Самостійна робота 1.

Поняття відстані (метрики). Перевірка аксіом.

Завдання 1. Довести одну з наступних властивостей модуля дійсного числа:

$$|x| = \max\{-x, x\}; \quad (1)$$

$$|x| - |y| \le |x + y| \le |x| + |y|; \quad (2)$$

$$-|x - y| \le |x| - |y| \le |x - y|; \quad (3)$$

$$|x - y| \ge \big||x| - |y|\big|. \quad (4)$$

Нагадування. Означення модуля дійсного числа: $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Завдання 2. Довести одну з наступних властивостей операції знаходження максимумів і мінімумів

$$\min\{\min\{a,b\},c\} = \min\{a,\min\{b,c\}\}; \quad (5)$$

$$\max\{\max\{a,b\},c\} = \max\{a,\max\{b,c\}\}; \quad (6)$$

$$\max\{\min\{a,b\},c\} = \min\{\max\{a,c\},\max\{b,c\}\}; \quad (7)$$

$$\min\{\max\{a,b\},c\} = \max\{\min\{a,c\},\min\{b,c\}\}; \quad (8)$$

$$a \le c, b \le c \Rightarrow \max\{a,b\} \le c; \quad (9)$$

$$\max\{a,b\} + c = \max\{a + c, b + c\}; \quad (10)$$

$$\forall a,b \ge 0 \quad (a \le d + c, b \le e + f) \Rightarrow \max\{a,b\} \le \max\{d + c, e + f\}; \quad (11)$$

$$\forall a,b,c \ge 0 \quad \max\{a + b, c\} \le \max\{a,c\} + \max\{b,c\}. \quad (12)$$

Приклад. Перевірка нерівності трикутника для метрики $\rho(M_1,M_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ за допомогою другої властивості модуля:

$$|x_1 - x_2| \le |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \le \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}$$

Аналогічно,

$$|y_1 - y_2| \le |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \le \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}$$

Тому, Поэтому, за властивістю (9) максимумів ($a \le c, b \le c \Rightarrow \max\{a,b\} \le c$) для найбільшого з двох чисел $|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|$ маємо $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = \rho(M_1,M_2) \le \rho(M_1,M_3) + \rho(M_3,M_2)$.

Завдання 3. Довести аксіому нерівність трикутника для метрики $\rho(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$, використовуючи властивість (11).

Завдання 4. Описати фізичний смисл метрики $\rho_2(A, B) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$ на площині.

Завдання 5. Записати вигляд формул $\rho_1(A,B), \rho_2(A,B), \rho_3(A,B)$ для точок $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ простору. Зробити рисунок, подібний до рисунку 4 з документу «Заняття 1», для обгрунтування формули для метрики $\rho_1(A,B)$ між точками простору.