

Теоретичні відомості

§1 Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду. Основні поняття

Розглянемо інтегральне рівняння виду

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds - f(x) = 0, \quad (4.1)$$

В ньому невідома функція – це $y(x)$,

відомими є

$\lambda = const \in \mathbb{R}$ – параметр інтегрального рівняння,
функція $f(x)$ (як правило, неперервна на $[a; b]$), яку називають *вільним членом*,
функція $K(x,s)$ (як правило, неперервна на $[a; b] \times [a; b]$) – *ядро* інтегрального рівняння.

Таке рівняння називають інтегральним рівнянням другого роду. Воно є лінійним, оскільки невідома функція входить в нього лінійно.

Розрізняють ітераційні та не ітераційні методи наближеного розв'язання інтегральних рівнянь.

§2 Ітераційний метод розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду: метод послідовних наближень

Ідея методу послідовних наближень (МПН).

Крок 0. За нульове наближення $y_0(x)$ можна обрати будь-яку функцію із простору розв'язків. Таким простором може бути $C_{[a;b]}$ або $L_2[a;b]$. Однак, як правило обирають

$$y_0(x) = 0 \text{ або } y_0(x) = f(x). \quad (4.2)$$

Крок 1. Перше наближення (перша ітерація):

$$y_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_0(s) ds + f(x).$$

Крок 2. Друге наближення (друга ітерація):

$$y_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_1(s) ds + f(x).$$

Крок n . n -е наближення (n -а ітерація):

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_{n-1}(s) ds + f(x). \quad (4.3)$$

Постає питання: чи збігається послідовність наближених розв'язків до точного? Відповідь на це питання НЕ завжди позитивна!

МПН може бути застосований у наступних випадках.

Випадок 1. Розв'язок шукаємо у просторі $C_{[a;b]}$. Якщо функції $f(x)$ і $K(x,s)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ або на квадраті $[a;b] \times [a;b]$ відповідно,

тобто $f(x) \in C_{[a;b]}$ і $K(x,s) \in C_{[a;b] \times [a;b]}$, тоді єдиний розв'язок рівняння (4.1) у просторі $C_{[a;b]}$ можна знайти методом послідовних наближень, а послідовність наближених розв'язків буде збігатися до точного розв'язку рівняння (4.1), якщо

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}, \quad (4.4)$$

де

$$M = \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ a \leq s \leq b}} |K(x,s)|. \quad (4.5)$$

Випадок 2. Розв'язок шукаємо у просторі $L_2[a;b]$. Якщо $f(x) \in L_2[a;b]$ і $K(x,s) \in L_2([a;b] \times [a;b])$, тоді єдиний розв'язок рівняння (1) у просторі $L_2[a;b]$ можна знайти методом послідовних наближень, якщо

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \quad (4.6)$$

де

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,s) dx ds}. \quad (4.7)$$

Швидкість збіжності послідовності наближень (4.3) має порядок

$$\frac{q^n}{1-q},$$

де

$$q = |\lambda| M(b-a),$$

якщо виконується нерівність (4.4) для розв'язків в просторі $C_{[a;b]}$, або

$$q = |\lambda| B,$$

якщо має місце умова (4.6) для розв'язків в $L_2[a;b]$.

§3 Неітераційні методи розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

До таких методів відносять:

- метод найменших квадратів;
- метод колокацій;
- метод моментів.

3.1 Загальні положення

Розглянемо інтегральне рівняння

$$R(y) \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds - f(x) = 0, \quad (4.1a)$$

Всі зазначені методи беруть початок з вибору системи *координатних функцій*

$$u_0(x), \{u_j(x)\}_{j=1}^n,$$

де функції $\{u_j(x)\}_{j=1}^n$ – лінійно незалежні.

Наближений розв’язок рівняння (4.1а) подається сумою

$$\bar{y}_n(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x), \quad (4.8)$$

в якій коефіцієнти $\{C_j\}_{j=1}^n$ підлягають визначенню.

Розглянемо **нев’язку**

$$\begin{aligned} R(\bar{y}_n) &= W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) = \bar{y}_n(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \bar{y}_n(s) ds - f(x) = \\ &= u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \left[u_0(s) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(s) \right] ds - f(x). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Уведемо позначення

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, \lambda) &= u_0(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u_0(s) ds - f(x); \\ \varphi_j(x, \lambda) &= u_j(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u_j(s) ds, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Тоді невязку (4.9) можна переписати у вигляді

$$R(\bar{y}_n) = W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) = \varphi_0(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x, \lambda). \quad (4.10)$$

3.2 Метод найменших квадратів (інтегральний).

Метод передбачає [Ошибка! Источник ссылки не найден.] мінімізацію квадратичного відхилення, що подається інтегралом

$$Q(C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) = \int_a^b W^2(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) dx = \int_a^b \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x, \lambda) \right]^2 dx. \quad (4.11)$$

Шукана точка локального мінімуму функції n змінних $Q(C_1, C_2, \dots, C_n)$ може бути знайденою із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial C_1} = \int_a^b W \frac{\partial W}{\partial C_1} dx = \int_a^b \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x, \lambda) \right] \varphi_1(x, \lambda) dx = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial C_2} = \int_a^b W \frac{\partial W}{\partial C_2} dx = \int_a^b \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x, \lambda) \right] \varphi_2(x, \lambda) dx = 0; \\ \dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial C_n} = \int_a^b W \frac{\partial W}{\partial C_n} dx = \int_a^b \left[\varphi_0(x, \lambda) + \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x, \lambda) \right] \varphi_n(x, \lambda) dx = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Уведення позначень $(\varphi_k, \varphi_l) = \int_a^b \varphi_k(x, \lambda) \varphi_l(x, \lambda) dx$ призводить до системи

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \cdot (\varphi_1, \varphi_1) + C_2 \cdot (\varphi_1, \varphi_2) + \dots + C_i \cdot (\varphi_1, \varphi_i) + \dots + C_n \cdot (\varphi_1, \varphi_n) = -(\varphi_0, \varphi_1); \\ C_1 \cdot (\varphi_2, \varphi_1) + C_2 \cdot (\varphi_2, \varphi_2) + \dots + C_i \cdot (\varphi_2, \varphi_i) + \dots + C_n \cdot (\varphi_2, \varphi_n) = -(\varphi_0, \varphi_2); \\ C_1 \cdot (\varphi_3, \varphi_1) + C_2 \cdot (\varphi_3, \varphi_2) + \dots + C_i \cdot (\varphi_3, \varphi_i) + \dots + C_n \cdot (\varphi_3, \varphi_n) = -(\varphi_0, \varphi_3); \\ \dots \\ C_1 \cdot (\varphi_j, \varphi_1) + C_2 \cdot (\varphi_j, \varphi_2) + \dots + C_i \cdot (\varphi_j, \varphi_i) + \dots + C_n \cdot (\varphi_j, \varphi_n) = -(\varphi_0, \varphi_j); \\ \dots \\ C_1 \cdot (\varphi_n, \varphi_1) + C_2 \cdot (\varphi_n, \varphi_2) + \dots + C_i \cdot (\varphi_n, \varphi_i) + \dots + C_n \cdot (\varphi_n, \varphi_n) = -(\varphi_0, \varphi_n). \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Наведена система є СЛАР. Головна матриця системи є симетричною. Якщо її визначник не дорівнює нулю, то система (13) має єдиний розв'язок.

Ті значення параметра λ , при яких $D(\lambda) = 0$, дозволяють знайти наближені власні значення $\{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^n$ інтегрального рівняння. Якщо розглянути $f(x) = 0$, $u_0(x) = 0$, $\lambda = \bar{\lambda}_k$, то система (4.13) перетворюється на однорідну, з якої можна знайти наближені власні функції рівняння (1).

3.3 Метод моментів

Першою відмінністю методу моментів наближеного розв'язання інтегрального рівняння (4.1а) [Ошибка! Источник ссылки не найден.] є вибір функції $u_0(x) = f(x)$. Це призводить до зміни вигляду наближеного розв'язку

$$\bar{y}_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x), \quad (4.14)$$

а також нев'язки:

$$\begin{aligned} R(\bar{y}_n) &= W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) = \\ &= \sum_{j=1}^n C_j \left[u_j(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) u_j(s) ds \right] - \lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds. \end{aligned} \quad (4.15)$$

По-друге, невідомі коефіцієнти потрібно знаходити із умови ортогональності нев'язки до координатних функцій:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) u_1(x, \lambda) dx = 0; \\ \int_a^b W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) u_2(x, \lambda) dx = 0; \\ \dots \\ \int_a^b W(x, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) u_n(x, \lambda) dx = 0. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Підставляючи (4.15) до системи (4.16), перепишемо систему у вигляді:

$$\left\{ \sum_{j=1}^n C_j \left[\int_a^b u_i(x) u_j(x) dx - \lambda \int_a^b dx \int_a^b K(x,s) u_i(x) u_j(s) ds \right] = \right. \\ \left. = \lambda \int_a^b dx \int_a^b K(x,s) u_i(x) f(s) ds, \quad i = \overline{1, n}. \right. \quad (4.17)$$

В позначеннях

$$a_{i,j} = \int_a^b u_i(x) u_j(x) dx; \quad b_{i,j} = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s) u_i(x) u_j(s) ds; \\ g_i = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s) u_i(x) f(s) ds$$

система (4.17) набуде вигляду:

$$\left\{ \sum_{j=1}^n C_j [a_{i,j} - \lambda b_{i,j}] = \lambda g_i, \quad i = \overline{1, n}. \right. \quad (4.18)$$

Щодо існування єдиного розв'язку системи (4.18), який визначатиме наближений розв'язок інтегрального рівняння (4.1а), то висновки аналогічні до тих, що виписано для МНК в пп. 4.3.3.

3.4 Метод колокацій

Метод колокацій наближеного розв'язання інтегрального рівняння (4.1а) початково передбачає розбиття відрізка $[a; b]$ на n рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n} k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Тобто кількість точок, що обирається, дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів НА ВІДМІНУ ВІД ТОЧКОВОГО МНК для диференціальних рівнянь.

Сутність методу полягає в пошуку тих коефіцієнтів, за яких нев'язка дорівнює нулю в кожній із точок розбиття (19). Тобто система відносно невідомих коефіцієнтів набуде вигляду:

$$\{W(x_k, C_1, C_2, \dots, C_n, \lambda) = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (4.20)$$

або

$$\left\{ \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(x_k, \lambda) = -\varphi_0(x_k, \lambda), \quad k = \overline{1, n}. \right. \quad (4.21)$$

Щодо існування єдиного розв'язку системи (4.21), який визначатиме наближений розв'язок інтегрального рівняння(1а), то висновки аналогічні до тих, що виписано для МНК.

Питання про збіжність послідовності наближених розв'язків $\{\bar{y}_n(x)\}$ інтегрального рівняння (1) до точного $y(x)$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n(x) = y(x)$ вимагає глибинних досліджень методами функціонального аналізу.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ №6 і 7 Розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду методами найменших квадратів. колокацій, моментів

§1 Завдання для виконання і варіанти практичних завдань №5 і 6
Перевірити умови існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (табл. 4.1,):
практичне завдання №6: методом найменших квадратів,
практичне завдання №7: методом колокацій,
методом моментів.

Порівняти результати

Таблиця 4.1 [Ошибка! Источник ссылки не найден.]

№ 1. $y(x) - \int_0^1 x \cdot t \cdot y(t) dt = 2x;$	№ 2. $y(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 t \cdot y(t) dt = 1;$
№ 3. $y(x) - \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-x) \sin(2\pi t) y(t) dt = \frac{1}{2}(1-x);$	№ 4. $y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot y(t) \cdot t dt = 2 \sin x;$
№ 5. $y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \sin t \cdot y(t) dt = \sin x;$	№ 6. $y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 y(t) dt = \sin \pi x;$
№ 7. $y(x) - \int_0^1 (1-x) \cos(2\pi t) y(t) dt = x;$	№ 8. $y(x) - \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 2^{x+t} y(t) dt = x;$
№ 9. $y(x) - \int_0^1 (1-2xt) y(t) dt = -\frac{1}{6}(x+3);$	№ 10. $y(x) - \int_0^1 (2x-t) y(t) dt = \cos 2\pi x;$
№ 11. $y(x) + \int_0^1 (x - \sqrt{t}) y(t) dt = \frac{5}{3}x + \sqrt{x} - \frac{1}{6};;$	№ 12. $y(x) - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{x}{1+t^2} y(t) dt = 1 + x^2;$
№ 13. $y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} y(t) dt = \sin x;$	№ 14. $y(x) + \int_0^1 x \sin(2\pi t) y(t) dt = \cos(2\pi x);$
№ 15. $y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x e^t y(t) dt = e^{-x};$	№ 16. $y(x) - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos t y(t) dt = 1;$
№ 17. $y(x) - \int_0^1 x \left(1 - \frac{3}{2}t\right) y(t) dt = 1;$	№ 18. $y(x) - \int_0^1 \sin(2\pi x) y(t) dt = x;$

№ 19.

$$y(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin t + \sin 2x) y(t) dt = \sin x;$$

№ 20.

$$y(x) - \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (x^2 + 1 + xt) y(t) dt = 1.$$

§2 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №6

Задача 4.1 Розглянемо інтегральні рівняння

$$(a) \quad y(t) - \frac{5}{2} \int_0^1 (1 - 2x^2) t y(t) dt = x \sin \pi x;$$

$$(б) \quad y(t) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos \pi x \cos 3\pi t y(t) dt = \cos 3\pi x$$

Розв'язання. (а) Відповідно до загального вигляду інтегрального рівняння (4.1) уведемо позначення

$$a = 0, b = 1, \lambda = \frac{5}{2}, K(x, t) = (1 - 2x^2) t, f(x) = x \sin \pi x.$$

Крок 0. Спочатку перевіримо умови існування єдиного розв'язку в просторі $C_{[a;b]}$ (4.4) – (4.5) або $L_2[a;b]$ (4.6) – (4.7). Всі варіанти практичних завдань дозволяють перевірити умови (4.4) – (4.7) без допомоги технічних засобів. Однак можна їх перевірити з використанням Maple:

- > $M := \text{maximize}(\text{abs}(K(x, t)), x = a .. b, t = a .. b) :$
 $\text{conditionC} := \text{evalf}\left(\text{abs}(\text{lambd}) - \frac{1}{M \cdot (b - a)}\right);$
 $\text{conditionC} := 1.500000000$
- > $B := \text{sqrt}(\text{int}(\text{int}((K(x, t))^2, x = a .. b), t = a .. b)) :$
- > $\text{conditionL} := \text{evalf}\left(\text{abs}(\text{lambd}) - \frac{1}{B}\right);$
 $\text{conditionL} := -0.035462764$

Розглянемо змінні, що виражають різницю між лівою і правою частиною двох зазначених умов (conditionC, conditionL). Якщо хоча б одна з цих змінних від'ємна, то відповідна умова виконується, а рівняння має єдиний розв'язок. У даному прикладі виконується умова в просторі $L_2[a;b]$.

Крок 1. Здійснюємо вибір координатних функцій. Якщо ядро рівняння і вільний його член виражаються лише тригонометричними функціями, то краще й за координатні функції обирати тригонометричні. У супротивному випадку – степеневі.

В табл. 4.2 пропонується універсальний вибір координатних функцій, який розповсюджується на всі ітераційні методи.

Тригонометрична система	Система степеневих функцій
$\triangleright n := 5 ; kon := 2 \cdot n :$ $\triangleright u(x)[0] := f(x) :$ \triangleright for k from 1 to kon do $u(x)[2 \cdot k] := \cos\left(\frac{\text{Pi} \cdot (k - 1) \cdot x}{b - a}\right) :$ $u(x)[2 \cdot k - 1] := \sin\left(\frac{\text{Pi} \cdot k \cdot x}{b - a}\right) :$ od:	$\triangleright n := 10 ; kon := n :$ $\triangleright u(x)[0] := f(x) :$ \triangleright for k from 1 to kon do $u(x)[k] := x^{k-1} :$ od:

Крок 2. Самостійно подайте наближений розв'язок лінійною комбінацією координатних функцій в системі Maple. **Зверніть увагу**, що нумерація функцій від 0 до kon .

Крок 3. Визначаємо нев'язку

$$R := y(x) - \text{lambd} \cdot \text{int}(K(x, t) \cdot \text{subs}(x = t, y(x)), t = a..b) - f(x) :$$

Крок 4. Реалізація МНК. Випишемо квадратичне відхилення

$$Q := \text{int}(R^2, x = a..b) :$$

і мінімізуємо його в той же спосіб, як і в попередніх роботах. **Зверніть увагу**, що частинні похідні обчислюються за змінними $s[k]$, для k від 1 до kon .

Крок 5. Виносимо на екран результат: наближений розв'язок

$$x \sin(\pi x) + \frac{5}{2} \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} - \frac{5(\pi^2 - 4)x^2}{\pi^3}$$

і квадратичне відхилення $Q = 1.5667 \cdot 10^{-29}$.

Будуємо графік отриманої функції (див. рис. 4.1).

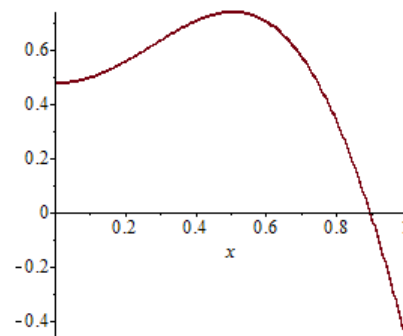


Рис. 4.1

(б) Крок 0 дозволяє запевнитися у виконанні умови існування єдиного розв'язку в просторі $L_2[a; b]$, оскільки $\text{conditionL} = -0.5$.

Дослідимо вплив вибору координатних функцій відповідно до табл. 4.2. Якщо за координатні обрати степеневі функції, то наближений розв'язок набуде вигляду

$$\cos(9.424777962x) + 0.4994620383 - 2.469088544x^2 + 2.026842117x^4 - 0.6365413758x^6 + 0.08666450858x^8$$

з квадратичним відхиленням $Q = 3.1612 \cdot 10^{-10}$. Якщо тригонометричні, то при $n = 5$ отримаємо відповідно

$$\begin{aligned}
& -\frac{80}{21} \frac{341775 \pi^2 - 3375104}{2480625 \pi^4 - 48214800 \pi^2 + 234225664} \\
& + \frac{60}{7} \frac{\pi (33075 \pi^2 - 326912) \cos\left(\frac{1}{2} \pi x\right)}{2480625 \pi^4 - 48214800 \pi^2 + 234225664} \\
& + \frac{16}{441} \frac{(69711075 \pi^2 - 687788032) \cos(\pi x)}{2480625 \pi^4 - 48214800 \pi^2 + 234225664} \\
& - \frac{2500 \pi (441 \pi^2 - 4352) \cos\left(\frac{3}{2} \pi x\right)}{2480625 \pi^4 - 48214800 \pi^2 + 234225664} \\
& + \frac{32 (61425 \pi^2 - 606208) \cos(2 \pi x)}{2480625 \pi^4 - 48214800 \pi^2 + 234225664}
\end{aligned}$$

$$Q = 0.0307598903,$$

а при $n = 7$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cos(\pi x) + \cos(3 \pi x) \\
& Q = 0.
\end{aligned}$$

Тобто функція $y(x) = \frac{1}{2} \cos \pi x + \cos 3 \pi x$ визначає точний розв'язок. Будь-яка кількість степеневих функцій не дає можливості отримати точний розв'язок, а може лише наближатися до нього з певним ступенем точності.

Графічне подання трьох розв'язків наведено на рис. 4.2, де суцільній лінії відповідає перший з наведених наближених розв'язків, штрихпунктирній – другий, штриховій – третій. Перший і третій (точний) візуально накладаються.

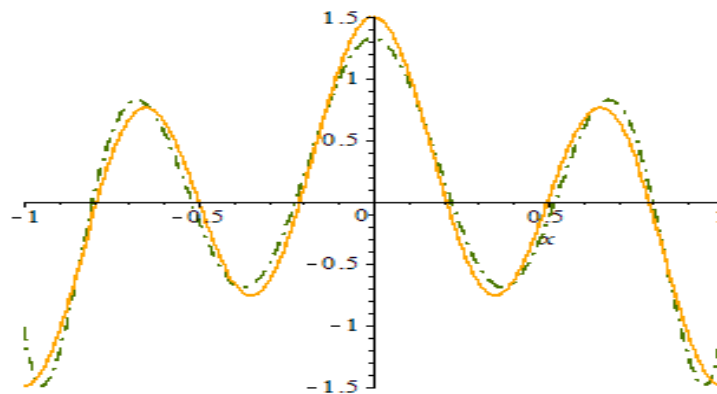


Рис. 4.2

§3 Методичні рекомендації до виконання практичного завдання №7

Проведено розв'язання задачі 4.1 (а) і (б) методами моментів і колокацій. Кроки 0-3 залишаються незмінними як для методу моментів, так і для методу колокацій, особливо зважаючи на вибір координатних функцій в табл. 4.2.

СЛАР (4.16) методу моментів для пошуку невідомих коефіцієнтів подання (4.14) наближеного розв'язку визначається із умови ортогональності нев'язки до кожної з лінійно незалежних координатних функцій з номерами від 1 до kon . В системі Maple зазначену СЛАР можна утворити в такий спосіб:

> **for** *k* **from** 1 **to** *kon* **do** $eq[k] := int(R \cdot u(x)[k], x = a .. b) :$ **od**:

Метод колокацій передбачає початкове розбиття відрізка $[a; b]$ точками в кількості, що збігається з кількістю координатних функцій. У даних позначеннях – це *kon*. При цьому, СЛАР утворюється підстановкою точок розбиття до нев'язки. В системі Maple зазначені ідеї можуть бути реалізовані в такий спосіб:

> **for** *jk* **from** 1 **to** *kon* **do** $X[jk] := a + \frac{(b-a)}{kon} \cdot jk :$ **od**;
for *k* **from** 1 **to** *kon* **do** $eq[k] := subs(x = X[k], R) :$ **od**:

В кожному із методів отримуємо систему. Її можна розв'язати засобами Maple так само, як і в попередніх роботах:

> $sys := \{seq(eq[h], h = 1 .. kon)\} :$
 > $var := \{seq(c[h], h = 1 .. kon)\} :$
 > $RRR := solve(sys, var) : assign(RRR) :$

Якщо МНК має квадратичне відхилення, яке дозволяє оцінити точність наближеного розв'язку, то методи моментів і колокацій не мають такої величини. Звісно, що квадратичне відхилення можна додатково обчислити, однак частіше на практиці оцінка точності здійснюється порівнянням наближених розв'язків задачі, отриманих різними методами.

Інтегральне рівняння задачі 4.1 (а) має однакові розв'язки за трьома методами (моментів, колокацій і МНК).

Для зручності порівняння випишемо наближені розв'язки інтегрального рівняння задачі 4.1 (б) при застосуванні кожного методу з використанням степеневих координатних функцій:

метод найменших квадратів дав такий наближений розв'язок

$$\cos(9.424777962x) + 0.4994620383 - 2.469088544x^2 + 2.026842117x^4 - 0.6365413758x^6 + 0.08666450858x^8$$

метод моментів –

$$\cos(9.424777962x) + 0.4999823655 - 2.466577446x^2 + 2.022304446x^4 - 0.6460752188x^6 + 0.09042695314x^8$$

метод колокацій –

$$\cos(9.424777962x) + 0.4999026131 - 0.00001612900073x - 2.466903124x^2 + 0.0005740356164x^3 + 2.028340424x^4 - 0.00477796441x^5 - 0.6623019114x^6 + 0.01312581441x^7 + 0.1030915470x^8 - 0.01093817867x^9$$

Коефіцієнти при степеневих функціях степенів від 0 до 8 за трьома методами збігаються до другого знаку після коми, доданок зі степенем 9 наявний лише для методу колокацій і має коефіцієнт, менший за 0.02. Загальна похибка обчислення є незначною для всіх методів при виборі $n = 10$.

Застосування тригонометричних координатних функцій при розв'язанні інтегрального рівняння задачі 4.1 (б) методом моментів, як при $n = 5$, так і при $n = 7$ дає ті самі розв'язки, що і методом найменших квадратів. А метод колокацій при $n = 5$ дає наближений розв'язок із дуже значним відхиленням

від відповідних розв'язків іншими методами: $y(x) = -\cos(2\pi x)$. Однак, при $n = 7$ маємо повну збіжність розв'язків за трьома методами.

Деякі висновки.

1. Застосування наближених методів потребує аналізу точності отриманих розв'язків. У випадку МНК заміником оцінки точності може слугувати квадратичне відхилення. Для методів моментів і колокацій такого аналогу ми не маємо, тому можна його обчислити для знайденої функції. На практиці для аналізу збіжності послідовності наближених розв'язків до точного збільшують кількість координатних функцій. Однак, існують випадки, коли при розв'язанні СЛАР з великою кількістю рівнянь і невідомих система Maple може дати хибні результати. Тому потрібно застосовувати різні методи і порівнювати розв'язки. У даному випадку можна запропонувати порівнювати результати, з розв'язками, отриманими за допомогою МНК.

2. Вибір як вигляду координатних функцій, так і їх кількості, залежить від конкретного інтегрального рівняння, а висновки в кожному випадку можуть суттєво відрізнятися!

Питання для самоконтролю з теми 4:

1. Класифікація інтегральних рівнянь.
2. Умови існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.
3. Ітераційний метод послідовних наближень розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Збіжність послідовності наближених розв'язків до точного. Швидкість збіжності МПН.
4. Неітераційний метод найменших квадратів розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.
5. Принципи вибору координатних функцій.
6. Реалізація в Maple алгоритму методу послідовних наближень і методу найменших квадратів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду
7. Особливості неітераційних методу колокацій і методу моментів. Вибір координатних функцій.
8. Різні способи реалізації запису систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів лінійної комбінації лінійно незалежних функцій.
9. Реалізація в Maple алгоритму методу колокацій і методу моментів розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Аналіз збіжності послідовності наближених розв'язків до точного.