Лекція 9 Контрольні автомати

В цифрових автоматичних пристроях можуть виникати помилки, які призводять до спотворення інформації. Тому при проектуванні цифрових пристроїв застосовують контрольні автомати, які призначені для виявлення помилок. В основі роботи таких автоматів лежить використання контролюючих та коригуючи кодів. Вирішення всіх проблем контролю можливе лише за наявності певної надлишкової інформації, яка супроводжує основну інформацію. Як відомо для представлення числа в у будь-якому коді, тобто, при кодуванні інформації, необхідно доповнити її додатковими, контрольними бітами в цьому коді.

9.1 Схема контролю парності (непарності)

Схема застосовується для виявлення одиничних помилок, викликаних перешкодами в лінії зв'язку або в блоках пам'яті. Метод заснований на підрахунку числа одиниць в порції інформації, що передається в лінію або направляється в пам'ять на зберігання. Причому, якщо число одиниць парне - функція парності P (Parity) дорівнює нулю (табл. 9.1).

Проведемо перевірку можливості спрощення алгебраїчного представлення отриманої інформації (рис. 9.1).

CD \ AB	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

Рисунок 9.1 - Карта Карно згідно з таблицею станів

Таблиця 9.1 - Таблиця станів схеми контролю парності для чотирьох-розрядного двійкового числа

Входи				Вихід
Число X		Число Y		P
A	B	C	D	
0	0	0	0	X
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Рівняння функціонування схеми контролю парності:

$$P = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BCD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}CD + AB\bar{C}D + ABC\bar{D} =$$
$$= \bar{A}\bar{B}(\bar{C}D + C\bar{D}) + \bar{A}B(\bar{C}\bar{D} + CD) + A\bar{B}(\bar{C}\bar{D} + CD) + AB(\bar{C}D + C\bar{D}) =$$
$$= \bar{A}\bar{B}(C \oplus D) + \bar{A}B(\overline{C \oplus D}) + A\bar{B}(\overline{C \oplus D}) + AB(C \oplus D) =$$
$$= \bar{A}\bar{B}(C \oplus D) + AB(C \oplus D) + \bar{A}B(\overline{C \oplus D}) + A\bar{B}(\overline{C \oplus D})$$
$$= (\bar{A}\bar{B} + AB)(C \oplus D) + (\bar{A}B + A\bar{B})(\overline{C \oplus D}) = (\overline{A \oplus B})(C \oplus D) + (A \oplus B)(\overline{C \oplus D}) =$$
$$= (A \oplus B) \oplus (C \oplus D)$$

Схемна реалізація і умовне позначення приведені на рисунку 9.2.

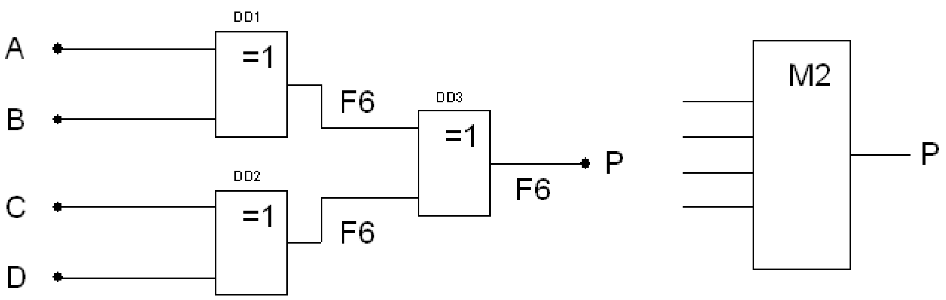


Рисунок 9.2 – Схема контролю парності

Символом М2 позначена операція - "сума по модулю два ".

Розглянемо приклад.

По n-провідній лінії зв'язку (рис. 9.3) передається паралельний двійковий код x(n-1), x(n-2), ... , x1, x0, а приймається код x'(n-1), x'(n-2), ... , x'1, x'0.

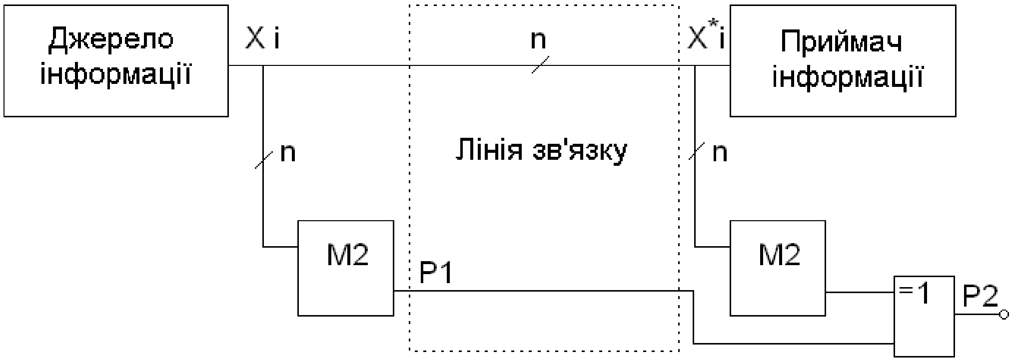


Рисунок 9.3 – Контроль парності в n-провідній лінії зв'язку

Тоді величина P1 = x0 ⊕ x1 ⊕ … ⊕ x(n-1). На приймальному кінці лінії зв'язку P2 = x'0 ⊕ x'1 ⊕ ... ⊕ x'(n-1) ⊕ P1. Підставляючи в останню формулу вираз для P1 і групуючи змінні в однойменні пари, отримаємо: P2 = (x0 ⊕ x'0) ⊕ (x1 ⊕ x'1) ⊕ (x2 ⊕ x'2) ⊕ ... З останнього виразу виходить, що якщо передача пройшла без спотворень, то $x_i = x'_i$ та $x_i \oplus x'_i = 0$, а P2 = 0 (рис. 9.4). При спотворенні одного і в загальному випадку непарного числа біт функція P2 = 1. Аналогічно протікає процес контролю і при послідовній передачі по одній лінії зв'язку n-біт інформаційних сигналів і одного біта парності.

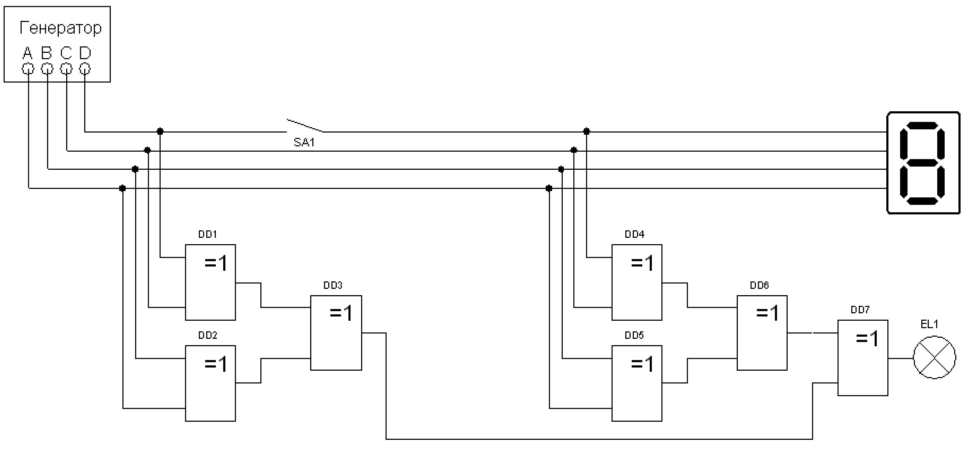


Рисунок 9.4 – Експериментальна схема контролю парності

9.2 Мажоритарні елементи

Мажоритарний закон це «Закон більшості». Вирішальний елемент зазвичай називають мажоритарним елементом. Мажоритарний елемент – це логічний пристрій з непарним числом входів $m = 2k + 1$ (де $k = 1, 2, 3, \ldots$) і одним виходом. Робота мажоритарного елементу полягає в наступному: на входи елементу поступають двійкові сигнали від непарної кількості ідентичних елементів. Вихідний сигнал елемента набуває значення, рівного значенню, яке приймає більшість вхідних сигналів. Найчастіше використовують мажоритарні елементи, які працюють за законом «2 з 3». У цих елементах значення вихідного сигналу дорівнює значенню двох однакових вхідних сигналів (табл. 9.2). Крім того, відомі мажоритарні елементи, що працюють за законом «3 з 5», «4 з 7» і так далі.

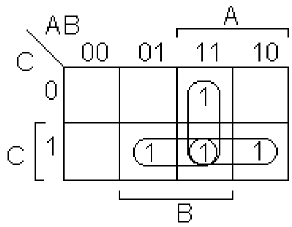
Таблиця 9.2 - Алгоритм функціонування мажоритарного елементу

Входи			Вихід
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Рівняння функціонування:

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Спростимо вираз за допомогою карти Карно:



$$F = AB + AC + BC$$

Схема мажоритарного елемента, який працює за законом «2 з 3» і побудованого з логічних елементах І і АБО має вигляд

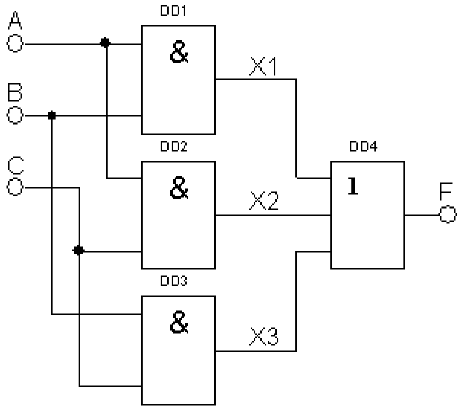


Рисунок 9.5 - Схема мажоритарного елемента

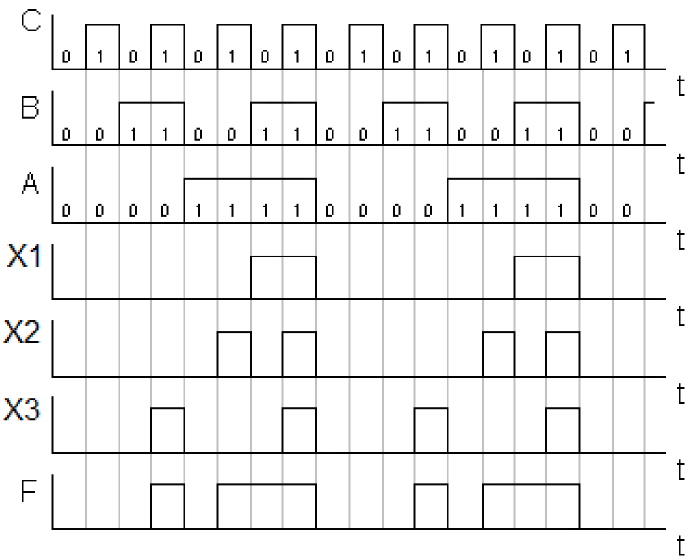


Рисунок 9.6 - Діаграма функціонування в динамічному режимі

Мажоритарний елемент дозволяє забезпечити режим одночасного штатного функціонування основного і резервних елементів мікропроцесорних пристроїв і виключає використання спеціальних комутаційних вузлів, які усувають взаємний вплив основного і резервних елементів один на одне. При цьому відмова основного або резервного елементів не впливає на роботу справних елементів, які залишилися. В даний час знайшло значно широке використання структурне резервування з мажоритарним елементом. Воно використовується для підвищення надійності цифрових електронних пристроїв і цифрових систем.

За способом включення резервних елементів функціональних пристроїв розрізняють три види резервування: постійне, заміщенням і ковзаюче.

При постійному резервуванні передбачають, що будь-який елемент, що відмовив, або вузол, не впливають на вихідні сигнали і тому їх прямого виявлення не виконується. Постійне резервування найбільш поширене в пристроях, які не відновлюються. Крім того, воно є єдино можливим в пристроях, де недопустима навіть короткочасна перерва в роботі. Мажоритарний елемент може бути виконаний у вигляді окремої мікросхеми або зібраний з декількох логічних мікросхем. Принцип мажоритарного резервування пояснимо на прикладі, який відображає частину деякої цифрової схеми.

9.2.1 Принцип мажоритарного резервування

З виходу цифрового пристрою X цифрові сигнали у вигляді послідовності символів «0» і «1» поступають на входи трьох одночасно працюючих однакових рівно надійних пристроїв Y1, Y2, Y3, які створюють резервований вузол (рис. 9.7).

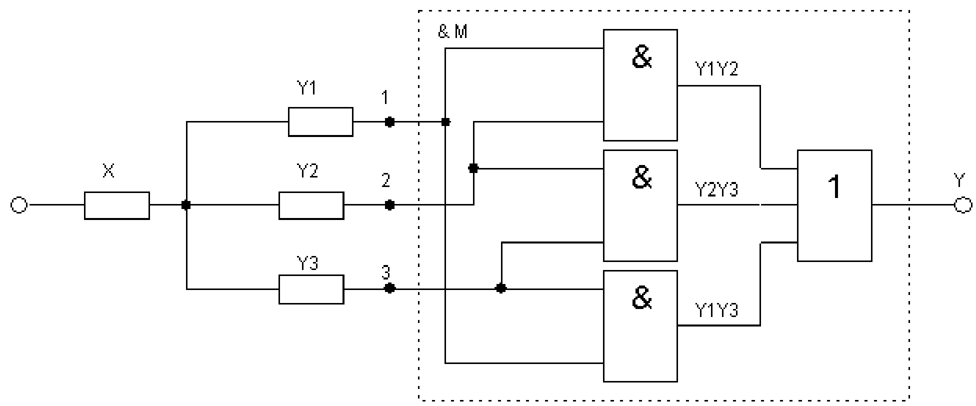


Рисунок 9.7 - Принцип мажоритарного резервування

Цифрові сигнали з виходу кожного з пристроїв Y1, Y2, Y3 поступають на відповідний вхід мажоритарного елементу (в даному випадку трьохвходового). Якщо кожен з пристроїв Y1, Y2, Y3 справний, то в даний момент часу на їх виходах буде один і той же двійковий символ (0 або 1), а значить і на входах мажоритарного елементу. Тоді і на виході мажоритарного елементу буде такий же двійковий сигнал. Якщо який-небудь з пристроїв Y1, Y2, Y3 відмовив, то лише на двох входах мажоритарного елементу в даний момент часу двійкові символи будуть однакові. На виході ж мажоритарного елементу буде двійковий символ, який співпадає з символом на виході двох справних пристроїв. Тобто, мажоритарний елемент виконує логічну операцію синхронізації рішення «по більшості» (операція «голосування»). Тепер стає зрозумілим, чому кількість входів в мажоритарному елементі має бути непарною і більше одиниці.

Постійне резервування вводиться або за допомогою блоку прийняття рішень (вирішального блоку), або у вигляді однотипних елементів, або блоків, включених послідовно (паралельно), або, наприклад, згідно законів k-кратної логіки.

У якості вирішального блоку можна використовувати мажоритарні елементи з постійними або змінними вагами, кодуючі - декодуючі пристрої і схеми з логічних елементів І, АБО, НЕ.

Резервування заміщенням передбачає виявлення елементу або вузла, який відмовив, і підключення справного. Заміщення може відбуватися або автоматично, або вручну.

Резервування заміщенням має наступні переваги. Для багатьох схем при включенні резервного устаткування не потрібно додатково регулювати вихідні параметри, внаслідок того, що електричні режими в схемі не змінюються. Резервна апаратура до моменту включення в роботу знеструмлена, що підвищує загальну надійність системи за рахунок збереження ресурсу електронних пристроїв. Є можливість використання одного резервного елементу на декілька робочих.

Внаслідок складності апаратури для автоматичного включення резерву, резервування заміщенням доцільно застосовувати до великих блоків і окремих функціональних частин РЕА.

При ковзаючому резервуванні будь-який резервний елемент може заміщати будь-який основний елемент. Для здійснення цього резервування необхідно мати пристрій, який автоматично знаходить несправний елемент і підключає замість нього резервний. Переваги такого резервування в тому, що при ідеальному автоматичному пристрої буде найбільший виграш в надійності, в порівнянні з іншими методами резервування. Проте здійснення ковзаючого резервування можливе лише при однотипності елементів.

При мажоритарному контролі використовують декілька пристроїв, які одночасно виконують одні й ті ж дії. Рішення про те, який сигнал має бути на виході, приймається методом “голосування”, тобто по більшості вихідних сигналів окремих пристроїв. Генерування загального вихідного сигналу здійснюється мажоритарним елементом (елементом голосування).

9.3 Цифрова схема включення і виключення з декількох місць

Вихідний стан схеми включення і виключення з декількох місць змінюється лише в разі, якщо змінюється стан одного з входів. Якщо обидва входи змінюють свій стан, то вихідний стан не змінюється. Схема має два входи A і B і один вихід Z (рис. 9.8).

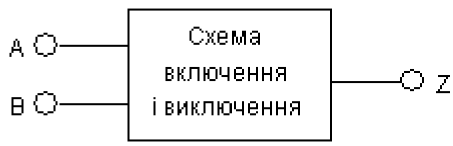


Рисунок 9.8 – Структурна схеми включення і виключення з декількох місць

Таблиця істинності схеми з двома вхідними змінними має 4 варіанта (табл.9.3). Вихідний стан Z для першого варіанту може встановлюватися будь-яким чином. Вибране Z = 0. При переході від варіанту 1 до варіанту 2 змінна B змінює свій стан. Змінна A стан не змінює. Якщо лише один з входів змінює стан, то, згідно визначення, вихід Z повинен поміняти свій стан. Z має дорівнювати 1.

Таблиця 9.3 – Алгоритм функціонування схеми з двома вхідними змінними

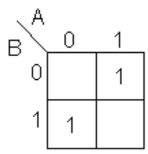
Варіанти	Входи		Вихід
	A	B	Z
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

При переході від варіанту 2 до варіанту 3 змінні A і B змінюють свої стани. Z не повинне змінитися. При переході від варіанту 3 до варіанту 4 змінна B змінює свій стан з 0 на 1. A залишається в стані 1. Таким чином, Z повинне поміняти стан з 1 на 0. Таблиця істинності могла б виглядати інакше, якби у варіанті 1 було обрано Z = 1.

Рівняння функціонування:

$$Z = (A\overline{B}) + (\overline{A}B).$$

Якщо нанести функцію на карту Карно, то видно, що подальше спрощення неможливе.



Побудуємо схему на елементах І-НІ:

$$Z = (A\overline{B}) + (\overline{A}B) = \overline{\overline{(A\overline{B}) + (\overline{A}B)}} = \overline{\overline{(A\overline{B})} \cdot \overline{(\overline{A}B)}}.$$

Схема, побудована згідно перетвореному рівнянню, показана на рисунку 9.9.

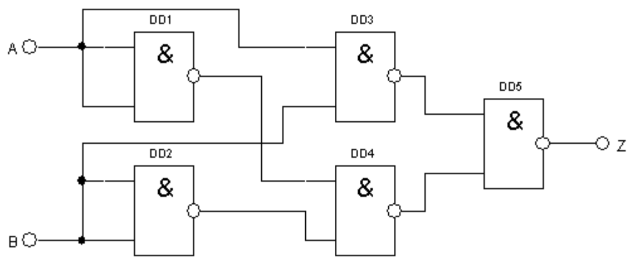


Рисунок 9.9 - Цифрова схема включення і виключення з декількох місць

9.4 Порогова логічна схема

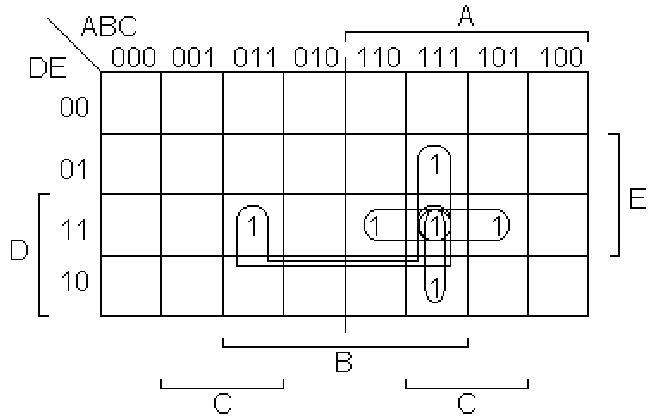
Пороговою логічною схемою називається схема, в якій певна мінімальна кількість вхідних змінних повинна мати стан 1, аби на виході з'явилася логічна 1. Наприклад, потрібно розрахувати схему з п'ятьма вхідними змінними. На виході має бути 1 лише тоді, коли, щонайменше, на чотирьох входах присутня 1.

Вхідні змінні A, B, C, D, E. Вихідна змінна – Z. Спочатку потрібно визначити таблицю істинності. При п'яти змінних величинах можливі 32 варіанти (табл. 9.4).

Таблиця 9.4 - Алгоритм функціонування порогової логічної схеми

Входи					Вихід
A	B	C	D	E	Z
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Досконала диз’юнктивна нормальна форма складається з шести повних кон'юнкцій. ДДНФ спрощується за допомогою карти Карно.



$$F = \overline{A}BCDE + A\overline{B}CDE + AB\overline{C}DE + ABC\overline{D}E + ABCD\overline{E} + ABCDE$$

Можна утворити 5 подвійних груп. Виходить наступна спрощена логічна функція:

$$F = BCDE + ACDE + ABDE + ABCE + ABCD.$$

У базисі І-НІ (рис. 9.10):

$$F = \overline{\overline{BCDE + ACDE + ABDE + ABCE + ABCD}} =$$
$$= \overline{\overline{BCDE} \cdot \overline{ACDE} \cdot \overline{ABDE} \cdot \overline{ABCE} \cdot \overline{ABCD}}$$

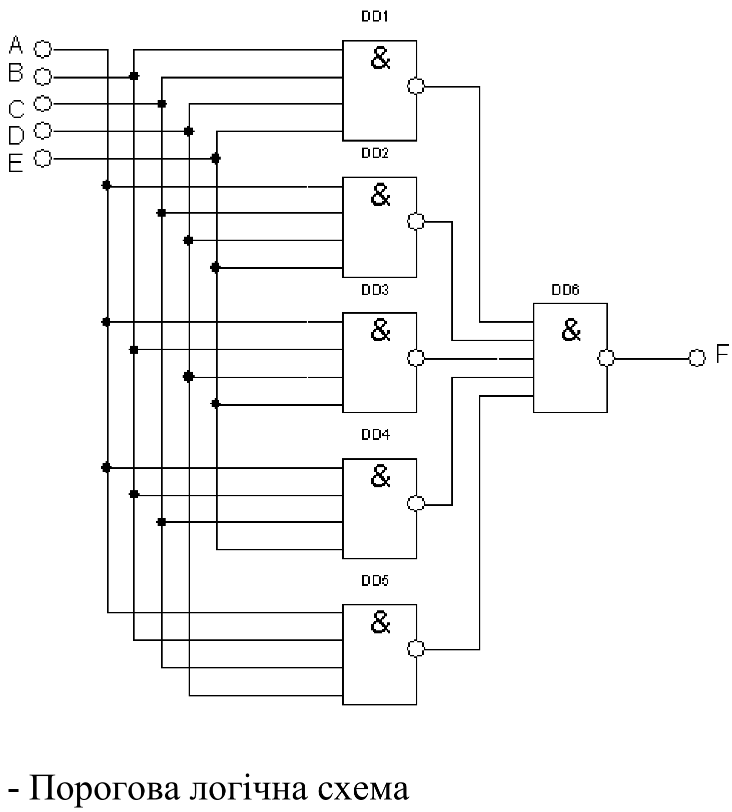


Рисунок 9.10 - Порогова логічна схема

9.5 Код з простим та інверсним повторенням

1. Контролюючий код з простим повторенням ґрунтується на повторенні передачі повідомлення, тобто контрольні біти повторюють інформаційні. Позначимо буквою **A** інформаційні розряди, буквою **B** - контрольні розряди. Результуюча кодова комбінація буде представлена у вигляді:

A1A2A3A4 B1B2B3B4

Необхідно передати послідовність: 1011. Тоді кодове слово буде мати вид: 1011 1011. Прийнята кодова комбінація порівнюється. Якщо є неспівпадіння у відповідних розрядах, то фіксується наявність помилки в кодовій комбінації. Рівняння функціонування контрольного автомата:

$$P = (A1 \oplus B1) \oplus (A2 \oplus B2) \oplus (A3 \oplus B3) \oplus (A4 \oplus B4)$$

Кодер та декодер коду з простим повторенням представлено на рисунку 9.11.

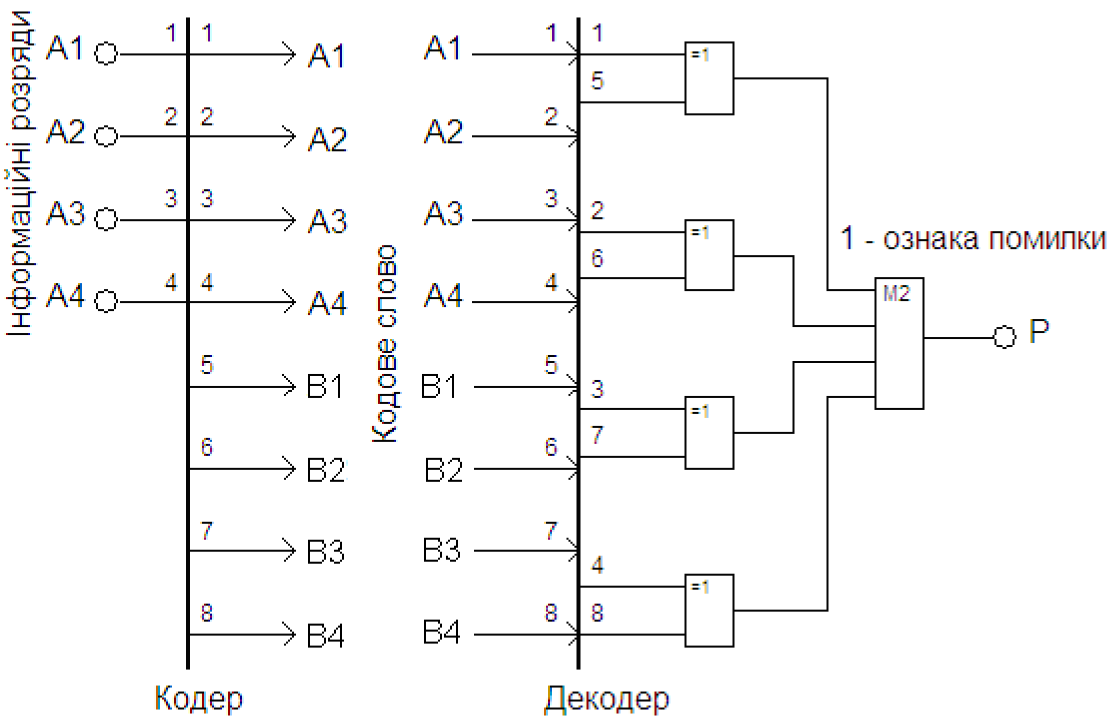


Рисунок 9.11 - Кодер та декодер коду з простим повторенням

Експериментальна схема контролю парності з простим повторенням представлена на рисунку 9.12.

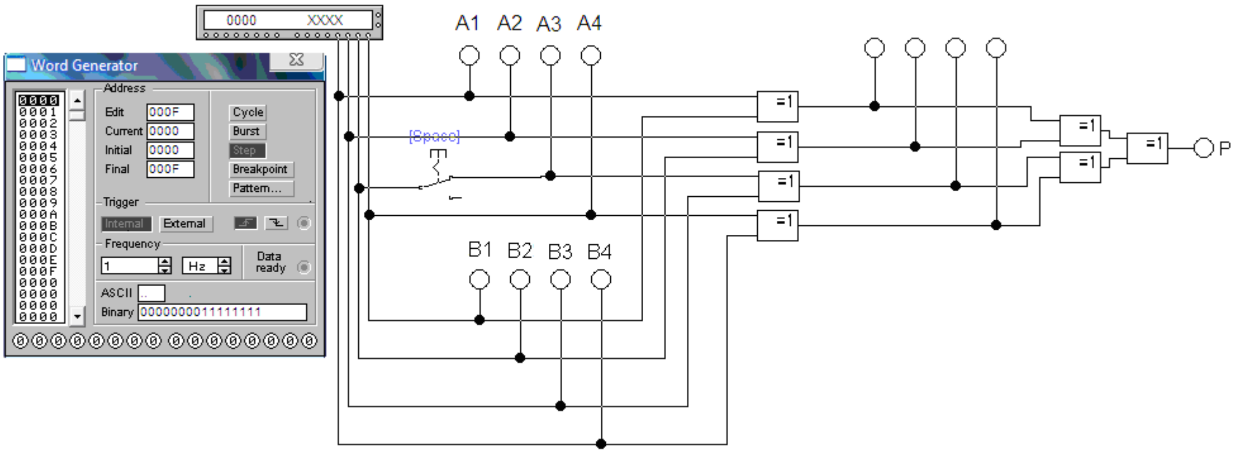


Рисунок 9.12 - Експериментальна схема контролю парності з простим повторенням

2. Контрольні розряди коду з інверсним повторенням інверсні інформаційним розрядам. Результуюча кодова комбінація буде представлена у вигляді: $A1A2A3A4\overline{A1}\overline{A2}\overline{A3}\overline{A4}$

Необхідно передати послідовність: 1011. Результуюча кодова комбінація буде представлена у вигляді: 1011 0100. Прийнята кодова комбінація порівнюється. Якщо є співпадіння у відповідних розрядах, то фіксується наявність помилки в кодовій комбінації Рівняння функціонування контрольного автомата: $P = \overline{(A1 \oplus \overline{A1}) \cdot (A2 \oplus \overline{A2}) \cdot (A3 \oplus \overline{A3}) \cdot (A4 \oplus \overline{A4})}$

Кодер та декодер коду з інверсним повторенням представлено на рисунку 9.13.

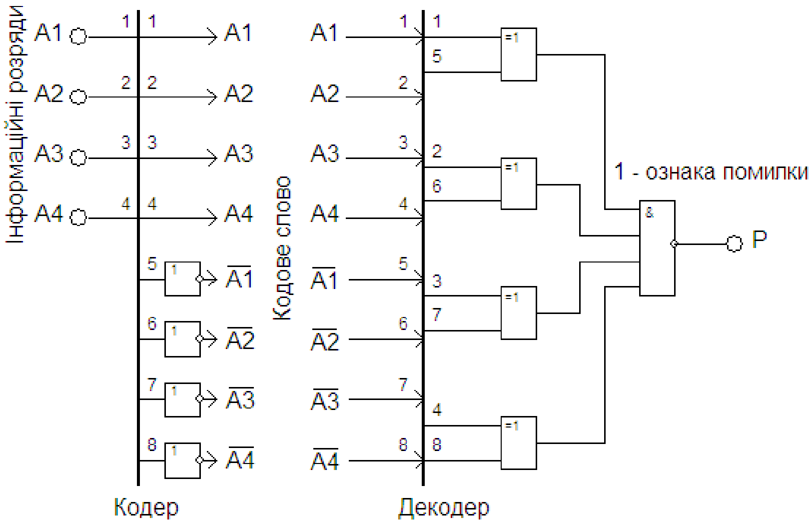


Рисунок 9.13 - Кодер та декодер коду з інверсним повторенням

Експериментальна схема контролю парності з інверсним повторенням представлена на рисунку 9.14.

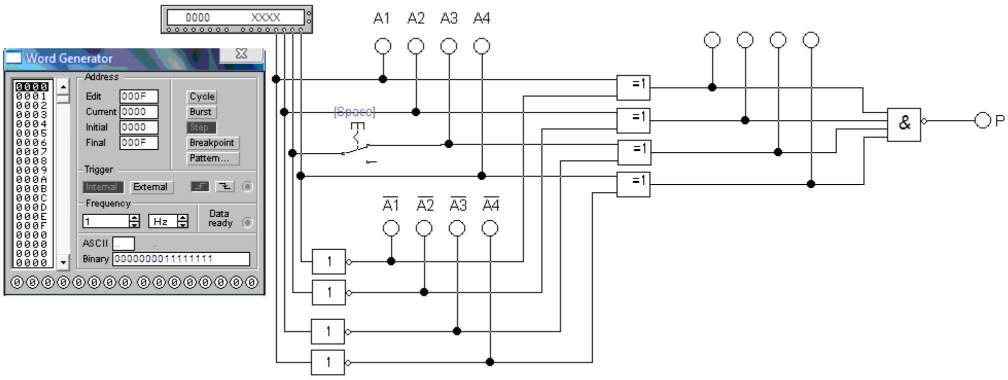


Рисунок 9.14 - Експериментальна схема контролю парності з інверсним повторенням

9.6 Кореляційний код

В кореляційному коді, передача повідомлення забезпечується додатковими розрядами, розташованими в кодовій комбінації. Цифра 0 зображується надлишковою комбінацією 01, а цифра 1 зображується як 10.

Необхідно передати комбінацію 01011. Кодова комбінація є послідовністю 0110011010. Кодер та декодер кореляційного коду для послідовності 01011 наведено на рисунку 9.15.

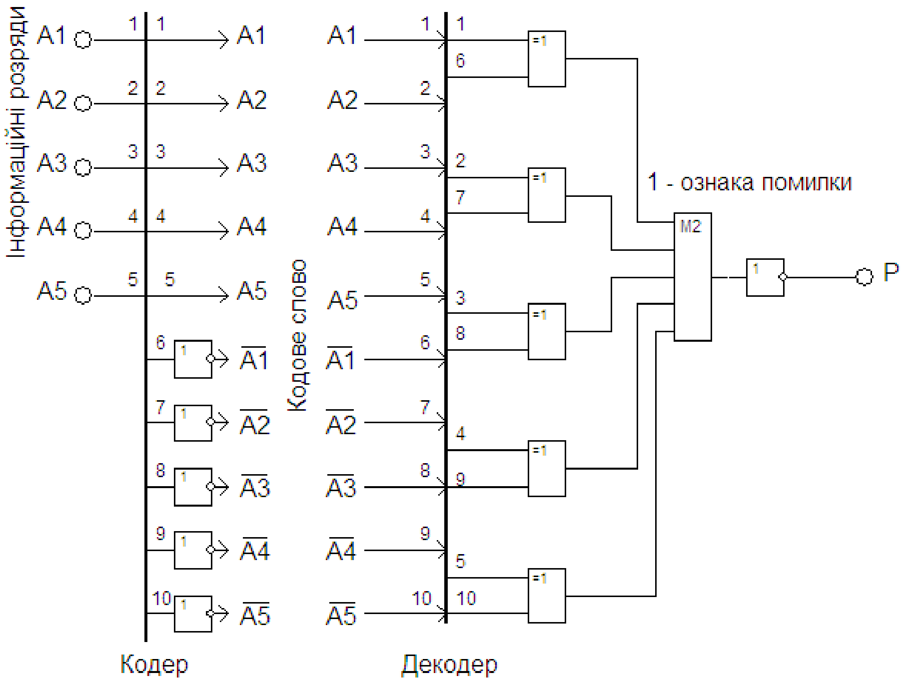


Рисунок 9.15 - Кодер та декодер кореляційного коду

Рівняння функціонування кореляційного кодування:

$$P = \overline{(A1 \oplus \overline{A1}) \oplus (A2 \oplus \overline{A2}) \oplus (A3 \oplus \overline{A3}) \oplus (A4 \oplus \overline{A4}) \oplus (A5 \oplus \overline{A5})} =$$

$$= \overline{(A1 \oplus \overline{A1}) \oplus [(A2 \oplus \overline{A2}) \oplus (A3 \oplus \overline{A3})] \oplus [(A4 \oplus \overline{A4}) \oplus (A5 \oplus \overline{A5})]}$$

Експериментальна схема кореляційного кодування представлена на рисунку 9.16.

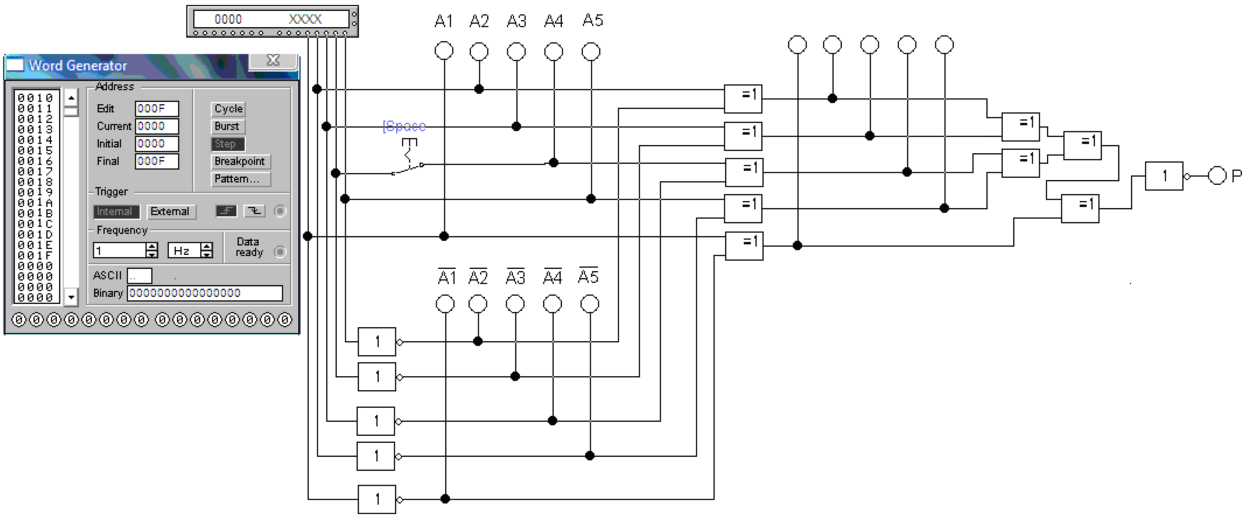


Рисунок 9.16 - Експериментальна схема кореляційного кодування

9.7 Код Бауера

Код Бауера (інверсний код) є різновидом коду з простим повторенням. Кодова комбінація містить інформаційні та контрольні розряди. Контрольні розряди повторюють інформаційні, якщо кількість інформаційних одиниць є парним числом. У протилежному випадку контрольні розряди є інверсними інформаційним розрядам. Наприклад, ми маємо повідомлення 010. Кількість інформаційних одиниць є непарним числом. Тому контрольні розряди будуть інверсними до інформаційних розрядів. Після кодування отримаємо 010 101. Прийнята комбінація перевіряється відповідно до наступного правила. Підраховується число одиниць в інформаційній частині кодової комбінації. Якщо число одиниць парне, друга частина комбінації повторює першу. Якщо непарне, то кодова комбінація є інверсією першої частини.

Після перетворення другої частини в інверсну форму отримують пряму форму і порівнюють її з першою частиною. Якщо має місце неспівпадіння чисел при попарному порівнянні інформаційних та контрольних розрядів кодової комбінації, то це вказує на наявність помилки.

Кодер коду Бауера представлено на рисунку 9.17.

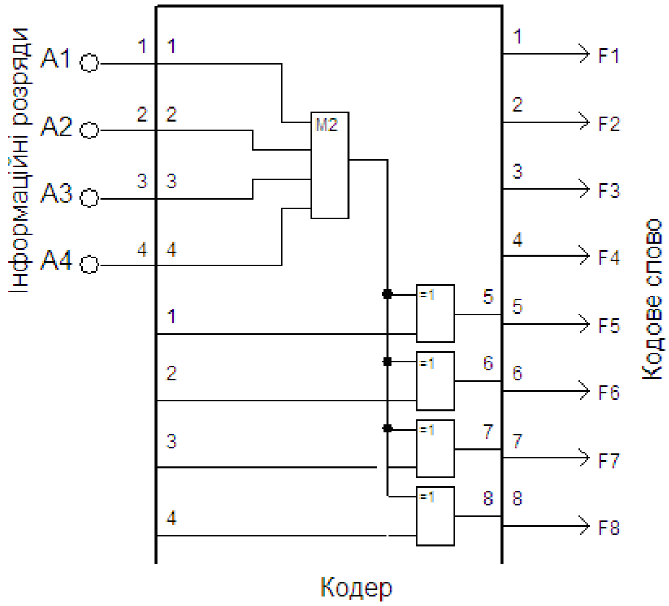


Рисунок 9.17 - Кодер коду Бауера

Рівняння функціонування кодера Бауера:

$F1 = A1$; $F2 = A2$; $F3 = A3$; $F4 = A4$; $F5 = [(A1 \oplus A2) \oplus (A3 \oplus A4)] \oplus A1$;

$F6 = [(A1 \oplus A2) \oplus (A3 \oplus A4)] \oplus A2$; $F7 = [(A1 \oplus A2) \oplus (A3 \oplus A4)] \oplus A3$

$F8 = [(A1 \oplus A2) \oplus (A3 \oplus A4)] \oplus A4$.

Декодер коду Бауера представлено на рисунку 9.18.

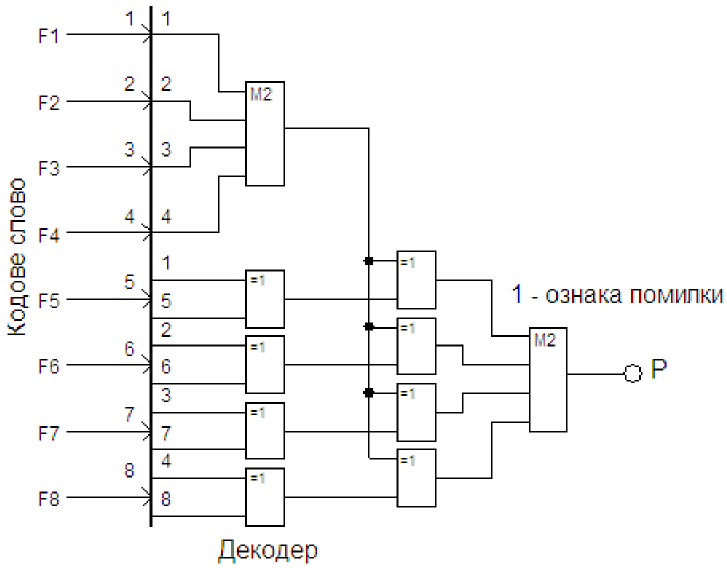


Рисунок 9.18 - Декодер коду Бауера

Рівняння функціонування декодера коду Бауера:

$$P = [[[(F1 \oplus F2) \oplus (F3 \oplus F4)] \oplus (F1 \oplus F5)] \oplus [[(F1 \oplus F2) \oplus (F3 \oplus F4)] \oplus (F2 \oplus F6)]] \oplus$$
$$\oplus [[[(F1 \oplus F2) \oplus (F3 \oplus F4)] \oplus (F3 \oplus F7)] \oplus [[(F1 \oplus F2) \oplus (F3 \oplus F4)] \oplus (F4 \oplus F8)]].$$

Експериментальна схема кодування Бауера представлена на рисунку 9.19.

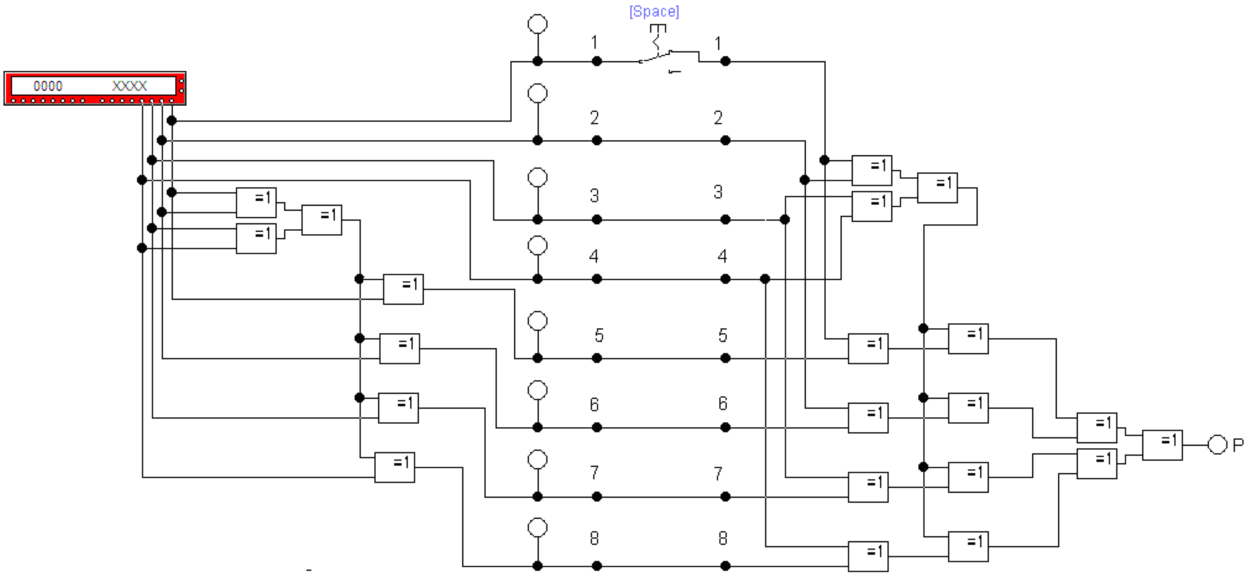


Рисунок 9.19 – Експериментальна схема кодування Бауера

9.8 Код Бергера

Коди Бергера відносяться до роздільних несистематичних кодів. Вони також називаються кодами з підсумовуванням. Існує декілька варіантів таких кодів. У простому випадку, коли даний двійковий код безнадлишковий, підраховується число одиниць n в інформаційних розрядах, а потім двійкове подання n інвертується. Інверсний код числа одиниць формує контрольні біти комбінації. Число контрольних розрядів m знаходиться так:

$$m \geq \log_2 n,$$

де n - число інформаційних розрядів, m - число контрольних розрядів.

Коди Бергера для трьохрозрядних двійкових кодів десяткових чисел від 0 до 7 наведені в таблиці 9.5.

Таблиця 9.5 - Коди Бергера для трьохрозрядних двійкових чисел

Десяткове число	Інформаційні розряди	Контрольні розряди
0	000	11
1	001	10
2	010	10
3	011	01
4	100	10
5	101	01
6	110	01
7	111	00

Є інший спосіб побудови коду Бергера, при якому замість одиниць підраховується число нулів в інформаційних розрядах. У якості контрольних розрядів записується прямий двійковий код числа нулів в інформаційних розрядах (табл. 9.6).

Таблиця 9.6 – Варіант кодів Бергера

Десяткове число	Інформаційні розряди	Контрольні розряди
0	000	11
1	001	10
2	010	10
3	011	01
4	100	10
5	101	01
6	110	01
7	111	00

Обидва варіанти мають приблизно однакові переваги, але другий варіант реалізується простіше.

Приклад. Передбачимо, що помилка викликається перетворенням одиничних бітів в нульові. Інформаційною комбінацією є така послідовність:

$$011010.$$

Двійковий код числа одиниць дорівнює:

011, а після інвертування 100.

Кодова комбінація коду Бергера:

$$011010\ 100.$$

Нехай при передачі сталася помилка і була прийнята кодова комбінація:

$$0\overset{\downarrow}{1}0010\ 100.$$

Якщо підрахувати кількість одиничних бітів в інформаційних розрядах, то отримаємо комбінацію:

010 і відповідно 101 після інвертування.

Новий контрольний код 101 більше, ніж комбінація 100 в прийнятому коді. Неспівпадіння обчислених контрольних бітів з прийнятими контрольними бітами свідчать про наявність помилки.

Перевагою коду Бергера є простий спосіб обчислення контрольних бітів.

9.9 Код Хеммінга

Коди, запропоновані американським вченим Хеммінгом, здатні виявляти і виправляти помилки. Позначимо через n кількість інформаційних розрядів, а через m - кількість контрольних розрядів. Кодова комбінація в коді Хеммінга містить загальне число розрядів k = n + m. Кількість контрольних розрядів отримуємо так:

$$m \geq \log_2 n + 1$$

Для виявлення помилок контрольні розряди розміщуються **<u>на певних позиціях</u>**. Зазвичай контрольні розряди розміщуються на таких позиціях

$$..., 2^2, 2^1, 2^0, \ (..., 16, 8, 4, 2, 1), \ (…, 10000, 1000, 100, 10, 01)$$

<u>які мають лише одну 1 в двійковому записі розряду</u>. Нумерація позицій ведеться зліва направо.

Розглянемо приклад побудови кодової послідовності двійкового числа в коді Хеммінга. Нехай необхідно передати інформацію з 4 інформаційними розрядами, n = 4. Тоді число контрольних розрядів:

$$m \geq \log_2 4 + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

В результаті маємо семирозрядний код (табл. 9.7).

Таблиця 9.7 - Позначення інформаційних та кодових розрядів у коді Хеммінга

Порядкові номери бітів						
1	2	3	4	5	6	7
m1	m2	n1	m3	n2	n3	n4

Кожному номеру розряду від 1 до 7 поставимо у відповідність трьохро-зрядне двійкове число, відповідно до його номеру (табл. 9.8).

Таблиця 9.8 - Номери бітів двійкового числа

Десяткове число	Номери бітів двійкового числа		
	A3	A2	A1
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Введемо поняття контрольних груп. До контрольної групи будемо заносити десяткові числа **<u>для яких порядкові номери бітів двійкового числа містять одиниці</u>**.

Першу контрольну групу складають десяткові числа, для яких біти двійкового числа містять одиниці у стовпці А1: 1, 3, 5, 7.

Другу контрольну групу складають десяткові числа, для яких біти двійкового числа містять одиниці у стовпці А2: 2, 3, 6, 7.

Третю контрольну групу складають десяткові числа, для яких біти двійкового числа містять одиниці у стовпці А3: 4, 5, 6, 7.

Для формування контрольних розрядів необхідно скласти розряди контрольних груп за модулем 2. За допомогою кодуючого пристрою (кодера) на стороні передавача формується значення кожного контрольного розряду A'_i шляхом складання за модулем 2 значень відповідних інформаційних розрядів однієї контрольної групи:

- у першій контрольній групі: $A1' = n1 \oplus n2 \oplus n4$;
- у другій контрольній групі: $A2' = n1 \oplus n3 \oplus n4$;
- у третій контрольній групі: $A3' = n2 \oplus n3 \oplus n4$.

Контрольні розряди m1, m2, m3 не беруть участь у формуванні контрольних груп, оскільки їх значення ще не відомі.

Після приймання закодованої послідовності знаходять суму за модулем 2 розрядів контрольної групи. Якщо послідовність передалась правильно, то сума буде дорівнювати нулю. Якщо при передачі виникла помилка, то отримаємо двійкову послідовність, десятковий код якої буде відповідати номеру розряду у якому виникла помилка.

Приклад. Передається інформація $1011_2 \rightarrow 11_{10}$. Побудувати кодер та декодер Хеммінга.

За допомогою кодера на стороні передавача формується значення кожного контрольного розряду A_i шляхом складання за модулем 2 значень відповідних інформаційних розрядів однієї контрольної групи.

Порядкові номери бітів						
1	2	3	4	5	6	7
m1	m2	1	m3	0	1	1
		n1		n2	n3	n4

- у першій контрольній групі А1: $m1' = n1 \oplus n2 \oplus n4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$;

- у другій контрольній групі А2: $m2' = n1 \oplus n3 \oplus n4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$;

- у третій контрольній групі А3: $m3' = n2 \oplus n3 \oplus n4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$.

Порядкові номери бітів						
1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	0	0	1	1
m1	m2	n1	m3	n2	n3	n4

Формування коду Хеммінга дорівнює 0110011 (розряди пронумеровані зліва направо).

Виконаємо перевірку правильності передачі інформації. На вхід декодера поступило наступне кодове слово:

Помилка в п’ятому розряді: 0110111.

Порядкові номери бітів						
1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	0	$\boxed{1}$	1	1
m1	m2	n1	m3	n2	n3	n4

Визначимо суму за модулем 2 в кожній контрольній групі:

$m1 = n1 \oplus n2 \oplus n4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1;$ помилка

$m2 = n1 \oplus n3 \oplus n4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1;$

$m3 = n2 \oplus n3 \oplus n4 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$ помилка

Для комбінації 0110111 отримаємо вектор помилки: V_0 = m1+m3 = = 2^0+2^2 = 1+4 = 5, що вказує на помилку у п’ятому розряді.