Розділ 1. Диференціальні рівняння та математичне моделювання

1.1. Поняття математичного моделювання

Поняття математичного моделювання трактується різними авторами по своєму. Ми будемо його пов'язувати з нашою спеціалізацією – прикладна математика. Під математичним моделюванням ми будемо розуміти метод дослідження процесів або явищ шляхом побудови їхніх математичних моделей і дослідження цих процесів. В основу методу покладемо адекватність між змінними складеного рівняння і досліджуваного процесу. Зрозуміло, що на практиці ці процеси не будуть абсолютно ідентичні. Але можна удосконалювати математичну модель, яка більш точно буде описувати цей процес. Треба пам'ятати, що в останньому випадку, як правило, математичні рівняння ускладнюються. А це означає, що їх моделювання на ЕОМ потребує більше часу.

Схема таких досліджень починається з постановки задачі і закінчується проведенням ефективного обчислювального експерименту. Її умови можна записати в такій формі:

а) постановка задачі;
б) побудова математичної моделі та перевірка її адекватності;
в) узагальнення та теоретичне дослідження даного класу задач;
г) розробка алгоритмічного забезпечення для розв'язування досліджуваних задач;
д) створення програмного забезпечення;
е) проведення обчислювального експерименту;
ж) впровадження цих результатів у виробництво.

Розглянемо питання використання диференціальних рівнянь в деяких предметних областях.

1.2. Диференціальні рівняння в екології

Екологія вивчає взаємовідношення людини і, взагалі, живих організмів з навколишнім середовищем. Основним об'єктом дослідження в екології є еволюція популяцій (сукупність одного виду рослин, тварин, чи мікроорганізмів, які населяють протягом тривалого часу певну територію).

Опишемо математично процес розмноження чи вимирання популяцій. Нехай $x(t)$ – кількісний стан популяції в момент t, A – число, яке відповідає кількості народжених, B – умираючих в одиницю часу. Тоді швидкість зміни координати $x(t)$ задається формулою

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \tag{1.1}$$

В (1.1) A і B можуть залежати від x. Наприклад,

$$A = ax, B = bx, \tag{1.2}$$

де a – коефіцієнт народжуваності, b – смертності.

Підставляючи (1.2) в (1.1), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x. \qquad (1.3)$$

Розв'язок диференціального рівняння (1.3) запишемо у вигляді

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}. \qquad (1.4)$$

З розв'язку (1.4) видно, що при $a > b$ популяція виживаюча, а при $a < b$ – вимираюча.

Рівняння (1.3) в деяких випадках береться нелінійним

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \ (a > 0, b > 0). \qquad (1.5)$$

Це рівняння Бернулі при $n = 2$ і його розв'язок можна записати в такому вигляді

$$x(t) = \frac{x_0 \frac{a}{b}}{x_0 + (\frac{a}{b} - x_0)e^{-a(t-t_0)}}. \qquad (1.6)$$

З формули (1.6) видно, що при $t \to \infty, x(t) \to \frac{a}{b}$**.** При цьому можливі випадки

$$\frac{a}{b} = x_0, \ \frac{a}{b} > x_0, \text{ та } \frac{a}{b} < x_0.$$

Рівняння (1.5) описує еволюцію популяцій деяких бактерій.

Можна говорити і про більш складні рівняння, системи рівнянь.

Розглянемо більш детально двохвидову модель «хижак-жертва», яка була побудована для виявлення коливань рибних уловів в Адріатичному морі.

Нехай $x(t)$ – число великих риб-хижаків, y – число малих риб-жертв в момент часу t. Тоді число риб-хижаків буде рости до того часу, поки у них буде їжа. Якщо корму не буде вистачати, то кількість риб-хижаків буде зменшуватися і тоді, починаючи з деякого моменту, буде рости число риб-жертв. Модель такого прикладу має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = cx - dxy \end{cases}, \qquad (1.7)$$

де a, b, c, d – додатні константи.

В (1.7) доданок bxy виражає залежність приросту великих риб від числа малих, $-dxy$ – зменшення числа малих риб від великих.

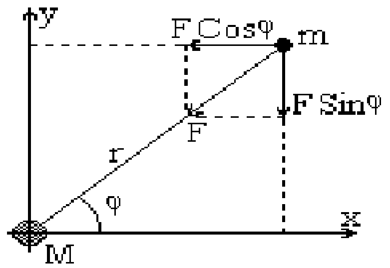
1.3. Закони Кеплера руху планет

Згідно закону всесвітнього тяжіння два тіла, які знаходяться на віддалі r один від одного, і які мають маси m і M притягаються з силою

$$F = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}, \qquad (1.8)$$

де γ – константа тяжіння.

Опишемо рух планети з масою m навколо Сонця маси M . Вплив інших планет на них не будемо враховувати (Мал. 1.1).



Мал. 1.1

Припустимо, що Сонце знаходиться в початку координат, а планета має положення $x(t), y(t)$ в момент часу t. Використавши другий закон Ньютона запишемо

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -FCos\varphi = -\gamma \dfrac{mM}{r^2} Cos\varphi \\ m\ddot{y} = -FSin\varphi = -\gamma \dfrac{mM}{r^2} Sin\varphi \end{cases}. \tag{1.9}$$

Враховуючи, що $Cos\varphi = \dfrac{x}{r}, Sin\varphi = \dfrac{y}{r}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$, і позначаючи $k = \gamma \cdot M$, прийдемо до системи

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{kx}{(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}} \\ \ddot{y} = -\dfrac{ky}{(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}} \end{cases}. \tag{1.10}$$

Без обмеження загальності візьмемо початкові умови

$$x = a, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = V_0 \text{ при } t = 0. \tag{1.11}$$

Перейдемо до полярних координат

$$x = rCos\varphi, y = rSin\varphi,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = rCos\varphi - rSin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = rSin\varphi - rCos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}Cos\varphi - 2\dot{r}Sin\varphi \cdot \dot{\varphi} - rSin\varphi \cdot \ddot{\varphi} - rCos\varphi \cdot \varphi^2 \\ \ddot{y} = \ddot{r}Sin\varphi - 2\dot{r}Cos\varphi \cdot \dot{\varphi} - rCos\varphi \cdot \ddot{\varphi} - rSin\varphi \cdot \varphi^2 \end{cases}.$$

Підставляючи отримані вирази в (1.10) будемо мати

$$\begin{cases} \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)Cos\varphi - \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)Sin\varphi = -\dfrac{kCos\varphi}{r^2} \\ \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)Sin\varphi + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)Cos\varphi = -\dfrac{kSin\varphi}{r^2} \end{cases}.$$

Помножимо перше рівняння на $Cos\varphi$, друге на $Sin\varphi$ і складемо

$$4\ddot{r} - r\varphi^2 = -\frac{k}{r^2}. \tag{1.12}$$

Помножимо перше рівняння на $-Sin\varphi$, друге на $Cos\varphi$ і складемо

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \qquad (1.13)$$

Перепишемо у нових змінних умови (1.11)

$$r = a, \varphi = 0, \dot{r} = 0, \dot{\varphi} = \frac{V_0}{a}. \qquad (1.14)$$

Рівняння (1.13) запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \qquad (1.15)$$

Звідки маємо

$$r^2\dot{\varphi} = C_1. \qquad (1.16)$$

Константа C_1 має цікаву геометричну інтерпретацію. З курсу математичного аналізу відомо, що площа сектора обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi. \qquad (1.17)$$

Звідки

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi, \qquad \text{або } \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Вираз $\frac{dS}{dt}$ означає секторну швидкість. З (1.16) випливає, що вона є постійною. Це означає, що радіус-вектор “замітає” за рівні проміжки часу рівні площі.

1-й закон Кеплера: кожна із планет рухається по плоскій кривій відносно Сонця так, що радіус-вектор, який зв’язує Сонце і планету, “замітає” рівні площі за рівні проміжки часу.

Задачу Коші (1.12)-(1.14) можна розв’язати. Розв’язок має еліпсоїдальну форму, на основі цього робиться наступний висновок.

2-й закон Кеплера: траєкторії планет рухаються по еліпсам, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

З аналізу траєкторій випливає таке твердження.

3-й закон Кеплера: квадрати періодів обертання планет пропорційні кубам великих осей їх орбіт.

1.4. Диференціальні рівняння закону попиту і пропозиції в економічних дослідженнях

Попит і пропозиція – економічні категорії товарного виробництва. Попит – представлена на ринку потреба в товарах, пропозиція – продукт, який є на ринку чи може бути доставлений на нього.

Нехай $p(t)$ – ціна, наприклад, на фрукти, $\frac{dp}{dt}$ – тенденція формування ціни. Тоді, як попит так і пропозиція будуть функціями введених величин. Як показує практика, ці функції можуть бути різними. Часто попит q і пропозиція S задаються лінійними залежностями, наприклад

$$q = 4p' - 2p + 39,$$

$$S = 44p' + 2p - 1$$

залежностями. Для того, щоб попит відповідав пропозиції необхідно $(p = S)$

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

Звідки

$$\begin{aligned} &40p' + 4p - 40 = 0, \\ &4dp = -4(p - 10), \qquad (1.18) \\ &\frac{10dp}{p - 10} = -dt,\ p = ce^{-\frac{1}{10}t} + 10. \end{aligned}$$

Припустимо, що в момент $t = 0$ 1кг фруктів коштував $p(0) = 1$ крб. Тоді $1 = c - 10$, $c = -9$. Отже

$$p = -9e^{\frac{1}{10}t} + 10. \qquad (1.19)$$

Це закон зміни ціни, щоб між попитом і пропозицією була рівновага.

1.5. Найпростіші рівняння руху частинок в електромагнітних полях

Швидкість зміни імпульсу частинки

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

дорівнює силі Лоренца, яка діє на неї

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = Ze(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]), \qquad (1.20)$$

де Z – зарядове число, e – заряд частинки, $\vec{E}$ – вектор напруженості прискорюючого поля, $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції, $\vec{V}$ – вектор швидкості частинки,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix},$$

$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0$ – динамічна маса, m_0 – маса спокою, $\gamma = \dfrac{m}{m_0}$ – приведена енергія частинки,

$$\left[\vec{V}, \vec{B}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ V_x & V_y & V_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left(V_y B_z - V_z B_y\right) i - \left(V_x B_z - V_z B_x\right) j + \left(V_x B_y - V_y B_x\right) k$$

– векторний добуток двох векторів.

З (1.20) маємо

$$m_0 \gamma \frac{d\vec{V}}{dt} + m_0 \vec{V} \frac{d\gamma}{dt} = Ze\left(\vec{E} + \left[\vec{V}, \vec{B}\right]\right). \qquad (1.21)$$

Рівняння (1.21) не враховує власного поля пучка (кулонівських сил). Систему (1.21) перепишемо в скалярній формі

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_x + \dfrac{dy}{dt}B_z - \dfrac{dz}{dt}B_y - \dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right] \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_y + \dfrac{dz}{dt}B_z - \dfrac{dx}{dt}B_z - \dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right] \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_z + \dfrac{dx}{dt}B_y - \dfrac{dy}{dt}B_x - \dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dz}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right] \end{cases}. \tag{1.22}$$

Визначимо

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}}} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2)\frac{\vec{V}^T}{c^2}\frac{d\vec{V}}{dt},$$

тобто

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\vec{V}^T\left(\frac{Ze}{m_0}\left(\vec{E}+\left[\vec{V},\vec{B}\right]\right) - \frac{1}{\gamma}\vec{V}\frac{d\gamma}{dt}\right).$$

Так як $\vec{V}^T\cdot\left[\vec{V},\vec{B}\right]=0$, то визначаємо $\dfrac{d\gamma}{dt}$

$$\frac{d\gamma}{dt}\left(1+\frac{\gamma^2\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}\right) = \frac{\gamma^2 Ze}{m_0c^2}\vec{V}^T\cdot\vec{E}.$$

Отже

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{Ze}{m_0c^2}\left(\frac{dx}{dt}E_x + \frac{dy}{dt}E_y + \frac{dz}{dt}E_z\right) \tag{1.23}$$

Підставляючи (1.23) в (1.22), отримаємо рівняння руху.

Але в ці складні рівняння ще входять компоненти електромагнітного поля, які визначаються рівняннями Максвела

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ rot\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{j}, div\vec{B} = 0 \end{cases}. \tag{1.24}$$

Тут ε_0, μ_0 – електрична і магнітна сталі, ρ – об’ємна густина заряду, $\vec{j}$ – вектор густини струму.

Система рівнянь (1.24) – це рівняння в частинних похідних з складними граничними умовами. Задача заключається не тільки в моделюванні рівнянь руху, а й в розрахунках оптимальних систем прискорюючих і фокусуючих заряджені частинки.

1.6. Використання диференціальних рівнянь в біології і математичних дослідженнях

Біологія. Необхідно знайти залежність площі S молодого листка, що має форму круга, від часу t. Відомо, що швидкість зміни площі $\frac{dS}{dt}$ в момент t пропорційна площі листка, довжині його обводу та косинусу кута між падаючим на листок сонячним променем і вертикаллю листка. Маємо модель

$$\frac{dS}{dt} = k \cdot S \cdot S^{\frac{1}{2}} \cdot Cos\varphi(t), \qquad (1.25)$$

де $\varphi(t) = at + b \geq 0$, a,b – const, $\varphi \leq \pi$, k – коефіцієнт пропорційності. Розв'язуючи рівняння (1.25), ми отримаємо таку залежність

$$S(t) = \left(c + \frac{k}{2a} \cdot Sin(at+b)\right)^{-2}, \qquad (1.26)$$

c – довільна стала.

Математика. Обчислити невласний інтеграл

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-x^2-2ax} dx, \qquad (1.27)$$

залежний від параметра a.
Знайдемо похідну

$$\frac{dI}{da} = -2x\int_0^\infty e^{-x^2-2ax}dx = -(2x+2a)\int_0^\infty e^{-x^2-2ax}dx + 2a\int_0^\infty e^{-x^2-2ax}dx =$$

$$= +\int_0^\infty e^{-x^2-2ax}d(-x^2-2ax) + 2aI(a) = e^{-x^2-2ax}\Big|_0^\infty + 2aI(a) = 2aI(a) - 1.$$

Отримали диференціальне рівняння

$$\frac{dI}{da} = 2aI(a) - 1. \qquad (1.28)$$

При цьому відомо

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (1.29)$$

Розв'язуючи задачу Коші (1.28),(1.29), отримаємо

$$I(a) = e^{a^2}\left[I(a) - \int_0^a e^{-t^2}dt\right] = e^{a^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^a e^{a^2-t^2}dt. \qquad (1.30)$$

1.7. Побудова диференціальних рівнянь з заданими параметричними сімействами кривих

Припустимо, що задано однопараметричне сімейство кривих

$$\varphi(x, y(x), c) = 0. \qquad (1.31)$$

Задача полягає в тому, щоб знайти диференціальне рівняння, розв'язками якого являються криві (1.31). Вважаючи, що функція (1.31) має повну похідну за x запишемо

$$\varphi'_x(x,y,c)+\varphi'_y(x,y,c)\frac{dy}{dx}=0\,. \tag{1.32}$$

Тоді з (1.31) та (1.32) як з системи рівнянь, вилучаємо сталу c і отримаємо шукане диференціальне рівняння першого порядку.

Якщо ж задано n - параметричне сімейство кривих

$$\varphi(x,y(x),c_1,..,c_n)=0\,, \tag{1.33}$$

то до (1.33) додаються такі співвідношення

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)=\varphi'_x(x,y,c_1,..,c_n)+\varphi'_y(x,y,c_1,..,c_n)\frac{dy}{dx}=0,\\
&\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)=\frac{d}{dx}\left[\varphi'_x(x,y,c_1,..,c_n)+\varphi'_y(x,y,c_1,..,c_n)\frac{dy}{dx}\right]=\\
&=\varphi''_{xx}(x,y,c_1,..,c_n)+2\varphi''_{xy}(x,y,c_1,..,c_n)\frac{dy}{dx}+\varphi''_{yy}(x,y,c_1,..,c_n)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\\
&+\varphi'_x(x,y,c_1,..,c_n)\frac{d^2y}{dx^2}=0,\\
&\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)=\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\varphi(x,y,c_1,..,c_n)\right]=0.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

З (1.33) та (1.34), як з системи рівнянь, кількість яких $(n+1)$, вилучаються сталі $c_1,c_2,...,c_n$, а отримане таким чином співвідношення між $x,y,y',..,y^{(n)}$

$$F\left(x,y,y',..,y^{(n)}\right)=0 \tag{1.35}$$

і буде шуканим диференціальним рівняння n-го порядку.

В (1.32) та (1.34) $\varphi'_x(\cdot),\varphi'_y(\cdot),\varphi''_{xx}(\cdot),\varphi''_{xy}(\cdot),\varphi''_{yy}(\cdot),-$ означають частинні похідні відповідних порядків за вказаними змінними. При цьому припускаємо, що такі похідні існують, тобто функції (1.32) та (1.34) є диференційовними відповідну кількість разів.

Аналогічно поступають і при складанні систем рівнянь.

<u>Приклад 1.1</u>. Знайти диференціальне рівняння першого порядку, розв'язками якого буде однопараметричне сімейство

$$e^{x+cy}=2x+3y\,. \tag{1.36}$$

<u>Розв'язання.</u> Продиференціюємо за x праву частину нашого співвідношення в припущенні, що $y=y(x)$.

$$e^{x+cy}\left(1+c\frac{dy}{dx}\right)=2+3\frac{dy}{dx}\,. \tag{1.37}$$

Враховуючи (1.36), рівність (1.37) перепишемо таким чином

$$(2x+3y)\left(1+c\frac{dy}{dx}\right)=2+3\frac{dy}{dx}\,. \tag{1.38}$$

З (1.38) знаходимо c

$$c = \frac{1}{y'}\left[\frac{2+3y'}{2x+3y} - 1\right]$$

і підставивши в (1.36) отримаємо шукане диференціальне рівняння

$$e^{x+\frac{x}{y'}\left[\frac{2+3y'}{2x+3y}-1\right]} = 2x+3y. \qquad (1.39)$$

<u>Приклад 1.2.</u> Знайти диференціальне рівняння другого порядку, розв'язками якого буде двопараметричне сімейство

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}. \qquad (1.40)$$

<u>Розв'язання</u>. Згідно описаного вище алгоритму, складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} \\ y' = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x} \\ y'' = 9c_1 e^{3x} + 9c_2 e^{-3x} \end{cases}. \qquad (1.41)$$

З якої, вилучивши c_1 і c_2, знаходимо шукане диференціальне рівняння

$$y'' - 9y = 0. \qquad (1.42)$$