4 Розкладіть раціональний дріб на найпростішідроби

Виконайте вправу згідно з вибраними варіантами. Порівняйте результат із ВІДПОВІДОМ. Протокол роботи помістіть у звіт.

Раціональний дріб

1	$\dfrac{\left(x^4+x^3-5x-7\right)}{\left(\left(x^2+4x+1\right)\left(x-2\right)^2\left(x^2-1\right)\right)}$
2	$\dfrac{12x^4(x+1)-54x^3+327x^2+1847x-3674}{\left(\left(x^2-4x-3\right)\left(x-2\right)^2\left(x^2-16\right)\right)}$
3	$\dfrac{(x^5-7x^4+2x-8)}{((x^3-4x^2+5x)(x-3)^2)}$
4	$\dfrac{\left(x^3+2x^2+3x+4\right)}{\left(\left(x^2-x\right)\left(3-x\right)^3\left(x\ \ -3\right)\right)}$
5	$\dfrac{\left(3x^4+3x-4\right)}{\left(\left(x^2-1\right)\left(x^2-9\right)\right)}$
6	$\dfrac{\left(x^6-3x^3+4x+12\right)}{\left(\left(x^2-25\right)\left(3x^2+9x\right)\right)}$
7	$\dfrac{\left(3x^5-x^2-4x\right)}{\left(\left(5x^2+6x-1\right)\left(3-x\right)^3\left(x+2\right)\right)}$
8	$\dfrac{\left(2x^6-3x^4+9\right)}{\left(\left(x^2-2x-15\right)\ \left(4x\ \ +1\right)\right)}$
9	$\dfrac{\left(7x^5-5x^6+1\right)}{\left(\left(x^2-x\right)x^3\left(x^2-9\right)\right)}$
10	$\dfrac{\left(8x^5-14x^3+34\right)}{\left(x\left(x^2-x\right)\ \left(7-x\right)^2\right)}$

№	Ответы на задание "Разложите рациональную дробь на простейшие дроби"
1	$\frac{(121x+635)}{(507(x^2+4x+1)} - \frac{1}{(18(x+1))} - \frac{5}{(6(x-1))} + \frac{989}{(1521(x-2))} + \frac{7}{(39(x-2)^2)}$
2	$\frac{1159}{3360(x+4)} + \frac{13}{30(x-1)} + \frac{92}{3(x-2)} + \frac{51}{4(x-2)^2} - \frac{905}{14(x-3)} + \frac{3475}{96(x-4)}$
3	$\frac{-(111x-479)}{(10(x^2-4x+5))} - \frac{8}{(45x)} + \frac{257}{(18(x-3))} - \frac{163}{(3(x-3)^2)} + 1$
4	$\frac{-(111x-479)}{(10(x^2-4x+5))} - \frac{8}{(45x)} + \frac{257}{(18(x-3))} - \frac{163}{(3(x-3)^2)} + 1$
5	$\frac{4}{(9x)} - \frac{5}{(2(x-1))} + \frac{19}{(18(x-3))} - \frac{29}{(3(x-3)^2)}$
6	$\frac{-(111x-479)}{(10(x^2-4x+5))} - \frac{8}{(45x)} + \frac{257}{(18(x-3))} - \frac{163}{(3(x-3)^2)} + 1$
7	$\frac{(x^2-3x+34)}{3} - \frac{7621}{(150(x+5))} + \frac{9}{(2(x+3))} - \frac{4}{(75x)} + \frac{334}{(25(x-5))}$
8	$\frac{(22039x-2724)}{(5425(5x^2+6x-1))} - \frac{(15x-3)}{25} - \frac{20}{(7(x+2))} - \frac{75}{(31(x-3))}$
9	$\frac{-5345}{(1944(x+3))} + \frac{10}{(81x)} + \frac{10}{(81x^2)} + \frac{1}{(9x^3)} + \frac{1}{(9x^4)} - \frac{3}{(8(x-1))} - \frac{1943}{(972(x-3))}$
10	$\frac{-5345}{(1944(x+3))} + \frac{10}{(81x)} + \frac{10}{(81x^2)} + \frac{1}{(9x^3)} + \frac{1}{(9x^4)} - \frac{3}{(8(x-1))} - \frac{1943}{(972(x-3))}$

Примітка:
у відповідях можливі помилки.
Виконайте перевірку самостійно.

Розкладання дробу на найпростіші.

http://www.cleverstudents.ru/partial_fraction_expansion.html

Для початку розберемо теорію, далі вирішимо кілька прикладів для закріплення матеріалу з розкладання дробово раціональної функції на суму найпростіших дробів.

Детально зупинимося на методі невизначених коефіцієнтів та методі приватних значень, а також на їх комбінації.

Найпростіші дроби часто називають елементарними дробами.

Розрізняють такі види найпростіших дробів:

1. $\frac{A}{x-a}$

2. $\frac{A}{(x-a)^n}$

3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

де A, M, N, a, p, q - числа, а дискримінант знаменника в дробах 3) та 4) менший за нуль.

Називають їх відповідно дробами першого, другого, третього та четвертого типів.

Навіщо взагалі дріб розкладати на найпростіші?

Наведемо математичну аналогію. Часто доводиться займатися спрощенням виду висловлювання, щоб можна було проводити якісь дії з ним. Так ось, уявлення дробово раціональної функції у вигляді суми найпростіших дробів приблизно те саме. Застосовується для розкладання функцій у статечні ряди, ряди Лорана і, звичайно, для знаходження інтегралів.

Наприклад, потрібно взяти інтеграл від дрібно раціональної функції

$$\int \frac{2x^3+3}{x^3+x}dx$$

Після розкладання підінтегральної функції на найпростіші дроби все зводиться до досить простих інтегралів

$$\int \frac{2x^3+3}{x^3+x}dx = \int\left(2+\frac{3}{x}-\frac{3x+2}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= \int 2dx + \int \frac{3}{x}dx - \int \frac{3x+2}{x^2+1}dx =$$
$$= 2x + 3\ln(x) - \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} - 2\int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= 2x + 3\ln(x) - \frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right) - 2\arctan(x) + C$$

приклад.

Розкласти дріб $\dfrac{2x^3+3}{x^3+x}$ на найпростіші.

Рішення.

Взагалі відношення багаточленів розкладають на найпростіші дроби, якщо ступінь багаточлена чисельника менший від ступеня багаточлена в знаменнику. У В іншому випадку спочатку проводять розподіл многочлена чисельника на многочлен знаменника, а вже потім проводять розкладання правильної дробово раціональної функції.

Виконаємо поділ стовпчиком (кутом):

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+0x^2+0x+3 & x^3+x \\
\underline{-\;2x^3+0x^2+2x\quad} & 2 \\
-2x+3 &
\end{array}
$$

Отже, вихідний дріб набуде вигляду:

$$\frac{2x^3+3}{x^3+x}=2+\frac{2x+3}{x^3+x}$$

Таким чином, на найпростіші дроби розкладатимемо $\dfrac{-2x+3}{x^3+x}$

Алгоритм методу невизначених коефіцієнтів.

- **По-перше**, Розкладаємо знаменник на множники.

  Тут усі методи хороші - від винесення за дужки, застосування формул скороченого множення, до підбору кореня та подальшого поділу стовпчиком (при знаменнику у вигляді багаточлена з раціональними коефіцієнтами ступеня вище за другий).

  У нашому прикладі все просто - виносимо їх за дужки.

$$x^3+x=x\left(x^2+1\right)$$

- **По-друге**, що розкладається дріб представляємо у вигляді суми найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами.

Тут варто розглянути види виразів, які можуть бути у Вас у знаменнику.
Якщо у знаменнику щось на кшталт цього

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

кількість лінійних множників ролі не грає, (будь їх 2 або 22), то дріб представиться у вигляді суми найпростіших дробів

першого
типу:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{D}{x-d}$$

a, b, c і d – числа, A, B, C та D – невизначені коефіцієнти.

- Якщо у знаменнику щось на кшталт цього

$$(x-a)^2(x-b)^4(x-c)^3$$

кількість множників ролі не грає і не відіграють ролі ступеня цих множників (хоч 221 ступінь), то дріб представиться у вигляді суми найпростіших дробів першого і другого типів:

$$\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_1}{x-a}+$$
$$+\frac{B_4}{(x-b)^4}+\frac{B_3}{(x-b)^3}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{B_1}{x-b}+$$
$$+\frac{C_3}{(x-c)^3}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\frac{C_1}{x-c}.$$

a, b, c - числа, $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3$- невизначені Коефіцієнти.

Візьміть на замітку: який ступінь - стільки та доданків.

o Якщо в знаменнику щось на кшталт цього

$$(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$$

кількість квадратичних виразів ролі не грає, то дрібпредставиться у вигляді суми найпростіших дробів третього типу:

$$\frac{Px+Q}{x^2+px+q}+\frac{Rx+S}{x^2+rx+s}$$

p, q, r и s - Числа, P, Q, R и S - Невизначені коефіцієнти.

o Якщо в знаменнику щось на кшталт цього

$$\left(x^2+px+q\right)^4\left(x^2+rx+s\right)^2$$

кількість множників ролі не грає і не відіграють ролі ступеня цих множників, то дріб представиться у вигляді суми найпростіших дробів третього та четвертого типів:

$$\frac{P_4x+Q_4}{\left(x^2+px+q\right)^4}+\frac{P_3x+Q_3}{\left(x^2+px+q\right)^3}+\frac{P_2x+Q_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{R_2x+S_2}{\left(x^2+rx+s\right)^2}+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}.$$

p, q, r и s - числа, $P_1, P_2, P_3, P_4, R_1, R_2, S_1, S_2$ - невизначені коефіцієнти.

Зазвичай зустрічається комбінація цих варіантів (як правило, досить проста).

o Якщо зібрати все до купи

$$(x-a)(x-b)^3\left(x^2+px+q\right)\left(x^2+rx+s\right)^2$$

то дріб представиться у вигляді суми найпростіших дробів усіх чотирьох типів:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B_3}{(x-b)^3}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{B_1}{x-b}+$$
$$+\frac{Px+Q}{x^2+px+q}+\frac{R_2x+S_2}{\left(x^2+rx+s\right)^2}+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}$$

Досить теорії, на практиці все одно зрозуміліше.

Настав час повернутися до прикладу. Дріб розкладається на суму найпростіших дробів першого і третього типів з невизначеними коефіцієнтами A, B і C.

$$\frac{2x-3}{x^3+x}=\frac{2x-3}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

- **По-третє**, Наводимо отриману суму найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами до спільного знаменника і групуємо в чисельнику доданки при однакових ступенях x.

$$\frac{2x-3}{x^3+x}=\frac{2x-3}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+1\right)}=$$
$$=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{x^2(A+B)+xC+A}{x\left(x^2+1\right)}$$

Тобто дійшли рівності:

$$\frac{2x-3}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{x^2(A+B)+xC+A}{x\left(x^2+1\right)}$$

При x відмінних від нуля ця рівність зводиться до рівності двох багаточленів

$$2x-3-x^2(A+B)+xC+A$$

А два многочлени є рівними тоді і лише тоді, коли коефіцієнти при однакових ступенях збігаються.

- **По-четверте**, Прирівнюємо коефіцієнти при однакових ступенях x.

При цьому отримуємо систему лінійних рівнянь алгебри з невизначеними коефіцієнтами як невідомі:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=2 \\ A=-3 \end{cases}$$

- **У-п'яте,**вирішуємо отриману систему рівнянь будь-яким способом (при необхідності дивіться статтю рішення систем лінійних рівнянь алгебри, методи рішення, приклади), який подобається Вам, знаходимо невизначені коефіцієнти. Про розв'язання систем лінійних рівнянь докладніше у розділі - розв'язання систем лінійних рівнянь алгебри.

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=2 \\ A=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=3 \\ C=2 \end{cases}$$

·**По-шосте**, записуємо відповідь.

$$\frac{2x^3+3}{x^3+x}=2-\frac{2x-3}{x^3+x}=2-\frac{2x-3}{x(x^2+1)}=$$
$$=2-\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right)=2-\left(\frac{-3}{x}+\frac{3x+2}{x^2+1}\right)=2+\frac{3}{x}-\frac{3x+2}{x^2+1}$$

PS

Будь ласка, не лінуйтеся, перевіряйте відповідь, приводячи до спільного знаменника отримане розкладання.

$$2+\frac{3}{x}-\frac{3x+2}{x^2+1}=\frac{2x(x^2+1)+3(x^2+1)-(3x+2)x}{x(x^2+1)}=\frac{2x^3+3}{x^3+x}$$

Метод невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтівє універсальним способом під час розкладання дробу на найпростіші.

Дуже зручно використовувати метод приватних значень, якщо знаменник є твір лінійних множників, тобто має вигляд

схожий з $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

Розглянемо з прикладу, щоб показати плюси цього.

приклад

Розкласти дріб $\dfrac{2x^2 - x - 7}{x^3 - 5x^2 + 6x}$ на найпростіші.

Рішення.

Так як ступінь багаточлена в чисельнику менше ступеня багаточлена в знаменнику, то робити поділ нам не доведеться. Переходимо до розкладання знаменника на множники.

Для початку виносимо їх за дужки.

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

Знаходимо коріння квадратного тричлена $x^2 - 5x + 6$ наприклад, за теорем Вієта).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Отже, квадратний тричлен можна записати як

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

То є, знаменник набуде вигляду $x^3 - 5x^2 + 6x = x\left(x^2 - 5x + 6\right) = x(x-3)(x-2)$

При цьому знаменнику, вихідний дріб розкладається на суму трьох найпростіших дробів першого типу з невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{2x^2 - x - 7}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{2x^2 - x - 7}{x(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-2}$$

Отриману суму приводимо до спільного знаменника, але в чисельнику при цьому дужки не розкриваємо і не наводимо подібні при A, B і C (на цьому етапі якраз відмінність від методу невизначених коефіцієнтів):

$$\frac{2x^2 - x - 7}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{2x^2 - x - 7}{x(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-2} =$$
$$= \frac{A(x-3)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-3)}{x(x-3)(x-2)}$$

Таким чином, дійшли рівності:

$$\frac{2x^2-x-7}{x(x-3)(x-2)}=\frac{A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x-2)}\Rightarrow$$

$$2x^2-x-7=A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3)$$

А тепер, для знаходження невизначених коефіцієнтів, починаємо підставляти в отриману рівність "приватні значення", при яких знаменник звертається в нуль, тобто x = 0, x = 2 і x = 3 для нашого прикладу:

При x = 0
маємо:

$$2\cdot 0^2-0-7=A(0-3)(0-2)+B\cdot 0\cdot(0-2)+C\cdot 0\cdot(0-3)$$
$$-7=6A \quad\Rightarrow$$
$$A=-\frac{7}{6}$$

При x=2 маємо:

$$2\cdot 2^2-2-7=A(2-3)(2-2)+B\cdot 2\cdot(2-2)+C\cdot 2\cdot(2-3)$$
$$-1=-2C \quad\Rightarrow$$
$$C=\frac{1}{2}$$

При x=3 маємо:

$$2\cdot 3^2-3-7=A(3-3)(3-2)+B\cdot 3\cdot(3-2)+C\cdot 3\cdot(3-3)$$
$$8=3B \quad\Rightarrow$$
$$B=\frac{8}{3}$$

**Відпові
дь:**

$$\frac{2x^2-x-7}{x^3-5x^2+6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-2}=-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}$$

Як бачите, відмінність методу невизначених коефіцієнтів та методу приватних значень лише у способі знаходження невідомих. Ці методи можна поєднувати для спрощення обчислень.

Розглянемо приклад.

приклад.

Розкласти дрібно раціональний вираз $\frac{x^4+3x^3+2x-11}{(x-1)(x+1)(x-3)^3}$ на найпростіші дроби.

Рішення.

Так як ступінь багаточлена чисельника менше ступеня багаточлена знаменника і знаменник вже розкладений на множники, то вихідний вираз представиться у вигляді суми найпростіших дробів такого виду:

$$\frac{x^4+3x^3+2x-11}{(x-1)(x+1)(x-3)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C_3}{(x-3)^3}+\frac{C_2}{(x-3)^2}+\frac{C_1}{x-3}$$

Наводимо до спільного знаменника:

$$\frac{x^4+3x^3+2x-11}{(x-1)(x+1)(x-3)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C_3}{(x-3)^3}+\frac{C_2}{(x-3)^2}+\frac{C_1}{x-3}=$$
$$=\left(\begin{array}{l}\frac{A(x+1)(x-3)^3+B(x-1)(x-3)^3}{(x-1)(x+1)(x-3)^3}+\\ +\frac{C_3(x-1)(x+1)+C_2(x-1)(x+1)(x-3)+C_1(x-1)(x+1)(x-3)^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^3}\end{array}\right.$$

Прирівнюємо чисельники.

$$\begin{aligned}&x^4+3x^3+2x-11=\\&=A(x+1)(x-3)^3+B(x-1)(x-3)^3+\\&+C_3(x-1)(x+1)+C_2(x-1)(x+1)(x-3)+C_1(x-1)(x+1)(x-3)^2\end{aligned}$$

Вочевидь, що нулями знаменника є значення x=1, x=-1 і x=3. Використовуємо метод приватних значень.

При x=1 маємо:

$$-5=-16A\Rightarrow A=\frac{5}{16}$$

При x=*-1* имеем:

$$-15=128B\Rightarrow B=-\frac{15}{128}$$

При x=*3* имеем:

$$157=8C_3\Rightarrow C_3=\frac{157}{8}$$

Залишилось знайти невідомі C_1и C_2

Для цього підставляємо знайдені значення в рівність чисельників:

$$x^4+3x^3+2x-11=$$
$$=\frac{5}{16}(x+1)(x-3)^3-\frac{15}{128}(x-1)(x-3)^3+\frac{157}{8}(x-1)(x+1)+$$
$$+C_2(x-1)(x+1)(x-3)+C_1(x-1)(x+1)(x-3)^2$$

Після розкриття дужок та приведення подібних доданків при однакових ступенях x приходимо до рівності двох багаточленів:

$$x^4+3x^3+2x-11=x^4\left(\frac{25}{128}+C_1\right)+x^3\left(-\frac{85}{64}+C_2-6C_1\right)+$$
$$+x^2\left(\frac{673}{32}-3C_2+8C_1\right)+x\left(\frac{405}{64}-C_2+6C_1\right)+3C_2-9C_1-\frac{3997}{128}$$

Прирівнюємо відповідні коефіцієнти при однакових ступенях, тим самим складаємо систему рівнянь для знаходження решти невідомих C_1и C_2.

$$\begin{cases} \frac{25}{128}+C_1=1 \\ -\frac{85}{64}+C_2-6C_1=3 \\ \frac{673}{32}-3C_2+8C_1=0 \\ \frac{405}{64}-C_2+6C_1=2 \\ 3C_2-9C_1-\frac{3997}{128}=11 \end{cases}$$

З першого рівняння одразу $C_1=\frac{103}{128}$, з другого рівняння знаходимо

$$C_2=3+\frac{85}{64}+6C_1=3+\frac{85}{64}+6\cdot\frac{103}{128}=\frac{293}{32}$$

У результаті отримуємо розкладання на найпростіші дроби:

$$\frac{x^4+3x^3+2x-11}{(x-1)(x+1)(x-3)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C_3}{(x-3)^3}+\frac{C_2}{(x-3)^2}+\frac{C_1}{x-3}=$$
$$=\frac{5}{16}\frac{1}{x-1}-\frac{15}{128}\frac{1}{x+1}+\frac{157}{8}\cdot\frac{1}{(x-3)^3}+\frac{293}{32}\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{103}{128}\frac{1}{x-3}$$

Примітка.

Якби ми відразу вирішили застосувати метод невизначених коефіцієнтів, то довелося б вирішувати систему п'яти лінійних рівнянь алгебри з п'ятьма невідомими. Застосування методу приватних значень дозволило легко знайти значення трьох невідомих із п'яти, що значно спростило подальше рішення.

Вдалих рішень!