета і завдання.

Враховуючи теоретичні засади і досвід навчання геометрії в школах України та за її межами, засади диференційованого і компетентнісного навчання, можна виділити кілька груп цілей навчання цьому предмету.

Проблемою змісту сучасної шкільної освіти є, зокрема, перевантаження учнів інформацією з різних предметів, насиченою різноманітними даними, що не пов'язані між собою. Обмеженість обсягу підручника призводить за таких умов до формальності і сухості викладу матеріалу. Як наслідок, освітній процес перетворюється для молодих людей на тяжкий обов'язок, школярі втрачають інтерес і мотивацію до навчання. Погіршується якість освіти, що не сприяє формуванню ключових якостей особистості.

Тому, насамперед, потрібно відібрати елементи геометричних знань, необхідні сучасній людині для життя і діяльності, а також засобом яких найефективніше сприяти формуванню ключових компетентностей учнів. Такий обсяг базових геометричних знань має також забезпечувати фундамент для продовження навчання.

Окреслення обсягу навчального змісту і глибини його засвоєння є актуальним з огляду на створення вимірників оцінювання результатів навчання цього предмету учнів ліцею на рівні стандарту. Слід пам'ятати, що учні на будь-якому рівні і профілі навчання можуть обирати зовнішнє незалежне оцінювання з математики. Тому відповідна навчальна програма має враховувати програму зовнішнього незалежного оцінювання.

Отже, курс стереометрії в ліцеї на рівні стандарту має бути з одного боку цікавий, розкривати зв'язки геометрії, як науки, з культурою і навколишнім світом. З іншого — забезпечувати мінімальний, але достатній рівень знань і вмінь. Необхідно забезпечити формування в учнів навичок: побудови математичних моделей реальних явищ і процесів; письмової та усної математичної мови (впорядкованість, чіткість, точність, обґрунтованість, лаконічність); використання приладів та інструментів, комп'ютерних технологій. Важливо також розвивати в учнів просторову уяву і інтуїцію.

Метою вивчення стереометрії в ліцеї на рівні стандарту є засвоєння знань, вдосконалення умінь і способів дій для розв'язування геометричних та практичних задач; розвиток логічного мислення та психологічних якостей особистості; розуміння можливостей застосування геометрії в особистому та суспільному житті; здатність об'єктивно сприймати навколишній світ. Стереометрія, як навчальний предмет, має для цього достатньо можливостей. Ідеться про розвиток логічного мислення, формування просторової уяви, вироблення навичок застосування геометрії до розв'язування практичних завдань.

Описані цілі навчання стереометрії в ліцеї на рівні стандарту спрямовані на формування в учнів базових геометричних знань, математичної компетентності, як предметної. Педагогічною технологією, яка дає змогу вирішити завдання засвоєння учнями ліцею геометричних знань, є технологія повного засвоєння знань, автори якої — американські психологи Дж. Керролл, Б. Блум та їх послідовники. Дж. Керролл звернув увагу на ту обставину, що в традиційному навчальному процесі завжди фіксовані умови навчання: однакові для всіх навчальний час, спосіб подання інформації і ін. Єдине, що залишається нефіксованим, це результат навчання. Дж. Керролл запропонував зробити постійним параметром результат навчання, а умови навчання — змінними, підлаштовуватися під досягнення кожним учнем заданого результату. Таксономія Блума містить шість навичок мислення, які структуровані від базового до самого просунутого рівня. Б. Блум та його наукова школа ввели поняття «педагогічна таксономія» — це побудова чіткої системи педагогічних цілей, в яких встановлені відповідні категорії та послідовності рівнів [1]. Вчені визначили три області навчальної діяльності: когнітивну — розумові навички; афективну — область почуттів та емоцій; психомоторну — психофізичні вміння та навички. До цілей когнітивної групи віднесені такі, що передбачають запам'ятовування та відтворення вивченого матеріалу, а також розв'язування проблем, у ході яких необхідно переосмислити наявні знання, будувати їх нові об'єднання, структури, створювати нові знання. Цілі цієї групи, як правило, відображені у навчальних програмах, підручниках та посібниках, у повсякденній навчальній практиці. Афективна, емоційно-ціннісна сфера, за цілі визначає формування емоційно-особистісного ставлення до навколишнього світу. Таке ставлення проявляється через сприймання, інтерес, нахили, здібності, переживання, почуття, а цілі навчання спрямовані на формування відношення до навчання, його осмислення та вияв у діяльності. Цілі навчання психомоторної сфери включають ті чи інші дії моторної маніпулятивної діяльності нервово-м'язової координації, пов'язані із формуванням мовленнєвих навичок, писемного мовлення, фізичних, трудових, діяльнісних якостей. З погляду когнітивної сфери цілепокладання Б. Блум виділив шість таксономічних рівнів засвоєння: знання, розуміння, застосування, аналіз, синтез, оцінка. Показники досягнення згаданих рівнів представлено у таблиці 3.1.1.

Рівні навчальних цілей і когнітивні досягнення учнів

Рівні навчальних цілей та показники їх досягнення	Результати навчання
<p>1. Знання. Ця категорія передбачає: переказування, запам'ятовування, розпізнання та відтворення матеріалу, що вивчається.</p>	Запам'ятовування та відтворення термінів, конкретних фактів, методів і процедур, основних понять, правил, принципів, цілісної теорії
<p>2. Розуміння. Проявами розуміння вивченого є: здатність встановлювати зв'язок одного матеріалу з іншим, перетворювати його із однієї форми представлення до іншої (із вербальної до символічної, графічної і навпаки)</p>	Уміння використовувати абстрактні поняття, застосовувати іншу термінологію, символіку, переказувати своїми словами; Інтерпретація навчального матеріалу (пояснення, короткий виклад)
<p>3. Застосування. Ця категорія передбачає: вміння використовувати вивчений матеріал в ситуаціях, відмінних від тих, в яких вони були отримані; здатність виділення частин цілого, суттєвих деталей, виявлення взаємозв'язку між ними, осмислення принципів організації цілого, отримання можливостей</p>	Застосування правил, методів, уміння розбивати в конкретних умовах і нових навчальний матеріал на складові: поняття, закони, принципи, теорії; уміння порівнювати і узагальнювати, пов'язуючи із цими складовими. Осмислення не лише змісту навчального матеріалу, але й його внутрішньої структури; здатність бачити помилки та огріхи в логіці міркувань
<p>4. Аналіз. Ця категорія передбачає вміння відкривати, винаходити та розрізняти компоненти, складові частини ситуацій чи інформації</p>	Уміння розрізняти факти і наслідки, оцінювати значущість деталей; формулювати концепції або висновки, яких автор матеріалу дотримувався, але явно не висловив
<p>5. Синтез. Ця категорія передбачає вміння компонувати елементи знань у нову структуру (доповідь, опорну схему, план дій і ін.)</p>	Уміння збирати матеріал із різних джерел так, щоб отримати модель чи структуру більш зрозумілу, ніж початковий матеріал. Таким новим продуктом може бути повідомлення, план дій, нова схема
<p>6. Оцінка. Ця категорія передбачає вміння оцінювати значення певного матеріалу (повідомлень, експериментальних даних) для конкретної мети, будувати судження за певними критеріями, як внутрішніми (логічними) так і зовнішніми (відповідно до мети).</p>	Судження та висновки мають засновуватись на чітких критеріях, оцінювати логіку побудови матеріалу, відповідності висновків тим, що вже були висловлені раніше, адекватне оцінювання явищ (на відміну від суб'єктивної думки)

Однак цілі навчання геометрії в ліцеї на рівні стандарту значно ширші за спеціальні (предметні) цілі. Особливо це стосується геометричної освіти тих учнів, інтереси яких знаходяться поза математикою. Тому наступна група цілей навчання геометрії в ліцеї на рівні стандарту пов'язана з реалізацією міжпредметних зв'язків.

Геометрія, як навчальний предмет в ліцеї на рівні стандарту, має забезпечити формування в учнів знань, умінь і особистісних якостей, які розширяють їх кругозір, допоможуть зрозуміти і усвідомити цілісність накопичених людством знань, сприятимуть засвоєнню інших навчальних предметів загальної середньої школи.

У контексті міжпредметних зв'язків можна виділити наступні цілі навчання геометрії в ліцеї на рівні стандарту: методологічна (полягає у формуванні наукових поглядів, сучасних уявлень про світ, його цілісність); освітня (формування системних, глибоких, усвідомлених, гнучких знань); розвивальна (розвиток системного і творчого мислення, самостійності та інтересу до пізнання, подолання інертності мислення, розширення кругозору учнів); виховна (комплексний підхід до виховання школярів, спираючись на зв'язки з іншими предметами); конструктивна (удосконалення змісту навчального матеріалу, методів і форм організації навчання, спільне планування вчителями предметів природничого циклу комплексних форм навчальної та позакласної роботи).

Однією з провідних цілей навчання учнів ліцею геометрії на рівні стандарту є формування стрижневих якостей особистості — ключових компетентностей.

Нагадаємо, що Законі України «Про освіту» (2017 р.) [7] визначено одинадцять ключових компетентностей сучасної людини, які мають формуватися впродовж життя. Сучасна школа має на меті формування ключових компетентностей засобом кожного навчального предмету.

Таким чином, вільне володіння державною мовою формується на уроках геометрії шляхом навчання учнів чітко і зрозуміло формулювати власну думку, ставити запитання, робити висновки; доречно та коректно вживати математичну термінологію, вести критичний та конструктивний діалог; поповнення словникового запасу. Результатом навчання школярів має бути усвідомлення важливості чітких та лаконічних формулювань та повага до державної мови.

Здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами випускниками означає розуміння текстів математичного змісту рідною мовою, правильне та доречно вживати математичної термінології усно і письмово; поповнення словникового

запасу математичними термінами іншомовного походження; вміння шукати інформацію в іншомовних джерелах. Школярі мають усвідомити важливість правильного використання математичних термінів та їх позначення в різних мовах у навчанні та повсякденному житті.

Формувати в учнів ліцею математичну компетентність означає навчати їх оперуванню геометричними об'єктами на площині та в просторі, встановленню кількісних і просторових відношень між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо), будувати і досліджувати математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати розв'язування геометричних задач, робити прогнози в контексті навчальних та практичних задач, доводити правильність тверджень, застосовувати логічні способи мислення під час розв'язування пізнавальних і практичних задач, пов'язаних з реальними об'єктами, використовувати геометричні методи у життєвих ситуаціях. Важливо виховувати у школярів пошанування істини, готовність шукати пояснення та оцінювати правильність аргументів, усвідомлення важливості геометрії як мови науки, техніки та технологій.

Математична компетентність має п'ять структурних компонентів [3]: мотиваційний, когнітивний, діяльнісний, ціннісно-рефлексивний, емоційно-вольовий. Мотиваційний компонент передбачає систему мотивів, цілей, потреб та прагнень до вивчення геометрії, удосконалення знань, умінь та досвіду геометричної діяльності. Когнітивний компонент включає сукупність знань теоретичного і практичного характеру, що відображають сучасну геометричну науку. Діяльнісний компонент включає комплекс геометричних умінь, спроможність розв'язувати типові практичні задачі засобами геометрії. Ціннісно-рефлексивний компонент містить сукупність особисто значущих і ціннісних прагнень, ідеалів, переконань, поглядів, ставлень, розуміння ролі математичної компетентності як однієї з провідних соціальних цінностей, вміння визначати резерви свого розвитку засобами математичних дисциплін, прагнення до самоактуалізації, саморозвитку, постійної роботи над собою; самоаналіз і самооцінку своєї діяльності. Емоційно-вольовий компонент включає здатність розуміти власний емоційний стан у процесі геометричної діяльності; здатність достойно переживати невдачі у процесі розв'язування геометричних задач; прояв вольових зусиль та наполегливості, цілеспрямованість у роботі, почуття власної гідності. [3]

Геометрія як шкільний предмет має достатній потенціал для формування та розвитку нестандартного, творчого стилю мислення, яко-

стей особистості, необхідних сучасній успішній людині. Математична компетентність поєднує в собі п'ять складників [9]. Охарактеризуємо їх з огляду на вивчення геометрії в ліцеї.

Процедурна компетентність – уміння розв'язувати типові геометричні задачі. Зокрема, використовувати на практиці алгоритми розв'язування типових геометричних задач, систематизувати типові задачі, знаходити критерії зведення задач до типових, уміти розпізнавати типову задачу, або зводити певну задачу до типової, використовувати різні інформаційні джерела для пошуку процедур розв'язування типових геометричних задач (підручники, довідники, інтернет-ресурси).

Логічна компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень. Зокрема, володіти і використовувати на практиці понятійний геометричний апарат (означення понять, їх наочна інтерпретація, відношення між поняттями, аксіоми, теореми, обґрунтування, доведення тощо);

Технологічна компетентність – володіння сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями підтримки математичної діяльності. Зокрема, розв'язувати геометричні задачі з використанням програмного забезпечення, досліджувати комп'ютерні моделі тощо.

Дослідницька компетентність – володіння методами досліджень соціально та індивідуально значущих завдань за допомогою геометричних методів. Зокрема, визначити компоненти геометричної моделі проблемної ситуації, взаємозв'язки між ними, їх достатність для запису проблемної ситуації у геометричному вигляді, здійснювати перехід від абстрактного до конкретного і навпаки, прогнозувати результат розв'язання проблеми за умови можливого залучення додаткових даних, інтерпретувати результати розв'язання проблеми у термінах її вихідної предметної області, систематизувати отримані результати, досліджувати межі застосувань отриманих результатів, установлювати зв'язки з попередніми результатами, шукати аналогії в інших розділах математики та інших галузях знань тощо.

Методологічна компетентність – уміння оцінювати доцільність використання геометричних методів для розв'язання індивідуально і суспільно значущих задач. Зокрема, володіти методологією дослідження індивідуально та соціально значущих задач методами геометрії, розуміти переваги та обмеженість геометричних методів, оцінювати їх ефективність, тощо.

У контексті формування в учнів ліцею компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій на уроках геометрії важливо вчи-

ти їх будувати та досліджувати геометричні моделі природних явищ і процесів; робити висновки, інтерпретувати результати розв'язування задач. Необхідно виховувати критичне ставлення до досягнень науково-технічного прогресу, усвідомлення важливості геометрії для опису та пізнання навколишнього світу.

Формувати інформаційно-комунікаційну компетентність засобом геометрії в ліцеї на рівні стандарту означає вчити їх структурувати дані, діяти за алгоритмом та складати алгоритми, визначати достатність даних для розв'язування геометричної задачі, оцінювати достовірність інформації, доводити істинність тверджень. Потрібно формувати критичне осмислення інформації та джерел її отримання, усвідомлення важливості інформаційно-комунікаційних технологій для ефективного розв'язування геометричних задач, уміння володіти методологією використання професійних пакетів динамічної геометрії для дослідження математичних задач, розуміти, переваги та обмеженість пакетів для комп'ютерного моделювання у вивченні геометрії, оцінювати на практиці їх ефективність, аналізувати ефективність розв'язування індивідуально та суспільно значущих задач геометричними методами.

Потрібно навчити школярів організовувати і планувати свою навчальну діяльність, аналізувати, контролювати, коригувати та оцінювати результати навчання. Учні мають усвідомлювати власні освітні потреби та цінності нових знань і вмінь, із зацікавленістю пізнавати світ і розуміти важливість навчання впродовж життя, прагнути вдосконалювати результати людської діяльності.

Формування громадянських та соціальних компетентностей учнів ліцею на уроках геометрії передбачає вироблення навичок висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів; розпізнавати інформаційні маніпуляції; співпрацювати в команді, вносити свою частку в роботу групи для розв'язання проблеми, аргументувати та відстоювати власну позицію; ухвалювати аргументовані рішення на основі аналізу усіх даних та виявлення причинно-наслідкових зв'язків проблемної ситуації, робити споживчий вибір, використовуючи, зокрема, геометричні вміння. Необхідно виховувати в учнів потребу в обґрунтуванні позиції без передчасного переходу до висновків, поміркованість відповідальності за спільну справу.

Важливо навчити учнів ліцею розпізнавати проблеми довкілля, які можна розв'язати засобами геометрії, оцінювати і прогнозувати

вплив людської діяльності на довкілля через побудову та дослідження геометричних моделей природничих процесів і явищ.

Підприємливість та фінансова грамотність формується на уроках геометрії через вироблення в учнів умінь генерувати нові ідеї, аналізувати, шукати оптимальні шляхи і застосовувати різні стратегії до розв'язування задач, а також аргументувати та захищати свою позицію, вести дискусію, будувати та досліджувати геометричні моделі економічних процесів. Необхідно виховувати школярів ініціативними, впевненими у собі, відповідальними за власні рішення.

Інноваційність особистості характеризується вміннями генерувати нові ідеї щодо розв'язання геометричних задач і втілювати їх, позитивно оцінювати і підтримувати конструктивні ідеї інших.

Особлива роль геометрії у формуванні культурної компетентності учнів ліцею. Необхідно вчити їх бачити математику у творах мистецтва, зображати фігури у різні способи, унаочнювати геометричні моделі, здійснювати необхідні розрахунки для встановлення пропорцій, відтворення перспектив, створення об'ємно-просторових композицій. Учні мають усвідомити взаємозв'язок геометрії і культури на прикладах з живопису, архітектури тощо, розуміти важливість внеску відомих математиків у загальноосвітню культуру.

Описані вище компетентності мають формуватися людиною впродовж життя для її успішної життєдіяльності. Метою сучасної школи є сприяння цьому процесу засобом кожного навчального предмету. Як ефективно організувати таке навчання? Розробка методики компетентнісного навчання геометрії в ліцеї на рівні стандарту передбачає створення відповідних засобів впливу на формування внутрішніх якостей школярів — розумових і моральних.

До розумових якостей особистості належать дедуктивне і критичне мислення. Формування в учнів дедуктивного (логічного) мислення передбачає виховання здатності абстрагуватися, узагальнювати, означувати поняття, формулювати судження. А також уміння робити висновки, аналізувати, розрізняти істотні і неістотні ознаки об'єктів, схематизувати процеси. Критичне мислення формується через виховання у школярів саморегуляції, зосередженості, спостережливості та вироблення вмінь точно, зрозуміло і стисло висловлювати думки.

Розвиток творчих здібностей учнів полягає у формуванні вмінь формулювати запитання і здобувати знання для реалізації власних підходів до вирішення проблемних ситуацій, оцінювати вплив зовнішніх і внутрішніх умов на результат.

Важливим є формування якостей особистості, пов'язаних зі світоглядом старшокласників. Для розуміння учнями закономірностей світу та принципів його пізнання необхідно озброїти їх відповідними методами та усвідомленням власних можливостей досліджувати процеси довкілля. У процесі навчання школярі мають переконатися, що математика тісно пов'язана з практикою і забезпечує людство загальними методами вирішення проблем природи і суспільства. Старшокласники мають набути стійкого інтересу до наукового трактування процесів розвитку природи і суспільства, здатності відстоювати свої погляди, знань про історію розвитку науки.

Не менш важливим завданням навчання учнів ліцею геометрії є розвитку просторової уяви, почуття прекрасного. Необхідним також є формування моральних якостей особистості — цілеспрямованості, відповідальності, наполегливості та ініціативності. Потрібно виховувати у старшокласників навичок систематичної і впорядкованої навчальної діяльності.

Описані якості особистості є ідеальною моделлю людини сучасного суспільства. Кожний учень має власні шлях, темпи та міру їх набуття. Досягнуті успіхи у цьому процесі будуть особистісними надбаннями випускників.

Думка відомого американського вченого і винахідника ІХХ — ХХ століття Томаса Едісона про те, що «найважливіше завдання цивілізації — навчити людину мислити», є актуальною і сьогодні. Заглиблюючись у проблему методики навчання завжди доводиться звертатися до фундаментального поняття «мислення». У психології мисленням вважають пізнавальну діяльність, пов'язану з дією. С.Л. Рубінштейн зазначав, що «Мислення тісно пов'язане з дією. Людина пізнає дійсність, впливаючи на неї, розуміє світ, змінюючи його. Мислення не просто супроводжується дією або дію — мисленням; дія — це первинна форма існування мислення. Первинний вид мислення — це мислення в дії або дією». На думку психолога, джерелом мислення є проблемна ситуація, тобто конфлікт між тим, що дано і тим, що потрібно досягти [10].

Однією з провідних цілей навчання геометрії в ліцеї на рівні стандарту є формування в учнів прийомів мислення, оскільки саме через цей компонент відбувається розвиток інтелекту і формування ключових компетентностей цілісної особистості. У педагогічній психології виділяється три види мислення дитини, поступовий перехід між якими визначає віковий поступ. На першому етапі розвитку мислення пов'язане з реальністю і практичними діями (наочно-дійове

мислення). Ускладнення проблемних ситуацій дає учням розуміння, що оперувати реальними об'єктами не завжди можливо і навіть безпечно. Виникає потреба у створенні мислительного образу проблемної ситуації на основі перцептивних дій. Таким чином формується наочно-образне мислення. З часом дитина усвідомлює наявність внутрішніх, прихованих зв'язків між певними явищами, і на основі наочно-образного мислення у неї формується і розвивається логічне мислення у формі абстрактних понять і суджень.

Навчаючи учнів ліцею стереометрії на рівні стандарту слід пам'ятати, що часткова сформованість логічного мислення старшокласників не заперечує можливість функціонування і розвитку їхнього наочно-дійового і наочно-образного мислення. До того ж, вирішення проблемних ситуацій (теоретичних і практичних) вимагає планування дій і прогнозування результату в мислительних образах, а вже потім втілювання їх у реальність. Тобто, людина в процесі мислення оперує моделлю реальної ситуації у деякій формі — аудіо, візуальній чи символійній. Психологічні дослідження свідчать про ефективність оперування зоровими образами для продуктивного мислення. Тому дидактичному принципу наочності у навчанні геометрії відводиться провідна роль.

Однією з цілей навчання математики є формування в учнів абстрактного мислення, без якого неможливе засвоєння математичних знань. На думку Ж. Піаже вік людини від 12 до 16 років є періодом зародження і розвитку її абстрактного мислення. Вважається, що на кінець підліткового віку учні набувають здатності відділяти логічні операції від об'єктів, над якими вони здійснюються. Основою розвитку абстрактного мислення є здатність мислити образами. А. Пуанкаре зазначав, що образне (геометричне) мислення є найхарактернішою ознакою мислення людини взагалі [8]. Тому методика навчання учнів ліцею геометрії на рівні стандарту має базуватися на залученні образного мислення до навчальної діяльності школярів. А саме, необхідно забезпечити умови для формування, збереження і відтворення в пам'яті учнів образів за допомогою наочності, створення нових образів завдяки цілеспрямованому перетворенню в уяві школярів наявних образів. Уміння вільно оперувати образами — важлива якість особистості для успішного здійснення різноманітних видів діяльності.

Формування в учнів ліцею ключових компетентностей неможливе без виховання в них навичок так званого дивергентного мислення, усвідомлення можливості існування кількох рівноправних і правильних вирішень однієї проблемної ситуації (на відміну від конвергент-

ного, орієнтованого на однозначність рішень і відсутність проблем взагалі). Для вироблення методики компетентнісного навчання геометрії в ліцеї на рівні стандарту необхідно виділяти ті види діяльності учнів, які забезпечують дивергентне мислення (аналіз через синтез, виконання допоміжних побудов, розв'язування задач різними способами тощо).

Зазвичай, мислительна діяльність не обмежується аналізом і синтезом. Важливими є абстрагування, узагальнення, конкретизація, аналогія тощо. Усвідомлення навчального змісту передбачає всі мислительні процеси: порівняння, аналіз і синтез, абстракцію, узагальнення і конкретизацію, перехід від конкретного до узагальненого, від абстрактного до наочного. Всі прийоми мислення взаємопов'язані і в їх основі є синтез і аналіз. [10]. Наприклад, для навчання геометрії в школі найчастіше використовується метод аналогії. Він полягає у порівнянні об'єктів та виявленні їх спільних властивостей (аналіз), формулюванні властивості об'єкта відповідного класу (синтез). Тому засоби навчання геометрії в ліцеї на рівні стандарту мають забезпечувати діяльність учнів на основі прийомів аналізу і синтезу. Важливо спонукати школярів відповідати на такі запитання «Нам потрібно виконати певну дію (довести твердження, обчислити значення величини тощо), що потрібно для цього (знати, дізнатися, довести)?» При цьому корисними є групова робота і колективні бесіди.

Організація навчальної діяльності учнів ліцею на уроках геометрії на рівні стандарту має забезпечувати їх активність і самостійність в роботі. Відомо, що людина буде активною у своїй діяльності, якщо вона (діяльність) буде посилююю за умови активізації пізнавальних сил і досвіду. Тобто знання і дії, які має засвоїти учень, мають відповідати зоні його найближчого розвитку [2]. Практика навчання свідчить про те, що учням старшого шкільного віку необхідно відчувати потребу мобілізації своїх пізнавальних сил і досвіду для активного навчання і подолання труднощів і перешкод.

Пізнавальна активність є підготовкою до ініціативності та самостійності учнів. Прагнення до самостійності належить до фундаментальних мотивів що спонукає людину до відкриття, випробування і вдосконалення себе.

Самостійна робота є однією з форм навчальної діяльності учнів, методом навчання. Вона характеризується змістом, способами і мірою керівництва діями учнів з боку вчителя, самостійністю, ініціативністю учнів, елементами творчості. Самостійна діяльність учнів поділяється на репродуктивну, частково-пошукову і творчу. Вчителю

необхідно володіти такими видами діяльності і вміти керувати ними. Важливо організовувати самостійну діяльність учнів ліцею з геометрії на рівні стандарту, не віддаючи перевагу лише репродуктивним формам роботи, запроваджувати її творчий характер.

Ознакою творчої особистості є її здатність до перетворення предметів, явищ і процесів дійсності (або їх образів). Важливими є засоби перетворення. Творчою є діяльність, коли, навіть існуючі в дійсності, предмети (образи), створюються за допомогою нових оригінальних засобів, операцій, прийомів. Творчість характеризується оригінальністю на відміну від копіювання, дій за шаблонами та алгоритмами. Однак у навчанні діяльність за правилом, шаблоном і алгоритмом є неминучою і може мати творчий характер.

У навчанні учнів ліцею геометрії на рівні стандарту творча діяльність забезпечується, зокрема, пошуком методів розв'язування задач (проблем), нестандартності їх застосування. Організація такої діяльності відбувається в три етапи. На першому етапі відбувається усвідомлення, постановка проблеми. Чітке формулювання задачі є важливим початком творчого процесу, параметром залучення до самостійної діяльності. Другий етап — розв'язання проблеми. Можливість вирішення проблеми обумовлюється наявністю необхідних для цього знань. Виявлення учнем нестачі знань для розв'язання поставленої задачі є потужним мотивом їх самостійного здобуття. Роль вчителя на цьому етапі — своєчасний і професійний супровід пошукових і дослідницьких дій старшокласників. Інколи проблема виникає не тільки у відсутності знань, а й в уміннях обирати і застосовувати наявну інформацію для вирішення проблемної ситуації. У психології цей процес називається актуалізацією знань. Він забезпечується основними прийомами математичної діяльності — аналізом і синтезом даних і умови задачі та наявних і необхідних знань для її вирішення. Третій етап творчої діяльності полягає у оформленні розв'язання проблемної ситуації. У науці — це доведення і практична перевірка гіпотези, у техніці — конструктивне і матеріальне втілення. У навчанні геометрії — розв'язання задачі та інтерпретація результату.

Важливим механізмом творчості є інтуїція. У сучасній психології виділяється кілька етапів інтуїтивного механізму мислення. Це, насамперед, накопичення в пам'яті образів і абстракцій. По-друге, не-свідома комбінація і перетворення накопичених абстракцій, образів і правил задля вирішення проблемної ситуації. Потім чітке усвідомлення задачі. А далі — несподіване її вирішення, що з'являється несподівано, навіть під час розв'язування іншої задачі. Отже, інтуїція

може працювати, якщо під час вирішення проблемної ситуації чуттєві акценти зміщені від інтелектуальних до емоційних. Керувати такими процесами досить складно. При вивченні геометрії в ліцеї на рівні стандарту для розвитку інтуїції учнів буде корисно, зокрема: практикувати розв'язування задач кількома способами (на противагу намагання виконати більшу кількість однотипних вправ); пропонувати учням задачі з недостатніми даними і поступовим їх доповненням, з надлишковими даними, ігноруючи їх; обговорювати шляхи вирішення проблемних ситуації, актуалізуючи потрібні для цього знання, виходячи за межі відомого; спонукати учнів сміливо висловлювати свої міркування (навіть парадоксальні) щодо шляхів розв'язування задач.

Уява — складний психічний процес, що полягає у створенні нових уявлень на основі наявного досвіду. Іншими словами — це процес формування нових уявлень з елементів наявних образів, аналізуючи їх властивості і зв'язки. Уява сприяє мисленню. Уява та інтуїція функціонують під час розв'язання проблемної ситуації за умови її невизначеності і сприяють самостійності і креативності мислення. Уява потрібна людині для орієнтування в навколишньому світі і в розвиненій формі важлива для багатьох видів діяльності. Слід розрізнати поняття «уявлення» і «уява». У психології уявлення трактується як образ раніше сприйнятого предмета або явища (уявлення пам'яті), а також образ, створений продуктивною уявою; це вища форма чуття, відображення у вигляді наочно-образного знання. Для формування в учнів просторових уявлень і розвитку уяви важливо починати за провадження понять, аксіом, теорем і багатьох задач стереометрії з розгляду моделі та наочного рисунка. Модель і рисунок дають змогу учням виокремити істотні властивості просторових фігур і абстрагуватися від неістотних, виконати узагальнення, помітити потрібні відношення і зв'язки між елементами фігур, здійснити аналіз через синтез під час доведення теорем і розв'язування задач, узагальнити виконане доведення, поширивши твердження на всі фігури певного класу. Стереометричний рисунок, який є найдоступнішим і найпоширенішим засобом унаочнення геометричного матеріалу, подає просторові образи у дещо спотвореному вигляді, що утруднює уяву. В арсеналі сучасних засобів навчання є велика кількість цифрових динамічних моделей стереометричних фігур, а також можливостей створювати їх самостійно. Застосування електронної наочності під час вивчення геометрії учнями ліцею на рівні стандарту значно оптимізує досягнення мети навчання. Сприйняття динамічних та інтерактивних моделей зумовлено психічним розвитком підлітків, їх здатністю до

певного рівня абстракцій і досвідом перебування у цифровому середовищі (наприклад, комп'ютерні ігри).

Організація навчальної діяльності учнів ліцею з геометрії з метою формування ключових і предметних компетентностей передбачає: відмову від репродуктивного повторення геометричних фактів; пріоритет навчальних завдань, які активізують розумову діяльність школярів (практичних робіт, задач практичного змісту); активне використання прийомів вибору, порівняння, класифікації, перетворення, конструювання; встановлення зв'язків між геометричними поняттями на основі власного досвіду учнів; використання ІКТ. Особливостями системи вправ з геометрії для формування предметних і ключових компетентностей учнів ліцею є: аналіз властивостей просторових фігур з різних точок зору засобом системи вправ; залучення вправ на встановлення відповідності між предметною, вербальною, графічною і символічною моделями; застосування контрприкладів; розв'язування геометричних задач різними способами, вправи на складання задач.

Персоніфікація навчальної діяльності на уроках геометрії в ліцеї реалізується, зокрема, через систему вправ, що будується на засадах ієрархії цілей пізнавальної діяльності. А саме: знання: учень запам'ятовує і відтворює конкретну навчальну одиницю; розуміння: учень перетворює навчальний матеріал з однієї форми в іншу; застосування: учень демонструє застосування вивченого матеріалу в конкретних умовах і в новій ситуації аналіз: учень виокремлює частини цілого, виявляє взаємозв'язки між ними, усвідомлює принципи побудови; синтез: учень проявляє вміння комбінувати відомі йому елементи для отримання нового цілого; оцінка: учень оцінює значення навчального матеріалу для даної конкретної мети [7].

Побудова системи вправ з геометрії в ліцеї на рівні стандарту на основі таксономії Б. Блума передбачає: конкретизацію загальних пізнавальних цілей у вигляді когнітивних досягнень учнів і за окремими складовими змісту предмета; інтерпретацію когнітивних результатів навчання учнів у вигляді видів запитань і завдань (табл. 3.1.2); побудова рівневої системи вправ з геометрії до кожної складової змісту предмета (визначеними програмою для учнів ліцею на рівні стандарту).

Таблиця 3.1.2.

**Ключові слова у формулюванні завдань для
досягнення навчальних цілей за рівнями**

Рівні навчальних цілей	Ключові слова до завдань
Знання	Відтворити, перелічити, виокремити, класифікувати, назвати, знайти відповідність, розташувати, відрізнити факти від їх інтерпретації, перелічити, переказати, впізнати, визначити, запам'ятати, навести приклад, описати, скласти перелік, дати означення, повторити і ін.
Розуміння	Узагальнити, пояснити, обрати, розташувати, інтерпретувати, порівняти, перетворити, встановити, диференціювати, продемонструвати, надати інше визначення, перекласти, зробити повідомлення, дати оцінку, навести приклади, обґрунтувати, визначити головну ідею, розпізнати, описати, анотувати і ін.
Застосування	Відшукати, розв'язати, обчислити, передбачити, запропонувати, розрахувати, поставити запитання, продемонструвати, адаптувати, використати, показати, застосувати, класифікувати, проілюструвати, застосувати на практиці, проаналізувати, дослідити, розрізнити, зобразити схематично, побудувати діаграму, графік, узяти участь дискусії, виявити і ін.
Аналіз	Порівняти, знайти ознаки, знайти помилку, встановити послідовність, згрупувати, запропонувати, протиставити, порівняти, визначити категорії і ін.
Синтез	Висунути гіпотезу, підтвердити думку, згрупувати, перевірити, створити, удосконалити, спрогнозувати, розробити, сформулювати, представити, знайти інші способи і ін.
Оцінка	Оцінити, обрати, встановити, обстояти думку, порівняти, обґрунтувати, зробити висновок, аргументувати, рекомендувати, критикувати, передбачити, об'єднати, перевірити і ін.

Система вправ з геометрії для учнів ліцею на рівні стандарту має містити переважно завдання для реалізації перших трьох цілей навчання — знання, розуміння, застосування. Однак не варто нехтувати і наступні три цілі. Для формування ключових компетентностей в учнів корисними будуть доступні і зрозумілі завдання з метою аналізу навчального матеріалу, його синтезу і оцінки навчальної діяльності.

Для реалізації принципу повноти системи вправ з геометрії у ліцеї на рівні стандарту необхідно добирати завдання для реалізації всіх цілей пізнавальної діяльності, враховуючи при цьому потреби і навчальні можливості учнів. Принцип наступності і послідовності у навчанні вимагає послідовного проходження перших трьох рівнів: «знання», «розуміння», «застосування», які є базовими. При виконанні цих рівнів учні працюють в парах або групах, можуть користуватися конспектами, підручником, довідковою літературою. Корисними будуть завдання у тестовій формі, коли учень розпізнає правильну відповідь, а також вправи за готовими малюнками. Рівні «аналізу» та «синтезу» – рівні розвитку мислення з використанням набутих знань та умінь. Ці рівні передбачають використання знань й умінь у знайомих або нових ситуаціях. Новизна ситуації визначається ситуативно. Якщо вчитель попередньо пояснив процес виконання завдання, то у процесі розв'язування учні будуть демонструвати лише знання та розуміння вивченого матеріалу. У випадку, коли в умові завдання присутні нові елементи або ситуації, які вчитель раніше не розглядав, то можна вважати, що при розв'язуванні такого завдання учні використовують знання та навички у нових ситуаціях. Корисними будуть вправи на складання геометричних задач, розв'язування задач з недостатніми та надлишковими даними.

Завдання для рівня «оцінювання» нетрадиційні, однак не завжди вимагають від учнів глибоких знань з предмета, а лише вміння адаптувати наявні знання до вирішення проблеми. Одним із шляхів формування та розвитку рівня «оцінювання» учнів є розв'язування практичних завдань з геометрії. Такими завданнями є задачі практичного змісту, а також практичні роботи (зокрема, щодо виготовлення моделей просторових фігур).

Процес розв'язування завдання відповідного рівня передбачає залучення навичок мислення усіх попередніх рівнів, тобто при розв'язуванні вправи, яка передбачає аналіз матеріалу, учень обов'язково залучає знання, демонструє розуміння матеріалу та його використання на практиці. Для вчителя важливим є орієнтація на те, які з його учнів здатні до застосування, аналізу, синтезу матеріалу та оцінювання результатів пізнавальної діяльності, а які ще знаходяться на нижчих рівнях. Система вправ з геометрії у ліцеї на рівні стандарту має містити надлишкову кількість завдань для рівнів «знання», «розуміння», «застосування» для надання можливості всім учням проходження цих рівнів у індивідуальному темпі. Завдання для рівнів «застосування», «аналіз», «синтез» мають бути доступними, цікавими і корисними для учнів, слугувати мотивації вивчення геометрії в ліцеї на рівні стандарту, забезпечувати можливість навчального предмету «стереометрія» для формування ключових компетентностей школярів.

3.2. КОРОТКА ХАРАКТЕРИСТИКА ЗМІСТОВИХ ЛІНІЙ КУРСУ СТЕРЕОМЕТРІЇ В ЛІЦЕЯХ НА РІВНІ СТАНДАРТУ

Вашуленко О.П.

Зміст шкільного курсу стереометрії згруповано навколо п'яти змістових ліній: просторові геометричні фігури та їхні властивості; геометричні побудови; геометричні перетворення; координати і вектори в просторі; геометричні величини. Тобто, в курсі стереометрії надалі розвиваються основні змістові лінії планіметрії, тому йому властивий систематизувальний і узагальнювальний виклад, широке використання аналогій, спрямованість на закріплення й розвиток умінь і навичок, набутих в основній школі. У курсі стереометрії на рівні стандарту не всі основні лінії курсу планіметрії розвиваються однаково. Чітко виділяються геометричні фігури та їх властивості, геометричні величини та їх вимірювання і обчислення, координати і вектори. Геометричні побудови за допомогою циркуля та лінійки майже не вивчаються. Однак, необхідно приділити належну увагу уявним побудовам, зображенню просторових фігур на площині з використанням властивостей паралельної проєкції. Лінія геометричних перетворень відображена опосередковано. Зокрема: рух — під час вивчення паралельних площин, симетрія — властивостей просторових геометричних фігур тощо.

Навчальною програмою з геометрії для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту) [6] передбачено вивчення таких розділів: паралельність прямих і площин у просторі; перпендикулярність прямих і площин у просторі; координати і вектори; многогранники, тіла обертання; об'єми та площі поверхонь геометричних.

Вивчення стереометрії в ліцеї на рівні стандарту розпочинається з розгляду теми «Паралельність прямих і площин у просторі». У ній закладається фундамент для вивчення стереометрії — геометрії простору. Акцент на реалізації прикладної спрямованості теми. Головним завданням є формування чітких уявлень про взаємовідношення геометричних об'єктів (прямих, площин) та відношень між ними і об'єктами навколишнього світу. Належної уваги слід надати навчанню учнів зображенню просторових фігур на площині і застосуванню цих зображень для розв'язування задач.

У ході вивчення матеріалу розділу «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» закладається фундамент для вимірювань у стереометрії. Слід наділити значної уваги поняттям відстані, кута як міри взаємного розташування прямих і площин та двогранного кута як геометричної фігури. Введення відношення перпендикулярності прямих і площин,

перпендикулярності площин, а також поняття відстані і кута у просторі забезпечують можливості моделювання. Вивчення матеріалу розділу «Координати і вектори» ґрунтується на розширенні понять координат і векторів на площині і забезпечує нові підходи до вивчення прямих і площин у просторі. А саме, векторного і координатного методів у просторі.

У розділах «Многогранники», «Тіла обертання» передбачається вивчення основних геометричних тіл та їхні властивостей. Важливим є використання аналогій між властивостями планіметричних і стереометричних фігур, а також між групами стереометричних фігур. Такий підхід вимагає використання конструктивних означень, що дозволяють встановити аналогії між призмами і циліндрами, пірамідами та конусами тощо.

При вивченні об'ємів та площ поверхонь геометричних тіл передбачається використання різних методів їх обчислення. Корисними будуть встановлення аналогій між способами вимірювання та обчислення об'ємів та площ, розбиття просторових фігур на частини для обчислення об'ємів та виконання розгортки просторової фігури для обчислення її бічної поверхні тощо.

Слід пам'ятати, що метою навчання геометрії в ліцеї на рівні стандарту є формування ключових і предметних компетентностей учнів. Зміст навчального матеріалу є засобом досягнення цієї мети. Важливим є усвідомлення властивостей стереометричних об'єктів, їх аналогії з планіметричними поняттями. Методика стереометрії в ліцеї на рівні стандарту передбачає посилення прикладної спрямованості навчання, врахування освітніх можливостей і потреб учнів відповідного віку. Доцільно укрупнювати навчальний матеріал, акцентувати увагу на аналогічних, схожих поняттях, взаємно обернених твердженнях, операціях, що сприятиме цілісності знань. Корисно доповнювати систему вправ, вправами з неповною, надлишковою, ймовірнісною та суперечливою інформацією, а також з неформульованою умовою або вимогою, вправами на складання задач.

3.3. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ

Вашуленко О.П.

Зміст та вимоги до результатів навчання з теми «Паралельність прямих і площин у просторі» подано у навчальній програмі з геометрії для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту) [6]. До змісту належать: основні поняття, аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них; взаємне розміщення прямих у просторі;

паралельне проектування і його властивості; зображення фігур у стереометрії; паралельність прямої та площини; паралельність площин.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів описано як уміння: називати основні поняття стереометрії; розрізняти означувані та не означувані поняття, аксіоми та теореми; формулювати аксіоми стереометрії та наслідки з них; застосовувати аксіоми стереометрії та наслідки з них до розв'язання нескладних задач; класифікувати за певними ознаками взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі за кількістю їх спільних точок; встановлювати паралельність прямих, прямої та площини, двох площин; з'ясувати, чи є дві прямі мимобіжними; зображати фігури у просторі; застосовувати відношення паралельності між прямими і площинами у просторі до опису відношень між об'єктами навколишнього світу.

На перших уроках стереометрії потрібно акцентувати увагу учнів на тому, що спільного і відмінного у планіметрії і стереометрії, порівняти їх об'єкти, навести аналогії. Зазначити, що планіметричні фігури є елементами стереометричних фігур. Слід нагадати учням, що в геометрії мають справу з геометричними означеннями і твердженнями. Поняття здебільшого означають, а твердження доводять. Але не для кожного геометричного поняття можна сформулювати коректне означення, оскільки для цього треба підвести його під уже відоме поняття. Тому кілька перших стереометричних понять приймають без означення. Для планіметрії неозначуваними поняттями є точка, пряма і ін. Для стереометрії досить важливим є поняття площина, його також вважають неозначуваним. Приклади площин потрібно взяти з довкілля: стеля, підлога або стіна кімнати, поверхня стола чи класної дошки, якщо уявити їх ідеально гладкими, є частинами площини. А всю площину в геометрії уявляють нескінченно, необмеженою. Бажано продемонструвати учням, як у стереометрії зображують площини (на дошці крейдою або на готових рисунках, зокрема цифрових) та як їх позначають літерами (мал. 3.3.1).



Мал. 3.3.1. Зображення площини у стереометрії

Необхідно продемонструвати і запропонувати учням зобразити взаємне розміщення площини і прямої (перетинаються, не перетинаються, пряма належить площині). Слід зауважити учням, що на малюнках у стереометрії видимі лінії зображують суцільними, а невидимі — штриховими.

Потрібно запропонувати учням пригадати аксіоми планіметрії, нагадати, що аксіома — це неозначуване твердження, повідомити про наявність аксіом і у стереометрії. Далі коротко згадати аксіоми планіметрії і повідомити, що для стереометрії потрібні всі ці аксіоми і ще три аксіоми стереометрії:

C_1 . Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.

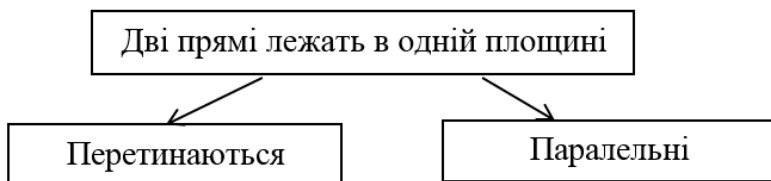
C_2 . Якщо дві точки прямої належать площині, то всі точки прямої належать цій площині.

C_3 . Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

Слід зауважити, що формулювання деяких аксіом планіметрії в стереометрії потребують уточнень. Зокрема аксіома з планіметрії «Через будь-які дві точки площини в цій площині можна провести пряму і до того ж тільки одну» в стереометрії звучить як «Через будь-які дві точки простору в цьому просторі можна провести пряму і до того ж тільки одну». Системи аксіом у підручниках з геометрії можуть відрізнятись. Старшокласники повинні розуміти, що вибір системи аксіом — справа домовленості. Те твердження, яке в одному курсі вважається аксіомою, в іншому може бути теоремою. Теореми курсу є наслідками аксіом.

Для вивчення теми «Паралельність прямих і площин у просторі» доцільно виділити в змісті навчального матеріалу чотири блоки: паралельність прямих у просторі, мимобіжні прямі; паралельність прямої та площини; паралельність площин у просторі; паралельне проектування як спосіб зображення просторових фігур на площині.

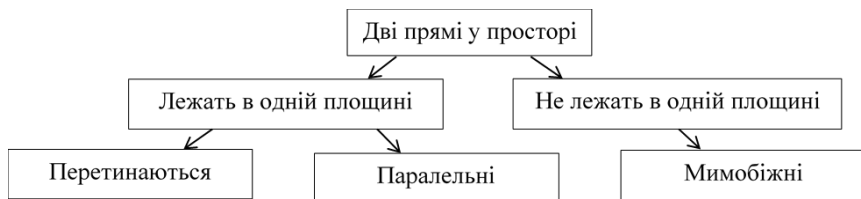
Вивчення першого блоку матеріалу краще почати з активізації поняття паралельності прямих у планіметрії за схемою (мал. 3.3.2)



Мал. 3.3.2. Взаємне розміщення двох прямих на площині

Потрібно звернути увагу учнів на те, що на площині дві прямі називають такими, що перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку. Таке саме означення прямих, що перетинаються, і в стереометрії. Відомо також, якщо прямі на площині не перетинаються, то вони паралельні. Чи можна це означення перенести у стереометрію? На моделі

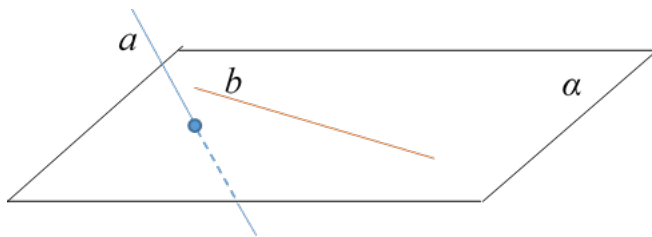
(зображенні) куба слід продемонструвати учням, що у стереометрії для двох прямих, які не мають спільних точок, можливі два випадки взаємного розміщення: прямі лежать в одній площині та прямі не лежать в одній площині. Для кожного із цих випадків сформулювати означення і навести приклади з довідки. Потрібно привернути увагу учнів до мимобіжних прямих на прикладі прямих, що містять ребра куба. Отже, існують три можливих випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі: перетинаються, паралельні, мимобіжні. Для візуалізації цієї класифікації корисною буде відповідна схема (мал. 3.3.3)



Мал. 3.3.3. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Необхідно звернути увагу учнів на те, що у просторі дві прямі, які паралельні чи перетинаються — лежать в одній площині. Але існують дві прямі простору, що не лежать в одній площині. Такі прямі є мимобіжними. Корисно буде запропонувати учням пояснити взаємне розташування двох прямих, що не є мимобіжними.

Слід зазначити, що уявлення про взаємне розміщення прямих у просторі (як і площин чи прямих і площин) викликає труднощі в учнів ліцею. Окрім можливих способів унаочнення цих геометричних фактів важливо зафіксувати такі твердження, як теорему про існування і єдиність площини, що містить дві паралельні прямі, а також ознаку мимобіжних прямих. Корисними будуть вправи на зображення двох мимобіжних прямих за ознакою (мал. 3.3.4) і відшукування мимобіжних відрізків на зображеннях багатогранників.



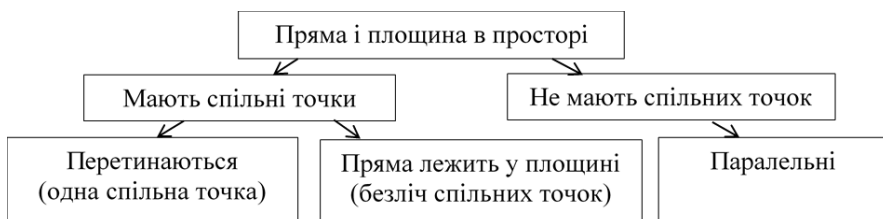
Мал. 3.3.4. Зображення двох мимобіжних прямих

Важливо, щоб учні пояснювали взаємне розміщення прямих у просторі, наводили приклади з довідки, самостійно формулювали відпо-

відні означення, встановлювали аналогії між розміщенням двох прямих на площині і у просторі. Корисними будуть вправи: «Чи правильні твердження: а) дві прямі, які не є паралельними, мають спільну точку; б) дві прямі, що не є мимобіжними, лежать в одній площині; в) дві прямі є мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не є паралельні?».

Для того, щоб учні усвідомили існування в просторі безлічі прямих, паралельних до даної прямої, а також властивість транзитивності паралельних прямих, корисними будуть вправи: «Яким може бути взаємне розміщення прямих v і c , якщо: а) прямі a і v перетинаються, а прямі a і c паралельні; б) прямі a і v паралельні, а прямі a і c мимобіжні?», «Скільки площин можуть задавати три попарно паралельні прямі? Виконайте рисунок».

Матеріал з теми «Паралельність прямої і площини» слід починати вивчати з бесіди про можливу кількість спільних точок прямої і площини у просторі. Звертають увагу учнів на те, що пряма і площина не можуть мати тільки дві, три, чотири і т. д. спільних точок, оскільки тоді пряма буде лежати в цій площині. Чи може пряма і площина мати тільки одну спільну точку? З досвіду — так. Тоді потрібно зобразити пряму, що має з площиною одну спільну точку і запропонувати учням обґрунтувати цей факт. Залишається з'ясувати, чи може пряма зовсім не мати спільних точок з даною площиною. Зі спостережень і досвіду — може. Всі попередні міркування учнями підкріплюються з довідки і будується схема можливих випадків взаємного розміщення прямої і площини в просторі (мал. 3.3.5).



Мал. 3.3.5. Взаємне розміщення прямої і площини в просторі (за наявністю спільних точок)

Корисно запропонувати учням побудувати схему взаємного розміщення прямої і площини в просторі за критерієм належності прямої до площини (мал. 3.3.6). Це сприятиме розвитку логічного мислення школярів і допоможе їм у обґрунтуванні своїх міркувань.



Мал. 3.3.6. Взаємне розміщення прямої і площини в просторі (за належністю прямої до площини)

Користуючись схемами, учні можуть сформулювати означення паралельності прямої і площини.

Для формулювання ознаки паралельності прямої і площини з учнями проводиться бесіда. «Вам відома ознака паралельності прямих у просторі. Чи не можна за паралельністю прямої і площини встановити паралельність двох прямих? Так, одна з таких прямих — дана пряма, а інша має належати даній площині». Таким чином формулюється ознака паралельності прямої і площини і доводиться колективно з учнями методом від супротивного із застосуванням наведених вище схем (мал. 3.3.5, 3.3.6).

За такою ж методикою розглядають твердження, обернене до ознаки паралельності прямої і площини, а також наслідок з нього. Доцільно буде розв'язати з учнями кілька опорних задач на взаємне розміщення прямої і площини. А саме: «Довести, що коли одна з двох паралельних прямих паралельна деякій площині, то друга пряма або паралельна цій площині, або лежить у цій площині», «Довести, що коли площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій». Також слід закріпити вивчений матеріал вправами на зображення: «Дано площину α і точку M , що не належить α . Через точку M провести пряму b , паралельну до площини α »; «Дано пряму a і точку M , що не лежить на прямій a . Через точку M провести площину, паралельну до прямої a ».

Вивчення паралельності площин у просторі починається з бесіди про можливу кількість спільних точок двох площин, спираючись на відому учням аксіому «Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку». Отже, дві різні площини не можуть мати тільки одну спільну точку, бо за згаданою аксіомою вони матимуть спільну пряму, що проходить через цю точку. Тоді ці площини перетинаються по прямій. Обидва випадки взаємного розміщення двох прямих потрібно продемонструвати наочно, бажано на цифрових динамічних моделях. У бесіді з учнями слід акцентувати

їхню увагу на безмежності площини. Слід запитати школярів: «Чи можуть дві різні площини мати лише три спільні точки?». Якщо точки не лежать на одній прямій, то площини співпадають, якщо точки лежать на одній прямій — то площини перетинаються по прямій. З'ясовується, що дві різні площини не можуть мати скінченної кількості спільних точок. Вони або перетинаються, або співпадають. В обох випадках кількість спільних точок нескінченна. За допомогою наочних демонстрацій і прикладів з доквілля висувається гіпотеза про три випадки взаємного розміщення двох площин: перетинаються, співпадають і паралельні. (мал. 3.3.7).



Мал. 3.3.7. Взаємне розміщення площин у просторі

Учням пропонується сформулювати різні означення паралельних площин за поданою схемою (мал. 3.3.7).

Важливо запропонувати учням спосіб побудови площин, що перетинаються. На даній площині α проводять довільну пряму a , а поза площиною α позначають довільну точку M . Площина β , яка визначається прямою a і точкою M , перетинає площину α по прямій a . Цей геометричний факт доводиться методом від супротивного у формі групової роботи.

Ознаку паралельності двох площин варто сформулювати разом з учнями шляхом таких міркувань. Для визначення паралельності двох площин не завжди зручно користуватись означенням, оскільки площина безмежна. Про паралельність площин свідчить паралельність прямих, пов'язаних з цими площинами. Відомо, що площина визначається парою прямих, що перетинаються або паралельні. Можемо висунути дві гіпотези: «якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини, відповідно паралельні до двох прямих, що перетинаються, другої площини, то такі площини паралельні» і «якщо дві паралельні прямі однієї площини відповідно паралельні до двох паралельних прямих другої площини, то такі площини паралельні». Другу гіпотезу можна заперечити контрприкладом: у площинах, що перетинаються, накреслити по одній прямій, паралельній до прямої перетину площин. Таким чином формулюємо ознаку паралельності двох площин: «Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні відповідно двом прямим другої площини, то ці площини паралельні».

Після вивчення паралельності прямих і площин у просторі є можливість детальніше зупинитися на правилах зображення просторових фігур на площині. Учням треба пояснити основні правила паралельного проєктування: паралельні відрізки зображуються паралельними відрізками, відношення паралельних відрізків зберігається. Зрозуміло, що йдеться про відрізки, напрями яких не збігаються з напрямом проєктування. Бажано показати на конкретних прикладах, як відповідно до цих правил зображати по-різному розміщені в просторі квадрат, прямокутник, рівносторонній трикутник, трапецію, коло. Це буде підготовкою до зображення многогранників на площині. Слід приділити увагу зручності таких зображень та позначення невидимих ліній пунктиром.

Паралельність прямих і площин у просторі є ефективним геометричним матеріалом для формування в учнів просторової уяви і логічного мислення. Ця тема є основою для вивчення стереометричного матеріалу. Під час навчання слід приділити більшій уваги усним міркуванням учнів щодо логічних доведень фактів паралельності прямих і площин, а також виконанню відповідних зображень.

Система вправ, як засіб вивчення даної теми, має містити достатню кількість завдань на розпізнавання і зображення паралельних прямих і площин, зокрема у многогранниках, на обґрунтування паралельності.

З метою реалізації технології повного засвоєння знань, система вправ має містити завдання для досягнення основних категорій навчальних цілей. Наприклад, система вправ з теми «Паралельність площин» має містити такого типу завдання:

1. (Знання) Які площини називають паралельними?
2. (Розуміння) Чи правильним є твердження: «якщо дві площини паралельні, то будь-яка пряма однієї площини паралельна будь-якій прямій другої площини»? [4]
3. (Застосування) Паралелограми $ABCD$ і $AEFD$ (мал. 3.3.8) не лежать в одній площині. Довести, що площини ABE і DCF паралельні. [4]
4. (Аналіз) Чи можна стверджувати, що площина α паралельна до площини трапеції, якщо площина α паралельна до основ трапеції?



Мал. 3. 3. 8

-
-
5. (Синтез) Площини α і β паралельні. У площині α вибрано точки C і D , а в площині β — точки $C1$ і $D1$ такі, що прямі $CC1$ і $DD1$ паралельні. Обчисліть довжини відрізків $D1C1$ і $DD1$, якщо $CD = 12$ см, $CC1 = 4$ см. [4]
 6. (Оцінка) Чи правильним є твердження: якщо прямі перетину двох площин третьою площиною паралельні, то дані площини паралельні?

3.4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ

Вашуленко О.П.

Зміст та вимоги до результатів навчання з теми «Перпендикулярність прямих і площин у просторі» подано у навчальній програмі з геометрії для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту) [6]. До змісту належать: перпендикулярність прямих; перпендикулярність прямої і площини; теорема про три перпендикуляри; перпендикулярність площин; двогранний кут; вимірювання відстаней у просторі: від точки до площини, від прямої до площини, між площинами; вимірювання кутів у просторі: між прямими, між прямою і площиною, між площинами.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів описано як уміння: встановлювати та обґрунтовувати перпендикулярність прямих, прямої та площини, двох площин; формулювати означення кута між прямими, прямою та площиною, площинами, теорему про три перпендикуляри; застосовувати відношення між прямими і площинами у просторі, відстані і кути у просторі до опису об'єктів навколишнього світу; розв'язувати задачі на знаходження відстаней та кутів в просторі, зокрема практичного місту.

Для дотримання принципу наступності у навчанні доцільно на початку вивчення цієї теми визначитися з поняттям кута між двома прямими у просторі. Потрібно розглянути випадки кутів між прямими, що перетинаються і мимобіжних кутів. Слід наголосити учням, що кут між двома паралельними прямими у просторі (як і на площині) дорівнює нулю. Особливої уваги потребує поняття кута між двома мимобіжними прямими, а саме формування уявлення про нього. Під час формулювання відповідного означення корисно користуватися моделями многогранників, особливо цифровими динамічними моделями. Ефективно є електронне унаочнення побудови прямої, що паралельна до однієї з мимобіжних прямих і проходить через точку на цій прямій. Таким чином учні переконуються у тому, що шляхом паралельного перенесення

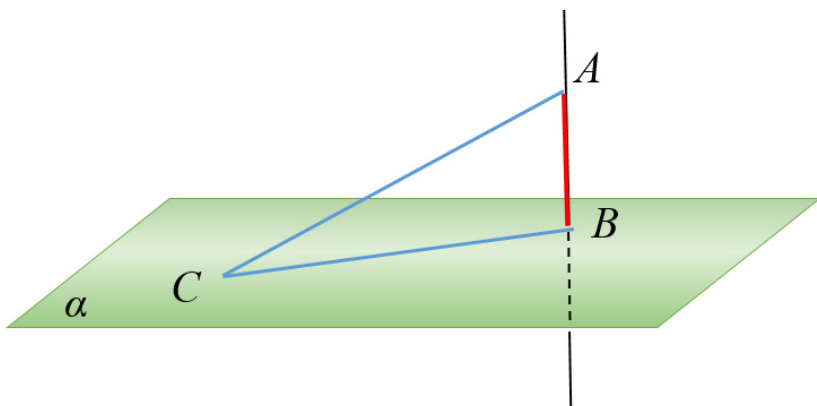
однієї з мимобіжних прямих до перетину з другою утворюються кути, що і є кутами між цими мимобіжними прямими. За результатами такої діяльності учні формулюють означення кута між двома прямими простору. Далі школярі самостійно означають дві перпендикулярні прямі простору. Для закріплення поняття вчитель може запитати: «Чи можуть дві мимобіжні прямі бути перпендикулярними?». Також слід звернути увагу учнів на перпендикулярність відрізків у просторі, як частин прямих. Корисно зупинитися на цьому питанні, оскільки формування у підлітків таких елементарних, на перший погляд, просторових уявлень потребують роботи і часу.

Перш ніж сформулювати означення прямої, перпендикулярної до площини, бажано звернути увагу учнів на приклади з довкілля (пряма, по якій перетинаються дві стіни, перпендикулярна до підлоги тощо), а також на моделях прямокутних паралелепіпедів (також цифрових). У процесі колективного обговорення учням пропонується сформулювати означення прямої, перпендикулярної до площини. Зазвичай виникає проблема у визначенні кута між прямою і площиною. Спроба значити це поняття провокує помилки, що виявляються на контрприкладі. Учні переконуються, що недостатньо перпендикулярності даної прямої до однієї з прямих даної площини. Складається проблемна ситуація. За результатами обговорення формулюється чітке означення: «Пряму називають перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині». Також потрібно зафіксувати, що пряма, перпендикулярна до площини, обов'язково перетинає цю площину. Корисно буде поставити учням запитання «Якщо якась пряма перпендикулярна до площини, чи існують у цій площині прямі, що не є перпендикулярними до даної прямої?»

Окремо слід зупинитися на понятті відрізка, перпендикулярного до площини. Корисним буде запитання до учнів: «Чи може відрізок, що не має спільних точок з площиною, бути перпендикулярним до цієї площини?»

Користуватися означенням прямої, перпендикулярної до площини для розв'язування задач не завжди зручно через умову «будь-яка пряма». Тому вводиться відповідна ознака. На рівні стандарту в ліцеях ознака перпендикулярності прямої і площини вводиться без доведення. Слід також ознайомити учнів з тими фактами, що: якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до площини; якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні; через дану точку можна провести пряму і до того ж тільки одну.

Поняття перпендикуляра і похилої до площини має не аби яке практичне значення. У процесі обговорення цих понять за малюнком 3.4.1. вводяться поняття перпендикуляра і похилої до площини, а також проєкції похилої на площину: «Відрізок AC називають похилою, проведеною з точки A до площини α , точку C — основою похилої. Відрізок BC проєкцією похилою AC ».



Мал. 4.4.1

Важливим з огляду на практику є той факт, що якщо з однієї точки проведено до площини перпендикуляр і похилу, то похила довша за перпендикуляр. Слід зауважити, що коли потрібно визначити відстань між двома геометричними фігурами, то намагаються знайти відстань між їхніми найближчими точками. Разом з учнями формулюється означення відстані від точки до площини.

Потрібно також розглянути поняття відстані від прямої до паралельної їй площини та відстані між двома паралельними площинами. Ці геометричні факти часто використовуються у практичній діяльності, зокрема у будівництві.

Однією з основних теорем розглядуваної теми є теорема про три перпендикуляри. Доводити її можна багатьма різними способами. Дане твердження часто використовується при розв'язуванні стереометричних задач.

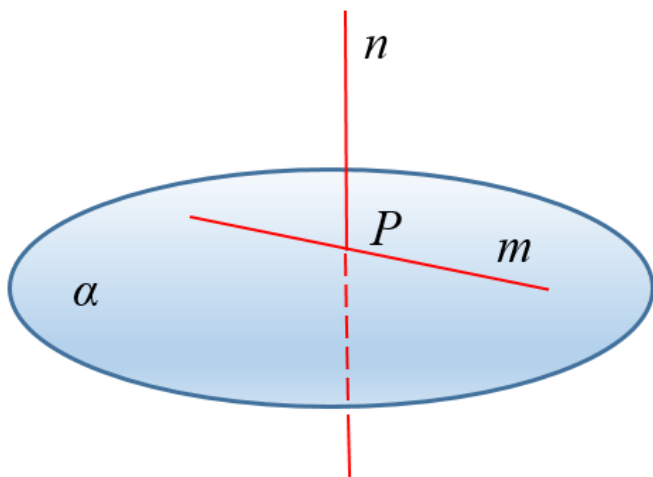
Вивчення перпендикулярності прямої і площини природньо узагальнюється введенням поняття кута між прямою і площиною. Зазначаються окремі випадки — коли кут між прямою і площиною дорівнює 0° і 90° .

Важливим у стереометрії є поняття двогранного кута. Для усвідомленого вивчення цього поняття потрібно задіяти до цього процесу різної форми наочність, зокрема цифрову. Діяльність учнів з інтерактивними

моделями двограних кутів сприятиме накопиченню просторових уявлень цього поняття і його властивостей. Пропонується знайти двогранні кути на предметах з довкілля. Необхідно приділити увагу зображенню двограних кутів на площині. Для означення кута між площинами вводиться поняття лінійного кута двогранного кута. Розглядаються окремі випадки — коли кут між площинами дорівнює 0° і 90° , а також ознака перпендикулярності площин.

З метою реалізації технології повного засвоєння знань, система вправ має містити завдання для досягнення основних категорій навчальних цілей. Наприклад, система вправ з теми «перпендикулярність прямої і площини» має містити такого типу завдання:

1. (Знання) Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
2. (Розуміння) Пряма a перпендикулярна до площини α , чи існують у площині α прямі, не перпендикулярні до площини α ?



Мал. 4.4.2

3. (Застосування) Пряма m перпендикулярна до площини α (мал. 4.4.2), а пряма лежить у площині α і проходить через точку P перетину прямої m і площини α . Яким є кут між прямими m і n ? [4]
4. (Аналіз) Чи є правильним твердження, що коли пряма не перпендикулярна до площини, то вона не перпендикулярна до жодної прямої цієї площини? [4]
5. (Синтез) Відрізок AB не перетинає площину α . Через точки A і B проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках C і D відповідно. Знайдіть довжину відрізка CD , якщо $AC = 34$ см, $BD = 18$ см, $AB = 20$ см. [4]

-
-
6. (Оцінка) Чи є правильним твердження, що пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох сторін трапеції, яка лежить у цій площині?

3.5. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ

Вашуленко О.П.

Зміст та вимоги до результатів навчання з теми «Координати і вектори» подано у навчальній програмі з геометрії для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту) [6]. До змісту належать: прямокутні координати в просторі; координати середини відрізка, відстань між двома точками; вектори у просторі; операції над векторами; формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками; симетрія відносно початку координат та координатних площин.

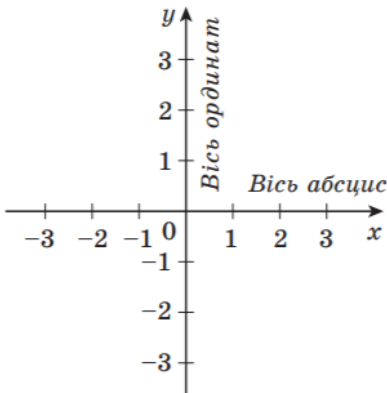
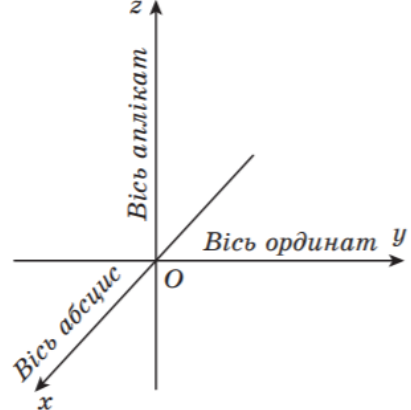
Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів описано як уміння: користуватися аналогією між векторами і координатами на площині і в просторі; оцінювати важливість векторно-координатного методу в математиці; виконувати операції над векторами; застосовувати вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин; знаходити відстань між двома точками, координати середини відрізка, координати точок симетричних відносно початку координат та координатних площин; використовувати координати у просторі для вимірювання відстаней і кутів.

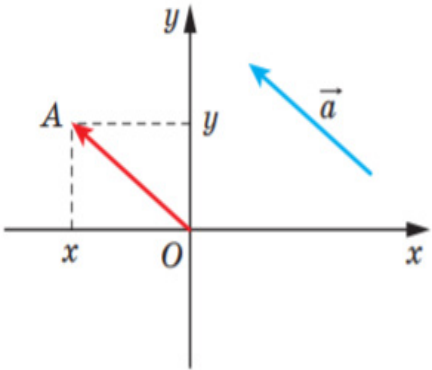
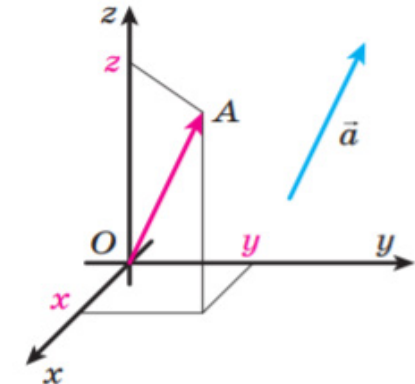
В ліцеях на рівні стандарту тема «Координати і вектори в просторі» вивчається на практичному рівні. Результати навчання передбачають розвиток ідеї координатного і векторного методів з курсу планіметрії для розв'язування стереометричних задач. Багато означень понять планіметрії трансформуються у стереометрію. Багато понять і тверджень цієї теми означають та доводять аналогічно до відповідних понять і тверджень планіметрії, тому вивчення її надає великі можливості для використання аналогій. Тому перед розглядом нового матеріалу потрібно повторити відповідні відомості з планіметрії, організувати діяльність учнів з новими поняттями та теоремами на основі аналогій. Для забезпечення ефективного повторення і засвоєння нового матеріалу доцільно використовувати різної форми наочність: таблиці, в яких зіставляються відомості про вектори на площині і в просторі, електронну наочність.

Корисно організувати відповідну навчальну діяльність учнів ліцею за такою порівняльною таблицею (табл. 3.5.1).

Таблиця 3.5.1

**Порівняння понять і властивостей, пов'язаних з
координатами і векторами на площині і в просторі**

Координати і вектори на площині	Координати і вектори у просторі
Означення системи координат	
 <p>Дві перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку</p>	 <p>Три попарно перпендикулярні прямі зі спільним початком відліку</p>
Відстань між двома точками	
$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Координати середини відрізка AB	
$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ $M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$	$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ $M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$
Означення вектора	
Напрявлений відрізок	Напрявлений відрізок
Модуль вектора	
Модулем вектора AB дорівнює довжині вектора AB	Модулем вектора AB дорівнює довжині вектора AB

Координати і вектори на площині	Координати і вектори у просторі
Нульовий вектор	
<p>Вектор, у якого початок і кінець — одна й та сама точка. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору. Будь-які два нульових вектори рівні.</p>	<p>Вектор, у якого початок і кінець — одна й та сама точка. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору. Будь-які два нульових вектори рівні.</p>
Колінеарні вектори	
<p>Два ненульових вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або одній прямій. Ненульові колінеарні вектори бувають співнапрямленими і протилежно напрямленими.</p>	<p>Два ненульових вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або одній прямій. Ненульові колінеарні вектори бувають співнапрямленими і протилежно напрямленими.</p>
Координати вектора	
 <p>Координатами вектора \vec{a} називають координати точки A</p>	 <p>Координатами вектора \vec{a} називають координати точки A</p>
Рівні вектори	
<p>Два ненульових вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнапрямлені. Рівні вектори мають рівні відповідні координати. Якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.</p>	<p>Два ненульових вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнапрямлені. Рівні вектори мають рівні відповідні координати. Якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.</p>

Координати і вектори на площині	Координати і вектори у просторі
Теорема про обчислення координат вектора	
Якщо точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора a , то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора a .	Якщо точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора a , то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ і $z_2 - z_1$ дорівнюють відповідно першій, другій і третій координатам вектора a .
Координати суми і різниці векторів	
Якщо координати векторів a і b дорівнюють відповідно $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $a + b$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, а координати вектора $a - b$ дорівнюють $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$	Якщо координати векторів a і b дорівнюють відповідно $(a_1; a_2; a_3)$ і $(b_1; b_2; b_3)$, то координати вектора $a + b$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$, а координати вектора $a - b$ дорівнюють $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

З метою реалізації технології повного засвоєння знань, система вправ має містити завдання для досягнення основних категорій навчальних цілей. Наприклад, система вправ з теми «координати в просторі» має містити такого типу завдання:

1. (Знання) Як називають три попарно перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку?
2. (Розуміння) Визначте, чи лежить точка $A(1; 0; -7)$ на координатній осі, і, якщо так, то вкажіть цю вісь.
3. (Застосування) Знайдіть відстань між точками A і B , якщо $A(3; -4; 7)$, $B(4; -3; 1)$. [4]
4. (Аналіз) У якому випадку говорять, що дві точки симетричні відносно початку координат?
5. (Синтез) Дано точки $A(8; 0; 4)$, $B(13; 4; 7)$, $C(11; -3; 3)$. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний. [4]
6. (Оцінка) Які з точок $A(5; -8; 1)$, $B(5; 8; 1)$, $C(-5; 7; 1)$, $D(5; -7; -1)$ лежать на одній прямій, паралельній осі ординат? [4]

3.6. МНОГОГРАННИКИ

Вашуленко О.П.

Зміст та вимоги до результатів навчання з теми «Многогранники» подано у навчальній програмі з геометрії для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту) [6]. До змісту належать: многогранник та його елементи; опуклі многогранники; призма; пряма і правильна призми; паралелепіпед; піраміда; правильна піраміда; перерізи многогранників; площі бічної та повної поверхонь призми, піраміди.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів описано як уміння: розпізнавати основні види многогранників та їх елементи; зображувати основні види многогранників та їх елементи; мати уявлення про перерізи многогранника площиною; формулювати означення вказаних у змісті многогранників; записувати формули для обчислення площі бічної та повної поверхонь призми та піраміди; обчислювати величини основних елементів многогранників; застосовувати вивчені формули і властивості до розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.

Розділ «Многогранники» містить важливий навчальний матеріал для формування в учнів ліцею ключових і математичних компетентностей. Ця тема відіграє важливу роль у теоретичному вивченні стереометрії, і на практиці багато видів діяльності пов'язані з матеріальними моделями многогранників. Тому у процесі навчання важливо систематично узгоджувати геометричні факти з практичною діяльністю і довідками. Многогранники слід розглядати як просторові конструкції, утворені плоскими многокутниками. Слід акцентувати увагу учнів на тому, що елементами многогранників є многокутники (грані) і відрізки (ребра). Корисними будуть аналогії між плоскими і просторовими фігурами. У процесі вивчення матеріалу систематизуються відомості про основні види многогранників, а також синтезуються знання учнів про взаємне розташування прямих і площин. Важливим є встановлення родо-видових відношень понять. Теоретичний матеріал не є об'ємний і складний для сприйняття. Тому значну частину навчального часу можна приділити розв'язуванню задач, зокрема практичного змісту.

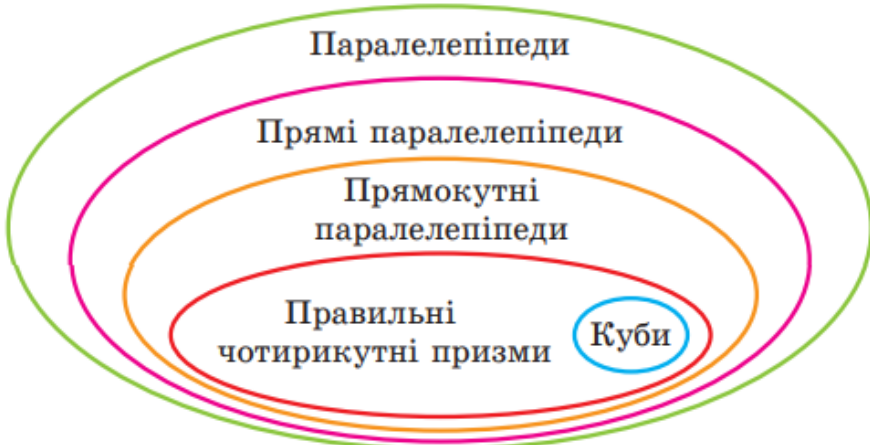
Вивчення розділу починається з актуалізації знань учнів про геометричні тіла, демонстрації моделей і прикладів з довідки. З метою систематизації наявних у школярів відомостей пропонується означення многогранника, як тіла, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників. Слід пригадати елементи многогранників з урахування такого, як двогранний кут, а також поняття бічної поверхні. Розглядаються два загальні види многогранників — опуклі і не опуклі. Потім

вводиться поняття призми, її елементів, видів і властивостей. З метою систематизації знань ілюструється унаочнення зв'язку між вивченими многогранниками (мал. 3.6.1) [9].



Мал. 3.6.1

Окремої уваги приділено вивченню паралелепіпедів. Важливо, щоб учні добре зрозуміли співвідношення між їх окремими видами, усвідомили, що в послідовності понять «паралелепіпеди», «прямі паралелепіпеди», «прямокутні паралелепіпеди», «правильні чотирикутні призми», «куби» кожне є видом попереднього. Тому з метою систематизації знань ілюструється унаочнення такого зв'язку (мал. 3.6.2) [9].



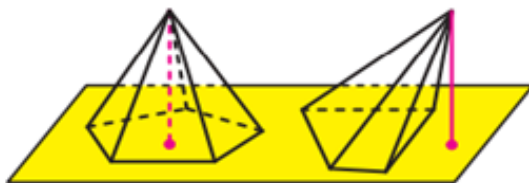
Мал. 3.6.2

З метою надання учням інструментарію для розв'язування стереометричних задач слід розглянути доведення теореми про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда і звернути увагу школярів на те, що за згаданою теоремою діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

Важливим елементом даної теми є поняття і властивості піраміди. Учням пропонуються моделі піраміди і відповідні приклади з довідка. Необхідно розглянути елементи піраміди (мал. 3.6.3), а також особливості розміщення основи висоти піраміди (мал. 3.6.4).

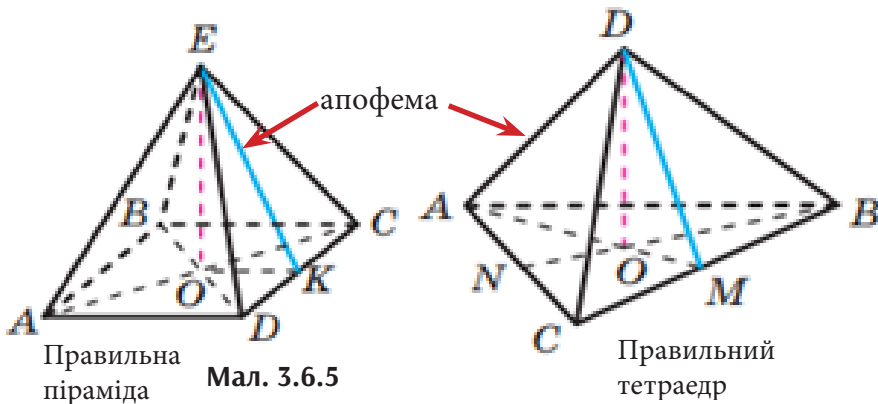


Мал. 3.6.3



Мал. 3.6.4

Окремої уваги потребують поняття і властивості таких різновидів піраміди, як правильна піраміда і правильний тетраедр (мал. 3.6.5).

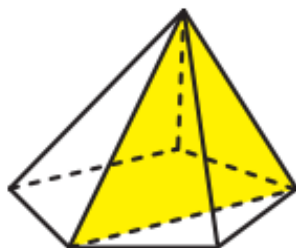


Правильна піраміда

Мал. 3.6.5

Правильний тетраедр

У курсі стереометрії на рівні стандарту навчальний матеріал про перерізи многогранників обмежено діагональними перерізами (мал. 3.6.6). Однак навчання учнів ліцею способів побудови перерізів многогранників мало б велику користь для формування просторової уяви і ключових компетентностей.



Мал. 3.6.6

Слід виконати з учнями кілька вправ на побудову перерізів, дотримуючись правил зображення просторових фігур на площині з урахування зручності їх розміщення.

З метою реалізації технології повного засвоєння знань, система вправ має містити завдання для досягнення основних категорій навчальних цілей. Наприклад, система вправ з теми «Паралелепіед» має містити такого типу завдання:

1. (Знання) Що називають вимірами прямокутного паралелепіеда?
2. (Розуміння) Який прямокутний паралелепіед називають кубом?
3. (Застосування) Сторони основи прямокутного паралелепіеда дорівнюють 7 см і 24 см, а висота — 4 см. Обчисліть площу діагонального перерізу паралелепіеда. [5]
4. (Аналіз) Яку мінімальну кількість граней може мати призма? Скільки вершин, ребер, бічних ребер у такої призми?
5. (Синтез) Основою прямого паралелепіеда є ромб, а площі діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2 . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіеда. [5]
6. (Оцінка) Чи існує паралелепіед, у якого лише одна бічна грань перпендикулярна до площини основи? тільки дві грані перпендикулярні до площини основи?

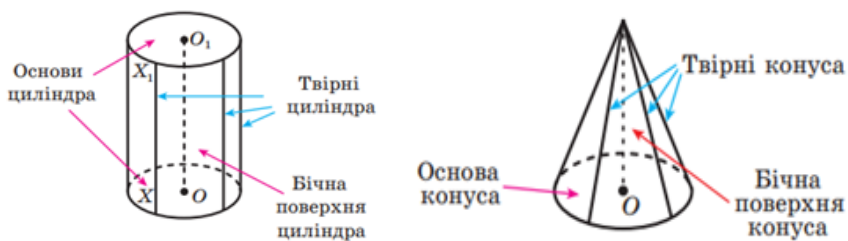
3.7. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Вашуленко О.П.

Зміст та вимоги до результатів навчання з теми «Тіла обертання» подано у навчальній програмі з геометрії для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту) [6]. До змісту належать: циліндр, конус, їх елементи; перерізи циліндра і конуса: осьові перерізи циліндра і конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основи; куля і сфера; переріз кулі площиною.

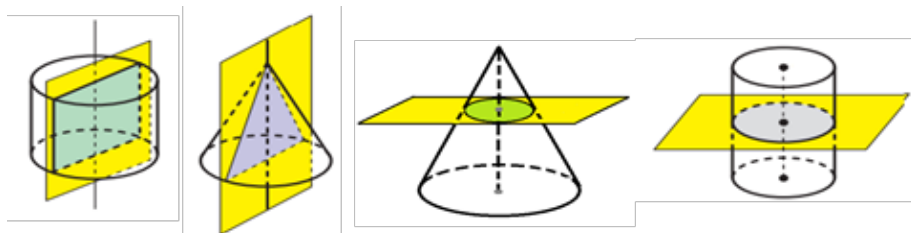
Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів описано як уміння: обчислювати величини основних елементів тіл обертання; застосовувати властивості тіл обертання до розв'язування задач; розпізнавати види тіл обертання, їхні елементи; многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях в об'єктах навколишнього світу.

Вивчення тіл обертання (циліндр, конус, куля) і їх поверхонь завершує знайомство учнів ліцею з основними просторовими фігурами. Вводяться поняття циліндра, конуса. На зображеннях фігур виділяються їх основні елементи і властивості (мал. 3.7.1)



Мал. 3.7.1

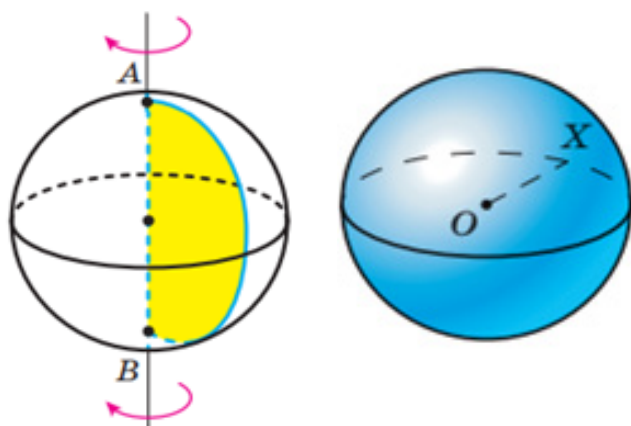
Слід звернути увагу учнів на основні види перерізів циліндра і конуса осьовий і переріз площиною, паралельною до основи (мал. 3.7.2).



Мал. 3.7.2

Для формування уявлень про ці геометричні факти доцільно також використовувати цифрові динамічні моделі.

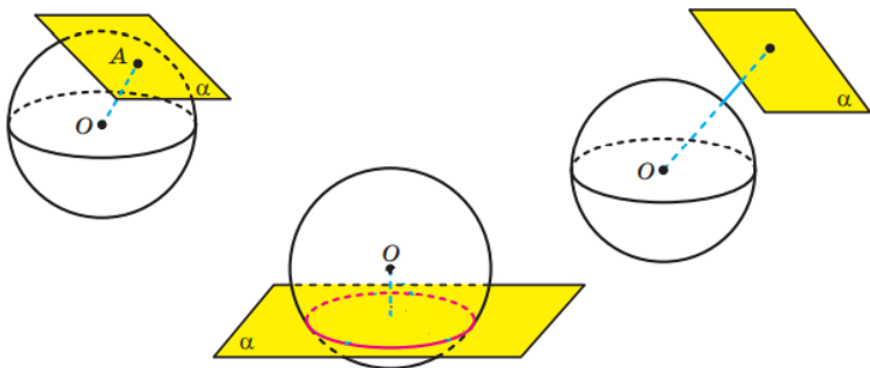
Окремої уваги заслуговує розгляд понять і властивостей кулі та сфери. Потрібно, щоб учні усвідомили відмінності і спільне цих просторових фігур. Доцільно застосовувати різноманітні наочні моделі, акцентуючи увагу на характеристичних властивостях понять (мал. 3.7.3)



Мал. 3.7.3

Для формулювання означення сфери краще застосувати цифрову анімацію утворення цієї фігури обертанням півкола навколо діаметра. Розглядаючи радіус, діаметр і центр кулі та сфери, слід визначити, коли ці елементи належать тілу обертання, а коли ні.

Слід звернути увагу учнів на взаємному розміщенні сфери (кулі) і площини (за аналогією взаємного розміщення кола і прямої у планіметрії) (мал. 3.7.4).



Мал. 3.7.4

Розглядається три випадки — сфера і площина: перетинаються, дотикаються і не мають спільних точок. Вводиться поняття площини, дотичної до сфери, розглядаються властивості такої комбінації. Теорема про те, що площина, дотична до сфери, перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику, пропонується учням без доведення.

Основний вид навчальної діяльності для вивчення цього матеріалу розв'язування задач. Часто учні допускаються помилок у зображенні конуса, циліндра, кулі. Така діяльність займає значну частину навчального часу. Вчителю слід постійно звертати увагу учнів на правильному зображенні цих фігур (особливо не вдаючись до теорії). Доцільно пропонувати учням вправи за готовими зображеннями. Корисно, також, запропонувати учням виготовити шаблони еліпса, круга для пришвидшення виконання рисунка до задачі. Згадані вище засоби дозволяють економити час і акцентувати увагу школярів на істотних моментах навчальної діяльності.

З метою реалізації технології повного засвоєння знань, система вправ має містити завдання для досягнення основних категорій навчальних цілей. Наприклад, система вправ з теми «Тіла обертання» має містити такого типу завдання:

-
1. (Знання) Що таке куля? Що таке сфера? Назвіть їхні елементи.
 2. (Розуміння) Чим відрізняються конус і піраміда?
 3. (Застосування) Висота конуса 8 м, радіус 6 м. Обчисліть довжину твірної конуса.
 4. (Аналіз) У конусі побудовано два перерізи, паралельні до основи, які ділять висоту конуса на три рівні частини. Знайдіть відношення площ перерізів.
 5. (Синтез) У циліндр вписано правильну трикутну призму, а навколо нього описано правильну шестикутну призму. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь цих призм.
 6. (Оцінка) Чи може осьовим перерізом конуса бути не рівнобічна трапеція?

3.8. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

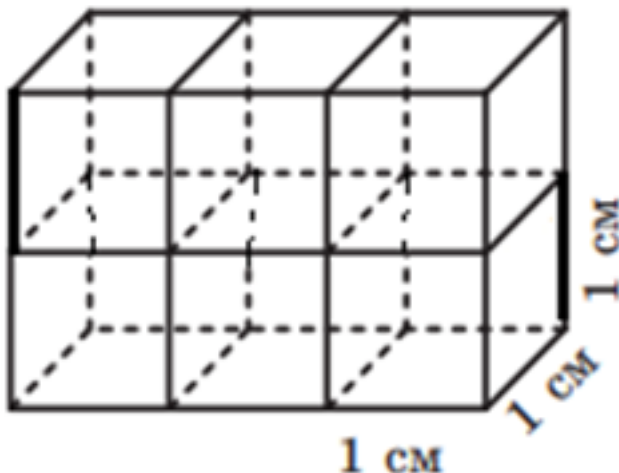
Вашуленко О.П.

Зміст та вимоги до результатів навчання з теми «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» подано у навчальній програмі з геометрії для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту) [6]. До змісту належать: поняття про об'єм тіла; основні властивості об'ємів; об'єми призми, паралелепіпеда, піраміди, циліндра, конуса, кулі; площі бічної та повної поверхонь циліндра, конуса; площа сфери.

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів описано як уміння: записувати формули для обчислення об'ємів паралелепіпеда, призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі, площ бічної та повної поверхонь циліндра, конуса, площі сфери; мати уявлення про об'єм тіла та його основні властивості; розв'язувати задачі на обчислення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл, зокрема прикладного змісту.

Навчальний матеріал «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» має великий потенціал для формування в учнів ліцею просторової уяви, ключових і математичних компетентностей. При вивченні цієї теми важливо звернути увагу учнів на те, що об'єм тіла в стереометрії є аналогом площі фігури в геометрії. Потрібно означити поняття об'єму тіла через властивості цього поняття: рівні тіла мають рівні об'єми; якщо тіло складене з кількох інших тіл, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих тіл; За одиницю виміру об'єму тіла беруть одиничний куб, тобто куб з ребром, яке дорівнює одиниці виміру довжини. Вивчення об'ємів тіл починається з многогранників. Виміряти об'єм многогранника означає порівняти його об'єм з об'ємом одиничного куба. Розглядається об'єм прямокутного паралелепіпеда на описовому рівні за означенням. На рис

4.8.1 зображено паралелепіпед, що містить рівно шість квадратів, бічне ребро кожного з яких дорівнює 1 см. Отже, об'єм такого паралелепіпеда дорівнює 6 см^3 .



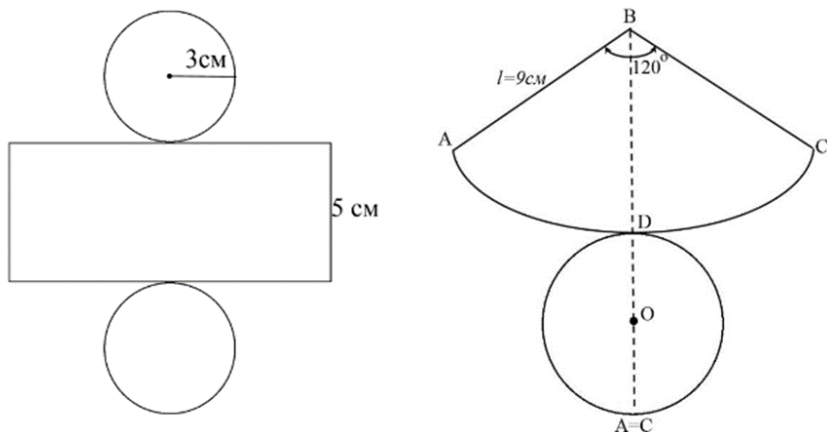
Мал. 3.8.1

Учням пропонується записати формулу обчислення об'єму многогранника за його вимірами, за відомими площею основи і висотою. Ця формула узагальнюється до формули обчислення об'єму призми.

При вивченні цієї теми на рівні стандарту доцільно широко застосовувати різної форми наочність. Так для визначення об'єму прямокутного паралелепіпеда ефективною є демонстрація анімації поділу цієї фігури на одиничні куби. Формула обчислення об'ємів піраміди і конуса усвідомлюється учнями засобом переливання води з пластикової моделі піраміди (конуса) у модель прямої призми (циліндра) за умови рівних висот фігур. Учні наочно переконуються, що об'єм прямої призми дорівнює трьом об'ємам відповідної піраміди.

Об'єм циліндра обчислюється за аналогією з обчисленням об'єму призми. Корисною буде цифрова динамічна модель циліндра вписаного в призму (або навпаки). При збільшенні кількості граней основи призма наближається до циліндра. Учні роблять висновок, що формули об'ємів призми і циліндра є однаковими $V = Sh$, де S — площа основи, h — висота фігури. Аналогічно працює модель конуса, вписаного $\frac{1}{3}$ піраміду. Тому формули об'ємів піраміди і конуса є однаковими $V = \frac{1}{3}Sh$, де S — площа основи, h — висота фігури.

Для формування в учнів поняття площі бічної поверхні многогранників ефективно використовувати розгортки. Однак корисно також ознайомити школярів з деякими формулами обчислення площі бічної поверхні правильної піраміди, зокрема через площу основи і косинус двогранного кута при ребрах. Поняття про площу бічної і повної поверхні циліндра і конуса формується з допомогою зображення та виготовлення розгорток просторових фігур (мал. 3.8.2). Така діяльність дозволяє розвивати критичне мислення учнів та покращити уявлення про тіла обертання.



Мал. 3.8.2

За результати такої роботи разом з учнями складаються формули обчислення площ бічної і повної поверхні циліндра і конуса.

На відміну від циліндра і конуса, до кулі неможливо «наблизити» многогранник. Виведення формул об'єму і площі поверхні кулі є громіздким. Тому на рівні стандарту учням пропонуються ці формули без доведення.

Основною навчальною діяльністю з вивчення даної теми є розв'язування задач на обчислення об'ємів і площ поверхонь просторових фігур. З метою реалізації технології повного засвоєння знань, система вправ має містити завдання для досягнення основних категорій навчальних цілей. Наприклад, система вправ з теми «Об'єми і площі поверхонь тіл обертання» має містити такого типу завдання:

1. (Знання) За якими формулами обчислюють об'єм циліндра, конуса, кулі?
2. (Розуміння) Об'єми двох куль відносяться як 8:125. Знайдіть відношення їхніх радіусів. [5]
3. (Застосування) Знайдіть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 4 см, а висота 5 см.

-
4. (Аналіз) У скільки разів треба збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився в 5 разів?
 5. (Синтез) Знайдіть висоту конуса, об'єм якого дорівнює 24π см³, а радіус основи — 3 см. [5]
 6. (Оцінка) Радіус кулі збільшили у 7 разів. Як при цьому змінилася площа її поверхні? [5]

Література до розділу

1. Bloom B.S. Taxonomy of educational objectives : The classification of educational goals : Hand book I, cognitive domain / Bloom B. S. — New York : Longman, 1994. — 99 p.
2. Выготский Л.С. Избранные психологические исследования. М.: АПН РСФСР, 1956.
3. Головань М.С. Математичні компетентності чи математична компетентність? / М.С. Головань // Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс — 20012»: матеріали міжнародної науково-методичної конференції (6-7 грудня 2012 р.) : у 3-х частинах. — Суми : Виробничо-видавниче підприємство «Мрія», 2012. — Частина 1. — 36-38 с.
4. Мерзляк А.Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. Для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.В. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2018. — 208 с.
5. Мерзляк А.Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. Для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.В. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 208 с.
6. Навчальна програма «Математика (рівень стандарту). 10 — 11 класи», затверджена наказом МОН України від 23 жовтня 2017 р. №1407
7. Про освіту : Закон України від 05.09.2017 р. №2145-VIII. Голос України. 2017. 27 верес. (№178-179). С. 10 — 22.
8. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1990.
9. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. — Х.:Факт, 2005. — 360с.
10. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии — СПб: Издательство «Питер», 2000 — 712 с.

РОЗДІЛ IV

МЕТОДИКА НАВЧАННЯ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ В ЛІЦЕЯХ НА РІВНІ СТАНДАРТУ

4.1. КОРОТКА ХАРАКТЕРИСТИКА ЗМІСТОВИХ ЛІНІЙ КУРСУ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Волошена В. В.

При вивченні курсу алгебри і початків математичного аналізу на рівні стандарту продовжують і отримують розвиток змістові лінії: «Числа та вирази», «Функції», «Рівняння та нерівності», «Елементи стохастики». Вводиться нова лінія «Початки математичного аналізу».

Числа та вирази складається з таких ліній як «Числа та числові вирази» і «Тотожні перетворення»: корінь степені $n > 1$ і його властивості, степінь з раціональним показником та його властивості, поняття степені з дійсним показником; поняття логарифма числа, десятковий і натуральний логарифми, число e ; радіана міра кута, синус, косинус, тангенс і котангенс числа, арксинус, арккосинус, арктангенс і арккотангенс числа. «Тотожні перетворення»: властивості коренів, степенів і логарифмів, перетворення простих виразів, що містять корені, степені та логарифми; основні тригонометричні тотожності, формули зведення, перетворення тригонометричних виразів.

Функції: поняття функції, область визначення і значень, графіки функцій, побудова графіків функцій заданих різними способами, властивості функцій, проміжки знакосталості, перетворенні графіків, лінійна і квадратична функції, степенева функція, тригонометрична функція, обернена функція, обернена тригонометрична функція, показникова та логарифмічна функції їх властивості та графіки.

Рівняння та нерівності: розв'язання раціональних, ірраціональних, логарифмічних, тригонометричних рівнянь, нерівностей, а також їх систем. Використання властивостей графіків функцій при розв'язанні рівнянь та нерівностей. Метод інтервалів. Зображення на координатній площині множини розв'язків рівнянь та нерівностей.

Початки аналізу: поняття про неперервність функції, поняття про дотичну до графіка функції, означення похідної, геометричний та фізичний

зміст похідної, похідна степеневі функції, похідна суми, різниці, добутку й частки, похідна складеної функції, друга похідна, її геометричний та фізичний зміст, використання першої та другої похідної до дослідження функції та побудови її графіка, розв'язання текстових задач на знаходження найбільшого чи найменшого значення, площа криволінійної трапеції, інтеграл, первісна, первісні основних функцій, формула Ньютона-Лейбніца.

Елементи стохастики: представлення даних, їх числові характеристики, таблиці й діаграми, випадковий вибір, інтерпретація статистичних даних і їх характеристик, випадкова подія та ймовірність, обчислення ймовірності, перебір варіантів й елементи комбінаторики, перестановки, розміщення, комбінації (без повторень), класичне визначення ймовірності випадкової події, вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення, графічне подання інформації про вибірку, частота та ймовірність.

В рамках зазначених змістових ліній вирішуються наступні завдання:

- систематизація відомостей про числа; вивчення нових видів числових виразів і формул;
- вдосконалення практичних навичок та обчислювальної культури, розширення і вдосконалення алгебраїчного апарату, сформованого в основній школі, і його застосування до розв'язання математичних і нематематичних задач;
- розширення і систематизація загальних відомостей про функції, поповнення класу досліджуваних функцій, ілюстрація широти застосування функцій для опису і вивчення реальних залежностей;
- розвиток уявлень про ймовірнісно-статистичні закономірності в навколишньому світі, вдосконалення інтелектуальних і мовленнєвих умінь шляхом збагачення математичної мови, розвитку логічного мислення;
- знайомство з основними ідеями та методами математичного аналізу.

Вивчаючи дані змістові лінії учні навчаться:

Числа та вирази:

- вільно оперувати поняттями: натуральне число, множина натуральних чисел, ціле число, множина цілих чисел, звичайна дріб, десяткова дріб, змішане число, раціональне число, множина раціональних чисел, ірраціональне число, корінь степеня n , дійсне число, множина дійсних чисел, геометрична інтерпретація натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел;

-
- впорядковувати числа, записані у вигляді звичайного і десяткового дробу, числа, записані і використанням арифметичного квадратного кореня, коренів степеня більше за другий;
 - виконувати обчислення і перетворення виразів, що містять дійсні числа, в тому числі корені натуральних степенів;
 - виконувати стандартні тотожні перетворення тригонометричних, логарифмічних, степеневих, ірраціональних виразів;

Функції:

- володіти поняттями: залежність величин, функція, аргумент і значення функції, область визначення і множину значень функції, графік залежності, графік функції, нулі функції, проміжки знакостановлення, зростання на числовому проміжку, спадання на числовому проміжку, найбільше та найменше значення функції на числовому проміжку, періодична функція, період, парна і непарна функції; вміти застосовувати ці поняття при розв'язанні задач;
- володіти поняттям: степенева функція; будувати її графік і вміти застосовувати властивості степеневої функції при розв'язанні задач;
- володіти поняттями: показникова функція, експонента; будувати їх графіки і вміти застосовувати властивості показникової функції при розв'язанні задач;
- володіти поняттям: логарифмічна функція; будувати її графік і вміти застосовувати властивості логарифмічної функції при розв'язанні задач;
- володіти поняттям: тригонометрична функція; будувати їх графік і вміти застосовувати властивості тригонометричних функцій при розв'язанні задач;
- застосовувати при розв'язанні завдань властивості функцій: парність, періодичність, обмеженість;
- застосовувати при розв'язанні завдань перетворення графіків функцій.

Рівняння та нерівності:

- вільно оперувати поняттями: рівняння; нерівність; рівносильні рівняння і нерівності; рівняння, що є наслідком іншого рівняння; рівняння, рівносильні на множині; рівносильні перетворення рівнянь;
- оволодіти основними типами показникових, логарифмічних, ірраціональних, степеневих, тригонометричних рівнянь і нерівностей і стандартними методами їх розв'язків і застосовувати їх при розв'язанні завдань;

-
- володіти методами розв’язання рівнянь, нерівностей та їх систем, вміти вибирати метод розв’язання і обґрунтувати свій вибір;
 - використовувати метод інтервалів для розв’язання нерівностей, в тому числі дробово-раціональних і включають в себе ірраціональні вирази;
 - володіти різними методами доказів нерівностей;
 - розв’язувати рівняння в цілих числах;
 - зображати на площині множини, що задаються рівняннями, нерівностями і їх системами.

Початки математичного аналізу:

- обчислювати похідні елементарних функцій і їх комбінацій;
- дослідити функції на монотонність і екстремуми;
- будувати графіки і застосовувати їх до розв’язування задач;
- володіти поняттям: дотична до графіка функції; вміти застосовувати його при розв’язанні задач;
- володіти поняттями: первісна, визначений інтеграл;
- застосовувати теорему Ньютона-Лейбніца і її наслідки для розв’язування задач.

Елементи стохастики:

- оперувати основними описовими характеристиками числового набору; поняттями: генеральна сукупність і вибірка;
- оперувати поняттями: частота і ймовірність події, сума і добуток ймовірностей; обчислювати ймовірності подій на основі підрахунку числа випадків;
- володіти основними поняттями комбінаторики і вміти застосовувати їх до розв’язання задач;
- мати уявлення про основи теорії ймовірностей;
- мати уявлення про математичне сподівання і дисперсії випадкових величин;
- мати уявлення про спільні розподіли випадкових величин.

Сучасна шкільна програма з математики охоплює велику кількість понять, теорій, теорем, фактів, великий об’єм пізнавальної інформації. При цьому кількість годин, яка відводиться на вивчення, особливо в нематематичних класах, постійно скорочується. В зв’язку з цим школярі отримують перевантаження. Цю проблему вирішує технологія укрупнення дидактичних одиниць. Наприклад, в загальноосвітній школі показникова та логарифмічна функції вивчаються окремо, що займає більше часу на вивчення кожної функції та не дає змогу побачити взаємозв’язки між функціями, між їхніми властивостями та сформувати картину про показникову та логарифмічну функції, що є взаємооберненими. Тому,

щоб не втрачати можливості вивчати тему на високому рівні через недосконалий навчальний процес ефективною може бути методика інтегрованого вивчення показникової і логарифмічної функцій, об'єднавши навчальний матеріал, розглянувши внутрішньо предметні зв'язки між функціями методом укрупнення дидактичних одиниць знань, що сприяє ефективнішому засвоєнню обсягу знань при економії часу.

4.2. ЧИСЛА І ВИРАЗИ

Волошена В. В.

В змістову лінію «Числа та вирази» гармонічно вписались такі лінії як «числова» та «вирази та їх перетворення». Числова лінія — одна з основних змістових ліній курсу математики, вона є об'ємною за змістом навчального матеріалу, вивчення якого відбувається протягом всіх років шкільного навчання, поступово поглиблюючи знання учнів про число від натуральних до дійсних, генеруючи розвиток усних, письмових, інструментальних компетентностей. На рівні стандарту в старшій школі розширення множини дійсних чисел не вивчається, але учні навчаються оперувати дійсними числами, які є значеннями тригонометричних функцій числа, логарифмами числа тощо.

Для шкільного навчання важливо, щоб учні усвідомили число як основний об'єкт математики, ідею розширення числових множин і усвідомили необхідність введення нових чисел як для внутрішніх потреб математики (здійсненність арифметичних дій), так і для практичного забезпечення (розв'язання практичних, життєвих завдань). Досягти такого усвідомлення в учнів можна постановкою завдань доступних для їх розуміння, але які не можна розв'язати у відомій множині чисел. Тим самим підкреслити, те що і сама математика розвивається і вдосконалює свій апарат під впливом потреб людей і практики.

Тотожні перетворення виразів не є окремою темою курсу алгебри, а дуже часто виступають вагомим апаратом реалізації інших змістових ліній освітньої галузі «Математика»: числа, рівняння і нерівності, функції, елементи комбінаторики, теорії ймовірності та математичної статистики, геометричні фігури і геометричні величини. Саме тому, в старшій школі слід велику увагу приділяти навчанню учнів правильно та раціонально виконувати тотожні перетворення виразів.

Вивченню змістової лінії «вирази та їх перетворення» у математиці відведено велику частину навчального часу. Це пояснюється тим, що перетворення виразів є основою для обчислення значень виразів зі змінними, для розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, доведення

тотожностей та нерівностей тощо. Тотожні перетворення виразів, що вивчаються в основній школі широко використовують і у старшій школі при вивченні елементів диференціального та інтегрального числення. Вивчення тотожних перетворень розвиває в учнів вміння логічно мислити, дає можливість більш швидше, оперативніше і зручніше виконувати різноманітні обчислення, розв'язувати рівняння та інше.

Культура виконання тотожних перетворень розвивається так же, як і культура обчислення, на основі конкретних значних властивостей операцій над об'єктами та алгоритмів їх виконання. Вона проявляється не тільки в уміннях правильно обробляти перетворення, але і в уміннях знайти найкоротший шлях переходу від вихідного аналітичного виразу до виразу, найбільш відповідним цілим перетворенням, в умінні слідувати за зміни областей визначення аналітичних виразів у ланцюжках сучасних перетворень, у швидкості і безпомилковості виконання перетворень.

В курсі алгебри і початків аналізу система перетворень цілісно сформована ще у курсі алгебри, але продовжує поступово вдосконалюватися. Наприклад, до неї додаються деякі нові види перетворень, які лише збагачують її, розширюють можливості, але не змінюють її структуру. Методика вивчення цих нових перетворень практично не відрізняється від тої, що застосовується в курсі алгебри.

В старшій школі вивчаються перетворення, які пов'язані з операцією піднесення до степеня, з різними класами елементарних функцій, а саме показникових, степеневих, логарифмічних й тригонометричних. Схожі перетворення вже вивчались в алгебрі, лише степінь трохи ускладнився, тому кожен з цих типів перетворень проходить схожий етап вивчення, на якому увага зосереджується вже на засвоєнні характерних особливостей степеневих функцій.

Формування умінь виконання тотожних перетворень є одним із основних завдань курсу алгебри, розвиток достатніх навчок для вільного їх використання у вивченні математики і суміжних предметів, а також для практичного застосування математичних знань. Важлива роль у цьому процесі відводиться ознайомленню учнів з методом математичного моделювання. Це пояснюється тим, що цей метод володіючи властивостями загального методу наукового пізнання у шкільному навчанні відіграє роль інтегруючого чинника щодо предметного змісту шкільної математики і природничих предметів. Тому при вивченні кожної теми необхідно показувати учням формули залежності нових для них величин. Розглянемо основні з них.

Показникові залежності з різних галузей природознавства, техніки, економіки представлені у таблиці 4.2.1 стануть у нагоді вчителю для зацікавлення учнів в процесі вивчення.

Показникові залежності

№	Формула залежності	Значення змінних і сталих
1	$N = N_0 e^{kt}$ Формула розмноження бактерій	N – кількість бактерій в будь-який момент часу t N_0 – початкова кількість бактерій в момент часу $t=0$, k – константа швидкості розмноження бактерій, що визначається експериментально
2	$A = A_0 a^{kt}$ формула росту деревини	A – зміна кількості деревини у часі, A_0 – початкова кількість деревини, t – час, k , a , – деякі сталі.
3	$N = N_0 e^{at}$ формула зміни чисельності народонаселення	N – чисельність народонаселення в час t , N_0 – початкова чисельність народонаселення, a – деяка стала
4	$y = 2^x$ формула розмноження клітин	y – кількість клітин через час x
5	$P = P_0 e^{kt}$ формула процесу новоутворення або розпаду	P – кількість новоутвореної речовини або речовини, що розпалася в момент часу t P_0 – початкова кількість речовини k – стала, яка стосується конкретного випадку
6	$T = T_0 e^{kt}$ залежність між температурою тіла і температурою навколишнього середовища	T – різниця температур в момент часу t , T_0 – початкова різниця температур, k – стала.
7	$P = P_0 a^{-kh}$ залежність атмосферного тиску від висоти	P – тиск на висоті h , P_0 – тиск на рівні моря, k , a – деякі сталі.
8	$F = F_0 k^x$ залежність між силами F і F_0 ($F_0 < F$)	F – прикладена сила, F_0 – сила, що утримує корабель, k – стала, яка залежить від матеріалу з якого зроблено канат і стовп, x – число витків на барабані.

9	$m = M \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ формула радіоактивного розпаду	t – кількість речовини в момент часу t , M – початкова кількість речовини, T – період піврозпаду речовини.
10	$A_n = A_0 \left(1 \pm \frac{p}{100} \right)^n$ формула складних відсотків	A_0 – початкове значення величини (початкова сума), p – % (відсоткова ставка), n – число проміжків часу, A_n – значення величини після n проміжків часу (кінцева сума)
11	$B = B_0 \left(1 - \frac{p}{100} \right)^n$ формула вартості обладнання цеху	B – вартість обладнання цеху через t років, B_0 – початкова вартість обладнання, p – щорічний відсоток амортизації.

У кожному з наведених прикладів формула задає функцію, для обчислення якої сталий множник доводиться помножити на степінь сталої зі змінним показником, яка має цілком певне додатне значення. Найпростішим випадком таких залежностей є функція виду, яку називають показниковою.

В більшості підручників можна знайти задачі в яких використовуються математичні моделі показникових залежностей [3,5,9]. Наприклад в підручнику Істера 11 кл. є декілька задач на напіврозпад і залежність тиску від висоти [6].

1.16. Період напіврозпаду ізотопу плутонія дорівнює 140 діб. Визначте масу плутонія, який залишиться через 8 років, якщо його початкова маса дорівнює 6г.

1.18. Альпіністка, яка піднялася на висоту $h_1=800$ м, визначила, що тиск повітря $p_1=700$ мм рт. ст. Яким буде тиск повітря на висоті $h_2=1200$ м за тієї самої температури?

У підручнику Бевза [4] є цікава прикладна задача, з готовою формулою

91. Металеву кульку, температура якої 1200 С, помістили в приміщення з температурою повітря 200 С. через скільки хвилин температура кульки буде 840 С, якщо закон охолодження тіла виражається формулою $D = D_0 b^{kt}$, де D — різниця між температурою тіла, яке охолоджується, і температурою навколишнього середовища; D_0 — початкова різниця температури тіла й середовища; t — час у хвиликах; b і k — сталі величини, які залежать від форми тіла і матеріалу? Для даного тіла $b = 0,8$, $k = 0,1$.

Готуючись до уроку можна використати декілька підручників і запропонувати різні задачі при поясненні матеріалу, показавши таблицю запропонувати учням самим відшукати подібні задачі в інтернеті, це заезпечить і зацікавленість учнів і стійкий інтерес до вивчення теми.

Після показникових залежностей при вивченні логарифмів в нагоді для вчителя буде така таблиця:

Таблиця 4.2.2

Логарифмічні залежності

№	Формула залежності	Значення змінних і сталих
1	$R = \lg \frac{I}{I_0}$ величина землетрусу (шкала Ріхтера)	R – величина землетрусу I – інтенсивність землетрусу I_0 – мінімальна норма інтенсивності, яка визначається підземними виверженнями
2	$\beta = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$ залежність інтенсивності звуку	β – інтенсивність звуку I – сила звуку I_0 – мінімальна інтенсивність, при якій людське вухо перестає сприймати звук
3	$V(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$ залежність ємності легенів людини	V – ємність легенів людини x – вік людини у роках
4	$y = \log_2 n + 1$ кількість одиниць вимірювання інформації	кількість одиниць вимірювання інформації (бітів), необхідних для збереження в комп'ютері натурального числа n (у звичайному для комп'ютера двійковому форматі)

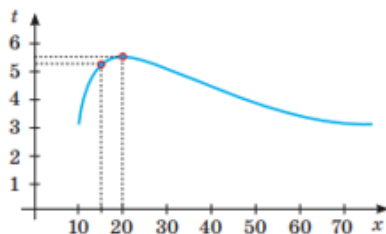
Задачі, які використовують логарифмічну залежність можна знайти в підручниках Бевза [3]

186. Ємність легенів людини виражається функцією $t(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$, де x – вік людини у роках ($x \geq 10$), $t(x)$ – ємність легенів у літрах.

За допомогою графіка функції $t(x)$, зображеного на малюнку, установіть:

а) у якому віці ємність легенів людини максимальна і чому вона дорівнює;

б) протягом якого часу ємність легенів більша, ніж у 15 років.



В інших рідручниках задач, які б розкривали логарифмічні залежності немає, тому можна використати дану таблицю при поясненні матеріалу, знайти самому чи за допомогою учнів цікаві задачі для кращого розуміння того навіщо вивчати логарифми. Для більшої кількості прикладних задач можна порекомендувати збірник автора Соколенко Л. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу [11].

Для кращого розуміння і застосування перетворення тригонометричних виразів необхідні відповідні знання формул та вміння ними оперувати. Традиційно, виходячі з практики, вивчення тригонометричних формул полегшується і краще використовується їх застосування, якщо вводити формули групами:

- співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу;
- формули додавання, формули подвоєного аргументу;
- формули половинного аргументу (формули пониження степеня);
- формули перетворення суми й різниці тригонометричних функцій на добуток;
- формули перетворення добутку тригонометричних функцій на суму;
- вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу (універсальна тригонометрична підстановка).

В процесі вивчення тригонометрії доцільно приділяти більше увагу «наочній» інформації, томущо більшість учнів просто не розуміють навіщо необхідна тригонометрія і просто зазубрюють формули, цю ситуацію необхідно змінювати вчителю постійно працюючи числовим колом, яке є основною тригонометричною моделлю, а також з дослідженням і побудовою графіків різних функцій, яким необхідна зорова інтерпретація. Психологічно зумовлено, що запам'ятовування об'єктів, представлених наочно (на картинках або моделях), відбувається краще, ніж запам'ятовування їх же, представлених в письмовій формі. Іншими словами, можна говорити про важливість методу моделювання при вивченні даної теми. Даний метод реалізується шляхом інтеграції тригонометрії в інші нау-

ки, в тому числі математичний аналіз, геометрію, фізику, астрономію, інформатику, тощо. Крім того, доцільно звертати увагу учнів на реалізацію у встановленні зв'язку між дослідженням функції і розв'язанням рівняння, яке містить конкретну функцію, тим самим надавати учням потужний стимул для подальшого вивчення елементів математичного аналізу, як апарату, що допомагає при розв'язанні тригонометричних рівнянь. Для реалізації даного принципу міжпредметних зв'язків *тригонометричні залежності* з різних галузей природознавства, техніки, економіки представлені у таблиці 4.2.3 стануть у нагоді вчителю для зацікавлення учнів в процесі вивчення.

Таблиця 4.2.3

Тригонометричні залежності

№	Формула залежності	Значення змінних і сталих
1	$y = A \sin(\omega x + \alpha)$ або $y = A \cos(\omega x + \alpha)$ гармонічні коливання	y – зміщення точки від положення рівноваги в даний момент часу x , A, α, ω – сталі величини, A – амплітуда коливання ($A > 0$) – найбільше зміщення початкової точки від положення рівноваги, ω – циклічна частота ($\omega > 0$) – кількість повних коливань точки за 2π одиниць часу, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, де T – період коливання (проміжок часу протягом якого здійснюється одне повне коливання),
2	$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$ закон заломлення світла	α – кут падіння, β – кут заломлення світла, v_1 – швидкість світла у першому середовищі, v_2 – швидкість світла у другому середовищі, n_1 – показник заломлення першого середовища, n_2 – показник заломлення другого середовища.
3	$F_A = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha$ сила Лоренца	F – сила, що діє на рухомий в магнітному полі заряд q , v – швидкість руху зарядів, B – магнітна індукція,
4	$F_L = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$ сила Лоренца	F_L – сила, що діє на рухомий в магнітному полі заряд q , v – швидкість руху зарядів, B – магнітна індукція,

В діючих підручниках не має задач чи прикладів на прикладні тригонометричні залежності, тому буде логічним запропонувати учням самим знайти використовуючи дану таблицю тригонометрію в житті. Наприклад, сила Ампера це принцип дії електродвигунів і електровимірювальних приладів, а також генераторів електричного струму; сила Лоренца це і рух заряджених частинок в магнітному полі Землі, зіткнення яких з атомами і молекулами з верхніх шарів атмосфери призводить до виникнення полярних сяїв, і принцип дії андройдного колайдра, який дає можливість побудувати «загальну теорію всього».

Тригонометричні перетворення в багатьох випадках підпорядковуються трьома «законам»:

«1-й закон»: «побачив суму — роби добуток» (мова йде про формули для перетворень сум в добуток);

«2-й закон»: «побачив добуток — роби суму» (мова йде про формули для перетворення добутоків в суми);

«3-й закон»: «побачив квадрат — знижуй ступінь» (мова йде про формулах).

Якщо ми не знаємо, за що «зачепитися», з чого почати перетворення тригонометричного виразу, треба починати з одного з цих «законів», і в більшості випадків (принаймні, на шкільному рівні) всі пройде вдало.

Отже, чилова лінія «Числа та вирази» є найбільшою і однією з основних змістовно-методичних ліній, тому що являється базою для вивчення подальших тем, а саме, рівнянь і нерівностей, дослідження функцій і організацій обчислень, тощо. Від рівня сформованості учнів з числами, виразами та тотожними перетвореннями залежить подальша результативність навчання не тільки алгебри, а й інших дисциплін. Реалії сьогодення вимагають від випусників міцних, автоматизованих навичок раціональних обчислень і тотожних перетворень. Дані навички виробляються в процесі будь-якої обчислювальної роботи, проте, необхідно створювати спеціальні умови для відпрацювання швидкості даних обчислень і перетворень.

4.3. ФУНКЦІЇ

Волошена В. В.

В процесі вивчення лінії «Функції» курсу алгебри і початків аналізу здійснюється повторення, систематизація матеріалу щодо функцій, який вивчався в основній школі, його поглиблення і розширення, зокрема за рахунок степеневих функцій; вводиться поняття тригонометричних функцій кута будь-якої величини та тригонометричних функцій числового

аргументу; доводяться основні властивості тригонометричних функцій і будуються їх графіки; вводиться поняття оберненої функції, обернених тригонометричних функцій та розглядаються їх властивості і графіки; вивчаються показникова та логарифмічна функції.

Головною її метою є підготовка учнів до вивчення нових класів функцій (тригонометричних, показникових, логарифмічних), а також мотивація необхідності розширення апарату дослідження функцій за допомогою похідної та інтеграла. [1]

Одним із головних завдань вивчення даної лінії є розвиток графічної культури учнів. Сучасний світ потребує компетентного випусника здатного працювати з діаграмами, рисунками і графіками. Тобто, можна стверджувати, що читання графіків, а саме встановлення властивостей функції за її графіком, являється прерогативою вивчення даної лінії.

Система навчальних задач функціональної змістової лінії містить такі групи задач:

1. задачі на обчислення (серед яких, задачі на знаходження значення функції в точці, області визначення та множини значень функції, знаходження критичних, стаціонарних точок, точок перегину, проміжків монотонності, опуклості та ін.);
2. задачі на трансформації способу задання функції;
3. задачі конструювання функцій (конструктивні задачі);
4. задачі на доведення властивостей функцій;
5. задачі на дослідження властивостей функцій;
6. задачі математичного моделювання функції.

У більшості шкільних підручників алгебри і початків аналізу простежується поетапність у вивченні степеневі функції, узагальнюються отримані раніше результати і відкриваються нові, формуються властивості диференційованості і інтегрованості функції.

Учні часто плутають степеневу функцію з показниковою. Щоб цього не траплялося, необхідно відразу ж звернути їх увагу на те, де міститься аргумент: якщо в основі степеня — степенева, якщо в показнику степеня — показникова. Вчитель повинен знати, що степеневу функцію можна замінити показниковою, використовуючи основну логарифмічна тотожність (з вузівського курсу математичного аналізу).

Показникова функція, що має важливе значення в багатьох галузях науки і техніки при вивченні різних процесів і явищ, традиційно представлена в старшій школі. Доцільно вивчення показникової функції почати з задач, що підводять до необхідності розгляду нової функції. Введення поняття показникової функції доцільно здійснювати за тією самою методичною схемою, за якою вивчалися всі попередні функції.

На етапі мотивації доцільно навести приклади залежностей, які виражаються через показникову функцію (див. таб. 4.2.1). Можна поміркувати про те, що згідно із законом показникової функції розмножувалося б все живе на Землі, якби для цього були сприятливі умови, тобто не було би природніх ворогів і було вдосталь їжі. Доказ тому поширення в Австралії кроликів, яких там раніше не було. Досить було випустити пару особин, як через деякий час їх потомство стало національним лихом. У природі, техніці та економіці зустрічаються численні процеси, в ході яких значення величини змінюється в одне і те ж число раз, тобто за законом показникової функції. Ці процеси називаються процесами органічного зростання або органічного загасання. Наприклад, зростання бактерій в ідеальних умовах відповідає процесу органічного зростання; радіоактивний розпад речовини — процес органічного загасання.

Приклад. При радіоактивному розпаді маса m речовини змінюється з часом t за законом $m = m_0 a^t$, де m — маса речовини через t років після початку розпаду, m_0 — початкова маса речовини, a — стала для даної речовини.

Виклад матеріалу про властивості функції $y = a^x$ в підручниках проводиться по-різному: в одних формулюються властивості з опорою на формулу, що задає функцію, і на властивості степеня з дійсним показником; в інших — в процесі аналізу графіків окремих випадків функції, побудованих по точках; по-третє — використовуються обидва підходи спільно. Важливо, щоб після цієї роботи учні усвідомили основні властивості функції і ілюстрували їх на виконаному графіку, чітко уявляли собі без зорової опори схематичний графік для $a > 1$ і $0 < a < 1$ і могли б читати властивості при конкретних значеннях a .

Логарифмічна функція, як і показникова, відноситься до класу трансцендентних функцій. В основі визначення показникової функції лежить поняття степеня з дійсним показником, а логарифмічна функція вводить на основі поняття логарифма, яке близьке пов'язане зі степенем числа. У нових умовах показник степеня отримує іншу назву — логарифм (від грецьких слів «логос» — ставлення і «арітмос» — число).

Короткий огляд взаємозв'язку двох понять — степеня і логарифма вже зумовлює існуючий зв'язок між логарифмічною і показовою функціями з однією і тією ж основою. Ці дві функції — класичний приклад взаємно обернених функцій, що дає можливість в методичному плані вибирати порядок їх вивчення в школі. За традицією логарифмічна функція все ж вивчається після показникової. Оскільки детального розгляду зв'язку між оберненими функціями в школі не передбачено, то вони вивчають-

ся окремо. Однак симетричність їх графіків при однаковій основі відносно прямої $y = x$ ілюструється, що характерно для обернених функцій.

Перш ніж вводити логарифмічну функцію як функцію, обернену до показникової, доцільно ввести означення логарифма числа b за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) як показника степеня, до якого треба піднести число a , щоб дістати число b , і запровадити символ $\log_a b$. Треба звернути увагу учнів на те, що логарифмічна рівність $\log_a b = x$ і показникова $ax = b$ виражають те саме співвідношення між числами a , b і x . За цими рівностями можна знайти одне з трьох чисел, яке до них входить. Варто розв'язати кілька вправ на перехід від показникових до логарифмічних рівностей, а відтак ввести основну логарифмічну тотожність і розв'язати кілька усних вправ на її застосування до обчислення значень виразів.

Використання логарифмів для задоволення практичних потреб людини стало невід'ємною частиною нашого життя. Метод використання логарифмів дозволяє скоротити і полегшити складні обчислення, також він лежить в основі фізичних і сейсмологічних процесів, що протікають в природі, допомагає визначити подразливість людини в тій чи іншій ситуації, навіть люди, які проживають в селах і тримають корів, з легкістю можуть застосовувати логарифми для обчислення ваги теляти. Логарифми можна використовувати при знаходженні банківського відсотка за вкладом. Знаючи відсоток по вкладах, який пропонують різні банки, можна визначити, який із них більш вигідний на даний момент. Логарифмічні залежності (див. таб. 4.2.2) можна розглянути з учнями позаурочно, давши завдання чи проект.

Згідно з теорією укрупнення дидактичних одиниць для покращення та полегшення сприйняття та запам'ятовування нової навчальної інформації, схожої за змістом, необхідно поєднувати їх у часі та просторі. На прикладі теми «Показникова та логарифмічна функції» наведемо приклади застосування окремих положень цієї теорії під час викладання:

1. Подавати інформацію у графічній формі.
2. Подавати інформацію про об'єкти, які характеризуються двома параметрами, у формі таблиці. У формі таблиці доцільно групувати суттєві ознаки поняття, оскільки кожне поняття характеризується обсягом та змістом.
3. Шукати аналогії в об'єктах, що відносяться до різних тем. Загальна форма відповідного запитання: В чому схожість та різниця об'єктів А та В? Таке запитання змушує учнів зосередитись на суті кожного з об'єктів.

-
-
4. Формулювати запитання у загальній формі шаблонів зі змінними. Прикладом є запитання з п. 3. Така форма запитання привчає учнів до виділення змісту запитання, загального для різних об'єктів.
 5. Встановлювати відповідності між елементами пов'язаних множин. При засвоєнні понять доцільно встановлювати зв'язки між різними ознаками поняття, при цьому формулювати запитання у формі шаблонів зі змінними. Наприклад, яка область визначення функції A ? Які функції мають область визначення B ?
 6. Вивчати одночасно (на одному чи сумісних заняттях) взаємно обернені дії та операції.
 7. Зіставляти різні методи доведення.

В ході вивчення властивостей показникової, логарифмічної і степеневої функцій учні систематично розв'язують найпростіші показникові і логарифмічні рівняння і нерівності, а також ірраціональні рівняння. У міру закріплення відповідних умінь доцільно також пропонувати їм рівняння і нерівності, що зводяться до найпростіших в результаті нескладних тотожних перетворень.

Вивчення тригонометричних функцій має першорядне освітнє і виховне значення: воно розширює і поглиблює систему значень учнів в області вивчення функцій, сприяючи вихованню і розвитку їх функціонального мислення; допомагає наочно проілюструвати найважливіші загальнофункціональні властивості (періодичність, парність і непарність, монотонність); дозволяє учням теоретичні знання і досвід широко використовувати в суміжних предметах (особливо у фізиці); дає можливість усвідомити практичне застосування в діяльності, т. к. вони (і їх комбінації) — модель багатьох реальних періодичних процесів, провести вимірювальні роботи на місцевості (вимірювання висоти предмета і відстань до недоступної точки).

У науковій і навчально-методичній літературі є різні системи викладу теорії тригонометричних функцій, значною мірою обумовлені відповідними визначеннями цих функцій. Існують аналітичні та геометричні способи побудови теорії. Аналітичне визначення можна дати за допомогою степеневих рядів, диференціального рівняння, інтеграла, функціональних рівнянь. Зважаючи на складність базового апарату ці логічно бездоганні варіанти поки на уроках не застосовні, але можуть бути затребувані на факультативних заняттях або елективних курсах в 11-му класі, щоб показати інший підхід до введення цих функцій. Більш звичний для загальноосвітньої школи геометричний спосіб, який вдосконалювався в методичному відношенні багаторазово. Існують різні варіанти геометричних визначень тригонометричних функцій: через зіставлення

сторін в прямокутному трикутнику, за допомогою тригонометричного кола (кола Ейлера) і «тригонометричних ліній», координатне, векторне, з використанням поняття проекції відрізка на пряму і ін. У більшості шкільних підручників геометрії, алгебри і початків аналізу перевага віддається визначенням за допомогою одиничного кола як найбільш вдалим і сучасним на даному етапі вивчення тригонометричних функцій. Цей варіант, як показує шкільна практика, відрізняється більшою доступністю і наочністю; він спирається на відомі з геометрії факти (система координат, рівняння і графік кола, перетворення повороту) і визначення функції з алгебри.

В курсі алгебри і початків аналізу триває вивчення чотирьох основних тригонометричних функцій кута, але слово «кут» розуміється не в його звичному геометричному сенсі, а як «кут повороту» — спрямована величина, яка може приймати будь-які значення. Узагальнення поняття кута можна зробити, розглядаючи обертальний рух, про який учні знають з курсу фізики. Зокрема, їм відомо, що мірою обертання служить величина кута повороту.

Н-д. Наочним образом можуть стати стрілки годинника: відзначивши положення хвилиної стрілки в 12 ч, будемо розглядати кут між цим її положенням в різні інші моменти: через 15 хв він буде рівним 90, через 30 хв — 180, через годину — 360, через півтори години — 540, через дві години — 720 і т.д. У тригонометрії будь-яким кутом розглядають як результат обертання променя в площині навколо початкової точки. Обертаючи промінь навколо цієї точки від його початкового положення до кінцевого, отримуємо кут, який можна уявити як кілька (можливо, жодного) повних обертів і частина повного обороту.

В процесі роботи з числовим колом в учнів мають бути сформовані наступні уміння: знаходити на числовому колі точки, що відповідають заданим числам; складати аналітичні записи для дуг числового кола; визначати належність точки певній координатній чверті; працювати одночасно в двох системах координат — криволінійній і прямокутній декартовій та здійснювати перехід від однієї системи координат до іншої; знаходити координати точок числового кола та за заданими координатами точки на числовому колі.

Після роботи з числовим колом як самостійним об'єктом можна переходити до введення власне тригонометричних функцій. Не варто забувати, що визначення тригонометричних функцій за допомогою числового кола погано укладаються у свідомості учнів, оскільки на першому етапі

визначення синуса, косинуса, тангенса, котангенса було дано в геометричному трактуванні — як відношення сторін прямокутного трикутника.

Перед тим, як перейти до дослідження і побудови графіків тригонометричних функцій, необхідно, щоб в учнів були відпрацьовані наступні навички: знаходження значень усіх тригонометричних функцій у певних точках; розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь і нерівностей; визначення знаків тригонометричних функцій у заданих точках; спрощення виразів з використанням основної тригонометричної тотожності і формул зведення; знаходження за заданим значенням однієї з тригонометричних функцій значень усіх інших тригонометричних функцій. Набуваючи вище перерахованих навичок, учні отримують арсенал засобів, достатній для ґрунтовнішого дослідження і побудови графіків тригонометричних функцій. Робота щодо побудови графіків і дослідження функцій може проводитися двома способами: спочатку за точками будується графік, а потім за допомогою графічної інтерпретації досліджуються усі властивості функції; побудова графіку відбувається після дослідження функції, а наочні уявлення про властивості учні отримують, аналізуючи поведінку функцій на числовому колі.

Найдоцільніше застосовувати другий підхід, оскільки при цьому підході, по-перше, всі властивості тригонометричних функцій ілюструються на обох моделях (на числовому колі і графіку), а, по-друге, це є доброю підготовчою роботою для подальшого навчання дослідженню функцій і побудови графіків за допомогою похідної. Попри те, що аналізуючи поведінку функції на числовому колі, ми лише ілюструємо деяку властивість, не варто забувати, що іноді «доведення» за допомогою кола є єдиним доступним для учнів способом обґрунтування деяких фактів. Хоча деякі випадки вимагають чіткішого обґрунтування сформульованих тверджень. Зупинимось детальніше на окремих властивостях тригонометричних функцій. Чіткого обґрунтування того, що областю значень функцій синус і косинус є відрізок $[-1; 1]$ в жодному з діючих підручників ЗНЗ не наводиться, а замість цього розглядаються нерівності $-1 \leq \sin x \leq 1$ і $-1 \leq \cos x \leq 1$, які виконуються для всіх значень x . Проте, звідси зовсім не впливає, що в область значень даних функцій входять всі точки відрізка $[-1; 1]$. На це варто звернути особливу увагу, щоб розмежувати дві різні властивості: обмеженість і область значень.

Після знаходження області значень доцільно розглянути властивість обмеженості функцій косинус і синус та провести взаємозв'язок між цими властивостями не лише для тригонометричних, але й для інших класів функцій. При розгляді властивості монотонності тригонометричних функцій у більшості діючих підручників не наводиться чіткого

доведення зростання функцій синус і косинус на проміжках $[-\pi/2; \pi/2]$ і $[-\pi; 0]$ відповідно, а обґрунтування цих фактів проводиться з опорою на числове коло: при русі точки по четвертій і першій чвертям кола у додатному напрямку (від $-\pi/2$ до $\pi/2$) її ордината поступово збільшується (від -1 до 1), це означає, що функція синус є зростаючою на цьому проміжку. Більш строге доведення даного факту наводиться з використанням формули різниці синусів і застосовується, коли тригонометричні перетворення вивчаються раніше тригонометричних функцій, тобто коли формула різниці синусів до моменту дослідження тригонометричних функцій є вже відомою.

Доведення зростання функції тангенс на інтервалі $(-\pi/2; \pi/2)$, найдоцільніше проводити аналогічно, використовуючи формулу різниці тангенсів. Якщо ж викладання ведеться за підручниками, в яких тригонометричні перетворення вивчаються після функцій, тобто формула різниці тангенсів до моменту дослідження функцій ще невідома, доведення краще проводити, розбивши інтервал $(-\pi/2; \pi/2)$ на два напівінтервали $[0; \pi/2)$ і $(-\pi/2; 0]$. Обґрунтування зростання функції тангенс на напівінтервалі $[0; \pi/2)$ не є складним і наведено в усіх підручниках, а доведення монотонності на другому інтервалі автори підручників [3] і [7] чомусь вважають складним і опускають зовсім. Тому вчителю варто звернутися до підручника [5], у якому дано досить строге, але водночас нескладне доведення.

Доведення монотонності функції котангенс доцільно запропонувати провести самостійно. Після того, як учні достатньо добре навчилися оперувати властивостями тригонометричних функцій, можна переходити до розв'язування тригонометричних рівнянь і тригонометричних перетворень.

Наявний часовий розрив з основним блоком певною мірою зумовлює методику вивчення цих питань: на уроці необхідно повторювати основні моменти пройденого, встановлювати аналогію з раніше вивченими алгебраїчними функціями, розглядати нові взаємозв'язки і залежності, усвідомлювати універсальність досліджуваних методів і ін.

4.4. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Волошена В. В.

Рівняння складають одну із основних змістовно-методичних ліній шкільного курсу алгебри. Вони є засобом розширення, поглиблення та закріплення теоретичних знань учнів. Апарат рівнянь широко використовується при розв'язуванні математичних задач. Уміння розв'язувати рів-

няння та нерівності знадобиться і при знаходженні області визначення, і при побудові графіків функцій, і при розв'язуванні геометричних задач.

Вивчення рівнянь і нерівностей не тільки як абстрактних математичних понять, а й у формі моделей реальних природних процесів та явищ, сприяє органічному поєднанню теоретичного матеріалу даного розділу з матеріалом попередніх розділів, дає учням можливість зрозуміти зв'язок між поняттями курсу, чим створює сприятливі умови для їх вивчення. Також сприяє більш кращому засвоєнню і зв'язок з вивченням властивостей відповідних функцій. Єдиного загального способу розв'язання трансцендентних рівнянь та нерівностей не існує, тому доцільно ознайомлювати учнів із способами найпростіших видів рівнянь, групувати за способами і нерівності, і вже згодом розв'язувати складні, які зводяться до простіших.

Розв'язування ірраціональних рівнянь пов'язується з вивченням властивостей кореня n -го степеня. Завдання, які представлені в діючих підручниках направлені на ознайомлення учнів зі способом розв'язання найпростіших ірраціональних рівнянь до складу яких входять корені, як правило, 2 і 3-го степенів. Основною метою при розв'язуванні таких рівнянь є зведення ірраціональних рівнянь до алгебраїчних методом перетворень, які дають можливість позбутися коренів. Доцільно ознайомити учнів з двома способами розв'язування ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин рівняння до степеня з показником, рівним показнику кореня, що входить до n -ня; введення допоміжної змінної.

Розв'язання тригонометричних рівнянь та нерівностей закріплює знання та уміння чнів про властивості тригонометричних функцій Вони дають багатий матеріал для застосування всіх тригонометричних формул, створюють можливість для розвитку творчої діяльності учнів, маючи широке застосування в складних завданнях. Математичного визначення тригонометричного рівняння і нерівності в шкільному курсі немає, оскільки наукове визначення буде досить важким для розуміння, тому в більшості підручників дані некоректні розпливчасті визначення типу: тригонометричними рівняннями називаються рівняння, що містять невідоме (змінну) тільки під знаком тригонометричної функції. Такого визначення для учнів достатньо для того, щоб вказати деяку область, з якої рівняння і нерівності розв'язуються способами, досліджуваними при вивченні відповідної теми. Необхідно наголосувати, що розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь (нерівностей) не є тим, чи іншим, як знаходження кута (числа) за заданим значенням тригонометричної функції.

Подібні завдання розв'язувались в курсі геометрії при розв'язанні трикутників. Тепер їх розв'язання розглядається за допомогою одиничного кола; вводяться поняття арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса числа, які виступають в якості імені головного кута, для якого та чи інша функція має задане значення. На рівні стандарту знайомство з арками здійснюється лише на рівні розуміння, оскільки це необхідно для компактного запису розв'язання рівняння або нерівності. Основною відмінністю тригонометричних рівнянь від алгебраїчних є те, що при розв'язанні вони мають безліч розв'язків. Цю відмінність для кращого розуміння учнями вчителю необхідно підкріплювати наочною, а саме графіками тих самих функцій, і навчити учнів вибирати тільки правильні корені на області визначень.

Також достатню увагу при розв'язанні тригонометричних рівнянь і нерівностей слід приділяти формуванню навичок застосування тотожностей для перетворення даних рівнянь і нерівностей, тому що деякі тотожності, використовувані в перетвореннях, неабсолютні, тобто призводять до зміни області визначення (якщо вона звужується — коріння губляться, якщо розширюється — з'являються сторонні рішення).

Вельми важким в методичному плані є питання про відбір коренів тригонометричних рівнянь. Вчити відбору коренів треба саме на найпростіших рівняннях, заклавши відповідні сюжети в систему вправ. Адже необхідно усвідомити структуру формули коренів, зрозуміти роль параметра у формулі коренів. При цьому корисно показати школярам обидва відомих прийоми: перебір по параметру і розв'язання подвійної нерівності.

Раціонально познайомити учнів і з методом інтервалів для розв'язання нерівностей, що містять тригонометричні функції. При використанні цього методу до чисто тригонометричних нерівностей замість числової осі зручно використовувати числове коло, яке корінням відповідних тригонометричних рівнянь (чисельника і знаменника) розбивається на дуги, які відіграють ту ж роль, що і інтервали на числової осі. На цих дугах тригонометричний вираз, відповідне до нерівності, що розв'язується має постійні знаки, для визначення яких можна використовувати правило окремої «зручної» точки і властивість кратності коренів. Часто для визначення самих дуг зовсім не треба знаходити все (нескінченне) безліч коренів відповідних рівнянь; досить з цих рівнянь знайти значення основних тригонометричних функцій (синуса, косинуса, тангенса, котангенса) і на числовому колі відзначити точки, які відповідають цим значенням.

Показникові рівняння і нерівності, згідно чинних програм вивчення математики, є частиною теми «Показникова та логарифмічна функція». Вони вивчаються після того, як були введені поняття степеня з дійсним показником та показникової функції. По завершенню вивчення учні мають опанувати графічний спосіб розв'язування, спосіб рівносильних перетворень найпростіших показникових рівнянь та нерівностей, спосіб зведення показникових рівнянь та нерівностей до найпростіших, спосіб заміни змінної.

Розпочнемо з задач природничого змісту, які приводять до поняття показникового рівняння. До таких задач слід віднести задачі, умова яких містить явно або приховано показникову функціональну залежність з параметрами, після знаходження значень яких одержують показникові рівняння. Фабула цих задач також різноманітна, це може бути задача про залежність кількості деревини (в кубометрах), яку одержують з ділянки лісу певної площі, від нахилу поверхні (в градусах), на якій росте ліс; вмісту білка у траві від часу після її покосу; чисельності популяції бактерій, на яку діє антибактеріальний агент, від часу та ін.

Показниковими називаються рівняння, в яких невідоме число входить тільки в показник степеня при постійній основі. У класі показникових рівнянь можна вказати підкласи найпростіших рівнянь, до яких зводиться рішення більш складних завдань, а саме $a^x = b$ і $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 0$. Кожен найпростіший клас тісно пов'язаний з класом відповідних функцій, формули розв'язання і дослідження найпростіших рівнянь спираються на властивості показникових функцій.

Необхідно ознайомити учнів з деякими способами розв'язання окремих типів рівнянь (і нерівностей), тому що загального методу немає, а на розв'язання на уроках в класах рівня стандарту дуже складних, громіздких рівнянь і нерівностей часу немає, отже слід приділити увагу на розуміння учнів спочатку типу самих рівнянь і вже тоді самого розв'язання.

Після введення означення показникового рівняння виділяють типи рівнянь і з'ясовують способи їх розв'язування. На цьому етапі вивчення розгляд практичних проблемних ситуацій має деякі особливості, пов'язані з практичним змістом цих ситуацій. Не всі типи показникових рівнянь можуть відігравати роль моделі природничого процесу (принаймні загальновідомого і посильного розумінню учнів). В той же час існують типи показникових рівнянь, з допомогою яких можна математично описати найрізноманітніші за тематикою явища і процеси. При розв'язуванні цих рівнянь як правило використовується логарифмування.

Введення означення логарифмічного рівняння та вивчення способів розв'язування логарифмічних рівнянь також повинно по-можливості супроводжуватись розглядом природничих проблемних ситуацій.

Під час навчання учнів розв'язувати логарифмічні рівняння необхідно використовувати набутті вміння про логарифмічні тотожності, властивості логарифмів, а також ввести поняття операції потенціювання. Необхідно наголошувати на область визначення логарифмічної функції, а саме множина додатніх чисел, варто ще до розв'язування рівняння навчити учнів не забувати знаходити область визначення виразів, що входять до складу рівнянь. Слід наголошувати учням на можливість порушень еквівалентності логарифмічних рівнянь внаслідок виконання тотожних перетворень.

Доцільно звести до системи основні способи розв'язання логарифмічних рівнянь. Найпростіше рівняння $\log_a f(x) = b$ розв'язується за означення логарифма, або способом зведення до рівності логарифмів з однією основою. Останній прийомом використовують при розв'язанні складніших рівнянь. Доцільно виділити чотири способи розв'язування таких рівнянь : спосіб потенціювання; спосіб введення допоміжного невідомого; застосування формули переходу від однієї основи до іншої; графічний спосіб.

Теоретичною основою розв'язання логарифмічних нерівностей є властивість монотонності логарифмічної функції. Способи розв'язання логарифмічних нерівностей аналогічні способам розв'язування логарифмічних рівнянь.

4.5. ПОЧАТКИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Волошена В. В.

У старшій школі учні приступають до систематичного вивчення основ розділу математики, який називають «математичний аналіз» (або просто «аналіз»), який збагачує ідейний зміст функціональної лінії і розширює її прикладну сторону. Вивчення матеріалу має бути орієнтоване на змістовне розкриття понять, тверджень і методів, виявлення їх практичної значущості, на організацію активної самостійної пізнавальної діяльності учнів із залученням наочних міркувань, інтуїції, кмітливості, досвіду і попередніх знань. Техніка диференціювання і інтегрування доводиться лише до рівня, достатнього для дослідження елементарних функцій і вирішення різноманітних прикладних задач. Учителю повинен мати на увазі, що не весь матеріал, викладений в підручниках, необхідно формувати на рівні перевірки самостійного його відтворення учнями. Тому

необхідно керуватися вимогами до рівня підготовки випускників, встановленими нормативними документами.

У шкільних підручниках з алгебри і початків аналізу першорядне значення приділяється центральним поняттям розділу — похідній і первісній, які забезпечуються різноманітними змістовними завданнями різного ступеня складності. Окремі завдання включаються в ЗНО. Інші поняття розкриваються в додаткових пунктах, які вивчаються в профільних класах або призначені для учнів, які виявляють підвищений інтерес до математики.

Неперервність — одне з основних для математичного аналізу властивостей функції; вимога неперервності присутній в більшості найважливіших теорем аналізу. Походження цього терміна чисто геометричне — в період зародження аналізу функція вважалася неперервною, якщо її графік являв собою неперервну (суцільну) лінію (криву), яку можна провести, не відриваючи олівець від паперу. Таким інтуїтивним поняттям неперервності функції учні широко користувалися при побудові графіків в курсі алгебри основної школи. Наносячи на координатну площину деяке число точок, вони з'єднували їх плавною лінією. І не замислювалися, а чи завжди ми можемо так поступати. У старших класах і розв'язується ця проблема: перш ніж побудувати графік треба з'ясувати, чи є дана функція неперервною і диференціюється (графік не буде містити кутових точок), а для цього потрібно мати відповідні визначення та алгоритми.

У всіх методичних посібниках з початків аналізу підкреслюється загальноосвітнє, світоглядне і прикладне значення змісту матеріалу, що включає основні поняття, твердження, методи, в обсязі, який дозволяє досліджувати елементарні функції і вирішувати найпростіші алгебраїчні, геометричні, фізичні, економічні та інші практичні завдання. Вивчення матеріалу має бути орієнтоване на змістовне розкриття понять, тверджень і методів, виявлення їх практичної значущості, на організацію активної самостійної пізнавальної діяльності учнів із залученням наочних міркувань, інтуїції, кмітливості, досвіду і попередніх знань. Техніка диференціювання і інтегрування доводиться лише до рівня, достатнього для дослідження елементарних функцій і вирішення різноманітних прикладних задач.

Одна з основних цілей математичної освіти — виховання вміння математично досліджувати явища реального світу. Значить, потрібно навчити школярів складати математичні моделі реальних ситуацій, а для цього вони повинні володіти математичною мовою, що описує зазначені моделі. Для математичного дослідження явищ реального світу особливо значущими виявляються поняття границі і похідною, так як це — ос-

новні поняття тої мови, якою розмовляє природа. Безумовно, випускник середньої школи повинен мати уявлення про границі і похідну, про їх застосування для дослідження реальних процесів.

В усіх підручниках розглянуті дві класичні задачі — про миттєву швидкість прямолінійного руху і про дотичну до графіка функції, процес розв'язання яких призводить до появи нової (для учнів) математичної моделі — границі відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля. Принципове методологічне значення має висновок, який робить вчитель слідом за авторами підручників на підставі розгляду конкретних завдань. Різні завдання з різних областей знання призводять до однієї і тієї ж математичної моделі. Зайнятися вивченням нової моделі означає, що потрібно: 1) присвоїти їй новий термін; 2) придумати для неї нове позначення; 3) вивчити правила оперування з новою моделлю і сферу її застосування. Для даної моделі використовується термін похідна і позначення y' , а правила оперування і сфера застосування моделі вивчаються на сторінках діючих підручниках.

З'ясування біологічного та хімічного змісту похідної дає можливість розглядати цікаві прикладні задачі, в яких йдеться про природничі процеси та явища, а також задачі з медичною тематикою. Серед них можна виділити задачі, в розв'язуванні яких похідна відіграє першорядну роль.

Дуже важливо навчити школярів за графіком описувати властивості функції, переходити від заданої геометричної моделі (графіка) до вербальної (словесної) моделі. Наявність в курсі алгебри і початків математичного аналізу досить великого числа властивостей функцій дозволяє зробити процес читання графіка цікавим, різноманітним з літературної точки зору і багатоплановим. Учень повинен вміти скласти досить чіткий «словесний портрет» функції по її графіку. Починаючи з вивчення функцій в 7-му класі вчителі постійно привчали учнів бачити за графіком область визначення функції, її парність або непарність, монотонність, обмеженість, найбільше та найменше значення функції, безперервність, область значень, опуклість. Важливо навчити учнів знімати з графіка функції і інформацію про її диференційність. Наприклад, як на око визначити, диференційована функція, графік якої зображено на конкретному малюнку? Відповідь на це питання дає важливе правило, що мають запам'ятати учні: якщо в деякій точці до графіка функції можна провести дотичну, що не паралельну осі ординат, то функція диференційована в точці. Якщо ж ми маємо «точку стику», «точку загострення» або точку, в якій дотична до графіка паралельна осі ординат, то в цій точці похідна функції не існує, функція недиференційна.

У більшості підручників на школярів обрушують відразу майже всі формули диференціювання, що, на наш погляд, небажано: за кількістю формул вони перестають бачити головне на цьому етапі навчання — вихідну математичну модель. Формули диференціювання радимо вводити поступово. І навіть якщо мова йде про рівняння дотичної до графіка функції, краще обмежитись елементарними формулами — з тієї ж причини: відпрацьовується саме рівняння дотичної, а не техніка диференціювання.

З відомих правил диференціювання одне в підручниках відсутнє — правило диференціювання складної функції представлено лише в одному підручнику [9].

Аналізуючи діючі шкільні підручники з курсу алгебри і початків аналізу доходимо висновку, що в більшості з них обмежуються розглядом класичних задач, що приводять до поняття похідної, розглядають прикладні задачі пов'язані лише з механічним змістом похідної та окремі прикладні задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значень функції.

З'ясування біологічного та хімічного змісту похідної дає можливість розглядати з учнями цікаві прикладні задачі в яких йдеться про природні процеси та явища, а також задачі з медичною тематикою. Серед них можна виділити задачі в розв'язуванні яких похідна відіграє першорядну роль та прикладні задачі на застосування похідної з метою дослідження функції на монотонність, екстремум, знаходження найбільшого та найменшого значень функції тощо.

Наприклад. Кількість хворих $p(t)$ під час епідемії групи змінювалась з часом t (вимірюється у днях) від початку вакцинації населення за законом $p(t) = \frac{200t}{t^2 + 100}$. Визначте час максимуму захворювання, інтервали його зростання і спадання та побудуйте графік заданої функції.

Ця задача просто на дослідження графіка функції і не потребує певних знань з суміжних предметів, але її фабула викликає зацікавленість майбутніх спеціалістів медичної галузі.

Дослідження функцій одна з головних практико-орієнтованих задач даної змістової лінії. Вміння читати і розуміти графіки вже було відпрацьоване ще у 9 класі на уроках алгебри, а от досліджувати графіки за допомогою функцій і навпаки будувати графіки на основі дослідження це нові навички, які необхідно привити учням. На початку теми необхідно ввести ряд нових для учнів понять, а саме, точка максимуму функції, точка мінімуму функції, точка екстремуму, максимум функції, мінімум функції, екстремуми функції. Як показує практика, деякі учні плутаються в поняттях «точка максимуму функції», «максимум функції», «точки екстремуму функції», «екстремум функції», тому учителю необхідно

більш уважно підходити до пояснення цих питань, наприклад, підкреслити, що коли йдеться про точки максимуму (мінімуму), точки екстремуму функції, то мається на увазі значення аргументу, а в разі вживання понять максимум (мінімум), екстремум йдеться про значення функції.

Основні теореми змістової лінії курсу «Похідна та її застосування», які використовуються в практичних розрахунках, представлені необхідною і достатньою умовами існування екстремумів функцій. Тому прикладні задачі, складені на основі даних теорем, застосовуються для повторення або закріплення знань і формування вмінь використовувати ці теореми в нових умовах, що створюються прикладним змістом навчальної задачі. Розглянемо задачі природничого змісту, в яких похідна застосовується з метою дослідження функції на екстремум.

Н-д. Реакція організму на введені ліки може виражатися у підвищенні кров'яного тиску, зменшенні температури тіла, зміні пульсу чи інших фізіологічних показників. Припустимо, що через x позначено дозу призначених ліків, а ступінь реакції y визначається функцією $y = f(x) = x^2(a - x)$, де a — деяка додатна стала. При якому значенні x реакція максимальна?

Сформульована задача є прикладом задачі природничого змісту, математична модель якої міститься в умові. Її можна розглянути на етапі актуалізації знань для створення проблемної ситуації перед вивченням достатньої умови існування екстремуму в точці. Після того, як учні будуть ознайомлені з достатньою ознакою екстремуму і правилом дослідження функції на екстремум, корисно розглянути з ними розв'язання цієї задачі та запропонувати для самостійного розв'язування декілька подібних задач.

В більшості підручників автори замінують строгі докази правдоподібними міркуваннями, заснованими на фізичному або геометричному сенсі похідної. З нашої точки зору, це цілком прийнятно, але лише за умови, що правдоподібні міркування не видаються за докази — така підміна понять завдає значної шкоди формуванню математичної культури школяра. Але з такою кількістю годин, яка виділяється на дану тему, це єдиний вихід.

У підручниках зустрічається різний порядок викладу питань інтегрального числення, особливо це стосується первісної і певного інтеграла (спочатку первісна, потім інтеграл або навпаки); різні формулювання визначень понять, наприклад, певний інтеграл як приріст первісної, як межа інтегральних сум (так він історично виник), як площа криволінійної трапеції, в визначення первісної не всі автори включають проміжок, на якому розглядається первісна; не у всіх підручниках зустрічається весь

перелік понять теми, наприклад, не використовується невизначений інтеграл, а певний інтеграл називається просто інтегралом і ін. Підручники відрізняються і обсягом матеріалу, запропонованого для вивчення. У загальноосвітніх класах воно зведене до мінімуму і передбачає ознайомлення тільки з поняттям первісної і застосуванням її до обчислення площі криволінійної трапеції, спираючись на інтуїцію і досвід учнів. Суттєву допомогу надасть використання методу аналогії, його використання обумовлене тим, що операції диференціювання і інтегрування «схоже» влаштовані (обидві операції взаємно зворотні). У методичній літературі навіть існує рекомендація спільного вивчення цих операцій.

Традиційним для школи способом вводиться поняття первісної, обґрунтовуються правила і формули відшукування первісної.

В більшості підручників розглянуті дві задачі, що призводять до поняття визначеного інтеграла, — про обчислення площі криволінійної трапеції і про переміщення точки, вирішення яких призводить до однієї і тієї ж математичної моделі. І знову, як при введенні поняття похідної, важливе методологічне значення має висновок, який робить вчитель області підстави розгляду конкретних завдань. Різні завдання з різних областей знання призводять до однієї і тієї ж математичної моделі виду $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$. Значить, слід спеціально зайнятися вивченням цієї нової моделі, тобто присвоїти їй новий термін (визначений інтеграл), придумати для неї нове позначення $\int_a^b f(x) dx$ і вивчити правила оперування з новою моделлю. При обґрунтуванні формули Ньютона — Лейбніца в більшості підручниках обмежуються її фізичним тлумаченням.

Розпочинаючи вивчення теми «Інтеграл та його застосування», на етапі актуалізації опорних знань старшокласників варто пригадати окремі з численних прикладних задач про визначення: миттєвої швидкості нерівномірного руху, прискорення, сили струму, кутової швидкості, лінійної густини стержня, потужності, питомої теплоємності речовини даного тіла, швидкості хімічної реакції, швидкості зростання популяції, продуктивності праці за час t та результати їх розв'язування, одержані під час навчання теми «Похідна та її застосування».

Центральне місце у всьому розділі, пов'язаному з вивченням елементів інтегрального числення, займає обчислення площ плоских фігур. Основною фігурою в нашому підручнику вважається криволинійна трапеція — фігура, обмежена в координатній площини двома прямими $x = a$, $x = b$ і графіками безперервних на відрізьку $[a; b]$ функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$. Головне тут — побудова геометричних моделей і зняття відповідної інформації з креслення, а не обчислення

інтегралів. Не заради вивчення інтеграла обчислюються площі, на-
впаки, інтеграл вивчається заради знаходження площ.

У підручниках шкільного курсу алгебри і початків аналізу перед вве-
денням означення інтеграла розглядають задачу про площу криволінійної
трапеції. Дана задача розв'язується одним і тим самим методом, яким
розв'язуються багато інших прикладних задач (про масу неоднорідно-
го стержня; про шлях, який пройшло тіло при прямолінійному русі; про
роботу змінної сили; про силу тиску рідини на вертикально розміщену
пластинку; про кількість речовини, яка вступила в хімічну реакцію; про
чисельність популяції; про обсяг випуску продукції та інші). Будь-яка зі
згаданих задач може мотивувати введення поняття визначений інтеграл,
залежно від профілю класу в якому це поняття вивчається.

Для закріплення знань в 11 класі учням радимо показати таблицю
де можна пов'язати і похідну, і інтеграл з різними величинами з різних
областей знань.

Таблиця 4.5.4

**Застосування похідної та визначених
інтегралів до обчислення величин**

Функція	Знаходження похідної	Знаходження інте- грала
$S = s(t)$ Пройдений шлях за час t	$v_{\text{мит}} = v(t) = s'(t)$ миттєва швидкість	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
$v = v(t)$ Швидкість в певний момент часу	$a = v(t)'$ прискорення	$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$
$q = q(t)$ електричний заряд	$I = q'(t)$ сила струму	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$
$A = A(t)$ робота за час t	$P = A'(t)$ потужність	$A = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$

$Q = Q(t)$ кількість тепла отриманого тілом за час t	$c = Q'(t)$ питома теплоємність	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$
$P = P(t)$ чисельність популяції в момент часу t	$v = P'(t)$ швидкість зростання популяції	$P = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
$C = C(t)$ концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу t	$v = C'(t)$ швидкість хімічної реакції	$C = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
$u = u(t)$ Кількість виробленої продукції за час t	$z = u'(t)$ продуктивність праці	$u = \int_{t_1}^{t_2} z(t)dt$
$TC = TC(q)$ Витрати виробництва, що залежать від кількості продукції q	$MC = TC'(q)$ граничні витрати – необхідні для випуску додаткової одиниці продукту	$TC = \int_{q_1}^{q_2} MC(q)dq$
$TR = TR(q)$ Виручка виробництва, що залежать від кількості продукції q	$MR = TR'(q)$ гранична виручка – приріст сукупної виручки при збільшенні виробництва на одну одиницю	$TR = \int_{q_1}^{q_2} MR(q)dq$
$TP = TP(l)$ Кількість загального продукту, що залежить від кількості робітників l	$MPL = TP'(l)$ граничний продукт праці – скільки продукції дає фірмі додатковий працівник	$TP = \int_{l_1}^{l_2} MRL(l)dl$
$TP = TP(k)$ Кількість загального продукту, що залежить від кількості техніки (станків) k	$MPK = TP'(k)$ граничний продукт капіталу – скільки продукції дає фірмі додаткова одиниця техніки	$TP = \int_{k_1}^{k_2} MRK(k)dk$

Разом з учнями можна розглянути нескладні задачі. На основі формул запропонувати скласти власні вдома самостійно тощо.

Н-д. Обчисліть силу тиску води на вертикальний прямокутний щюз з основою 18 м і висотою 6 м.

Розв'язання. Сила тиску води залежить від глибини x занурення майданчика: $P(x) = ax$, де a — площа майданчика. Отримуємо

$$P = 18 \int_0^6 x dx = 18 \frac{x^2}{2} \Big|_0^6 = 324 \text{ (т)}.$$

Н-д. Тіло масою 1 рухається з прискоренням, що змінюється лінійно за законом $a(t) = 2t - 1$. Який шлях пройде тіло за 4 одиниці часу від початку руху $t = 0$, якщо в початковий момент його швидкість дорівнювала 2?

Розв'язання. Швидкість тіла в будь-який момент часу t обчислюється за формулою

$$v = v_0 + at.$$

Використовуючи дані задачі, отримуємо:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 (2 + (2t - 1)t) dt \\ &= \int_0^4 2 dt + \int_0^4 2t^2 dt + \int_0^4 -t dt = 2 \int_0^4 dt + 2 \int_0^4 t^2 dt - \int_0^4 t dt = \\ &= 2t \Big|_0^4 + 2 \frac{t^3}{3} \Big|_0^4 - \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{128}{3} \end{aligned}$$

Насправді існує величезний запас задач з фізики, біології, економіки, які можна використовувати при введенні поняття інтеграла, а при вивченні його властивостей обґрунтовувати їх за допомогою прикладних задач, при розгляді техніки інтегрування демонструвати методи на прикладах усе тих же прикладних задач. Таким чином, всі поняття, властивості, методи не тільки будуть надані учням як факти, але будуть і обґрунтовані, і продемонстровані, і покажуть межпредметні зв'язки математики з іншими предметами.

4.6. ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ

Волошена В. В.

Елементи стохастичності — порівняно новий розділ в шкільному курсі математики, який в підручниках подано у вигляді двох частин «Елементи теорії ймовірностей» та «Елементи математичної статистики».

Основною метою вивчення даної лінії — сформулювати в учнів уявлення про основні поняття теорії ймовірностей та виробити вміння застосовувати їх до розв'язування задач. В старшій школі Державним стандартом базової і повної середньої освіти [13] з математики передбачено розширення і поглиблення уявлень зі стохастичності, а саме: випадкові події; ймовірність випадкової події; умовні ймовірності; незалежні випадкові події; закон великих чисел; означення ймовірностей; статистичні та-

блиці; ряди розподілу та наочне їх зображення; мода і медіана; середні значення. Вивчення стохастики в старшій школі має сприяти поглибленню уявлень про математику як елемент загальнолюдської культури, про застосування її в практичній діяльності, в різних галузях науки. Вивчення елементів стохастики сприяє усвідомленню того, що багато законів природи і суспільства є імовірнісними, багато реальних явищ і процесів описуються імовірнісними моделями, які вивчаються математичними методами. Тому важливо формувати в учнів правильне розуміння про теорію ймовірності як науку, дотримуючись наукового принципу, розширюючи знання математичних моделей та створюючи для них імовірнісні моделі. Саме моделювання, побудову й дослідження різноманітних моделей вважають потужним засобом вивчення природи, світу та методом пізнання дійсності. Математична модель реального об'єкта або процесу може бути подана у вигляді формули (функції, рівняння, нерівності), таблиці, діаграми, схеми, геометричної фігури, пропорції тощо. Основним засобом навчання учнів математичного моделювання є задачі. Вдало дібрана система задач забезпечує формування навичок та вмінь і математичного моделювання на досить високому рівні.

Знайомство учнів з елементами стохастики відкриває широкі можливості для ілюстрації значущості математики в вирішенні прикладних задач. Володіння азами комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики дозволяє на змістовних (як в математичному, так і прикладному відношеннях) прикладах вивчати різні процеси, показувати відому універсальність математичних методів, демонструвати основні етапи вирішення прикладних завдань засобами стохастики. В цілому знайомство учнів з елементами стохастики підсилює прикладну спрямованість курсу математики.

Стохастична лінія будується як об'єднання трьох взаємопов'язаних складових елементів комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики і включається в навчання як в основний, так і в старшій школі і спрямована на формування здібностей застосовувати класичну, статистичну та геометричну моделі ймовірності при вирішенні прикладних і практичних завдань; прогнозувати наступ подій на основі ймовірнісно-статистичних методів; використовувати отримані вміння для вирішення завдань в суміжних дисциплінах.

Одна з головних особливостей ймовірнісно-статистичної лінії в школі полягає в тісному зв'язку абстрактних понять і структур з навколишнім світом. Тому математична діяльність школярів не повинна обмежуватися вивченням тільки готових імовірнісних моделей. Навпаки, процеси побудови і тлумачення моделей розглядаються як провідні форми

математичної діяльності школярів. Разом з тим тут важливу роль відіграють завдання, пов'язані з прийняттям рішень в реальних (в нематематичних) ситуаціях.

Ця лінія має велике значення у становленні світогляду особистості. Вона має визначальну значущість у формуванні статистичної культури, зокрема вчить правильно сприймати і використовувати інформацію. Певну роль вона відіграє і в становленні характеру людини. Ймовірно-статистична змістова лінія суттєво розширює запас математичних моделей, якими мають оволодіти учні для опису реальних процесів і явищ, тобто про ймовірнісні моделі.

Під час продовження навчання статистики в старшій школі важливою залишається проблема мотивації учнів, вона повинна ґрунтуватися на переконанні учнів у тому, що найкраще рішення у будь-якій життєвій ситуації можна прийняти лише тоді, коли є необхідна інформація. Статистичний аналіз допомагає здобувати інформацію із наявних даних і оцінювати якість цієї інформації. Необхідно регулярно наводити учням приклади, які будуть близькими до їхнього життя.

Н-д. Куди поїхати у відпустку?. Щоб прийняти дане рішення необхідно володіти певною інформацією: якою є вартість житла, харчування, як далеко від моря розташоване житло, якими є умови проживання, які види розваг там є, тощо.

В даній ситуації рішення приймаються на підставі власного досвіду, порад знайомих, з урахуванням здобутої інформації, тобто має місце суб'єктивний підхід до прийняття рішення, який є цілком виправданим. Але існує чимало ситуацій, коли прийняття того чи іншого рішення зачіпляє інтереси значної кількості людей і тому потребує більш наукового, математичного аргументованого підходу і це мають зрозуміти учні за допомогою вчителя.

Н-д. Фірма планує впровадити нову технологію виробництва деякого виробу. Оскільки це потребує великих коштів (для переобладнання виробництва, розробки технології, перепідготовки кадрів тощо), для прийняття рішення необхідно мати великий обсяг інформації. Значну частину цієї інформації отримують у результаті статистичних досліджень.

Статистично-ймовірнісна компетентність включена до розділу математичної компетентності разом із процесуальною та технологічною компетентністю. Своєчасне формування якої є однією з передумов успішної соціалізації молоді в сучасному суспільстві, оскільки статистичні та ймовірнісні методи соціальних явищ та процесів стають все більш поширеними. І це цілком природно, оскільки теорія ймовірностей вивчає

математичні моделі випадкових масових подій та явищ. Прикладами таких явищ є виборчі процеси, опитування громадської думки, вступ випускників середніх шкіл до вищих навчальних закладів, коливання ринкових цін, зміна погодних умов, результати спортивних змагань тощо. [14]

На етапі старшої школи питання теорії ймовірності подано в такому обсязі: класичне визначення ймовірності випадкової події; комбінаторний підхід до обчислення ймовірностей випадкових подій. Обов'язковими визначено знання й розуміння суті класичного визначення поняття ймовірності; вміння обчислювати ймовірності випадкових подій, використовуючи класичне визначення та комбінаторні правила і формули. Визначені Державним стандартом вимоги до навчальних результатів передбачають достатній рівень умінь виконувати комбінаторні дії, зокрема розпізнавати види сполук за певною умовою задачі, знати і розуміти, що таке перестановки, розміщення, комбінації (без повторень), уміти обчислювати в найпростіших випадках їх кількість [13].

Під час вивчення комбінаторики вводяться поняття розміщення та комбінації, з якими учні вже знайомі з основної школи, тому буде доречніше починати вивчення комбінаторики в старшій школі з повторення і сконцентрувати увагу на розв'язування комбінаторних задач за допомогою комбінаторних правил множення і додавання за допомогою методу перебору можливих варіантів розв'язування комбінаторних задач. Головним завданням при вивченні комбінаторики має стати не навчання учнів робити тотожні перетворення виразів або розв'язування рівнянь, що містять кількість розміщень, перестановок, комбінацій, а навчання умінню розв'язувати задачі прикладного змісту та застосування елементів комбінаторики до розв'язування ймовірнісних задач. Таким чином, одним із мотивів вивчення комбінаторики в старшій школі є потреби в теорії ймовірностей. Комбінаторика є чудовим полігоном для навчання математичного моделювання. Адже необхідною складовою розв'язання комбінаторних задач є переклад задачі на мову математики, мову множин, або мову вибірок. Це і є прешим етапом математичного моделювання. Далі розв'язання зводиться до обчислення кількості розміщень, комбінацій, перестановок або значень інших виразів, які їх містять. Нарешті, здобутий результат перекладається на мову первинної ситуації. Таким чином, навчання комбінаторики суттєво сприяє формуванню вміньбудувати і досліджувати математичні моделі.

Розв'язуючи більш складні комбінаторні задачі, бажано розглядати різні способи їх розв'язування. Для цього потрібно, готуючись до уроку, не обмежуватися тільки одним способом розв'язування задачі для того, щоб на уроці організувати роботу з пошуку раціональнішого способу

розв'язування. При цьому як домашнє завдання можна запропонувати учням відшукати інші способи розв'язування розглянутих на уроці задач.

При цьому вони не прагнуть до кінця зрозуміти сюжет, про який ідеться у задачі, спробувати його змоделювати. Щоб уникнути цього, на початку слід розв'язати кілька задач на застосування комбінаторних правил додавання та множення: — якщо для деякого об'єкта А існує t способів вибору, а для іншого об'єкта В — n способів, то вибрати А або В можна $t + n$ способами; — якщо деякий об'єкт А можна вибрати t способами, а після цього інший об'єкт В можна вибрати n способами, то пари А і В можна вибрати tn способами. Розв'язуючи складніші комбінаторні задачі, бажано, за можливості, розглянути різні способи їх розв'язування. Зрозуміло, що за браком часу це не завжди вдається зробити. Тому потрібно, готуючись до уроку, не обмежуватися тільки одним способом розв'язування задачі для того, щоб на уроці організувати роботу з пошуку раціональнішого способу розв'язування. При цьому як домашнє завдання можна запропонувати учням відшукати інші способи розв'язування розглянутих на уроці задач.

Тематика комбінаторних задач надзвичайно різноманітна, але для досягнення поставленої мети при профільному навчанні варто серед інших задач розглядати прикладні задачі природничого характеру, які переконуватимуть учнів у тому, що математика забезпечує базу для вивчення хімії, біології, медицини.

Вивчаючи елементи теорії ймовірностей у старшій школі, слід звернутися до статистичної інтерпретації основних понять і фактів для того, щоб набуті знання та навички мали практичну спрямованість.

Існує три підходи до формування поняття ймовірності в підручниках: статистичний, класичний та аксіоматичний. В гуманітарних класах, в класах технічного, природничого, економічного профілів бажано викладати матеріал на основі статистичного визначення ймовірності. Цей підхід є більш економічним за часом, доступнішим для учнів, ніж інші, оскільки в основному ґрунтується на особистому досвіді учнів та їх інтуїції.

Обмежений час, відведений на вивчення теорії ймовірностей у середній школі, не дозволяє вирішити велику кількість задач при використанні статистичних та геометричних пояснень. Для посилення цих концепцій нам потрібно обмежитися лише розв'язуванням кількох задач у класі та самостійним розв'язуванням схожих задач вдома учнями.

Метою викладання статистики в 11 класі середньої школи є введення статистики як науки, її методів та завдань, способів подання інформації та статистичного розподілу, методів пунктуального та дистанційного розподілу; огляд полігонів та гістограм, моди і медіани, середніх значень.

Вивчаючи елементи теорії ймовірностей у старшій школі, слід звернутися до статистичної інтерпретації основних понять і фактів для того, щоб набуті знання та навички мали практичну спрямованість. В шкільних підручниках зустрічаються три підходи до формування поняття ймовірності: статистичний, класичний, аксіоматичний. В гуманітарних класах, в класах технічного, природничого, економічного профілів доцільно будувати викладання матеріалу на статистичному означенні ймовірності. Цей підхід економічні ший за часом, доступніший для учнів порівняно з іншими, тому що значною мірою спирається на особистий досвід учнів, їх інтуїцію, здоровий глузд.

Формуючи поняття ймовірності на статистичній основі, необхідно звернути увагу на явище статистичної стійкості, навести приклади виявлення статистичної закономірностей. Вводячи статистичне означення ймовірності, доцільно приділити увагу пропедевтиці понять вибірки, однорідності статистичного матеріалу, використанню цього означення для отримання практичних висновків. Далі, використовуючи теорему додавання ймовірностей, можна отримати формулу класичної ймовірності. Значення її полягає в тому, що в багатьох випадках, коли розглядається дослід із скінченною кількістю рівноможливих наслідків, вона дає змогу передбачити ймовірність події за тих умов, де проведення масових дослідів або неможливе, або пов'язане з надзвичайними труднощами.

Перш ніж розглядати геометричне означення ймовірності, доцільно пояснити учням потребу його введення. Слід звернути увагу на те, що класичне означення ймовірності застосовується для випробувань зі скінченною кількістю наслідків. Для випробувань з нескінченною кількістю наслідків вводиться геометричне означення ймовірності. Це поняття доцільно пояснювати на таких простих прикладах. *Наприклад, на відрізьку AB завдовжки L одиниць задано відрізок CD завдовжки n одиниць. Навмання на відрізок AB «кидають» точку. Як визначити ймовірність влучення точки на відрізок CD ?* Після розгляду прикладів слід зауважити, що геометричний підхід до ймовірності події не залежить від розмірності геометричного простору. Важливим є те, щоб простір усіх елементарних подій і підпростір подій, які сприяють події, ймовірність якої нас цікавить, були однакового виду і однакової розмірності. Потім формулюють геометричне означення ймовірності. Обмеженість часу, який передбачено на вивчення початків теорії ймовірностей у загальноосвітній школі, не дає можливості розв'язувати значну кількість задач на застосування статистичного і геометричного означень ймовірності. Для закріплення цих понять доводиться обмежуватися лише розв'язуван-

ням небагатьох задач на уроці і самостійним розв'язуванням подібних завдань учнями вдома.

Метою навчання вступу до статистики в 11 класі загальноосвітньої школи є введення поняття про статистику як науку, її методи і завдання, способи подання даних і наочне представлення статистичного розподілу, точкового та інтервального розподілу частот; розгляд полігону та гістограми, моди і медіани, середніх значень. Добираючи зміст навчального матеріалу, слід враховувати той факт, що на сучасному етапі розвитку суспільства статистика виконує три основні функції: інформаційну, прогностичну й аналітичну.

Введення елементів статистики в шкільний курс математики істотно підвищує його прикладну спрямованість. Справді, виникає можливість навіть за допомогою того невеликого математичного апарату, яким оволодіють учні під час вивчення вступу до статистики, розв'язувати задачі, що мають суспільну цінність. Статистичний матеріал може ефективно використовуватись у навчанні учнів математичному моделюванню — найважливішому виду математичної діяльності. Проте щоб принцип прикладної спрямованості навчання не залишився звичайною декларацією, він має реалізовуватися на всіх етапах планування та організації навчального процесу: під час цілепокладання, вибору змісту, методів, організаційних форм і засобів навчання. Вивчення вступу до статистики, як і інших розділів математики, має бути диференційованим. Найефективнішим способом диференціації є залучення учнів до індивідуальної та диференційованої творчої роботи під керівництвом учителя. Труднощі такої роботи пов'язані насамперед з пошуком тем досліджень, які б відповідали можливостям учнів.

В методиці викладання математики немає однозначного підходу до послідовності вивчення стохастичних понять і немає єдиної методики введення цих понять. На цьому етапі кожен автор викладає «свою» методику, здебільшого виходячи з методики викладання теорії ймовірностей і математичної статистики в вузі. У зв'язку з цим елементи стохастики стоять відокремлено від змістовно-методичних ліній курсу математики, які поступово формувалися, розвивалися і взаємодіяли між собою.

Подолати «відчуженість» елементів стохастики від «традиційної» шкільної математики можна, якщо включати їх вивчення в кожен розділ програми. Елементи стохастики можна не тільки органічно включити в структуру курсу математики, але і за допомогою її засобів зміцнити внутріпредметні зв'язки.

Одна з головних особливостей даної лінії полягає в тісному зв'язку абстрактних понять і структур з навколишнім світом. стохастична лінія

«пронизує» курс математики протягом усіх років його вивчення. Етапи безперервної стохастичною підготовки представимо наступними:

1. в початковій і основній школах превалює емпіричний і логічний компоненти: здатність формалізувати результати найпростішого досвіду (проведеного самим які навчаються або описаного в умові завдання) у вигляді схеми, таблиці, графіка, дерева варіантів і т.д.; вміння побудувати і проаналізувати найпростішу вірогідну модель;
2. у старшій школі навчаються доступні теореми про класичні ймовірності суми і твори подій, схем гіпотез, схеми Бернуллі, найпростіших способів отримання характеристик емпіричних розподілів.

Добираючи зміст навчального матеріалу підручників, слід враховувати той факт, що на сучасному етапі розвитку суспільства статистика виконує три основні функції: інформаційну, прогностичну й аналітичну. Зміст навчання статистичного матеріалу у шкільному курсі математики має певною мірою розкривати освітні функції статистики. Добираючи зміст, важливо правильно визначити, які знання потрібні сучасній людині в повсякденному житті та діяльності, які з них знадобляться учням під час вивчення інших шкільних предметів, для продовження освіти, який внесок можуть зробити ці знання у формування різних сторін інтелекту учнів, у засвоєні єдиної картини світу. Важливо реалізувати двосторонні міжпредметні зв'язки статистики, зокрема зв'язки інших навчальних предметів зі статистикою. Наприклад, у біології статистичні значення допомагають під час вивчення генетики, фізіології, екології. Нині жодна серйозна експериментальна робота з біології, медицини не обходиться без статистично обґрунтованого обсягу виконаних експериментів і довірчої оцінки отриманих результатів.

У природничих науках широко використовуються теоретико-ймовірнісні та комбінаторні методи під час обробки результатів спостережень, під час встановлення порядку розміщення генів у хромосомі, під час встановлення структури молекул білка та ДНК, генетичного коду, фенотипу тощо. Теоретичний матеріал даного розділу програми може бути глибоко усвідомлений і засвоєний у процесі розв'язування прикладних задач, складених за матеріалами суміжних предметів (хімії, біології).

Теорія ймовірностей широко застосовується в різних галузях науки і техніки, оскільки з масовими явищами можна зустрітися у фізиці, хімії, астрономії, медицині, сільському господарстві, біології а особливо у генетиці.

Метою вивчення елементів теорії ймовірностей в загальноосвітній школі, є закладення основ для навчання учнів опрацювання статистичного матеріалу, формування розуміння того, що багато законів природи

і суспільства мають імовірнісний характер, сприяння розвитку статистичного мислення учнів, формування навичок побудови найпростіших імовірнісних моделей реальних ситуацій. Досягнення поставленої мети відбувається з допомогою прикладних задач, що приводять до математичних понять, та задач на застосування цих понять. Це дає можливість навчити учнів елементів математичного моделювання в процесі розв'язування таких задач.

Вивчення початків теорії ймовірностей розпочинається з введення певного кола понять, якими вона оперує. Найважливішим поняттям теорії ймовірностей як галузі математики є поняття випадкової події. В шкільному курсі алгебри і початків аналізу вводиться насамперед поняття ймовірності для елементарних подій.

Серед задач на обчислення ймовірностей випадкових подій на основі класичного підходу зустрічаються більш складні, розв'язування яких потребує використання формул комбінаторики.

Н-д. Із 20 осіб, які одночасно захворіли грипом, 15 одужали повністю за 3 дні. Знайдіть імовірність того, що серед 5 навмання вибраних з осіб: а) всі 5 одужали за 3 дні; б) тільки 4 одужали за вказаний термін; в) жодна особа не одужала за 3 дні.

До понять теорії ймовірностей, про які повинні мати уявлення учні, відноситься поняття статистичної ймовірності. У чинних шкільних підручниках, статистична ймовірність означається через поняття статистичної частоти.

Н-д. Серед 7500 ампул, перевірених на герметичність, виявилось 15 з тріщинами. Визначити відносну частоту появи ампул що мають тріщини.

Під час вивчення початків теорії ймовірностей не обмежуються розглядом лише основних понять, якими вона оперує, крім понять, розглядаються теореми про додавання ймовірностей несумісних подій, множення ймовірностей незалежних подій, імовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій. Розглянемо деякі прикладні задачі природничого характеру, включення яких у навчальний процес створює перед учнями проблемні ситуації і допомагає їм при формулюванні та використанні згаданих теорем.

Н-д. У деякій популяції у 40 % людей волосся темне, у 40 % — руде і у 20 % — світле. У цій популяції у всіх темноволосих людей очі карі, у всіх світловолосих блакитні, у однієї половини рудих — блакитні, а у іншої карі. Яка ймовірність того, що людина з даної популяції темноволоса і кароока, темноволоса з блакитними очима?

Вивчення питань математичної статистики в школі згідно з чинними програмами, має переважно практичний характер, який передбачає включення у процес навчання задач прикладної статистики. Типовими серед цих задач є задачі на побудову дискретних варіаційних рядів та визначення їх моди і медіани, виконання графічного представлення розподілів, обчислення середнього арифметичного значення, середнього квадратичного відхилення та дисперсії статистичного ряду тощо. Розв'язування більшості названих задач полягає в опрацюванні великих масивів числової інформації, їх систематизації та приведенні у необхідний порядок. Значну допомогу при цьому надає програма GRAN 1, яка має цілий ряд послуг, призначених для введення, опрацювання та виведення статистичної інформації.

Завдяки розвитку стохастичною змістовно-методичної лінії на уроках математики поряд з вивченням традиційних понять і уявлень, учні здійснюють реєстрацію та аналіз спостережуваних випадкових явищ, роблять припущення і здійснюють їх перевірку на практиці за допомогою проведення експерименту. У зв'язку з цим перед учнями постає необхідність застосовувати отримані як традиційно-математичні, так і ймовірносно-статистичні знання на практиці. Все це дозволяє не тільки зміцнити внутріпредметну цілісність шкільної математики, а й реалізувати зв'язок теорії і практики, необхідність якої в навчанні математики відчувається особливо гостро.

Література до розділу

1. Навчальна програма з математики для учнів 10 — 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс]. — Режим доступу <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
2. Бурда М. І. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова. — К. : УОБЦ «Оріон», 2018. — 288 с.
3. Бевз Г. П. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — Видавничий дім «Освіта», 2018. — 288 с.
4. Бевз Г. П. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — Видавничий дім «Освіта», 2019. — 272 с.

-
5. Істер О. С. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. – Київ : Генеза, 2018. – 384 с.
 6. Істер О. С. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. – Київ : Генеза, 2019. – 304 с.
 7. Мерзляк А. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. Гімназія, 2019. – 208 с.
 8. Мерзляк А. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. Гімназія, 2018. – 256 с.
 9. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Харків : Вид-во «Ранок», 2018. – 328 с.
 10. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Харків : Вид-во «Ранок», 2019. – 304 с.
 11. Навчання математики в старшій профільній школі на профільному рівні (методичні рекомендації) / М. І. Бурда, Д. В. Васильєва, В. В. Волошена, О. І. Глобін [Електронний ресурс]. — Режим доступу <http://lib.iitta.gov.ua/712224/1/Method%20recomend.pdf>
 12. Соколенко Л. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник / Л. О. Соколенко, Л. Г. Філон, В. О. Швець. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. — 128 с.
 13. Державний стандарт базової і повної загальної освіти [Електронний ресурс]. — Режим доступу <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-%D0%BF#Text>
 14. Т. М. Хмара, Розвиток поняття ймовірності випадкової події в змісті шкільного курсу математики [Електронний ресурс]. — Режим доступу http://lib.iitta.gov.ua/3960/1/2_79.pdf

ВИРИБНИЧО – ПРАКТИЧНЕ ВИДАННЯ

Васильєва Дарина Володимирівна

Вашуленко Ольга Петрівна

Волошена Вікторія Вікторівна

**МЕТОДИКА КОМПЕТЕНТІСНО
ОРІЄНТОВАНОГО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В
ЛІЦЕЇ НА РІВНІ СТАНДАРТУ**

методичний посібник

Обкладинка – Лук'яненко Л.

Верстка – Коломієць А.

(Електронне видання)

Обсяг 10,937 авт. арк.

Віддруковано у ТОВ “КОНВІ ПРІНТ”.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців,
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК №6115, від 29.03.2018 р.
03680, м. Київ, вул. Антона Цедіка, 12,
тел. +38 044 332-84-73.