# ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ (ПРИКЛАД)

**I. Тестовая часть. (5 баллов)**

1. *Какой многочлен третей степени из указанных является квадратичной формой?*

**А** $f=-x_1^2-x_2+2x_3^2$; **Б** $f=-x_1^2-x_1x_2+2x_3$; **В** $f=-x_1x_2+2x_3^2$; **Г** $f=-x_1-2x_2x_3$.

2. *Какой оператор называется сопряженным?*

**А** $\varphi\in E\big|\ \varphi^*=\varphi$; **Б** $\varphi^*\in E\big|\ \varphi^*=\varphi$; **В** $\varphi\in E\big|\ (\varphi\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\varphi^*\boldsymbol{y})$; **Г** $\varphi^*\in E\big|\ (\varphi\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\varphi^*\boldsymbol{y})$.

3. *Какая из приведенных матриц не является ортогональной:*

**А** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&2&2\\2&-1&2\end{pmatrix}$; **Б** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&-2\\-2&-2&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}$; **В** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-2\\-2&2&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$; **Г** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$.

4. *Скалярным произведением двух векторов в евклидовом пространстве называется*

**А** число, равное произведению их модулей;
**Б** число, равное произведению их модулей и косинуса угла между ними;
**В** числовая билинейная коммутативная функция векторных аргументов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}\big|\forall\boldsymbol{x}\left[(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0\right]$ при $\boldsymbol{x}\neq 0$;
**Г** числовая билинейная коммутативная функция векторных аргументов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}\big|\forall\boldsymbol{x}\left[(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0\right]$.

5. *Пусть $Q$ матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$ линейного пространства $V$. Как изменится матрица перехода оператора при переходе от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$?*

**А** не изменится; **Б** транспонируется; **В** $\tilde{A}'=Q\tilde{A}Q^{-1}$; **Г** $\tilde{A}'=Q^{-1}\tilde{A}Q$.

6. *Ядром линейного оператора $\varphi$ называется*

**А** нулевое пространство; **Б** $\{\boldsymbol{x}:\varphi(\boldsymbol{x})=0\}$; **В** все пространство; **Г** $\{\boldsymbol{x}:\exists\boldsymbol{y}\big|\ \varphi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}\}$.

7. *Какие из указанных свойств выполняются для произвольных элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ унитарного пространства?*

**А** $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)}+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)}$; **Б** $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)$;
**В** $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)}$; **Г** $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)=\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)}+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)$.

8. *Какую квадратичную форму можно привести к каноническому виду методом Лагранжа?*

**А** любую; **Б** имеющую только действительные коэффициенты;
**В** только с невырожденной матрицей; **Г** только положительно определенную.

9. *Установите соответствие между формулой, задающей скалярное произведение двух произвольных элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства (1 – 4), и названием пространства (А – Д).*

| *Неравенство* | *Название неравенства* |
|---|---|
| **1** $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int_a^b \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}dt$ | **А** пространство $R_n$ |
| **2** $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=f_0g_0+f_1g_1+...+f_ng_n$ | **Б** пространство всех свободных векторов |
| **3** $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lvert\boldsymbol{x}\rvert\cdot\lvert\boldsymbol{y}\rvert\cdot\cos\left(\widehat{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\right)$ | **В** произвольное евклидово пространство |
| **4** $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ | **Г** пространство $P_n[x]$ |
| | **Д** пространство $C_{[a,b]}$ |

**II. Практическая часть. (15 баллов)**

1. Дана матрица линейного оператора $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{t^2, t, 1\}$ пространства многочленов степени, не превышающей 2. Найти его матрицу и определитель в базисе $\{-t^2 + t, -t^2 + 2t + 1, t^2 + 3t + 1\}$, указать ранг и дефект.

2. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на систему векторов: $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 2, 0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 1, 3, 5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 0, 1, 0)$.

3. Привести двумя способами к каноническому виду квадратичную форму, указать преобразование, ее ранг и сигнатуру: $-x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_3^2$. Исследовать форму на определенность.

4. Проверить эквивалентность квадратичной формы из задания 3 и формы $-x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$.