Розділ 7. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині. Елементи теорії стійкості

7.1. Особливі точки диференціальних рівнянь на площині

Розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{7.1}$$

Якщо $f(x,y)$ в околі точки (x_0, y_0) задовольняє умовам теореми Пікара, то через точку (x_0, y_0) проходить лише одна інтегральна крива диференціального рівняння (7.1).

Припустимо, що функція $f(x,y)$ в точці (x_0, y_0) не є неперервною, то можливі випадки:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$ (A – деяке число);

б) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \infty$;

в) $f(x,y)$ – невизначена в точці (x_0, y_0).

Тоді перші два випадки зводяться до випадку, який розглядає теорема Пікара:

а) $f(x,y)$ можна довизначити – $f(x_0, y_0) = A$;

б) замість диференціального рівняння (7.1) розглядати рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \tag{7.2}$$

і прийнявши $\dfrac{1}{f(x_0,y_0)} = 0$ знаходимо єдиний розв′язок $x = \varphi(y)$ з вертикальною дотичною в точці (x_0, y_0).

У випадку в) точка (x_0, y_0) називається ізольованою особливою точкою.

Дослідження особливих точок проведемо для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}, \tag{7.3}$$

де a , b , c , d – дійсні числа : $ad - bc \neq 0$, так як в противному диференціальне рівняння (7.3) приводиться до рівняння $\dfrac{dy}{dx} = const$.

Нас цікавить поведінка інтегральних кривих в околі точки $(0,0)$. Перепишемо диференціальне рівняння (7.3) у вигляді

$$\frac{dx}{cx+dy} = \frac{dy}{ax+by} = dt$$

і перейдемо до системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = cx + dy \\ \dfrac{dy}{dt} = ax + by \end{cases}. \tag{7.4}$$

Запишемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Нехай λ_1, λ_2 – корені характеристичного рівняння. Розглянемо наступні випадки.

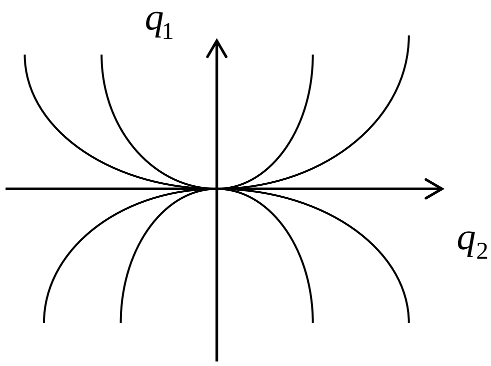
1. Корені дійсні , різні і одного знаку , тобто $\lambda_1\lambda_2 > 0, \ \lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді система диференціальних рівнянь (7.4) має жорданову форму

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \lambda_1 q_1 \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \lambda_2 q_2 \end{cases}. \tag{7.5}$$

Звідси $\dfrac{dq_1}{dq_2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\dfrac{q_1}{q_2}$ і, отже

$$q_1 = c|q_2|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \tag{7.6}$$

Якщо $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, тоді $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$ і всі криві (7.6) примикають до точки (0,0), тобто $q_1 \to 0$ коли $q_2 \to 0$ і розв′язок дотичний в цій точці до осі Oq_2 (мал. 7.1).

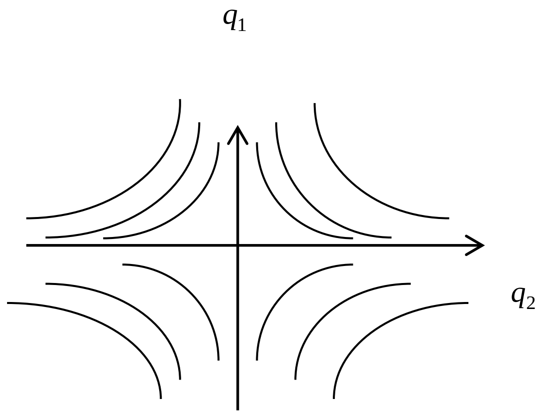


Мал. 7.1

В цьому випадку інтегральні криві дотичні тієї осі, якій відповідає мінімальне по абсолютній величині власне значення. Особлива точка – **вузол**.

Крім інтегральних кривих до особливої точки примикають дві полуосі осі Oq_1, тобто $q_2 = 0, q_1 \neq 0$.

2. Припустимо, що $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Тоді $q_1 = c|q_2|^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ в даному випадку тільки чотири інтегральні корені $q_1 = 0 \quad (q_2 \neq 0), \quad q_2 = 0 \quad (q_1 \neq 0)$ примикають до особливої точки (0,0). Останні інтегральні криві мають вигляд, представлений на мал. 7.2.



Мал. 7.2

Особлива точка – **сідло.**

3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексні корені.

В цьому випадку, в силу довільності матриці перетворення до жорданової форми, елементи цієї матриці можна вибрати так, що $q_{1,2} = u \pm iw$, де u, w – дійсні змінні. Отже,

$$\frac{du + idw}{du - idw} = \left(\frac{\alpha + i\beta}{\alpha - i\beta}\right)\left(\frac{u + iw}{u - iw}\right), \tag{7.7}$$

$$(du + idw)[(\alpha u - \beta w) - i(\alpha w + \beta u)] = (du - idw)[(\alpha u - \beta w) + i(\alpha w + \beta u)].$$

Прирівнюючи дійсні і уявні частини, отримаємо диференціальне рівняння:

дійсні: $du(\alpha u - \beta w) + dw(\alpha w + \beta u) \equiv du(\alpha u - \beta w) + dw(\alpha w + \beta u)$;

уявні: $dw(\alpha u - \beta w) - du(\alpha w + \beta u) \equiv -dw(\alpha u - \beta w) + du(\alpha w + \beta u)$.

З останньої рівності маємо

$$\frac{du}{dw} = \frac{\alpha u - \beta w}{\beta u + \alpha w}. \tag{7.8}$$

Диференціальне рівняння (7.8) перепишемо у вигляді

$$\frac{\beta(udw + wdw)}{u^2 + w^2} = \frac{\alpha(udw - wdu)}{u^2 + w^2}.$$

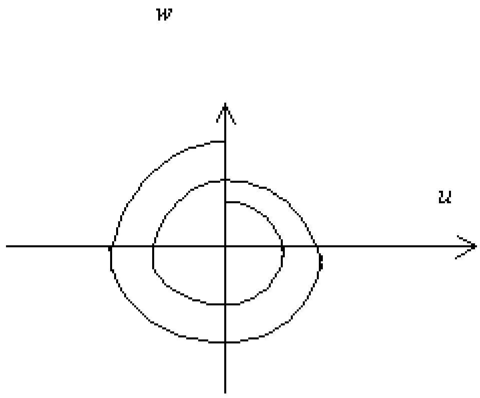
Звідки $\frac{1}{2}\ln\left(u^2 + w^2\right) + \frac{\alpha}{\beta} arctg\frac{w}{u} = \ln c$,

$$\sqrt{u^2 + w^2} = ce^{-\frac{\alpha}{\beta} arctg\frac{w}{u}}. \tag{7.9}$$

В (7.9) покладемо $u = r\cos\varphi, \quad w = r\sin\varphi$, тоді

$$r = ce^{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi}. \tag{7.10}$$

Формулою (7.10) задається сімейство логарифмічних спіралей (мал. 7.3).

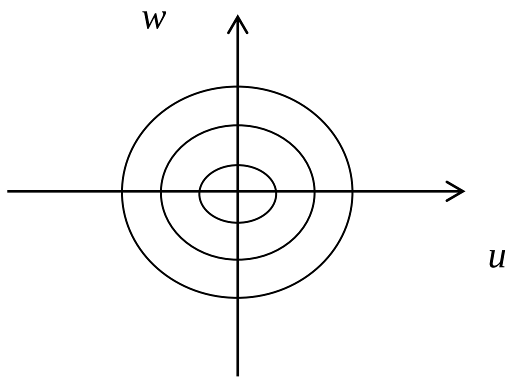


Мал. 7.3

В даному випадку всі інтегральні криві примикають до точки (0,0), роблячи нескінчену кількість оборотів. Така ж картина буде і в площині XOY. Особлива точка – **фокус**.

4. Корені уявні , тобто $\alpha = 0$.Тоді криві (7.10) будуть замкнені, в площині (u,w) – будуть концентричні кола (мал. 7.4).

Особлива точка – **центр**.



Мал. 7.4

5. Розглянемо випадок кратних коренів $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

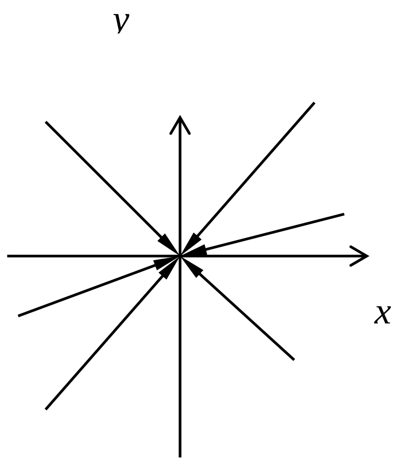
В цьому випадку жорданова форма матриці залежить від кратності елементарних дільників:

а) кореню λ відповідає два простих елементарних дільника, тобто $r(A - \lambda E)$=0. Тоді a=d=0 , b=c= λ . Отже

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \tag{7.11}$$

і y=cx ($x \neq 0$), x=0 ($y \neq 0$).

Ми отримали сімейство напівпрямих, які примикають до точки (0,0) (мал. 7.5).



Мал. 7.5

Особлива точка – **дикретичний вузол**;

б) кореню λ відповідає елементарний дільник кратності 2, тобто $r(A-\lambda E)=1$ і матриця Жордана має форму $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Отже, маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \lambda q_1 + q_2 \\ \dfrac{dq_2}{dt} = \lambda q_2 \end{cases}. \tag{7.12}$$

Звідки

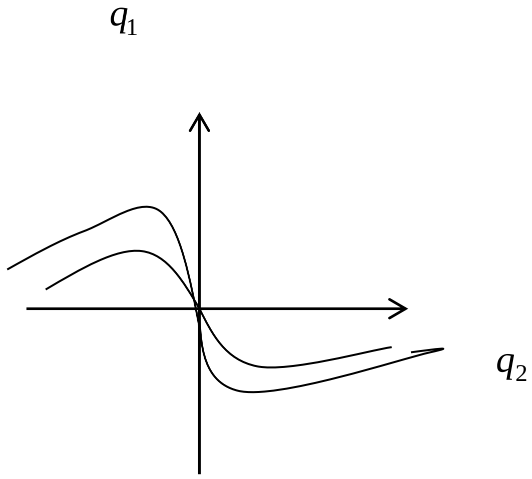
$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{q_1}{q_2} + \frac{1}{\lambda}. \tag{7.13}$$

Розв′язок диференціального рівняння (7.13) запишемо у вигляді

$$q_1 = \frac{1}{\lambda} q_2 \ln|q_2| + cq_2, \quad q_2 \neq 0. \tag{7.14}$$

Крім (7.14) треба додати два розв′язки $q_2 = 0$ ($q_1 \neq 0$), $q_1 = 0$ ($q_2 \neq 0$).

З (7.14) випливає, що інтегральні криві примикають до точки (0,0), кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $\pm\infty$ (мал. 7.6).



Мал. 7.6

Особлива точка – **вироджений вузол**.

7.2. Стійкість розв'язку систем звичайних диференціальних рівнянь. Перший метод Ляпунова

7.2.1. Основні поняття і визначення стійкості по Ляпунову

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad t \ge t_0, \tag{7.15}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – n – вимірний вектор стану об′єкта, $f(x,t) = \begin{pmatrix} f_1(x,t) \\ \vdots \\ f_n(x,t) \end{pmatrix}$ – вектор - функція розмірності n, яка задовольняє умовам теореми існування і єдиності.

Без обмеження на загальність міркувань припустимо, що $x(t) \equiv 0$ – розрахунковий розв′язок (незбурений рух). Дійсно, якщо незбурений рух ненульовий $x(t) = \bar{x}(t, t_0, x_0)$, то заміною $x = y + \bar{x}$ ми приходимо до розглянутого випадку

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\bar{x}}{dt} = f(x,t) - f(\bar{x},t) = f(y + \bar{x}, t) - f(\bar{x},t) = \varphi(y,t). \tag{7.16}$$

Для системи диференціальних рівнянь (7.16) незбурений рух $y(t) \equiv 0$, $t \ge t_0$.

Розв′язок $x(t) \equiv 0$, який досліджується на стійкість називається незбуреним, інші розв′язки будемо називати збуреними.

<u>Означення 7.1.</u> Незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (7.15) будемо називати стійким по Ляпунову, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, що $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$, $t \ge t_0$ лише тільки $\|x_0\| < \delta$.

***<u>Означення 7.2</u>*.** Незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ називають асимптотично стійким по Ляпунову, якщо він стійкий по Ляпунову, тобто виконується означення 7.1 і $\|x(t, t_0, x_0)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Множину $\Omega(t_0)=\{x_0:\|x(t,t_0,x_0)\|\to 0,\, t\to\infty\}$ будемо називати множиною асимптотичної стійкості.

Якщо означення 7.1 не виконується, то незбурений розв′язок $x(t)\equiv 0$ будемо називати нестійким по Ляпунову.

Для дослідження питання стійкості існує два методи Ляпунова. Суть першого методу полягає в тому, що для аналізу стійкості знаходиться загальний розв′язок системи диференціальних рівнянь (7.15). По його виду можна судити про стійкість або не стійкість розв′язку системи диференціальних рівнянь (7.15). Знайти загальний розв′язок системи диференціальних рівнянь (7.15) важко, тому і не завжди можна використати цей метод.

<u>Приклад 7.1.</u> Дослідити на стійкість розв'язки $x(t)\equiv 0$ в залежності від параметра a такого рівняння:

$$\frac{dx}{dt}=ax.$$

<u>Розв'язання</u>. Загальний розв'язок нашого рівняння запишемо в формі Коші $x(t)=x_0e^{at}, \quad t\ge 0$.

Тому розв'язок $x(t)\equiv 0$ при $\begin{cases} a<0 - \textit{асимптотично} \quad \textit{стійкий} \\ a=0 - \textit{стійкий} \\ a>0 - \textit{не} \quad \textit{стійкий} \end{cases}$.

В другому методі для дослідження стійкості використовуються спеціальні функції, які називаються функціями Ляпунова. В цьому випадку загального розв′язку можна не знати.

7.2.2 Перший метод Ляпунова. Дослідження стійкості лінійних нестаціонарних систем

Розглянемо лінійну систему однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x, \tag{7.17}$$

де $A(t)=\{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Тоді розв′язок однорідного диференціального рівняння (7.17) можна записати у формі Коші

$$x(t)=X(t,t_0)x_0, \quad t\ge t_0, \tag{7.18}$$

де $X(t,t_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків, нормована по моменту t_0

$$\frac{dX(t,t_0)}{dt}=A(t)X(t,t_0), \qquad X(t,t_0)=E. \tag{7.19}$$

Питання про стійкість розв′язується шляхом аналізу властивостей матриці $X(t,t_0)$. Розглянемо наступні випадки:

а) матриця $X(t,t_0)=\{x_{ij}(t,t_0)\}_{i,j=1}^{n}$ обмежена при $t\ge t_0$

$$\left\|X\left(t,t_0\right)\right\| \le \sum_{i,j=1}^{n}\left|x_{ij}\left(t,t_0\right)\right| \le M\,,\ t \ge t_0 .$$

В цьому випадку $\|x(t)\| \le \|X(t,t_0)\|\|x_0\| < \varepsilon$ при $\|x_0\| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Тобто при цих умовах незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ є стійким;

б) припустимо , що $\lim\limits_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0$. В цьому випадку матриця $X(t,t_0)$ обмежена при $t \ge t_0$ і розв′язок $x(t) \equiv 0$, $t \ge t_0$ є стійким. Крім цього з формули Коші випливає, що $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Таким чином, незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ є асимптотично стійким;

в) нехай $X(t,t_0)$ – необмежена при $t \ge t_0$, тобто існує зростаюча послідовність чисел $t_0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$ така, що $\lim\limits_{k\to\infty}\|X(t_k,t_0)\| = \infty$.

В цьому випадку, серед функцій $x_{ij}(t,t_0)$ знайдеться хоча б одна $x_{pl}(t_k,t_0)$, для якої $\lim\limits_{k\to\infty}|x_{pl}(t_k,t_0)| = \infty$.

Розглянемо розв′язок $\bar{x}(t)$ з початковими умовами

$$\bar{x}_j(t_0) = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \quad j \ne l, \quad \bar{x}_l(t_0) \ne 0 .$$

Тоді розв'язок (координата) $\bar{x}_p(t) = x_{pl}(t,t_0)\bar{x}_l(t_0)$ буде зростати при $t \to \infty$, які б малі по модулю початкові умови $\bar{x}_l(t_0)$ ми не взяли. Це означає, що незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ буде нестійким.

Це ми показали достатні умови стійкості. Покажемо, що ці умови являються необхідними.

Дійсно, припустимо, що незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ є стійким. Тоді

$$\|x(t)\| < \varepsilon \tag{7.20}$$

при $t \ge t_0$, лише тільки $\|x_0\| < \delta$. Нерівність (7.20) означає, що величини

$$|x_i(t)| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t,t_0)x_j(t_0)\right| \tag{7.21}$$

є обмеженими. Поклавши в (7.21)

$$x_j(t_0) = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \quad x_k(t_0) \ne 0$$

отримаємо

$$|x_{ik}(t,t_0)| \le \frac{|x_i(t)|}{|x_k(t_0)|} \le L = const, \qquad t \ge t_0 . \tag{7.22}$$

Звідки

$$\|X(t,t_0)\| \le n^2 L,\ \ t \ge t_0, \tag{7.23}$$

тобто, матриця $X(t,t_0)$ є обмеженою при $t \ge t_0$.

Якщо незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ асимптотично стійкий, то $\lim\limits_{t\to\infty}|x_i(t)| = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ і з (7.22) випливає

$$\lim_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0 .$$

Якщо незбурений розв'язок нестійкий, то $X(t,t_0)$ необмежена матриця при $t \ge t_0$, так як в противному з її обмеженості випливає стійкість незбуреного розв′язку $x(t) \equiv 0$. Таким чином, ми довели наступну теорему.

<u>Теорема 7.1.</u> Для стійкості незбуреного розв′язку $x(t) \equiv 0$ лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (7.17) необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X(t,t_0)$ цієї системи була обмежена при $t \ge t_0$;
для асимптотичної стійкості – необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{t\to\infty} X(t,t_0) = 0$;
для нестійкості – необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця була необмеженою при $t \ge t_0$.

<u>Зауваження 7.1.</u> Так як фундаментальна матриця $X(t,t_0)$ не залежить від початкових умов $x(t_0)$, то всі розв′язки системи (7.17) будуть стійкими або нестійкими.

7.2.3. Стійкість розв′язку лінійних систем з сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца

Припустимо , що в системі (7.17) матриця A має постійні елементи, тоді $X(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$ і умови стійкості можна виразити через матрицю A.

Відомо, що в цьому випадку лінійно незалежні розв′язки системи диференціальних рівнянь (7.17) мають вигляд:

а) $x^{(i)}(t) = h^{(i)} e^{\lambda_i t}$, $i = 1,\ldots,n$ для випадку, коли корені відповідного характеристичного рівняння λ_i дійсні і різні;

б) $x(t) = e^{(\alpha + it\beta)}\left(h^{(1)} + h^{(2)}\right)$, $x^{(1)}(t) = \operatorname{Re} x(t)$, $x^{(2)} = \operatorname{Im} x(t)$ – коли характеристичне рівняння має пару комплексно спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$;

в) $x^{(k)}(t) = \left(h^{(1)} t^{k-1} + \cdots + h^{(k)}\right) e^{\lambda t}$, $k = 1,\ldots,m$ – коли λ корінь характеристичного рівняння кратності m.

Аналіз розв′язків приводить до твердження.

<u>Теорема 7.2.</u> Незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (7.17) з постійними коефіцієнтами тоді і тільки тоді є:

а) стійким, якщо дійсні частини характеристичного рівняння

$$|\lambda E - A| = 0 \tag{7.24}$$

недодатні, причому характеристичним числам з нульовими дійсними частинами відповідають одномірні клітки Жордана. Тобто такі характеристичні числа мають прості елементарні дільники;

б) асимптотично стійким, якщо дійсні частини коренів характеристичного рівняння (7.24) всі від′ємні;

в) нестійким, якщо хоча б один з коренів характеристичного рівняння (7.24) має додатну дійсну частину, або хоча б одному кратному кореню з нульовою дійсною частиною відповідала неодномірна клітка Жордана (таке число має непростий елементарний дільник).

Розглянемо характеристичне рівняння:

$$|\lambda E - A| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0,\ a_0 > 0\,. \tag{7.25}$$

Складемо матрицю Гурвіца розмірності $n \times n$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \vdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_1 & \vdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

де $a_i = 0$ при $i>n$.

Розглянемо послідовність головних мінорів

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = |\Gamma|\,. \tag{7.26}$$

<u>Критерій Гурвіца.</u> Для того, щоб всі корені характеристичного рівняння (7.24) мали від'ємні дійсні частини необхідно і достатньо, щоб послідовність (7.26) була додатньою, тобто $\Delta_i > 0,\quad i = 1,\ldots,n$.

<u>Приклад 7.2.</u> Записати умови асимптотичної стійкості для такого характеристичного рівняння

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0\,.$$

<u>Розв'язання</u>. Згідно критерію Гурвіца запишемо умови асимптотичної стійкості $\Delta_1 = a_1 > 0,\quad \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,\ a_3 > 0$.

<u>Приклад 7.3</u> Записати умови асимптотичної стійкості для такого характеристичного рівняння

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0\,.$$

<u>Розв'язання</u>. Запишемо умови асимптотичної стійкості

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,\ \Delta_3 = a_3\Delta_2 - a_4a_1^2 > 0,\ a_4 > 0,$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}.$$

7.2.4. Дослідження стійкості за першим наближенням

<u>Лема Гронуолла – Беллмана.</u> Нехай функції $u(t)$ і $v(t)$– неперервні при $t \ge t_0$, $c > 0$ – стала і при $t \ge t_0$ виконується нерівність

$$|u(t)| \le c + \int_{t_0}^{t} |u(\tau)||v(\tau)|d\tau\,. \tag{7.27}$$

Тоді при $t \ge t_0$ справедлива нерівність

$$|u(t)| \le c\exp\int_{t_0}^{t} |v(\tau)|d\tau\,. \tag{7.28}$$

Доведення. Помножимо обидві частини нерівності (7.27) на $|v(t)|$

$$|u(t)||v(t)| \le |v(t)|\left(c + \int_{t_0}^{t} |u(\tau)||v(\tau)| d\tau \right)$$

і позначимо $\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} |u(\tau)||v(\tau)| d\tau$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\frac{d\alpha}{dt} \le |v(t)|(c+\alpha).$$

Так як $c+\alpha > 0$, то $\frac{d\alpha}{c+\alpha} \le |v(t)|dt$, $\ln(c+\alpha) - \ln c \le \int_{t_0}^{t} |v(\tau)| d\tau$.

Отже,

$$c + \alpha \le c \exp \int_{t_0}^{t} |v(\tau)| d\tau. \tag{7.29}$$

Використовуючи, (7.27) і (7.29) отримаємо (7.28). Лема доведена.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad (x(t) \equiv 0 \text{ – незбурений розв}'\text{язок}),\ t \ge t_0. \tag{7.30}$$

Проводимо лінеаризацію системи диференціальних рівнянь (7.30) в околі точки $x(t) = 0$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + R(x,t),\ t \ge t_0, \tag{7.31}$$

де $A(x,t) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}$, $R(x,t) = f(x,t) - A(t)x$.

Стійкість системи диференціальних рівнянь (7.30) в деяких випадках можна проаналізувати за допомогою дослідження стійкості лінеаризованої системи (7.31). Припустимо, що

$$\|R(x,t)\| \le \alpha \|x\|,\ t \ge t_0, \tag{7.32}$$

де постійна $\alpha = \alpha(\delta)$ в достатньо малому околі нуля $\|x\| < \delta$.

Теорема 7.3. Якщо фундаментальна матриця $X(t,\tau)$ однорідної системи при будь-якому $\tau \ge t_0$ і $t \ge t_0$ задовольняє нерівність

$$\|X(t,\tau)\| \le k e^{-\rho(t-\tau)} \tag{7.33}$$

з додатними і незалежними від t, t_0 константами k і ρ, то незбурений розв′язок $x(t) \equiv 0$ асимптотично стійкий при будь-якому виборі функції $R(x,t)$, яка задовольняє умові (7.32), якщо $\alpha < \frac{\rho}{k}$, причому для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь (7.30) для якого $\|x(t_0)\| < \frac{\delta}{k}$ виконується нерівність

$$\|x(t)\| \le e^{-(\rho-\alpha k)(t-t_0)}\delta \quad \text{при} \quad t \ge t_0. \tag{7.34}$$

Доведення. Запишемо розв′язок системи звичайних диференціальних рівнянь (7.31) у вигляді

$$x(t) = X(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)R(x,\tau)d\tau .$$

Звідки

$$\|x(t)\| \le ke^{-\rho(t-t_0)}\|x(t_0)\| + k\alpha\int_{t_0}^{t} e^{-\rho(t-\tau)}\|x(\tau)\|d\tau ,$$

$$\|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)} \le k\|x(t_0)\| + k\alpha\int_{t_0}^{t} e^{\rho(\tau-t_0)}\|x(\tau)\|d\tau .$$

Позначимо $u(t) = \|x(t)\|e^{\rho(t-t_0)}$, $c = k\|x(t_0)\|$, $v = k\alpha$, $u(\tau) = e^{\rho(t-\tau)}\|x(\tau)\|$. Тоді, згідно леми

$$u(t) \le k\|x(t_0)\|e^{k\alpha(t-t_0)}.$$

Отже,

$$\|x(t)\| \le e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}k\|x(t_0)\| \le \delta e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}.$$

Теорема доведена.

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{7.35}$$

Лінеаризуємо систему (7.35) ($f(0)=0$, $t \ge t_0$)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x), \quad A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad R(x) = f(x) - Ax . \tag{7.36}$$

Критерій стійкості автономної системи за першим наближенням:

а). Якщо корені характеристичного рівняння (7.24) задовольняють умові $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, то незбурений розв′язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (7.35) асимптотично стійкий;

б). Якщо серед коренів характеристичного рівняння (7.24) знайдеться хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений розв′язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (7.35) нестійкий;

в). Якщо лінійна система стійка, тобто серед коренів характеристичного рівняння (7.24) знайдуться деякі з нульовими дійсними частинами, то незбурений розв′язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (7.35) може бути як стійкий так і не стійкий.

Приклад 7.4. Дослідити на стійкість незбурений розв′язок x=y=0 системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = -x \end{cases}, t \ge 0 .$$

Розв'язання. Розглянемо два підходи, які описані вище.

а). $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,\ \lambda_{1,2} = \pm i .$

Згідно критерію система стійка.

б). Знайдемо фундаментальну матрицю. Загальний розв′язок системи має вигляд

$$\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y = c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{cases}.$$

Тоді фундаментальну матрицю запишемо таким чином

$$X(t,0) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Оскільки ця матриця обмежена, то незбурений розв′язок *x*=*y*=0 є стійким.