7 Координати центру важкості

Використовуючи математичний пакет Maxima, знайти координати центру тяжіння плоскої фігури. Результат уявити графічно.

1. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4$
2. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ (Менший сегмент).
3. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ (Великий сегмент).
4. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $y = x^2, y = 2x^2, x = 1, x = 2$
5. Визначити центр тяжкості площі, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\theta)$.
6. Визначити центр тяжкості напівсегменту параболи $y^2 = ax$, відтятого прямими $x = a, y = 0, (a > 0, y > 0)$.
7. Знайти центр ваги площі, обмеженої однією петлею кривою $\rho = a \sin 2\theta$.
8. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $y^2 = x, x^2 = y$.
9. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2px, x = 2p$.
10. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{2x - 2x^2}, y = 0$.
11. Знайти координати центру ваги багатокутника $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Координати вершин: A(0,0), B(0,5), C(4,5), D(4,0), $A_1(4,1)$, $B_1(4,6)$, $C_1(8,6)$, $D_1(8,1)$.
12. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $x = 4y - y^2, x + y = 6$.
13. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої колами $\rho = 1, \rho = \frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}$ (Тонкий серп поза окружністю одиничного радіусу).
14. Знайти координати центру тяжкості фігури, обмеженою лемніскатою $(y^2 + x^2)^2 = 2a^2xy$.
15. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженою лінією $y^3 + x^3 = axy$ (Площа петлі).
16. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $y^2 - 2y = x, x + y = 0$.
17. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями

$y^2 = 4x + 4, y = 2 - x$.

18. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x - x^2, y^2 = 2x$ (вне параболы).

19. Знайти координати центру ваги фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2, y = 2x^2 - 5x$

20. Знайти координати центру тяжкості фігури, найближчої від початку координат, обмеженою лініями $y = \cos x, y = \cos 2x, y = 0$

Аналітична довідка

ВИЧИСЛЕННЯ КООРДИНАТ ЦЕНТРУ ТЯЖКОСТІ ПЛОСКОЙФІГУРИ.

1. Координати центру тяжкості.

Нехай на площині Оху дана система матеріальних точок

$P_1(x_1,y_1); P_2(x_2,y_2); \ldots , P_n(x_n,y_n)$

з масами m1, m2, m3, . . .

Твори mn. $x_i m_i$ і $y_i m_i$ називаються статичними моментами маси m_i щодо осей Оу та Ох.

Позначимо через хс та ус координати центру тяжкості даної системи. Тоді координати центру тяжкості описаної матеріальної системи визначаються формулами:

$$X_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$Y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Ці формули застосовуються при відшуканні центрів тяжкості різних фігур і тіл.

2. Центр тяжкості плоских фігур.

Нехай ця фігура, обмежена лініями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$, є матеріальну плоску фігуру. Поверхневою щільність, тобто масу одиниці площі поверхні, вважатимемо постійною та рівною δ всім частин фігури.

Розіб'ємо цю фігуру прямими $x=a, x=x_1, \ldots, x=x_n=b$ на смужки ширини $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Маса кожної смужки дорівнюватиме добутку її площі на щільність δ. Якщо кожну смужку замінити прямокутником (рис.1) із основою Δx_i та заввишки $f_2(\xi)-f_1(\xi)$, где $\xi=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$ то маса смужки буде приблизно дорівнює

$$\Delta m_i=\delta\left[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i \quad (i = 1, 2, \ldots ,n).$$

Приблизно центр ваги цієї смужки буде в центрі відповідного прямокутника:

$$(x_i)_c=\xi_i; \qquad (y_i)_c=\frac{f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)}{2}.$$

Замінюючи тепер кожну смужку матеріальною точкою, маса якої дорівнює масі відповідної смужки і зосереджена у центрі тяжкості цієї смужки, знайдемо наближене значення центру тяжкості фігури:

$$x_c\approx\frac{\sum\xi_i\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i},$$

$$y_c\approx\frac{\frac{1}{2}\sum[f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)]\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum\delta[f_2(\varepsilon_i)-f_1(\varepsilon_i)]\Delta x_i}.$$

Переходячи до межі при $\Delta x_i\to 0$, отримаємо точні координати центру тяжкості цієї фігури:

$$x_c=\frac{\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]dx}{\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx}; \qquad y_c=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b[f_2(x)+f_1(x)][f_2(x)-f_1(x)]dx}{\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx}$$

Ці формули справедливі для будь-якої однорідної (тобто має постійну щільність у всіх точках) плоскої фігури. Як видно, координати центру ваги не залежать від густини δ фігури (у процесі обчислення про скоротилося).

3. Координати центру тяжкості плоскої фігури

У попередньому розділі вказувалося, що координати центру важкості системи матеріальних точок $P_1, P_2, \dots, P_n$ з масами $m_1, m_2, \dots, m_n$ визначаються за формулами

$$x_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \xi_i \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \Delta S_i}; \qquad y_c \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \eta_i \Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \Delta S_i}.$$

У межі при $\Delta S_i \to 0$ інтегральні суми, що стоять у чисельниках і знаменниках дробів, що перейдуть у подвійні інтеграли, таким чином виходять точні формули для обчислення координат центру тяжіння плоскої фігури:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy}. (*)$$

Ці формули, виведені для плоскої фігури з поверхневою щільністю 1, залишаються в силі і для фігури, що має будь-яку іншу, постійну у всіх точках щільність γ.

Якщо ж поверхнева щільність змінна

$$\gamma = \gamma(x, y),$$

то відповідні формули матимуть вигляд

$$x_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x,y)\,x\,dx\,dy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)\,dx\,dy}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_D \gamma(x,y)\,y\,dx\,dy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)\,dx\,dy}.$$

Вирази

$$M_y = \iint\limits_D \gamma(x,y)\,x\,dx\,dy$$

і

$$M_x = \iint\limits_D \gamma(x,y)\,y\,dx\,dy$$

називаються статичними моментами плоскої фігури D щодо осей Oy та Ox.

Інтеграл $\iint \gamma(x,y)dxdy$ виражає величину маси аналізованої фігури.

4. Теореми Гульден.

<u>Теорема 1.</u>

Площа поверхні, отриманої при обертанні дуги плоскою кривою навколо осі, що лежить у площині цієї кривої і не перетинає її, дорівнює довжині кривої дуги, помноженої на довжину кола, описаної центром тяжкості дуги.

<u>Теорема 2.</u>

Обсяг тіла, отриманого при обертанні плоскої фігури навколо осі, що не перетинає її та розташованої в площині фігури, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, описаного центром ваги фігури.

II.Приклади

.

1)

<u>Умова:</u>Знайти координати центру тяжкості півкола $X^2+Y^2=a^2$, розташованої над віссю Ox.

<u>Рішення:</u>Визначимо абсцису центру тяжкості:

$$y=\sqrt{a^2-x^2}, \quad \frac{dy}{\mathrm{dx}}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad ds=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}d$$

$$x_c=\frac{a\int_{-a}^{a}\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}}=\frac{-a\sqrt{a^2-x^2}\,|_{-a}^{a}}{a\arcsin\frac{x}{a}|_{-a}^{a}}=\frac{0}{\pi a}=0.$$

Знайдемо тепер ординату центру тяжкості:

$$y_c=\frac{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\pi a}=\frac{a\int_{-a}^{a}dx}{\pi a}=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi}.$$

2)

<u>Умова:</u>Визначити координати центру ваги сегмента параболи $y^2=ax$, відсікається прямий, $x=a$ (Рис. 2)

<u>Рішення:</u>В даному випадку $f_2(x)=\sqrt{ax}, \quad f_1(x)=-\sqrt{ax},$ тому

$$x_c=\frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}dx}{2\int_0^a \sqrt{ax}dx}=\frac{\frac{2}{5}2\sqrt{a}x^{5/2}|_0^a}{2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{3/2}|_0^a}=\frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2}=\frac{3}{5}a,$$

$y_c=0$ (оскільки сегмент симетричний щодо осі Ox)

3)

<u>Умова:</u>Визначити координати центру тяжкості чверті еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

вважаючи, що поверхнева густина у всіх точках дорівнює 1.

<u>Рішення:</u>За формулами (*) отримуємо:

$$x_c=\frac{\int_0^a\left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xdy\right)dx}{\int_0^a\left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\right)dx}=\frac{\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}xdx}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{-\frac{b}{a}\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}|_0^a}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4a}{3\pi},$$

$$y_c=\frac{\int_0^a\left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} ydy\right)dx}{\frac{1}{4}\pi ab}=\frac{4b}{3\pi}.$$

4)

Умова:

Знайти координати центру тяжіння дуги ланцюгової лінії $y = a\cdot ch(x/a), \quad -a \le x \le a$.

Рішення:

1Оскільки крива симетрична щодо осі Оу, то її центр тяжіння лежить на осі Оу, тобто. $X_c = 0$. Залишається знайти y. Маємо $y' = sh(x/a)$; тоді $dL = \sqrt{1+sh^2(x/a)}dx = ch(x/a)dx$, довжина дуги

$$L = \int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}dx = 2\int_0^a ch\frac{x}{a}dx = 2a\cdot sh\frac{x}{a}\Big|_0^a = 2a\cdot sh\,1.$$

Отже,

$$y_c = \frac{1}{2a\cdot sh\,1}\int_{-a}^{a} a\cdot ch^2\frac{x}{a}dx = \frac{1}{sh\,1}\int_0^a (1+ch\frac{2x}{a}dx = \frac{1}{2sh\,1}\left[x+\frac{a}{2}sh\frac{2x}{a}\right]_0^a =$$

$$= \frac{a}{2sh\,1}(1+\frac{1}{2}sh\,2) = \frac{a(2+sh\,2)}{4sh\,1} \approx 1{,}18a$$

5)

Умова:

Користуючись теоремою Гульдена, знайти координати центру тяжкості чверті кола.

$x^2 + y^2 \le r^2$.

Рішення:

При обертанні чверті кола навколо осі Ох отримаємо півкулю, об'єм якого дорівнює $V = (1/2)\cdot(4\pi r^3/3) = 2\pi r^3/3.$

Відповідно до другої теореми Гульдена, $V = (\pi r^2/4)\cdot(2\pi\overline{y})$. Звідси $\overline{y} = 2V/(\pi^2 r^2) = 2\cdot 2\pi r^3/(3\pi^2 r^2) = 4r/(3\pi)$. Центр тяжкості чверті кола лежить осі симетрії, тобто. на бісектрисі I координатного кута, а тому $\overline{x} = \overline{y} = 4r/(3\pi)$