ПРАКТИЧНА РОБОТА №2

«Рішення комбінаторних та імовірнісних завдань в MS Excel»

Мета роботи складається у вивченні й освоєнні практичних можливостей MS Excel для рішення імовірнісних і комбінаторних завдань.

Теоретичні відомості

Імовірність є одним з основних понять теорії імовірностей. Існує кілька визначень цього поняття. Розглянемо визначення, що називають класичним.

Кожний з можливих результатів випробування, тобто кожну подію, що може наступити у випробуванні, назвемо елементарним результатом.

Ті елементарні результати, при яких подія, що цікавить нас, наступає, назвемо сприяючими цій події.

Імовірністю події А називають відношення числа сприяючих цій події результатів до загальної кількості всіх єдиноможливих і рівноможливих результатів випробування.

$$Ð\left(\grave{A}\right)=\frac{m}{n},$$

де m – кількість елементарних результатів, що сприяють події A;
n – кількість всіх можливих елементарних результатів випробування.

Відносною частотою події називають відношення числа випробувань, у яких подія з'явилася, до загального числа фактично зроблених випробувань.

$$W\left(A\right)=\frac{m}{n},$$

де m – кількість появи події;

n – загальна кількість випробувань.

Імовірність обчислюють до випробування, а відносну частоту - після випробування.

Порядок виконання роботи

Приклад. Гральний кубик кидається один раз. Яка імовірність того, що на верхній грані випаде парне число, більше 3-х?

Рішення: Загальне число результатів дорівнює шести, тому що в гральному кубику 6 граней, що відповідають певним числам. Результати, сприятливі появі події, що цікавить, складаються у випаданні на верхній грані кубика або четвірки, або шістки. Отже, число сприятливих результатів випробування дорівнює двом. Тоді електронна таблиця буде мати вигляд:

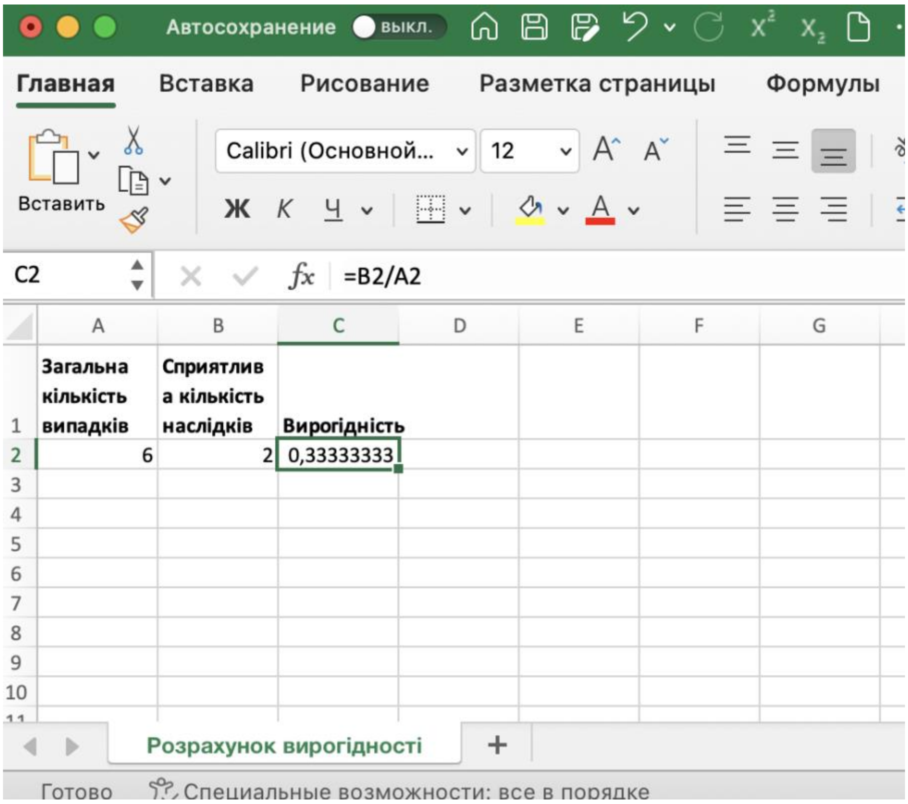


Рисунок 1.1 – Електронна таблиця після введення вхідних даних завдання

Завдання 1

1. Монета кинута один раз. Знайти імовірність появи «орла».

2. У коробці 4 синіх і 5 червоних футболок. Навмання витягають одну футболку. Знайти імовірність того, що вона виявиться синьою.

3. Студент вивчив тільки 5 квитків з 20 можливих. Яка імовірність того, що навмання витягнутий квиток виявиться вивченим?

Теоретичні відомості

Формули комбінаторики становлять теоретичну базу при використанні класичного визначення імовірності, що у прикладних завданнях відіграє важливу роль.

Залежно від правил складання можна виділити три типи комбінацій:

- Перестановки;
- Розміщення;
- Сполучення.

I. Перестановки

Комбінації з **n** елементів, які відрізняються друг від друга тільки порядком елементів, називають **<u>перестановками</u>**.

Позначаються символом $Đ_n$;

$$Đ_n = n!$$

<u>Приклад.</u> У змаганні брало участь 4 команди, скільки існує варіантів розподілити місця між ними.

<u>Рішення.</u> Кількість варіантів розподілу чотирьох команд по місцях дорівнює числу перестановок із чотирьох елементів:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 .$$

<u>Приклад.</u> У ящику п'ять однакових пронумерованих кубиків. Навмання по одному витягають всі кубики з ящика. Знайти імовірність того, що номера витягнутих кубиків з'являться в зростаючому порядку.

<u>Рішення.</u> Позначимо A подію, що складається в тім, що номера витягнутих кубиків з'являться в зростаючому порядку.

Сприяє події A тільки один результат, $m = 1$ (із всіх можливих комбінацій номерів тільки одна з порядком зростання номерів).

Загальна кількість можливих результатів – кількість комбінацій з 5 номерів

$$n = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 .$$

Тоді ймовірність:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} .$$

ІІ. Розміщення

Комбінації з n елементів по k елементів, які відрізняються друг від друга або самими елементами, або порядком елементів називають **розміщеннями**.

Позначаються символом A_n^k

n - кількість всіх наявних елементів;

k – кількість елементів у кожній комбінації $k \le n$.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад. *Скільки існує варіантів розміщення 3-х призових місць, якщо в розіграші беруть участь* 7 *команд?*

Рішення. Необхідно прорахувати число можливих комбінацій витягнутих з 7 елементів і що включають по 3 елемента (причому {I–«Таврія», II–«Динамо», III–«Шахтер»} і { I–«Динамо», II–«Таврія», III–«Шахтер»} – різні комбінації). Використовуємо число розміщень із 7 елементів по 3:

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = 210.$$

Приклад. З п'яти карток з буквами О, П, Р, С, Т навмання одну за іншою вибирають три й розташовують у ряд у порядку появи. Яка імовірність того, що вийде слово «ТОР»? *Рішення.* Позначимо A подію, що складається в тім, що вийде слово «ТОР».

Сприяє події A тільки один результат, $m=1$ (комбінація букв «ТОР»).

Загальна кількість можливих результатів дорівнює числу способів, якими можна відібрати 3 картки з наявних 5, одержуючи при цьому комбінації букв що відрізняються або самими буквами (СОР – ТОР), або їхнім порядком (РОТ – ОРТ). Воно визначається числом розміщень із 5 елементів по 3:

$$n = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Шукана імовірність:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_5^3} = \frac{1}{60}.$$

III. Сполучення

<u>Сполученнями</u> називають всі можливі комбінації з **n** елементів по **k** елементів, які відрізняються друг від друга принаймні хоча б одним елементом.

Позначаються символом C_n^k

n - кількість всіх наявних елементів;

k – кількість елементів у кожній комбінації $k \le n$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

<u>Приклад.</u> *Скількома способами можна вибрати 3 студентів, із групи чисельністю 30 чоловік.*

Рішення. Необхідно прорахувати число можливих комбінацій витягнутих з 30 елементів що включають по 3 елемента (причому комбінації: {Пархоменко, Сергієнко, Божок} і {Сергієнко, Божок, Пархоменко}– однакові комбінації). Використовуємо число розміщень із 30 елементів по 3:

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = \frac{27! \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 27!} = 4060$$

<u>Приклад.</u> В урні 5 білих і 4 червоних кулі. З урни навмання витягають 3 кулі. Знайти імовірність того, що витягнуті кулі - білі.

Рішення. Позначимо A подію, що складається в тім, що всі 3 кулі будуть білими.

Усього в урні $5+4=9$ куль.

Загальне число можливих елементарних висновків випробування дорівнює числу способів, якими можна витягти 3 кулі з 9:

$$n = C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6!} = 84$$

Число результатів, що сприяють події A, дорівнює числу способів, якими можна відібрати 3 білих кулі з наявних 5 білих:

$$m = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 1 \cdot 2} = 10.$$

Шукана імовірність дорівнює:

$$P(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

Приклад. У ящику є 11 однакових куль. Причому 4 з них пофарбовані в синій колір, а інші білі. Навмання витягають 5 куль. Знайти імовірність того, що серед них 2 сині.

Рішення. Позначимо A подію, що складається в тім, що серед витягнутих 5 куль 2 сині.

Загальні кількість можливих елементарних результатів випробування дорівнює кількості способів, якими можна витягти 5 куль із 11, тобто

$$n = C_{11}^5 = \frac{11!}{5!\cdot(11-5)!} = \frac{11!}{5!\cdot 6!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6!} = 462$$

Підрахуємо кількість результатів, що сприяють події A: 2 синіх кулі можливо взяти з 3 наявних синіх куль C_4^2 способами; при цьому інші 5 - 2 = 3 кулі повинні бути білими, взяти ж 3 білих кулі з наявних 7 можна C_7^3 способами. Отже, кількість сприятливих результатів дорівнює:

$$m = C_4^2 \cdot C_7^3 = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} \cdot \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{4!}{2\cdot 2} \cdot \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4\cdot 3!} = 210$$

Шукана імовірність:

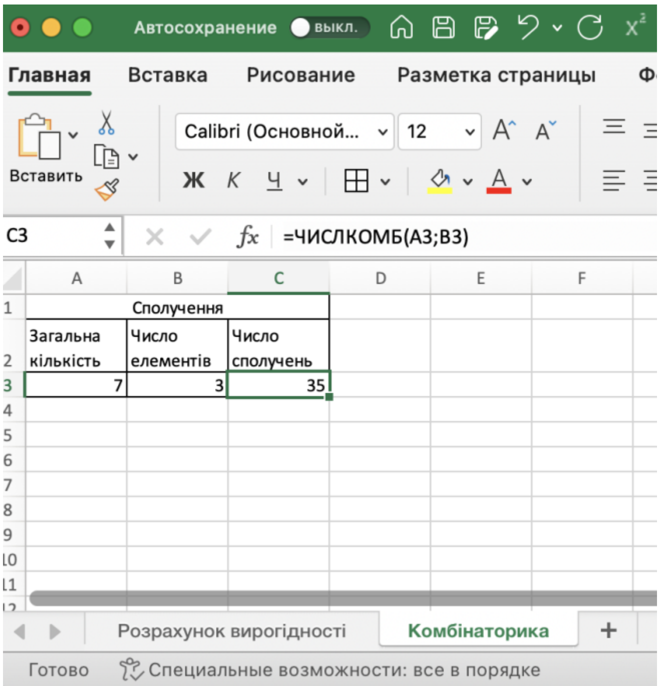
$$P(A)=\frac{C_4^2\cdot C_7^3}{C_{11}^5}=\frac{210}{462}=\frac{35}{77}.$$

У загальному випадку, для розв’язання завдань типу: У партії з N деталей є n стандартних. Навмання відібрані m деталей. Знайти імовірність того, що серед відібраних деталей рівно k стандартних. Можна використовувати формулу:

$$p=\frac{C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Приклад 1. Сполучення. Є 2 червоних і 5 жовтих тюльпанів; букет складають із 3-х квіток; скільки різних варіантів складання букета? Тут береться підмножина з 3-х елементів із множини, що складається з 7-ми елементів, порядок зовсім не важливий.

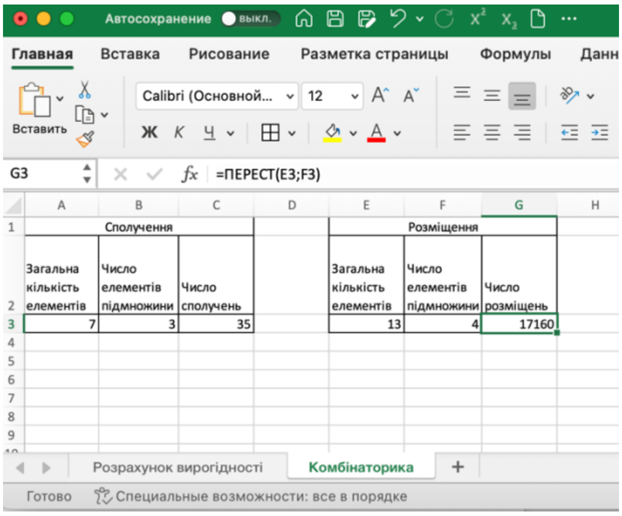
Кількість сполучень можна обчислити за допомогою функції ЧИСЛОКОМБ(n;k), що відноситься до математичних функцій.



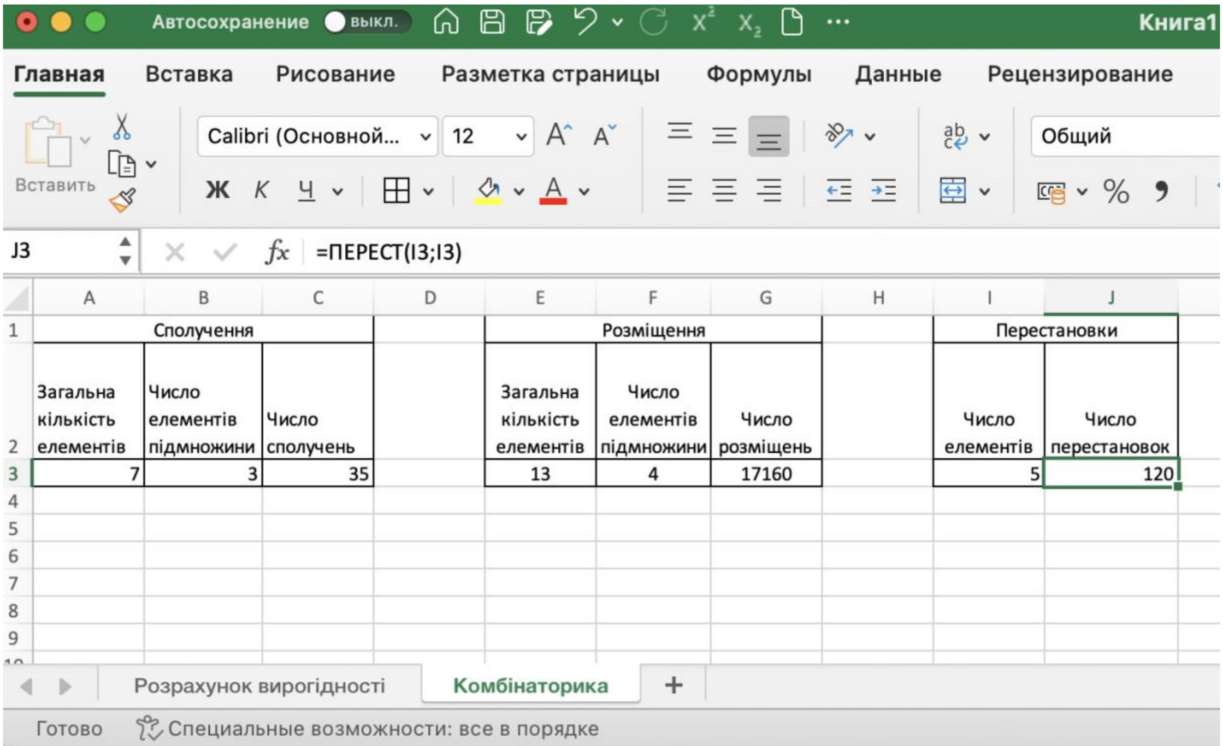
Приклад 2. Розміщення. У групі 5 дівчин і 8 юнаків. Для представництва цієї групи на конференції вибирають 4 людини, яким привласнюються номери для виступу на даній конференції. Скільки різних варіантів складання такої групи можна побудувати? У даному

завданні буде мінятися як склад підмножини, так і порядок елементів даної підмножини. Тому застосовується формула для обчислення розміщень.

Обчислення розміщень засобами MS Excel можна реалізувати із застосуванням функції ПЕРЕСТ(n;k), де n– кількість елементів ісходної множини, а k – кількість елементів обраної підмножини.



Приклад 3. Перестановки. Скільки способів існує для того, щоб розставити 5 різних книг на книжковій полиці? Важливий порядок, кількість елементів зберігається, значить - перестановка. Обчислення перестановок можна виконати з використанням тої ж функції ПЕРЕСТ(n;n).



Завдання 2.

1. Скількома способами можливо вісім різних електроприладів під'єднати в одну мережу?

2. В наявності є 5 різних з'єднувачів і 3 різні реле. Скількома способами можна поєднати з'єднувачі з реле?

3. В кімнаті 7 розеток. Скількома способами сім електроприладів можна під'єднати до розеток, якщо до першої розетки можливо під'єднати тільки троє з них?

Контрольні питання

1. Які функції існують для обчислень максимуму й мінімуму в ЕТ?
2. Які функції існують для обчислення середнього значення в ЕТ?
3. Як здійснюється копіювання значень комірки в інші комірки?
4. Як знайти суму значень яких-небудь комірок?
5. Наведіть приклади, у яких використовуються формули на обчислення сполучень, розміщень і перестановок.