Розділ 5. Лінійні диференціальні рівняння n –го порядку

5.1. Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку

5.1.1. Властивості лінійного диференціального оператора

Лінійним диференціальним рівнянням називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \tag{5.1}$$

де $p_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $f(x)$ – задані функції, неперервні на **(**a,b**).**

При цих умовах диференціальне рівняння (5.1) має єдиний розв'язок $y=y(x)$, який задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Цей розв'язок визначений і n раз неперервно диференційований на **(**a,b**).**

Особливих розв'язків диференціальне рівняння (5.1) не має. Будь-який розв'язок при конкретних початкових умовах є частинним. Якщо при $y^{(n)}$ стоїть $p_0(x)$, то точки, в яких $p_0(x)$=0, називаються особливими.

Якщо $f(x)=0$, то диференціальне рівняння *(5.1)* називають однорідним

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0. \tag{5.2}$$

Для скорочення запису введемо лінійний диференціальний оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x). \tag{5.3}$$

Властивості оператора L :

a) $L(ky)=kL(y)$, $k = const$;

b) $L(y_1 + y_2)=L(y_1) + L(y_2)$;

c) $L\left(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i L(y_i)$, де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – деякі числа.

Використовуючи оператор L диференціальні рівняння (5.1) і (5.2) перепишемо у вигляді

$$L(y) = f(x), \tag{5.1'}$$

$$L(y) = 0. \tag{5.2'}$$

<u>Означення 5.1.</u> Функція $y=y(x)$ називається розв'язком диференціального рівняння (5.1), якщо $L(y) \equiv f(x)$ (для диференціального рівняння (5.2) $L(y(x)) \equiv 0$).

Лінійне диференціальне рівняння (5.1) залишається бути лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної $x = \varphi(t)$ $\quad (\varphi'(t) \neq 0)$.

Лінійне диференціальне рівняння (5.1) залишається бути лінійним при будь-якій лінійній заміні шуканої функції

$$y = \alpha(x)z + \beta(x) \tag{5.4}$$

при певних обмеженнях на функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

5.1.2. Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння *n*–го порядку

Наша задача полягає в тому, щоб знайти всі дійсні розв'язки диференціального рівняння

$$L(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0. \tag{5.5}$$

Для розв'язування такої задачі доцільно знайти деякі комплексні розв'язки.

Означення 5.2. Функцію $z(x)=w(x)+iv(x)$, де $w(x)$, $v(x)$ дійсні функції, $i=\sqrt{-1}$, будемо називати комплексною функцією від дійсної змінної x ($w(x)$ – дійсна частина, $v(x)$ – уявна частина).

Приклад 5.1. Показати справедливість формул

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x),\quad e^{\alpha x}=e^{(a+ib)x}=e^{\alpha x}(\cos bx+i\sin bx). \tag{5.6}$$

Розв'язання. Формули (5.6) доводяться шляхом розкладу відповідних експонент в ряд, наприклад.

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\ldots=$$

$$=[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots]+i[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots]=\cos(x)+i\sin(x).$$

Похідна n-го порядку від $z(x)$ дорівнює

$$z^{(n)}(x)=w^{(n)}(x)+iv^{(n)}(x). \tag{5.7}$$

Приведемо формули для обчислення похідних:

а) $$\left(e^{\alpha x}\right)'=\alpha e^{\alpha x}\qquad (\alpha=a+ib). \tag{5.8}$$

Дійсно

$$\left[e^{\alpha x}(\cos bx+i\sin bx)\right]'=\alpha e^{\alpha x}(\cos bx+i\sin bx)+e^{\alpha x}[-b\sin bx+ib\cos bx]=$$
$$=e^{\alpha x}(a+ib)\cos bx+e^{\alpha x}(ai-b)\sin bx=(a+ib)e^{\alpha x}(\cos bx+i\sin bx);$$

б) для дійсного k і будь-якого α справедлива формула

$$\left(x^k e^{\alpha x}\right)'=\left(kx^{k-1}+\alpha x^k\right)e^{\alpha x}; \tag{5.9}$$

в) використовуючи (5.9) можна показати

$$\left(P_n(x)e^{\alpha x}\right)'=\overline{P}_n(x)e^{\alpha x}, \tag{5.10}$$

де $P_n(x)$, $\overline{P}_n(x)$ – поліноми степеня n;

г) при будь-якому α (дійсному або комплексному) справедлива формула

$$\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}. \tag{5.11}$$

Формула (5.11) доводиться шляхом представлення $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$ і використання формули (5.8).

Означення 5.3. Комплексна функція

$$y(x)=y_1(x)+iy_2(x) \tag{5.12}$$

називається розв'язком однорідного диференціального рівняння (5.5), якщо

$$L(y(x))\equiv 0,\ a<x<b.$$

Комплексний розв'язок (5.12) утворює два дійсних розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$. Дійсно

$$L(y(x)) = L(y_1(x) + i\,y_2(x)) = L(y_1(x)) + iL(y_2(x)) = 0\,.$$

Звідки $L(y_1(x)) = 0,\ L(y_2(x)) = 0.$

Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння (5.5):

а) Якщо $y_1(x)$ – розв'язок , тобто $L(y_1)=0$, то $y=c\,y_1(x)$, де c – довільна константа , теж розв'язок диференціального рівняння (5.5)

$$L(c\,y_1) = cL(y_1) = 0;$$

б) якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (5.5) , то $y= y_1(x)+ y_2(x)$ теж розв'язок . Дійсно $L(y_1 + y_2) = L(y_1)+L(y_2) = 0;$

в) якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_m(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (5.5), то їх лінійна комбінація також є розв'язком

$$L\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i y_i(x)\Big) = \sum_{i=1}^{m} c_i L(y_i(x)) = 0\,.$$

Приклад 5.2. Записати двопараметричне сімейство розв'язків диференціального рівняння

$$y'' + y = 0\,.$$

Розв'язання. Очевидно, що $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x -$ розв'язки, тоді $y = c_1\cos x + c_2\sin x -$ розв'язок.

5.1.3. Необхідні і достатні умови лінійної незалежності *n* розв'язків лінійного однорідного рівняння *n* – го порядку

Означення 5.4. Функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ називаються лінійно незалежними на (a, b) , якщо між ними не існує співвідношення виду

$$\alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0,\ \ a < x < b, \tag{5.13}$$

де α_1, ... , α_n – постійні числа не рівні нулю одночасно . В противному випадку функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називають лінійно залежними на (a, b).

Для двох функцій поняття лінійної незалежності на (a,b) зводиться до того, щоб відношення функцій $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$, ($y_2(x) \neq 0$) не було постійним на (a,b).

Зауваження 5.1. Якщо одна із функцій на (a,b) тотожно дорівнює нулю, то ці функції лінійно залежні.

Приклад 5.3. Функції $y_1=1$, $y_2=x$, ... , $y_n = x^{n-1}$ - лінійно незалежні на будь-якому інтервалі $(a,b) \subset (-\infty, +\infty)$.

Дійсно, співвідношення $\alpha_1 1+\alpha_2 x + \ ...\ + \alpha_n x^{(n-1)}=0$, в якому не всі α_i дорівнюють нулю, не може виконуватися для будь-яких x , так як рівняння $(n\text{-}1)$ – го степеня має не більше $(n\text{-}1)$ – го кореня.

Приклад 5.4. Функції $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ – лінійно незалежні, так як співвідношення $\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0$, де α_1, α_2 не рівні одночасно нулю, виконуються не більше ніж в одній точці. Це випливає з $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = e^{2x} \neq const$.

Приклад 5.5. Функції $y_1 = sin^2 x$, $y_2 = cos^2 x$, $y_3 = 1$ – лінійно залежні на $(-\infty, +\infty)$, так як для будь-якого x справджується співвідношення

$$sin^2 x + cos^2 x - 1 = 0\,.$$

Розглянемо необхідні умови лінійної залежності n функцій.

Теорема 5.1. Якщо функції $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ – лінійно залежні на (a,b), то їх вронскіан $W(x)$ тотожно дорівнює нулю на (a,b). Тут

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{5.14}$$

Доведення. Згідно умови теореми $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, $a < x < b$, де не всі α_i одночасно рівні нулю. Нехай $\alpha_n \neq 0$, тоді

$$y_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}. \tag{5.15}$$

Диференціюємо (5.15) $(n\text{-}1)$ раз і підставляємо в (5.14)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1} \\ y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1' - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2' - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1^{(n-1)} - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2^{(n-1)} - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{5.16}$$

Розкладаючи визначник (5.16) на суму визначників, будемо мати в кожному з них два однакові стовпці, тому всі визначники будуть рівні нулю і отже

$$W(x) \equiv 0\,,\ a < x < b.$$

Теорема доведена.

Нехай кожна з функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ – розв’язок диференціального рівняння (5.5). Тоді необхідні і достатні умови лінійної незалежності цих розв’язків даються теоремою 5.1 і наступною теоремою.

Теорема 5.2. Якщо функції $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ – суть лінійно незалежні розв’язки диференціального рівняння (5.5), всі коефіцієнти якого неперервні на (a,b), то вронскіан цих розв’язків W не дорівнює нулю в жодній точці інтервалу (a,b).

Доведення. Припустимо протилежне, що в точці $x_0 \in (a,b)$ $W(x_0) = 0$. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+ \quad \dots \quad +c_ny_n(x_0)=0 \\ c_1y_1'(x_0)+ \quad \dots \quad +c_ny_n'(x_0)=0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+ \quad \dots \quad +c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases} . \qquad (5.17)$$

Так як визначник системи (5.17) $W(x_0)=0$, то вона має ненульовий розв'язок $c_1^{(0)},\dots,c_n^{(0)}$. Розглянемо функцію

$$y = c_1^{(0)}y_1(x)+\dots+c_n^{(0)}y_n(x), \qquad (5.18)$$

яка є розв'язком диференціального рівняння (5.5).

Система (5.17) показує , що в точці x_0 розв'язок (5.18) перетворюється в нуль разом із своїми похідними до *(n-1)* –го порядку . В силу теореми існування і єдиності це значить , що має місце тотожність

$$y(x)= c_1^{(0)}y_1(x)+\dots+c_n^{(0)}y_n(x)\equiv 0,\ a < x < b,$$

де не всі $c_i^{(0)}$ дорівнюють нулю . Останнє означає , що розв'язки $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ – лінійно залежні на **(***a,b***).** Це протиріччя і доводить теорему.

З теорем 5.1 і 5.2 випливає: для того, щоб *n* розв'язків диференціального рівняння (5.5) були лінійно незалежними на **(***a,b***)** необхідно і достатньо , щоб їх вронскіан не дорівнював нулю в жодній точці цього інтервалу.

Виявляється, для вияснення лінійної незалежності *n* розв'язків диференціального рівняння (5.5) достатньо переконатися , що *W(x)* не дорівнює нулю хоча б в одній точці інтервалу **(***a,b***)** . Це випливає з наступних властивостей вронскіана від *n* розв'язків диференціального рівняння (5.5):

а) якщо вронскіан дорівнює нулю в одній точці $x_0 \in$**(***a,b***)** і всі коефіцієнти диференціального рівняння (5.5) є неперервними, то $W(x_0)\equiv 0$ на (*a,b*).

Дійсно, якщо $W(x_0)=0$, то по теоремі 5.2 функції $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ - лінійно залежні на **(***a,b***).** Тоді , по теоремі 5.1 $W(x)\equiv 0$ на (a,b);

б) якщо вронскіан *n* розв'язків диференціального рівняння (5.5) відмінний від нуля в одній точці $x_0 \in$**(***a,b***)** , то $W(x)\neq 0$ на **(***a,b***)**.

Дійсно , якби *W(x)* дорівнював в одній точці з **(***a,b***)** нулю, то згідно **а)** $W(x)\equiv 0$ на **(***a,b***)**, в тому числі і в точці $x_0 \in$**(***a,b***)**, що суперечить умові.

Звідси випливає, якщо *n* розв'язків диференціального рівняння **(**5.5**)** лінійно незалежні на **(***a,b***)**, то вони будуть лінійно незалежні на будь-якому $(a_1,b_1)\subset$**(***a,b***)**.

5.1.4. Формула Остроградського – Ліувілля

Ця формула має вигляд

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx} . \qquad (5.19)$$

<u>Доведення.</u> Розглянемо вронскіан *W(x)* = $\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$ і обчислимо

його похідну

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$\ldots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Перших *(n-1)* - визначників рівні нулю , так як всі вони мають по дві однакових стрічки. Далі домножимо перші *(n-1)* рядки останнього визначника відповідно на $p_n(x), p_{n-1}(x),..., p_2(x)$ і складемо всі n стрічок . В силу диференціального рівняння (5.5) маємо

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & -p_1 y_2^{(n-1)} & \ldots & p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1(x)W(x).$$

Звідки маємо формулу (5.19).

5.1.5. Фундаментальна система розв’язків та її існування

<u>Означення 5.5</u> Сукупність n розв’язків диференціального рівняння (5.5) визначених і лінійно незалежних на **(***a,b***)** називається фундаментальною системою розв’язків .

З попереднього випливає, для того, щоб система n розв’язків диференціального рівняння **(**5.5**)** була фундаментальною системою розв’язків необхідно і достатньо, щоб вронскіан цих розв’язків був відмінний від нуля хоч в одній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів диференціального рівняння (5.5). Всі ці розв’язки повинні бути ненульовими.

Теорема 5.3 (про існування фундаментальної системи розв′язків). Якщо коефіцієнти диференціального рівняння (5.5) є неперервними на (a,b) , то існує фундаментальна система розв'язків на цьому інтервалі.

Доведення. Візьмемо точку $x_0 \in (a,b)$ і побудуємо, використовуючи метод Пікара , розв'язки :

$y_1(x)$ з початковими умовами $y_1(x_0)=1, y_1'(x_0)=0,..., y_1^{(n-1)}(x_0)=0$;

$y_2(x)$ з початковими умовами $y_2(x_0)=0, y_2'(x_0)=1,..., y_2^{(n-1)}(x_0)=0$;

....

$y_n(x)$ з початковими умовами $y_n(x_0)=0, y_n'(x_0)=0,..., y_n^{(n-1)}(x_0)=1$.

Очевидно , що $W(x_0)=1\neq 0$, отже побудовані розв'язки лінійно незалежні. Теорема доведена.

З методу побудови лінійно незалежних функцій випливає, що таких функцій можна побудувати безліч.

Побудована система розв'язків називається нормованою в точці $x = x_0$.

Для будь-якого диференціального рівняння (5.5) існує тільки одна фундаментальна система розв'язків, нормована по моменту x_0.

5.1.6. Загальний розв'язок. Число лінійно незалежних розв'язків

Теорема 5.4. Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$- фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (5.5) , то формула

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \tag{5.20}$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$- довільні константи, дає загальний розв'язок диференціального рівняння (5.5) в області

$$a < x < b,\ |y| < \infty, |y'| < \infty, \ldots, \left|y^{(n-1)}\right| < \infty, \tag{5.21}$$

тобто в області визначення диференціального рівняння (5.5).

Доведення. Якщо $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (5.5) , то лінійна комбінація (5.20) теж розв'язок. Систему

$$\begin{cases} y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \\ y' = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i'(x) \\ \quad\ldots \\ y^{(n-1)} = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x) \end{cases} \tag{5.22}$$

можна розв'язати відносно $c_1,\ c_2,\ \ldots\ ,\ c_n$ в області (5.21), так як $W(x)\neq 0$. Згідно визначення (5.20) – загальний розв'язок і він містить в собі всі розв'язки диференціального рівняння (5.5).

Теорема доведена.

Для знаходження частинного розв'язку такого, що

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0',..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{5.23}$$

необхідно все підставити в (5.22) і визначити $c_i^{(0)}$, $i=1,2,\ldots,n$. Тоді $y=\sum_{i=1}^{n} c_i^{(0)} y_i(x)$ – частинний розв'язок. Якщо фундаментальна система розв'язків – нормована в точці $x=x_0$, то $c_i^{(0)}=y_0$, тобто

$$y=y_0 y_1(x)+y_0' y_2(x)+\ldots+y_0^{(n-1)} y_n(x) \tag{5.24}$$

загальний розв'язок в формі Коші.

Зауважимо, що загальний розв'язок диференціального рівняння (5.5) є однорідна лінійна функція від довільних констант.

Твердження 5.1. Диференціальне рівняння (5.5) не може мати більше ніж n лінійно незалежних частинних розв'язків.

Дійсно, нехай ми маємо *(n+1)* частинний розв'язок. Розглянемо *n* перших. Якщо вони лінійно залежні, то і всі будуть лінійно залежні, так як

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)+0 y_{n+1}(x)=0, \quad a<x<b,$$

де всі α_i не дорівнюють нулю . Якщо ж вони лінійно залежні, то по теоремі 5.4 будь-який розв'язок, в тому числі і y_{n+1} виражається через $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, тобто $y_{n+1}=c_1^{(0)} y_1(x)+\ldots+c_n^{(0)} y_n(x)$. Отримали, що *(n+1)*-ий розв'язок знову виявився лінійно залежним.

Для побудови диференціального рівняння типу (5.5) по системі лінійно незалежних функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, які *n* раз неперервно диференційовані на **(***a,b***)** **,** вронскіан яких $W(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$ необхідно розглянути вронскіан порядку *(n+1)*

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

і розкрити цей визначник по останньому стовпчику.

Якщо відомо один частинний ненульовий розв'язок диференціального рівняння (5.5), то можна понизати порядок його на одиницю заміною

$$y=y_1\int u dx \text{, або } u=\left(\frac{y}{y_1}\right)'. \tag{5.25}$$

Тоді

$$\begin{cases} y'=y_1'\int u du+y_1 u \\ y''=y_1''\int u du+2 y_1' u+y_1 u' \\ \ldots \\ y^{(n)}=y_1^{(n)}\int u du+n y_1^{(n-1)} u+\dfrac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} u'+\ldots+y_1 u^{(n-1)} \end{cases}$$

і диференціальне рівняння (5.5) запишемо у вигляді

$$L(y_1)\int u dx+b_{n-1}(x) u+b_{n-2}(x) u'+\ldots+y_1 u^{(n-1)}=0.$$

Ми отримали диференціальне рівняння порядку *(n-1)*

$$y_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-2}(x)u' + b_{n-1}(x)u = 0\,.$$

Якщо маємо *к* лінійно незалежних частинних розв'язків, то диференціальне рівняння **(**5.5**)** можна понизити на *к* одиниць .

5.2 Лінійні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами

5.2.1. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \tag{5.26}$$

де $a_1,\ldots,a_n$ – постійні дійсні числа, $f(x)$ – неперервна функція на (a,b).

Разом з неоднорідним диференціальним рівнянням (5.26) будемо розглядати однорідне диференціальне рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0\,. \tag{5.27}$$

Для побудови загального розв'язку диференціального рівняння (5.27) необхідно знайти хоч одну фундаментальну систему розв'язків. Виявляється, що фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (5.27) можна побудувати з елементарних функцій.

Наприклад, при $n = 1$ для диференціального рівняння $y' + a_1 y = 0$, де a_1 – дійсне число, частинним розв'язком буде функція $y_1 = e^{-a_1 x}$.

Дотримуючись ідеї Ейлера, частинні розв'язки диференціального рівняння (5.27) шукаємо у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \tag{5.28}$$

де λ – деякі поки невідомі постійні числа (дійсні або комплексні). Підставимо (5.28) в (5.27) отримаємо

$$L\left(e^{\lambda x}\right) = \left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right)e^{\lambda x} = P_n(\lambda)e^{\lambda x}. \tag{5.29}$$

З (5.29) випливає, що $y = e^{\lambda x}$ є розв'язком диференціального рівняння (5.27) тоді і тільки тоді, коли $P_n(\lambda) = 0$, тобто

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,. \tag{5.30}$$

Рівняння (5.30) називають характеристичним рівнянням, а його корені характеристичними числами диференціального рівняння (5.27).

Розглянемо три випадки побудови лінійно незалежних розв'язків.

а). Корені характеристичного рівняння $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ дійсні і різні.

Тоді n дійсних частинних розв'язків знайдемо згідно формул

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n = e^{\lambda_n x}.$$

Ці розв'язки є лінійно незалежними. Дійсно

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так як останній визначник є визначник Вандермонда, який не дорівнює нулю, коли всі числа $\lambda_1,...,\lambda_n$ – різні.

В цьому випадку загальний розв'язок має вигляд

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x} \tag{5.31}$$

в області

$$|x| < \infty, |y| < \infty, |y'| < \infty, ..., \left|y^{(n-1)}\right| < \infty, \tag{5.32}$$

де $c_1,...,c_n$ – довільні сталі.

б). Корені характеристичного рівняння всі різні, але серед них є комплексні.

Нехай $a \pm bi$ – пара комплексно спряжених коренів. Два дійсних, лінійно незалежних розв'язків будуються таким чином. Кореню $a + bi$ відповідає комплексний розв'язок $y = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$. Згідно доведеному вище, функції $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ також є розв'язками диференціального рівняння (5.27), які є незалежними в інтервалі $(-\infty, \infty)$. Аналогічно кореню $a - bi$ відповідають два дійсних, лінійно незалежних розв'язки $e^{ax}\cos bx$, $-e^{ax}\sin bx$. Їх приєднання до знайдених дають лінійно залежну систему розв'язків. Тобто, спряжений корінь не приносить нових дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків.

Таким чином, кожній парі комплексно спряжених коренів відповідає два дійсних лінійно незалежних розв'язки виду

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,$$

які разом з розв'язком $e^{\lambda_k x}$ (λ_k – дійсні числа) утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty, \infty)$.

Приклад 5.6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язки

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

Тоді

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}, y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

– загальний розв'язок.

Приклад 5.7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0.$$

Розв'язання. $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$,

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x}\cos 3x,\ y_3 = e^{2x}\sin 3x,\ y = c_1 e^{-x} + (c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x)e^{2x} -$$

загальний розв'язок.

Приклад 5.8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Розв'язання. $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm 2i$,

$$y_1 = e^x,\ y_2 = \cos 2x,\ y_3 = \sin 2x,\ y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x.$$

в). Випадок наявності кратних коренів характеристичного рівняння.

Припустимо, що $\lambda_1 - k$-кратний корінь характеристичного рівняння (5.30), так що

$$P_n(\lambda_1) = P_n'(\lambda_1) = \ldots = P_n^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \text{ але } P_n^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \tag{5.33}$$

Щоб знайти розв'язки, які відповідають характеристичному числу λ_1, продиференціюємо тотожність

$$L\left(e^{\lambda x}\right) = P_n(\lambda)e^{\lambda x} \tag{5.34}$$

m раз по λ, використовуючи при цьому формулу

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L(u) = L\left(\frac{\partial^m u}{\partial \lambda^m}\right), \quad \left(u = e^{\lambda x}\right).$$

Для знаходження похідної від добутку функцій використовуємо формулу Лейбніца

$$(uv)^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} C_m^i u^{(i)} v^{(m-i)}, \quad \left(C_m^0 = 1\right),$$

де

$$u(\lambda) = P_n(\lambda), v(\lambda) = e^{\lambda x}.$$

Маємо

$$L(x^m e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i P_n^{(i)}(\lambda) x^{m-i} e^{\lambda x}.$$

Використовуючи (5.33), запишемо

$$L(x^m e^{\lambda x}) \equiv 0, \; m = 0,1,\ldots,k-1,$$

тобто функції

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x} \tag{5.35}$$

є розв'язками диференціального рівняння (5.27). Ці функції лінійно незалежні на (a,b).

Таким чином, кожному дійсному кореню λ_1 кратності k відповідає k дійсних лінійно незалежних розв'язків виду (5.35).

Якщо характеристичне рівняння має комплексні корені $a \pm bi$ кратності k, то $2k$ лінійно незалежних розв'язків будуть мати вигляд

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx, \; xe^{ax}\cos bx, \ldots, \; x^{k-1}e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\sin bx, \; xe^{ax}\sin bx, \ldots, \; x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{cases}. \tag{5.36}$$

Розв'язки (5.36) лінійно незалежні на інтервалі $(-\infty, \infty)$

<u>Приклад 5.9</u>. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

<u>Розв'язання</u>. Запишемо розв'язки характеристичного рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0, \; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Тоді

$$y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2 e^x, \; y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

– загальний розв'язок.

<u>Приклад 5.10</u>. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

Розв'язання. $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$, $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$,

$$y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{2x}, y_3 = xe^{2x}, \ y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x}$$

– загальний розв'язок.

Приклад 5.11. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Розв'язання. $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1 + i, \lambda_{3,4} = 1 - i$,

$$y_1 = e^x \cos x, \ y_2 = xe^x \cos x, \ y_3 = e^x \sin x, \ y_4 = xe^x \sin x,$$

$y = e^x \cos x (c_1 + xc_2) + e^x \sin x (c_3 + xc_4)$ – загальний розв'язок.