Практичне заняття № 4. Послідовності. Границі послідовності.

б) $x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{2}$

Приклад 1. Для заданої послідовності записати її перші чотири члени:

а) $x_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$; б) $x_n=\begin{cases}-n^2, & n-\text{непарне},\\ \dfrac{n-1}{n}, & n-\text{парне};\end{cases}$ в) $x_1=1;\ x_n=\dfrac{x_{n-1}}{2}+1, n>1$.

$x_2=\frac{x_1}{2}+1=\frac{3}{2}$

Розв'язання. Підставимо у вирази для x_n послідовно $n=1,\ n=2,\ n=3,\ n=4$.

а) $x_1=\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2},\ x_2=\dfrac{1}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{6}.\ x_3=\dfrac{1}{3\cdot 4}=\dfrac{1}{12},\ x_4=\dfrac{1}{4\cdot 5}=\dfrac{1}{20}$:

б) $n=1-$непарне, $x_1=-1^2=-1,\ n=2$ – парне, $x_2=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2},\ n=3$ – непарне, $x_3=-3^2=-9$,

$n=4$ – парне, $x_4=\dfrac{4-1}{4}=\dfrac{3}{4}$;

в) послідовність задана рекурентним способом, $x_1=1$ – задане, $x_2=\dfrac{x_1}{2}+1=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$,

$x_3=\dfrac{x_2}{2}+1=\dfrac{3/2}{2}+1=\dfrac{7}{4},\ x_4=\dfrac{x_3}{2}+1=\dfrac{7/4}{2}+1=\dfrac{15}{8}$.

Приклад 2. Довести обмеженість послідовностей: а) $x_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$; б) $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

$\{x_n\}$ обмеж. $\Rightarrow \exists M>0,\ |x_n|\le M\ \forall n\in N$

Розв’язання. а) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1} = \dfrac{\left(n^2+1\right)-1}{n^2+1} = 1 - \dfrac{1}{n^2+1}$. З останньої рівності випливає, що $\dfrac{1}{2} < x_n < 1$, тобто $\left|x_n\right| < 1$, тому послідовність $\{x_n\}$ обмежена.

$M = 1$ $\qquad \dfrac{1}{n^2+1} \le \dfrac{1}{2}$

б) $\left|x_n\right| = \left|\sin\dfrac{n\pi}{4}\right| \le 1$. Послідовність обмежена.

$\boxed{x_{n+1} > x_n}$

Приклад 3. Довести, що послідовність $\{x_n\}$ зростає, якщо $x_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$.

Розв'язання. Покажемо, що $x_{n+1} > x_n$, тобто $x_{n+1} - x_n > 0$. $x_{n+1} = \dfrac{2(n+1)-1}{3(n+1)+2} = \dfrac{2n+1}{3n+5}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{(2n+1)(3n+2)-(2n-1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{7}{(3n+5)(3n+2)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже, $x_{n+1} > x_n$, послідовність $\{x_n\}$ зростає.

Приклад 4. Довести, що послідовність $\{x_n\}$ спадає, якщо $x_n = \dfrac{2n+1}{6n-5}$.

Розв’язання. Для спадної послідовності $x_{n+1} < x_n$, тому $x_{n+1} - x_n < 0$. Для заданої послідовності

$$x_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{6(n+1)-5} = \frac{2n+3}{6n+1}.$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+3}{6n+1} - \frac{2n+1}{6n-5} = \frac{(2n+3)(6n-5)-(2n+1)(6n+1)}{(6n+1)(6n-5)} = -\frac{16}{(6n+1)(6n-5)} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $x_{n+1} - x_n < 0$, то $x_{n+1} < x_n$, послідовність $\{x_n\}$ спадає.

Приклад 5. Довести, що послідовність $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + 1,\ n > 1$ зростає.

Розв'язання. При $n > 1$ маємо: $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + 1 - x_n = 1 - \frac{x_n}{2}$. Для доведення зростання заданої послідовності покажемо, що $x_{n+1} - x_n = 1 - \frac{x_n}{2} > 0$. Для цього покажемо, що $x_n < 2$. Використаємо метод математичної індукції. $x_1 = 1 < 2$. Нехай для довільного $n = k$ виконується нерівність $x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + 1 < 2$. Покажемо, що звідси випливає істинність нерівності і при $n = k + 1$, тобто $x_{k+2} = \frac{x_{k+1}}{2} + 1 < 2$. Дійсно, при $x_{k+1} < 2$ отримуємо, що $x_{k+2} = \frac{x_{k+1}}{2} + 1 < \frac{2}{2} + 1 = 2$. Отже, $x_{k+1} < 2 \Rightarrow x_{k+2} < 2$. Згідно з методом математичної індукції $x_n < 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Отже, $x_{n+1} - x_n = 1 - \frac{x_n}{2} > 0$, тому послідовність зростає.

Приклад 6. Довести, що число a є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо а) $x_n = \frac{2n+1}{2n+5}$, $a = 1$;

б) $x_n = \frac{1}{n!}$, $a = 0$.

Розв'язання. Для доведення того, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, використаємо означення границі послідовності:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\ |x_n - a| < \varepsilon$$

а) $\left|x_n - a\right| = \left|\frac{2n+1}{2n+5} - 1\right| = \left|\frac{2n+1-(2n+5)}{2n+5}\right| = \left|\frac{-4}{2n+5}\right| = \frac{4}{2n+5} < \varepsilon$.

З цієї невірності визначимо такий номер n_0, що $\forall n > n_0$ $\frac{4}{2n+5} < \varepsilon$. Отримуємо:

$$\frac{4}{2n+5} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4-(2n+5)\varepsilon}{2n+5} < 0.$$

Оскільки знаменник $2n+5 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, то $4-(2n+5)\varepsilon < 0$. Звідси $2n+5 > \frac{4}{\varepsilon}$, $n > \frac{2}{\varepsilon} - \frac{5}{2}$. З цієї нерівності випливає, що за n_0 можна вибрати будь-яке натуральне число більше $\frac{2}{\varepsilon} - \frac{5}{2}$, наприклад, $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} - \frac{5}{2}\right] + 1$. Тоді $\forall n > n_0$ $\left|x_n - a\right| = \left|\frac{2n+1}{2n+5} - 1\right| < \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+5} = 1$.

б) Потрібно довести, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \left|\frac{1}{n!} - 0\right| = \frac{1}{n!} < \varepsilon \quad \forall n > n_0$.

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} < \frac{1}{2\cdot 2 \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Останню нерівність отримуємо, замінивши у знаменнику дробу $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ кожен з множників 2, 3,…, n на 2. При цьому ми зменшуємо знаменник дробу і збільшуємо дріб.

З нерівності $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ знаходимо, що $2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$. За n_0 виберемо будь-яке натуральне число більше $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$, наприклад, $n_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 2$. Тоді $\forall n > n_0$ $|x_n - a| = \left| \frac{1}{n!} - 0 \right| < \varepsilon$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

До **основних формул**, що використовуються при обчисленні границь послідовностей, відносять наступні:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, |a| < 1 \\ +\infty, a > 1, \\ \text{не існує}, a \le -1. \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a = \text{const}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$, $|a| > 1$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a = \text{const}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = (a^0) = 1$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{\alpha_n} = \infty, c - \text{const}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0,$ якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e,\quad e=2{,}718281...$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, де α_n – нескінченно мала послідовність.

Розглянемо типові приклади обчислення границь послідовностей.

Приклад 7. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на n^2 (старший степінь у чисельнику та знаменнику дробу). Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\overset{\to 0}{\frac{5}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{4}{n^2}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{2}{n}}-\underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}.$$

При $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ (це границі виду $\dfrac{c}{\infty}=0, c=\mathrm{const}$). Тому, використавши теореми про границі суми, різниці та частки послідовностей, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}=\frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0+0}{1+0+0}=3.$$

Приклад 8. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^3+7n-4}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на n^3 (старший степінь у чисельнику та знаменнику дробу). Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^3+7n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{7}{n^2}-\frac{4}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}}=\frac{0+0}{1+0-0}=0.$$

Приклад 9. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+2n+3}{n^2+3n+1}$.

Розв'язання. Поділивши чисельник та знаменник дробу на n^4, знаходимо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n+3}{n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$$

Зауваження. Нехай загальний член послідовності – це дріб, у чисельнику та знаменнику якого знаходяться многочлени або ірраціональні вирази. Нехай m – старший степінь чисельника, k – старший степінь знаменника. Тоді при $m = k$ границя послідовності дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника, при $m < k$ ця границя дорівнює нулю, при $m > k$ вона дорівнює нескінченності.

Приклад 10. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{2n^6 + 3n^5 - 2n} - 5n + 1}{4n^2 + 2\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Старший степінь чисельника $m = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, старший степінь знаменника $k = 2$. Для даної послідовності $m < k$, тому границя дорівнює нулю.

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 2}{6n^2 + 7}$.

Розв'язання. Старший степінь чисельника $m = 2$, старший степінь знаменника $k = 2$. Маємо $m = k$, тому границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника, тобто при n^2: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 2}{6n^2 + 7} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Приклад 12. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{5n^3 + 1}$.

Розв'язання. Сума перших n натуральних чисел $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Отже, отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \ldots + n}{5n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{5n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n}{2(5n^3 + 1)}.$$

Старший степінь чисельника $m=2$, старший степінь знаменника $k=3$. Оскільки $m<k$, то границя даної послідовності дорівнює нулю.

Приклад 13. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{2n^2+2}-\dfrac{5n^2-1}{5n+1}\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{2n^2+2}=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-1}{5n+1}=\infty$. Маємо так звану невизначеність виду $(\infty-\infty)$. Виконаємо віднімання дробів у дужках.

$$\frac{2n^3}{2n^2+2}-\frac{5n^2-1}{5n+1}=\frac{2n^3\left(5n+1\right)-\left(5n^2-1\right)\left(2n^2+2\right)}{\left(2n^2+2\right)\left(5n+1\right)}=\frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+2}.$$

Отже, отримали $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{2n^2+2}-\dfrac{5n^2-1}{5n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+2}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

Приклад 14. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)$.

$\infty - \infty$

Розв'язання. Помножимо та поділимо вираз $\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}$ на спряжений до нього вираз $\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}$. Отримаємо:

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(n+1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}}=+\infty,$$

оскільки старший степінь чисельника $m=1$, старший степінь знаменника $k=\frac{1}{2}$, тобто $m>k$.

Приклад 15. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{\underbrace{n!\cdot(n+1)}_{}-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot(n+1-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

$n!(n+1)$

Розглянемо обчислення границь послідовностей, пов'язаних з використанням числа «e». Воно ґрунтується на застосуванні формули (9): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad e=2{,}718281...$ Тут при $n\to\infty$ отримуємо так звану невизначеність виду $\left(1^\infty\right)$.

Формулу (9) часто застосовують у вигляді формули (10): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, де α_n – нескінченно мала послідовність, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Приклад 16. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$, $\alpha_n=\frac{3}{n}$, $\frac{1}{\alpha_n}=\frac{n}{3}$

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n}=\left(1^{\infty}\right)$. Маємо невизначеність виду $\left(1^{\infty}\right)$, тому потрібно застосувати формулу (10): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, де α_n – нескінченно мала послідовність. У нашому прикладі $\alpha_n=\dfrac{3}{n}$. Отримуємо:

$= e$ $\quad\quad\quad\quad (1^{\infty})$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^{3}=e^{3},$$

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$.

Приклад 17. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}$.

Розв'язання. Маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}=\left(1^{\infty}\right)$, отже, потрібно застосувати формулу (10). Для цього виконаємо наступне перетворення загального члена послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{n-1}{n+4}-1\right)\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{5}{n+4}\right)\right)^{2n+3}.$$

$\dfrac{n-1}{n+4}-1=\dfrac{n-1-(n+4)}{n+4}=\dfrac{-5}{n+4}$

Тут $\alpha_n=-\dfrac{5}{n+4}$. Виділимо вираз виду $\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}$:

$\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n+15}{n+4}=10$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{5}{n+4}\right)\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{5}{n+4}\right)\right)^{-\frac{n+4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{n+4}\right)\cdot(2n+3)}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5(2n+3)}{n+4}}=e^{-10}.$$

$$b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots+b_1q^n=\frac{b_1(1-q^{n+1})}{1-q}$$

Домашнє завдання:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2$$

1. Довести обмеженість послідовностей: а) $x_n=\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+4}}$; б) $x_n=2^{\cos n}$.

2. Довести, що послідовність $x_n=n^2-2n$ є необмеженою.

$n^{3/2}=0$

3. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5\sqrt{n^2+2}+4n}{2n+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n\sqrt{n}+3n-1}{\sqrt{4n^5+2}-\sqrt{n}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3+2n^2-3}{5n+1}$;

$n^{5/2}$ $3>1$ $\to-\infty$

$\frac{9}{2}$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{3n^2+2n}\right)^{4n^2}$

$$\cdot\frac{(-2n-1)4n^3}{3n^2+2n}$$

$\frac{2}{3/2}$ $\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ $4n^2$ 1^∞

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{3n^2-1}{3n^2+2n}-1\right)\right)^{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n^2-1-3n^2-2n}{3n^2+2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1-2n}{3n^2+2n}\right)^{\frac{3n^2+2n}{-2n-1}}\cdot$$

$$=e^{-\infty}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

д) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n(n-1)})(n+\sqrt{n(n-1)})}{n+\sqrt{n(n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n(n-1)}{n+\sqrt{n^2-n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}=\frac{1}{2}$$