Лекція 1.4.

4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. АНАЛІТИЧНІ,   
КОМБІНОВАНІ І СПЕЦІАЛЬНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

4.1. Аналітичні і комбіновані методи моделювання

В основі аналітичних моделей технологічних процесів лежать фундаментальні закони енерго- і масопереносу, виражені у вигляді функціональних співвідношень (алгебраїчних, інтегрально-диференціальних, кінцево-різницевих і т.д.). Тому аналітичні моделі описують і розкривають сутність процесів і явищ, що протікають в досліджуваному об'єкті та визначають його властивості і поведінку.

Методи дослідження аналітичних моделей: аналітичні (отримують загальне рішення в явному вигляді і підставляють в нього значення граничних та початкових умов) і чисельні (загальні рішення в явному вигляді замінюються наближеними).

Як приклад аналітичних моделей можна назвати диференціальні рівняння. Фізичні процеси у загальному випадку можуть бути описані диференціальними рівняннями у часткових похідних. Для спрощення моделі об’єкт представляють у вигляді набору (системи) частин, які описуються функціями тільки однієї змінної – часу. При цьому задачі, що вирішуються у нафтогазовій інженерії, як правило, допускають лінеаризацію, яка спрощує моделі процесів – у такому випадку аналітична модель являє собою лінійне диференціальне рівняння.

Якщо технологічний процес має одну вхідну величину (вплив) *х(t)* і одну вихідну величину *у(t)*, то лінійне диференціальне рівняння, що описує його властивості, має такий загальний вигляд:

 (4.1)

Рішення диференціальних рівнянь-моделей шукаються в замкнутому вигляді, у вигляді функціональних залежностей. Такі аналітичні моделі технологічних процесів зручні при аналізі сутності фізичних (хімічних) процесів, але пошук їх рішень буває вельми складним. Громіздкість аналітичних виразів суттєво зменшує їх застосування у інженерній практиці.

Тобто, при якісному аналізі процесів, компаративному (порівняльному) підході застосування аналітичних моделей більш виправдане, ніж у випадку необхідності отримання конкретних числових оцінок вихідних параметрів об’єкта.

Якщо окремі елементи моделі (наприклад, коефіцієнти у аналітичному рівнянні) отримані статистичними (емпіричними) методами, то відповідні моделі є *аналітично-емпіричними.* Аналітичні методи іноді поєднують з графічними, одержуючи таким чином *графоаналітичні моделі.*

Нижче при розгляді моделювання окремих процесів збагачення корисних копалин ми розглянемо їх аналітичні і комбіновані моделі.

4.2. Графічні методи моделювання

4.2.1. Факторні моделі

Застосування факторної моделі використовує прийом типу «чорний ящик» й ілюструється рис. 4.1.

Об’єкт

Модель

***х***

***у\****

***у***

**Рис.4.1. Схема одержання моделі об’єкту:   
Хn – вхідні фактори; Yn – вихідні фактори**

Модель

технологічного

процесу

Х1

Х2

Х3

Х4

Y1

Y2

Y3

Вхідні Хn і вихідні Yn параметри об’єкту встановлюють шляхом апріорної інформації, а також за допомогою попередніх експериментів. Задача моделювання полягає в тому, щоб значення *у\** одержане на математичній моделі було близьким до реального значення *у* на виході об’єкту.

4.2.2. Феноменологічні моделі

Феноменологічний метод передбачає поділ технологічного процесу на субпроцеси. Такий прийом застосовується з метою спрощення і упорядкувавння процесу моделювання технологічного процесу. Кожен субпроцес вивчають окремо. Вихідні параметри попереднього субпроцесу є вхідними для наступного. Вихідні параметри останнього субпроцесу є вихідними для всього процесу.

Наприклад, феноменологічна схема гідроенергетичних процесів (рис. 4.2):



**Рис. 4.2. – Феноменологічна схема гідроенергетичних процесів** **.**

При застосуванні феноменологічного методу загальна модель процесу буде представлена сімейством рівнянь-моделей субпроцесів. Феноменологічна модель містить механізм для опису явища, але може бути тимчасовою, - вона уточнюється в ході вивчення процесу.

**4.2.3. Моделі-графи**

Розповсюджений у всіх галузях науки і техніки метод графічного зображення процесів, залежностей, структур і т.п. за допомогою точок та ліній, що їх з’єднують, привів до створення специфічних і звичних для спеціалістів кожної галузі графічних схем типу електричних, технологічних, пневматичних, гідравлічних і т.п. В математиці ці питання вирішуються в теорії графів, яка є топологічним відображенням теорії множин. Ця теорія може бути прикладена до будь-яких схематичних зображень процесів і служить загальним математичним інструментом для їх досліджень. В ряді випадків використання математичного апарату теорії графів дозволяє зробити деякі висновки і спрощення, які не настільки очевидні в звичайних схемах. В цьому смислі доцільно використання мови теорії графів і переклад на них технологічних схем і залежностей, що розглядаються в збагаченні корисних копалин.

*Графом* називається сукупність об’єктів (вузлів) і зв’язків (дуг і ребер), що їх з’єднують. Тим самим дається уявлення про структуру об’єкту, що досліджується, встановлюються зв’язки між його окремими вузлами, а якщо ввести для ребер відповідну масову характеристику, можна одержати й кількісну оцінку зв’язків.

Граф має дві форми представлення: графічну і матричну (рис. 4.3). При цьому матриця графа називається матрицею інціденцій. Граф – це фігура, що складається з точок (вершин) і з'єднують їх відрізків (ланок). Вершини графа – це точки на мережі, найбільш важливі для визначення відстаней або маршрутів руху. Ланки графа – це відрізки транспортної мережі, що характеризують наявність транспортного зв'язку між сусідніми вершинами. Ланки графа характеризуються числами, які можуть мати різний фізичний зміст. Найчастіше це відстань, але може використовуватися, наприклад, і час руху. Орієнтовані у напрямку ланки графа називаються дугами. Фактично будь-яка неорієнтована ланка графа включає в себе дві рівноцінні, але протилежно спрямовані дуги. Залежно від того, всі або частина ланок мають напрямок, граф є орієнтованим або змішаним. У матриці наявність зв'язку фіксується одиницею, а її відсутність – нулем.

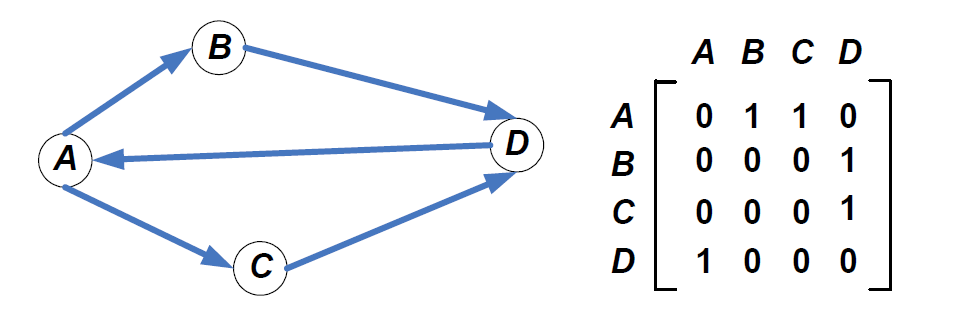


Рис. 4.3. Граф і матриця інциденцій

Теорія графів одна з найнеобхідніших для розрахунків транспортних мереж, оскільки кожне ребро крім направлення може мати вагу, в тому числі комплексного типу.

У нашому випадку маємо справу з орієнтованим графом (графом, у якого ребра мають напрямок).

Теорія графів для дослідження технологічних процесів дозволяє більш глибоко оцінити структуру процесу. При порівнянні двох або декількох технологічних схем, що призначені для переробки одного й того ж матеріалу з одержанням тих же кінцевих продуктів, порівняння графів дає можливість вибрати найбільш короткий і, отже, найбільш економічний процес з меншим числом операцій. На графі чітко виділяються цикли операцій над окремими проміжними продуктами. Наявність таких циклів вказує на існування продуктів, що циркулюють або накопичуються в процесі, і для яких необхідно найти точку виводу.

Моделювання за допомогою графів не обмежуються аналізом технологічних схем, а дозволяє при використанні статистичних даних виділити значимі фактори, що впливають на процес, визначити мінімальний набір критеріїв оптимізації і іншу інформацію.

4.3. Спеціальні методи моделювання

До спеціальних можна віднести методи моделювання процесів видобування і переробки корисних копалин, які мають обмежене застосовування – для специфічної сировини, при попередньому моделюванні, у спеціальних умовах – зокрема моделювання на основі елементів прогнозування, евристичне моделювання, адаптаційне моделювання. Сюди ж примикають метод розмірностей та метод аналогій, описані в розділі 2.

**4.3.1. Моделювання на основі елементів прогнозування**

Іноді раціональне рішення інженерної задачі ґрунтується на результатах, які на момент прийняття рішення ще невідомі або знаходяться в недосліджуваному діапазоні значень аргументів. Виникає необхідність прогнозувати результати за тими даними, що вже є [2, 5].

***Екстраполяція результатів***

Екстраполяція результатів застосовується, якщо бажано знати значення функції *у(х\*)*, аргумент якої *х\** лежить поза досліджуваним діапазоном. Екстраполяція основана на апроксимації існуючих даних тією або іншою залежністю і розрахунку за нею значення функції в потрібній області значень аргумента. Вона здійснюється найчастіше з використанням поліномів першого і другого ступенів. Чим далі знаходиться область, яка екстраполюється, тим більше імовірність похибки.

Найпростіше виконувати екстраполювання для функції одного аргумента. У цьому випадку прогноз здійснюється таким чином:

– за відомими значеннями *х* і *у* будується графік і по кривій вибирають порядок полінома. Для спрощення наступних розрахунків змінні краще центрувати відносно постійної складової;

– для явно лінійної залежності *y = b0 + bх* по останніх двох точках знаходять параметри прямої *b0* і *b1* за формулами:

 (4.2)

– для нелінійної залежності використовують поліном другого ступеня, вибирають три останні точки і сумісним вирішенням системи рівнянь (4.3) знаходять коефіцієнти *b0* , *b1* і *b2* :

 (4.3)

– підставляють в отримане рівняння значення *х\** і знаходять *ух\*;*

– якщо спостерігається розкид точок, визначати параметри полінома по трьох останніх точках не можна і слід використовувати метод найменших квадратів.

***Інтерполяція результатів***

Інтерполяційні формули дозволяють розрахувати значення функції при значенні аргументу, який знаходиться всередині досліджуваного інтервалу. Наприклад, при значенні аргументу *х0 , х1 ,х2 , … , хі , … , хп*  відомо значення функції *у0 , у1 , у2 , … , уі , … , уп .* Необхідно визначити величину функції *у\** при *х = х\* ,* якщо *х\** лежить в діапазоні *х0 ≤ х\**≤ *хп .* Для рішення таких задач існує багато інтерполяційних формул. Найбільш зручна для технічних розрахунків інтерполяційна формула Лагранжа, тому що вона не накладає обмежень на інтервал зміни *х*.Інтерполяція полягає в тому, що експериментальні точки апроксимуються поліномом. У загальному вигляді формула Лагранжа має вигляд:

. (4.4)

Для двох точок і  рівняння буде:

. (4.5)

Для трьох точок *,* ,  :

. (4.6)

**4.3.2. Евристичне моделювання**

Евристичні моделі отримують шляхом формалізації моделей процесів, що сформувалися у робочого або інженера, який веде процес, але звичайно не відтворені ними в необхідній узагальненій формі. В результаті одержання інформації про процес, що безперервно надходить, численних проб і особистих спостережень, людина, яка безпосередньо веде процес, володіє дуже стійкою і визначеною моделлю конкретного процесу.

Метою евристичного моделювання є така оцінка ефектів факторів, яка дозволяє в кількісній формі записати модель. У цьому сенсі дуже зручною є форма бесіди у вигляді уявного експерименту.

Однак робочому важко оцінити одразу вплив декількох факторів, тому опитування виконується послідовно по кожному фактору. Результати опитування заносять у спеціальну таблицю і після обробки отриманих даних розраховують модель процесу. Суть методу пояснюється на прикладі.

**Таблиця – Результати опитування (анкета для отримання**

**моделі процесу)**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № питання | Значення факторів (питання) | | | | Значення вихідних показників (відповіді) | |
| *х1* | *х2* | *х3* | *х4* | *ε* | *А* |
| 0  1  2  3  4  5  6  7  8 | *х10 =* 1,3  + Δ*х1* = 0,1  –Δ*х1* = – 0,1  0  0  0  0  0  0 | *х20 =* 0,04  0  0  + Δ*х2* = 0,01  –Δ*х2*= – 0,01  0  0  0  0 | *х30 =* 20  0  0  0  0  + Δ*х3* = 5  –Δ*х3* = – 5  0  0 | *х40 =* 120  0  0  0  0  0  0  + Δ*х4* = 20  –Δ*х4* = – 20 | *ε0 =* 85  Δ*ε*1 = 3  Δ*ε*2 = – 5  Δ*ε*3 = 2  Δ*ε*4 = – 3  Δ*ε*5 = 3  Δ*ε*6 = – 6  Δ*ε*7 = – 4  Δ*ε*8 = 1 | *А0 =*9,0  *ΔА1 =* 0,3  *ΔА2 =* – 0,4  *ΔА3 =* 0,2  *ΔА4 =* – 0,2  *ΔА5 =* 0,4  *ΔА6 =* – 0,5  *ΔА7 =* – 0,3  *ΔА8 =* 0,1 |

*Першим результатом отримання таких моделей є узгодження досвіту і уявлень про процес. Узгодження моделей усіх робочих свідчить про однаковість знань про процес, при розбіжностях – можна з'ясувати їхню причину та покращити уявлення окремих робочих про процес. У подальшому модель можна використовувати для оптимізації процесу. Крім того* *евристичний метод дозволяє коротким і простим способом визначити квазіоптимальні режими і квазіоптимальні закономірності.*

*Отримання квазіоптимальних режимів полягає у тому, що вибирають робочих, які мають кращі результати ведення процесу, і приймають рекомендований ними середній режим. Звичайно це називається передачею передового досвіту.*

*Квазіоптимальні режими для різних умов, представлені рівняннями називаються квазіоптимальними закономірностями. Для цього виділяють серед вхідних факторів керовані (позначимо їх z), і некеровані (позначимо їх х). Слід узгодити з робочими однакове поняття найкращих показників і сформулювати цільову функцію: наприклад, під найкращими розуміти режими, які забезпечують в даних умовах максимальне вилучення і необхідну якість концентрату. Визначити нормальні (середні) значення збурюючих факторів (некерованих) і значення керованих факторів, необхідні для досягнення кращих результатів.*

**4.3.3. Адаптаційне моделювання**

Адаптаційні методи дозволяють для отримання моделі використовувати дані одразу ж без їхнього накопичення. Це важливо, по-перше, у випадку отримання і обробки великої кількості даних і, по-друге, що головніше, модель можна використовувати в процесі її отримання. Цей випадок найбільш яскраво виявляється в умовах безперервного використання результатів спостереження за процесом для покращення моделі.

Частково ця ідея відбивається в схемах так званого «поточного» аналізу, який полягає у тому, що регресійну модель на кожному черговому кроці спостереження отримують заново зрушенням використаного масиву даних на один номер і розташуванням на звільненому місті результату нових спостережень. У цьому випадку повністю зберігається схема регресійного аналізу, яка доповнюється тільки ідеєю перерахунку моделі. Адаптаційний метод дозволяє перераховувати модель за даними одного-єдиного, останнього спостереження. Метод дає добрі результати для лінійних моделей.

Адаптаційний метод належить до «пасивних», тому усі методичні вказівки про збір даних повністю відносяться до цього методу. Однак цей метод можна використовувати також і при активній зміні вхідних факторів.

Схема методу така.

Якщо існує модель для *N*-го спостереження, то після отримання *N* + 1-го спостереження коефіцієнти змінюють за формулою:

 (4.10)

 (4.11)

де *N*  – номер спостереження; *γ* – деяке число, яке враховує вплив перешкод (чим більше перешкоди, тим більше *γ*); *k* – число коефіцієнтів в рівнянні (включаючи *а0*).

Достатньо добрі результати дає використання спрощених формул, де для корекції використовується коефіцієнт  при низькому рівні перешкод, який знижується по відношенню до цієї величини при підвищенні рівня перешкод:

 (4.12)

тобто

 (4.13)

При цьому значення  необхідно використовувати у відносній формі:

, (4.14)

де  природне значення ;  максимальне природне значення; нульове природне значення .

Для отримання 10 %-ної точності моделі на кожний коефіцієнт моделі необхідно по 10 спостережень у випадку нормального розподілу *х*. Завжди приймається *х0* = 1.