Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної

2.4. Частинні і особливі розв’язки. Знаходження кривих, підозрілих на особливість розв’язку, по диференціальному рівнянню

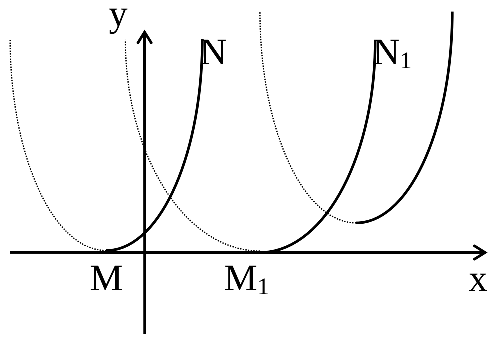
<u>Означення 2.10.</u> Розв’язок, який складається з точок єдиності розв’язку задачі Коші називається частинним і його можна отримати з загального при фіксованому c.

Розв’язок задачі Коші, який задовольняє теоремі Пікара, є частинний розв’язок.

<u>Означення 2.11.</u> Розв’язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв’язку задачі Коші, будемо називати особливим.

Геометрично особливому розв’язку відповідають інтегральні криві, які не містяться в загальному розв’язку. Тому особливий розв’язок не може існувати всередині області D існування загального розв’язку. Його не можна отримати з формули загального розв’язку ні при яких числових значеннях c, включаючи $\pm\infty$. Його можна отримати з загального розв’язку лише при $c = c(x)$.

Існують ні частинні ні особливі розв’язки. Їх можна отримати шляхом склеювання кусків частинних і особливих розв’язків.



Мал. 2.4

<u>Приклад 2.2.</u> Знайти особливий розв’язок диференціального рівняння

$$y' = 2\sqrt{y}.$$

<u>Розв’язання</u>. При $y > 0$ маємо $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$, $y=(x+c)^2$, $x+c \ge 0$.

Отримали загальний розв’язок в області $-\infty < x < \infty,\ 0 < y < \infty$, в якій виконуються умови теореми Пікара. Але розв’язком буде $y = 0$, який ми отримуємо при $c = -x$. Він не міститься в загальному розв’язку при жодному фіксованому c. Отже, згідно означення $y(x) \equiv 0$ – особливий розв’язок.

Якщо $f(x, y)$ неперервна на D, то умови підозрілі на особливий розв’язок – необмеженість похідної $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Знайшовши таку криву в подальшому треба переконатися :

1) вона є інтегральною кривою;
2) перевірити, що в кожній її точці порушується єдиність розв'язку.

В прикладі 2.2. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \equiv \infty$ при $y \equiv 0$. Оскільки $y = 0$ – розв'язок і через нього проходять інтегральні криві з загального розв'язку, то $y \equiv 0$ - особливий розв'язок.

<u>Приклад 2.3.</u> Розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = 2\sqrt{y} + 1.$$

<u>Розв'язання</u>. Знайдемо при $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Очевидно, що $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$ при $y \equiv 0$. Але $y \equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння, тому і не є особливим розв'язком.

Припустимо, що диференціальне рівняння має однопараметричне сімейство інтегральних кривих $\Phi(x, y, c) = 0$. Нехай це сімейство має обвідну, тобто лінію, яка в кожній точці дотикається сімейства і ні на якому участку не співпадає ні з одною кривою сімейства. Тоді ця обвідна і буде особливим розв'язком. Дійсно через довільну її точку проходить по крайній мірі два розв'язки : обвідна і сам розв'язок.

2.5. Два означення інтегралу. Теореми про загальний вигляд інтегралу та залежність двох інтегралів одного диференціального рівняння

Нехай

$$y = \varphi(x, c) \tag{2.22}$$

загальний розв'язок диференціального рівняння (2.3) в області *D*, в якій виконуються умови теореми Пікара. Тоді на *D* рівняння (2.22) можна розв'язати відносно *c*

$$\psi(x, y) = c \quad . \tag{2.23}$$

Функція $\psi(x, y)$ приймає постійні значення на довільному частинному розв'язку з *D*, причому значення постійної визначається частинним розв'язком

$$\psi(x, \varphi(x, c)) = c \quad . \tag{2.24}$$

<u>Означення 2.12</u> (перше означення інтегралу). Функція $\psi(x, y)$, визначена на *D* і яка не зводиться до константи, називається інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*, якщо на довільному частинному розв'язку з *D* ця функція приймає постійні значення.

Припустимо, що $\psi(x, y)$ - диференційовна функція. Тоді на довільному частинному розв'язку

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad , \tag{2.25}$$

або

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} f(x, y) dx = 0 \quad . \tag{2.26}$$

При цьому $\frac{\partial\psi}{\partial y}\neq 0$ на *D*, так як в противному $\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$. А це означає, що поле диференціального рівняння (2.3) в відповідній точці не задано.

<u>Означення 2.13</u> (друге означення інтегралу). Функція $\psi(x,y)$, визначена і неперервна з частинними похідними в області *D* і така, що $\frac{\partial\psi}{\partial y}\neq 0$ в області *D*, називається інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*, якщо повний її диференціал, взятий в силу диференціального рівняння (2.3), тотожно дорівнює нулю в області *D*.

З (2.26) випливає, що

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}f(x,y)\;. \tag{2.27}$$

Функція, яка є інтегралом в смислі означення 2.12 буде інтегралом і в смислі означення 2.13. Навпаки не завжди так.

Якщо диференціальне рівняння (2.3) має один інтеграл, то воно має безліч інтегралів.

<u>Теорема 2.1</u> (про загальний вигляд інтегралу). Якщо $\psi_1(x,y)$ інтеграл диференціального рівняння (2.3) в області *D* і функція $\psi_1(x,y)$ диференційовна в *D*, а $\Phi(z)$ - довільна функція визначена і неперервно-диференційовна в області зміни функції $\psi_1(x,y)$ коли $(x,y)\in D$, то

$$\psi(x,y)=\Phi(\psi_1(x,y)) \tag{2.28}$$

є інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*.

<u>Доведення.</u> Обчислимо $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ та $\frac{\partial\psi}{\partial y}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\;,$$

причому $\frac{\partial\psi}{\partial y}\neq 0$ в області *D*. Маємо

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=\frac{d\Phi}{d\psi_1}\quad \mathrm{d}\psi_1\equiv 0 \tag{2.29}$$

оскільки $d\psi_1\equiv 0$, так як $\psi_1(x,y)$ – інтеграл диференціального рівняння (2.3). З (2.29) випливає, що $\psi(x,y)$ - інтеграл диференціального рівняння (2.3) згідно означення.

<u>Теорема 2.2</u> (про залежність двох інтегралів). Нехай $\psi_1(x,y)$ і $\psi_2(x,y)$ – два інтеграли диференціального рівняння (2.3). Тоді існує неперервно диференційовна функція *F* така, що

$$\psi_2(x,y)=F(\psi_1(x,y))\;. \tag{2.30}$$

<u>Доведення.</u> Оскільки $\psi_1(x,y)$ і $\psi_2(x,y)$ інтеграли, то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}\underbrace{f(x,y)dx}_{dy} = 0 \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}\underbrace{f(x,y)dx}_{dy} = 0 \end{cases} . \qquad (2.31)$$

З (2.31) випливає, що

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad . \qquad (2.32)$$

З функціонального аналізу відомо, що з умови (2.32) випливає (2.30).

Приклад 2.4. Обчислити повний диференціал функції $\psi(x,y) = x \;\; + y^2$ на розв'язках диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = x^4 y + y^3 x .$$

Розв'язання. Згідно (2.25), (2.26) маємо

$$d\psi(x,y) = d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy = 2xdx + 2y(x^4 y + y^3 x)dx =$$
$$= (2x + 2x^4 y^2 + 2y^4 x)dx .$$

Приклад 2.5. Перевірити, чи є $\psi(x,y) = e^{2x} + 2e^{-y} = c$ інтегралом диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x+y}$.

Розв'язання. Дійсно,

$$d\psi(x,y) = d(e^{2x} + 2e^{-y}) =$$
$$= 2e^{2x}dx - 2e^{-y}dy = 2e^{2x}dx + 2e^{-y}(e^{2x+y})dx = 2e^{2x}dx - 2e^{2x}dx \equiv 0 .$$

2.6. Інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку, розв′язаних відносно похідної

Неповні рівняння.

а) Диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \;, \quad x \in (a,b) . \qquad (2.33)$$

Припустимо, що *f(x)* являється неперервною функцією на (a,b). Тоді функція

$$y = \int f(x)dx + c \qquad (2.34)$$

є загальним розв`язком диференціального рівняння (2.33) в області

$$a < x < b, \; -\infty < y < +\infty . \qquad (2.35)$$

Особливих розв’язків диференціальне рівняння (2.33) не має.
Разом з диференціальним рівнянням (2.33) розглянемо початкові умови

$$y(x_0) = y_0 \; . \qquad (2.36)$$

Проінтегруємо диференціальне рівняння (2.34) від $x_0 \in (a,b)$ до x

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + c\,.$$

Знаходимо c з умови (2.36)

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + y_0 \tag{2.37}$$

– загальний розв′язок диференціального рівняння (2.33) в формі Коші.

Якщо *f(x)* – неперервна на (a,b) за виключенням точки $\xi \in (a,b)$, в якій $f(\xi)$ приймає нескінченне значення, то замість диференціального рівняння (2.33) будемо розглядати рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}\,. \tag{2.33$'$}$$

Пряма $x = \xi$ є розв′язком диференціального рівняння (2.33′) і ми цей розв′язок повинні приєднати до розв′язку диференціального рівняння (2.33). Цей розв′язок може бути частинним або особливим в залежності від того зберігається чи порушується в будь-якій його точці єдиність. Якщо $x = \xi$ – частинний розв′язок, то його часто можна отримати з загального при нескінченних значеннях *c*, якщо ж він є особливим, то його отримують з загального при $c = c(y)$.

Рівняння, яке не містить незалежної змінної має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\,. \tag{2.38}$$

Припускаємо, що функція $f(y)$ визначена і неперервна на інтервалі (c,d). Замість (2.38) розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}\,. \tag{2.39}$$

Диференціальне рівняння (2.39) не містить шуканої функції і воно розв′язується аналогічно диференціальному рівнянню (2.33).

Якщо $f(y) \neq 0$, $y \in (c,d)$, то

$$x = \int \frac{1}{f(y)}dy + c \tag{2.40}$$

– загальний розв′язок диференціального рівняння (2.39) в області

$$c < y < d, \quad -\infty < x < +\infty.$$

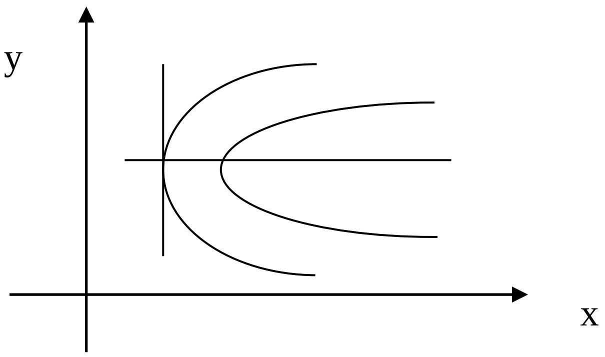
Аналогічно

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(\tau)}d\tau + x_0 \tag{2.41}$$

– загальний інтеграл в формі Коші.

Якщо $f(y)$ неперервна на *(c,d)* і приймає нульове значення при $y = \eta \in (c,d)$, то ми повинні розглядати диференціальне рівняння (2.38). Розв′язок $y = \eta$ буде частинним, якщо в кожній його точці зберігається єдиність і особливим, якщо в кожній його точці порушується єдиність. Якщо $y = \eta$ частинний розв′язок, то ми його отримуємо при нескінченних значеннях $c\ (\pm\infty)$, якщо особливий, то при $c = c(x)$.

Якщо $f(y)$ в точці $y = \overline{\eta}$ перетворюється в нескінченність $(\overline{\eta} \in (c,d))$, то розглядаємо диференціальне рівняння (2.39), яке має неперервну праву частину на *(c,d)*. При цьому диференціальне рівняння на (c,d) має єдиний розв′язок (мал. 2.5).



Мал. 2.5

Приклад 2.6. Розв′язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

Розв'язання. Область визначення $x \in (-\infty,+\infty)$, $y \in (-\infty,+\infty)$, $y \neq 0$. Оскільки в точці $y = 0$ дотичні паралельні осі *OY*, то розв′язок в площині (x, y) єдиний

$$2ydy = dx,\ y^2 = x + c.$$

б) **Рівняння з відокремлюваними змінними**.

Розглянемо рівняння в диференціалах виду

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \qquad (2.42)$$

де $X(x), Y(y)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Диференціальне рівняння (2.42) називається рівнянням з відокремленими змінними. Його можна переписати таким чином

$$d(\int X(x)dx + \int Y(y)dy) = 0.$$

Звідки маємо загальний розв′язок в квадратурах

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = c. \qquad (2.43)$$

Якщо треба записати розв′язок задачі Коші, то записують так

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau + \int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau = c.$$

З умови (2.36) визначають $c = 0$. Отже

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau + \int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau = 0 \qquad (2.44)$$

– розв′язок задачі Коші (2.36), (2.42). При даних припущеннях особливих розв′язків диференціальне рівняння (2.42) не має.

Рівняння вигляду

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0 \qquad (2.45)$$

називають рівнянням з відокремлюваними змінними.

Припустимо, що $m_1(x)n(y) \neq 0$, тоді розділимо обидві частини рівняння (2.45) на $m_1(x)n(y)$, отримаємо

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0. \qquad (2.46)$$

Аналогічно записуємо

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = c \qquad (2.47)$$

– загальний розв′язок диференціального рівняння (2.45) і

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(\tau)}{m_1(\tau)}d\tau + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(\tau)}{n(\tau)}d\tau = 0 \qquad (2.48)$$

–розв′язок задачі Коші (2.36), (2.45). При діленні на $n(y)m_1(x)$ ми можемо загубити розв′язки, які визначаються рівняннями $n(y) = 0$, $m_1(x) = 0$. Дійсно, нехай $n(b) = 0$, то

$$m(x)n(b)dx + m_1(x)n_1(b)dy = 0$$

отже $y = b$ – розв′язок диференціального рівняння (2.45). Аналогічно $x = a$ $(m_1(a) = 0)$. Якщо ці розв′язки не входять в (2.47) при деяких c, то вони представляють собою особливі розв′язки диференціального рівняння (2.45).

З розв′язку $y = b$ ми повинні виключити точку $x = a$, так як в точці (a,b) диференціальне рівняння (2.45) не визначає нахил поля y'. По тій же причині з розвязку $x = a$ виключається точка $y = b$.

Таким чином, розв′язки $x = a (y \neq b)$ і $y = b$ $(x \neq a)$ примикають до точки (a,b) і можуть бути особливими. Других особливих розв′язків не має.

<u>Приклад 2.7.</u> Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння

$$xy(1+x^2)dy - (1+y^2)dx = 0.$$

<u>Розв′язання</u>. Розділяючи змінні отримаємо

$$\frac{y}{1+y^2}dy - \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0.$$

Оскільки $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$, то задане рівняння перепишемо в такому вигляді

$$\frac{y}{1+y^2}dy - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = 0.$$

Отже $\displaystyle\int \frac{y}{1+y^2}dy - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{xdx}{1+x^2} = c$, $\dfrac{1}{2}\ln\left[(1+x^2)(1+y^2)\right] - \ln x = c$,

$$(1+x^2)(1+y^2) = c_1 x^2.$$

Очевидно, що $x=0$ є частинним розв'язком нашого рівняння і його треба додати до отриманого загального розв'язку.

в) **Однорідні і узагальнено-однорідні диференціальні рівняння.**

Розглянемо рівняння в диференціалах (2.5), в якому функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями однієї і тієї ж степені однорідності m.

<u>Означення 2.14.</u> Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією виміру m, якщо

$$f(tx,ty)=t^m f(x,y). \tag{2.49}$$

Якщо (2.49) виконуються при $t\geq 0$, то функція $f(x,y)$ називається додатньо однорідною.

Однорідне рівняння завжди можна звести до рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.50}$$

в якому функція $\varphi(\cdot)$ однорідна функція нульового виміру.

Однорідні рівняння завжди інтегруються в квадратурах заміною

$$y=zx. \tag{2.51}$$

При цьому рівняння (2.5) приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно

$$M(x,zx)dx+N(x,zx)(zdx+xdz)=0,$$

$$x^m M(1,z)dx+x^m N(1,z)(zdx+xdz)=0,$$

$$\big(M(1,z)+zN(1,z)\big)dx+xN(1,z)dz=0,$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz=0,$$

$$\ln x+\int\frac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz=\ln c,\quad x=ce^{\phi(z)},$$

$$x=ce^{\phi(\frac{y}{x})}, \tag{2.52}$$

де $\phi(z)=\int\dfrac{N(1,z)}{M(1,z)+zN(1,z)}dz$.

При відокремленні змінних ми могли загубити розв′язки $z=z_i$, де z_i- корені рівняння

$$M(1,z)+N(1,z)z=0. \tag{2.53}$$

Отже півпрямі $y=z_i x,\ (x\neq 0)$ примикають до початку координат. Ці розв′язки можуть міститися в формулі загального розв′язку, але можуть бути і особливими. Особливими можуть бути також півосі осі $OY: x=0\ (y\neq 0)$. Других особливих розв′язків диференціальне рівняння (2.5) не має.

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right) \tag{2.54}$$

зводиться до однорідного. Якщо $c_1=c=0$, то це однорідне рівняння.

Припустимо, що хоч одне з чисел c_1, c не дорівнюють 0. Можливі два випадки.

Перший – $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$. Проводимо заміну

$$x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta, \tag{2.55}$$

де ξ, η – нові змінні, α, β – параметри. Тоді

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}\right). \tag{2.56}$$

Параметри α, β вибираємо згідно системи

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a\alpha + b\beta + c = 0 \end{cases}. \tag{2.57}$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система (2.57) має єдиний розв′язок. Таким чином, ми прийшли до однорідного диференціального рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right). \tag{2.58}$$

Другий – $\Delta = 0$. В цьому випадку $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$, тобто $a_1 = ka, b_1 = kb$. Тому

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax + by) + c_1}{ax + by + c}\right) = f_1(ax + by). \tag{2.59}$$

Заміною $t = ax + by$ диференціальне рівняння (2.59) приводимо до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dt}{dx} = a + bf_1(t). \tag{2.60}$$

<u>Приклад 2.8</u>. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння

$$(x^2 + xy + y^2)dx + x^2dy = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Це однорідне рівняння, $m = 2$. Зробимо заміну

$$y = zx, dy = zdx + xdz, \quad (1 + z + z^2)dx - (xdz + zdx) = 0,$$

$$(1 + z^2)dx - xdz = 0, \ \frac{dx}{x} - \frac{dz}{1 + z^2} = 0, \ \ln x - arctg\, z = c.$$

Отже, $\ln x - arctg\, z = c$ – загальний розв′язок нашого рівняння.

Диференціальне рівняння (2.5) називається узагальнено-однорідним, якщо існує таке число k, при якому ліва частина цього диференціального рівняння стає однорідною функцією від величин x, y, dx, dy в припущенні, що останні мають відповідно виміри: перший, k-ий, нульовий, $(k-1)$-ий. При $k = 1$ маємо просто однорідне рівняння.

В цьому випадку диференціальне рівняння (2.5) заміною

$$y = zx^k \tag{2.61}$$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. При $k = 0$ рівняння (2.5) є рівнянням з розділеними змінними. Особливі розв′язки таких рівнянь досліджуються аналогічно.

Приклад 2.8. Розв′язати узагальнено-однорідне диференціальне рівняння

$$(Ax^2y^2 + Bxy + C)dx - x^2dy = 0.$$

Розв'язання. Знайдемо число k для даного випадку

$$2 + 2k = 1 + k = 0 = 2 + k - 1, \quad k = -1.$$

Отже

$$y = \frac{z}{x},\ dy = \frac{xdz - zdx}{x^2},$$

$$(Az^2 + Bz + C)dx - (xdz - zdx) = 0,\ [Az^2 + (B+1)z + C]dx - xdz = 0.$$

Звідки

$$\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dz}{Az^2 + (B+1)z + c} = C,$$

– загальний розв′язок нашого рівняння, записаний в квадратурах.

г) **Лінійні рівняння першого порядку**.

Диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{2.62}$$

називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

При $g(x) = 0$ воно називається однорідним

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2.63}$$

так як його ліва частина лінійна і однорідна відносно y і $\frac{dy}{dx}$. Рівняння (2.62) при $g(x) \neq 0$ називається неоднорідним. Диференціальне рівняння (2.63) інтегрується в квадратурах, так як воно являється диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0.$$

Звідки

$$y = ce^{-\int p(x)dx}. \tag{2.64}$$

Якщо $y(x_0) = y_0$, то

$$y = y_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\tau)d\tau}. \tag{2.65}$$

Загальні властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

– Якщо $p(x)$ та $g(x)$ неперервні, то згідно теореми Пікара розв′язок задачі Коші для диференціального рівняння (2.63) існує і є єдиним;

– Лінійне диференціальне рівняння (2.63) не має особливих розв′язків;

– ІК однорідного диференціальне рівняння (2.63) не можуть перетинати вісь OX, так як в противному випадку порушувалися б умови єдиності розв′язку задачі Коші;
– Диференціальне рівняння (2.63) є інваріантно відносним перетворення $x=\varphi(t),(\varphi'(t)\neq 0)$;

Дійсно, скориставшись формулою $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{1}{\varphi'(t)}$

отримаємо лінійне рівняння в змінних y, t

$$\frac{dy}{dt}+P(\varphi(t))\varphi'(t)y=g(\varphi(t))\varphi'(t).$$

– Диференціальне рівняння (2.63) є інваріантним відносно заміни

$$y=\alpha(x)z+\beta(x) \tag{2.66}$$

де z – нова змінна, $\alpha(x)$ та $\beta(x)$– неперервні функції, $\alpha(x)\neq 0$ на (a, b). Тоді нове рівняння в змінних z, x є лінійним

$$z'+\frac{\alpha'(x)+p(x)\alpha(x)}{\alpha(x)}z=\frac{g(x)-\beta'(x)-p(x)\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Якщо $y_1(x)$– частинний розв′язок диференціального рівняння (2.63), то

$$y(x)=Cy_1(x), \tag{2.67}$$

де C - константа, є загальним його розв′язком.

Справедлива теорема.

***<u>Теорема 2.</u>*3.** (про структуру загального розв′язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння) Якщо $y_1(x)$ – частинний розв′язок неоднорідного диференціального рівняння (2.62), а (2.64) – загальний розв′язок лінійного однорідного диференціального рівняння (2.63), то сума

$$y=y_1(x)+ce^{-\int p(x)dx} \tag{2.68}$$

є загальним розв′язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння (2.62).

Теорема доводиться безпосередньою підстановкою (2.68) в рівняння (2.62).

Якщо відомо два частинних розв′язки диференціального рівняння (2.62), то загальний його розв′язок записується без квадратур

$$y=y_1(x)+c(y_2(x)-y_1(x)). \tag{2.69}$$

Розглянемо два методи інтегрування неоднорідного диференціального рівняння (2.62).

<u>Метод Лагранжа</u> (варіації довільної сталої).

Розв′язок шукаємо у вигляді

$$y=c(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.70}$$

Підставивши (2.70) в (2.62), отримаємо

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx}+c(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x))+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=g(x).$$

Звідки $c'(x) = g(x)e^{\int p(x)dx}$, $c(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. Остаточно маємо

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c] \qquad (2.71)$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (2.62), який записаний через дві квадратури. Довільна стала входить завжди в загальний розв'язок лінійно.

<u>Метод Ейлера</u> полягає в тому, що ліва частина диференціального рівняння (2.62) представляється у вигляді точної похідної шляхом домноження на деяку функцію $\mu = \mu(x)$ Визначимо $\mu(x)$. $(\mu y)' = \mu' y + \mu y' = \mu(y' + p(x)y)$. звідки $\mu' = \mu p(x)$, тобто $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$(функція $\mu(x)$ називається інтегрувальним множником). Тому

$$\left[e^{\int p(x)dx}y\right]' = g(x)e^{\int p(x)dx}. \qquad (2.72)$$

Звідки $e^{\int p(x)dx}y = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. З останнього співвідношення отримуємо формулу (2.71).

Загальний розв'язок при умові $y(x_0) = y_0$ можна записати в Формі Коші

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}\left[\int\limits_{x_0}^{x} g(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}dx + y_0\right]. \qquad (2.73)$$

<u>Приклад 2.10.</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + xy = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння. Згідно формулі (2.64) $y = ce^{-\int xdx} = ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

<u>Приклад 2.11.</u> Розв'язати диференціальне рівняння $y' + xy = x$.

<u>Розв'язання</u>. За формулою (2.71)

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx + c\right] = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

д) **Рівняння Бернуллі.**

Це рівняння має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \qquad (2.74)$$

Рівняння (2.74) завжди інтегрується в квадратурах шляхом підстановки

$$y^{1-n} = z. \qquad (2.75)$$

Так як $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, то домножимо (2.74) на $(1-n)y^{-n}$

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = q(x).$$

Отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x), \qquad (2.76)$$

яке вже є лінійним.

При $0<n<1$ рівняння Бернуллі має особливий розв'язок $y(x)\equiv 0$. При $n>1$ розв'язок $y(x)\equiv 0$ міститься в загальному розв'язку при $c=\infty$. При $n<0$ $y(x)\equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння (2.74)

<u>Приклад 2.12.</u> Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'-y=(1+x)y^2 .$$

<u>Розв'язання</u>. Це є рівняння Бернуллі при $n=2$. Згідно алгоритму

$$-y^{-2}y'+\frac{1}{y}=-(1+x)\,, \quad \frac{1}{y}=z\,, \quad \frac{dz}{dx}+z=-(1+x)\,.$$

Отже

$$\frac{1}{y}=z=e^{-x}\left[\int(-1-x)e^{x}dx+c\right]=ce^{-x}-x$$

– загальний розв′язок нашого рівняння.

Відомо, що диференціальне рівняння

$$m'(y)y'+p(x)m(y)=q(x)$$

зводиться до лінійного заміною $z=m(y)$.