6.1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

6.1.1. Границя функції в точці
6.1.2. Однобічні границі функції
6.1.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції
6.1.4. Знаходження границі функції
6.1.5. «Визначеності» й невизначеності

Поняття границі є ефективним інструментом як для дослідження функцій, так і для означення ключових понять математичного аналізу: похідної, визначеного інтеграла, суми ряду.

$x_0 = A$

$(A-\varepsilon; A+\varepsilon] \setminus \{A\}$

6.1.1. Границя функції в точці

1. Розгляньмо функцію f, яка означена в деякому околі точки x_0, окрім, можливо самої точки x_0.

$A-\varepsilon \quad A \quad A+\varepsilon$

Означення 6.1 **(границі функції мовою околів, за Коші).**

Точку A називають *границею функції* f *у точці* x_0, якщо для будь-якого ε-околу $U_\varepsilon(A)$ точки A існує проколений δ-окіл $U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ точки x_0, такий, що для всіх

$$x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

і позначають

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Розпишімо окремі випадки сформульованого означення.

2. x_0, A — дійсні числа (рис. 6.1). Число A називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що з нерівності

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

випливає нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

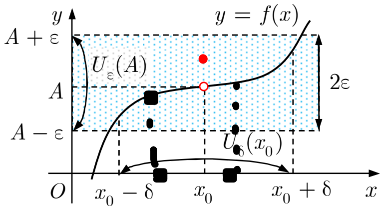


Рис. 6.1. Скінченна границя функції f, коли $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

Або

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \{x_n\} : x_n \to x_0,\ \{f(x_n)\} \to A$$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

3. x_0 — дійсне число, $A = \infty$ (рис. 6.2).

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то графік функції має в точці x_0 *вертикальну асимптоту* $x = x_0$.

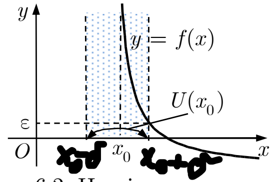
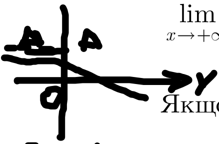


Рис. 6.2. Нескінченна границя функції f, коли $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

4. Розгляньмо важливий випадок скінченної границі A функції f у точці $x_0 = +\infty$ (рис. 6.3):

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$$
$$x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$



Якщо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$, то графік функції має *горизонтальну асимптоту* $y = A$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

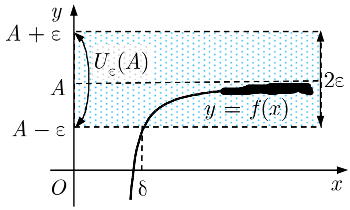


Рис. 6.3. Скінченна границя функції f, коли $x \to +\infty$

5. $A = f(x_0)$. Якщо функція f, означена в околі точки $x_0 \in X$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функцію f називають *неперервною в точці* x_0.

Можна довести, що

> Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї області означення.

6. А. Приміром, доведімо, що для сталої функції $f(x) = c$,

$$\lim_{x \to x_0} c = c.$$

Справді, для будь-якого x і для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконано
$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Отже, за δ можна взяти будь-яке додатне число.

Б. Покажімо також, що

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0.$$

Справді, для будь-якого $\varepsilon > 0$ нерівність $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$ випливає з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ для $\delta = \varepsilon$.

7. Точка x_0 може як належати області означення функції f так і не належати. Оскільки, коли знаходять границю, функцію розглядають лише в досить малому проколеному околі точки x_0, то існування границі функції в точці є **локальною** властивістю функції.

Властивості функцій, що мають скінченну границю.

1 (*єдиність границі*). Якщо функція f має скінченну границю в точці x_0, то ця границя єдина.

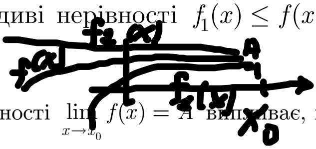
$\exists M>0: |f(x)| \le M$

2 (*обмеженість*). Якщо функція f має скінченну границю в точці x_0, то існує проколений окіл точки x_0, у якому функція f обмежена.

3 (*збереження знаку*). Якщо існує скінченна $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ і в деякому проколеному околі точки x_0 виконано нерівність $f(x) \geq 0$, то $A \geq 0$.

4 (*збереження нерівності*). Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$ та $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$ і в деякому проколеному околі точки x_0 правдива нерівність $f_1(x) \leq f_2(x)$, то $A_1 \leq A_2$.

5 (*теорема про проміжну функцію, про «двох вартових»*). Якщо існує скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$ і в деякому проколеному околі точки x_0 правдиві нерівності $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ (рис. 6.4).



Доведення. 2. З рівності $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема й для $\varepsilon = 1$, знайдеться таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < 1.$$

За нерівністю трикутника

$$|f(x) - A| \geq |f(x)| - |A|.$$

Отже,

$$|f(x)| < |A| + 1 = C.$$

А це й означає обмеженість функції f у проколеному околі точки x_0.

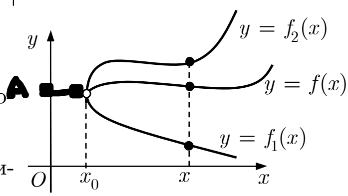


Рис. 6.4. Теорема про двох вартових

5. З рівностей $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$ випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існують два проколених околи точки x_0, в одному з яких виконано нерівності $-\varepsilon < f_1(x) - A < \varepsilon$, а в другому — нерівності $-\varepsilon < f_2(x) - A < \varepsilon$.

З нерівності $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ випливає, що

$$f_1(x) - A \leq f(x) - A \leq f_2(x) - A.$$

Отже, у меншому із двох околів виконано нерівності

$$-\varepsilon < f_1(x) - A \le f(x) - A \le f_2(x) - A < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A. \blacksquare$$

6.1.2. Однобічні границі функції

1. В означенні границі функції f уважають, що точка x прямує до точки x_0 довільним чином: як зліва так і справа (тобто залишаючись як меншою так і більшою, ніж x_0). Однак, значення границі може залежати від того, з якого боку (зліва чи справа) x прямує до x_0.

Означення 6.2 **(границі функції зліва і справа)** (рис. 6.5).

Точку A називають *границею* функції f у точці x_0 *зліва* (*лівобічною границею* в точці x_0), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які справджують нерівність

$$-\delta < x - x_0 < 0,$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Точку A називають *границею* функції f у точці x_0 *справа* (*правобічною границею* в точці x_0), якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x, які справджують нерівність

$$0 < x - x_0 < \delta,$$

відповідні значення функції

$$f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Границю зліва в точці x_0 позначають як

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x).$$

Границю справа в точці x_0 позначають як

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

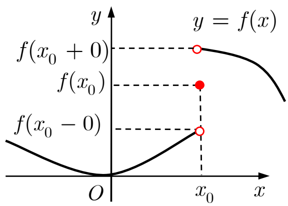


Рис. 6.5. Однобічні границі функції f у точці x_0

Границю зліва (справа) називають *однобічною границею*.

Границю, коли $x \to -\infty$, можна вважати границею справа, а границю, коли $x \to +\infty$, — границею зліва.

2. Теорема 6.1 (критерій існування скінченної границі).

Функція f має скінченну границю A в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в цій точці існують рівні числу A границі зліва і справа:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A.$$

3. Приміром, знайдімо однобічні границі функції f, де

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & x \in (-\infty;2], \\ x, & x \in (2;+\infty), \end{cases}$$

у точці $x_0 = 2$.

$$f(2-0) = \lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2}{4} = 1;$$

$$f(2+0) = \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{x\to 2+0} x = 2.$$

Оскільки однобічні границі існують, але не рівні між собою, то за критерієм існування границі в точці $x_0 = 2$ функція f границі не має (рис. 6.6).

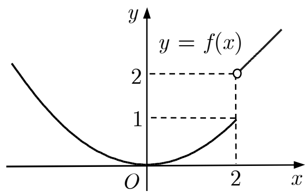


Рис. 6.6. Графік функції з різними однобічними границями в точці $x_0 = 2$

6.1.3. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

1. Розгляньмо важливі випадки границі функції.

Означення 6.3. (нескінченно малої та нескінченно великої функції).

Функцію f називають *нескінченно малою* (*н. м. ф.*), коли $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

і *нескінченно великою* (*н. в. ф.*), якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \ (\text{або } -\infty, \text{ або } +\infty).$$

З означень границі функції в точці випливає, що функція α є н. м. ф., коли $x \to \cancel{x_0}$ a, якщо

$\alpha(x)-0$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Жодна зі сталих, крім $\alpha(x) = 0$, не є нескінченно малою, якою б малою за модулем вона не була. Термін «нескінченно мала» описує характер змінювання функції, а не її значення.

2. Властивість бути нескінченно малою чи нескінченно великою є локальною. Приміром, функція $y = \dfrac{1}{x}$ є нескінченно малою, коли $x \to \infty$, і нескінченно великою, коли $x \to 0$ (рис. 6.7).

Будь-яка нескінченно велика функція в околі точки x_0 є необмеженою в околі цієї точки. Обернене твердження не правдиве.

Приміром, функція $y = x \sin x$ є необмеженою, але не є нескінченно великою, коли $x \to \infty$ (рис. 6.8).

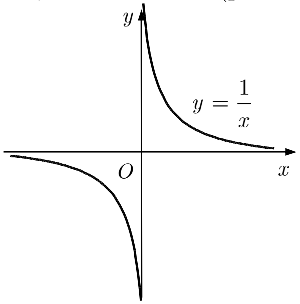


Рис. 6.7. Графік функції $y = \dfrac{1}{x}$

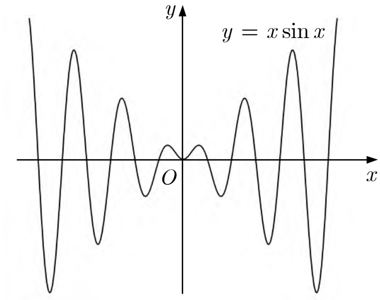


Рис. 6.8. Графік функції $y = x \sin x$

3. Властивості нескінчено малих функцій.

1. Сума (різниця) скінченної кількості нескінченно малих функцій, коли $x \to x_0$, є нескінченно малою функцією.

$x \to 1$ $\sin(x-1) \to 0$
x^2, $x \to 1$ x^2 обм. $x^2 \cdot \sin(x-1)$
н.м.

2. Добуток нескінченно малої функції, коли $x \to x_0$, на обмежену в околі точки x_0 функцію є нескінченно малою функцією.
3. Добуток скінченної кількості нескінченно малих функцій, коли $x \to x_0$, є нескінченно малою функцією.
4. Частка від ділення нескінченно малої функції, коли $x \to x_0$, на функцію, що має відмінну від нуля границю в точці x_0, є нескінченно малою функцією.
5. Якщо $\alpha(x)$ є нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$, і $\alpha(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою функцією в точці x_0, і якщо $f(x)$ є нескінченно великою функцією, коли $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою функцією в точці x_0.

Доведення. 1. Нехай $u(x)=\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)$, де $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$ — н. м. ф., коли $x\to x_0$. Отже, для будь-якого $\varepsilon>0$ можна знайти такі $\delta_1>0,\delta_2>0,\delta_3>0$, що

$$0<|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$
$$0<|x-x_0|<\delta_2\Rightarrow|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{3},$$
$$0<|x-x_0|<\delta_3\Rightarrow|\gamma(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Позначмо $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$. Тоді за нерівністю трикутника

$$0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|u(x)|=|\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|+|\gamma(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

2. Нехай функція α є н. м. ф., коли $x\to x_0$, і для деякого $M>0$ знайдеться окіл точки x_0, у якому виконується нерівність $|f(x)|<M$. Для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться проколений окіл точки x_0, у якому виконано нерівність $|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{M}$. У найменшому із двох околів виконано нерівність

$$|\alpha(x)f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon.\ \blacksquare$$

Зауважмо, що частка нескінченно малих функцій у загальному випадку не є нескінченно малою функцією.

5. З означень скінченної границі функції та нескінченно малої функції в точці випливає

Теорема 6.2 (про зв'язок функції, її границі та н. м. ф.).

Число A є границею функції f у точці x_0 тоді й лише тоді, коли

$$f(x)=A+\alpha(x),$$

де α — нескінченно мала функція, коли $x\to x_0$.

Доведення. $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. Позначмо $\alpha(x)=f(x)-A$. За означенням границі функції в точці, для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $\delta(\varepsilon)>0$, що

$$0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай $f(x)=A+\alpha(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. За означенням н. м. ф., для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $\delta(\varepsilon)>0$, що

$$0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon\Leftrightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=A.\ \blacksquare$$

6. З теореми 6.2 випливає доведення єдиності границі функції. Справді, нехай існують різні границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A_1$ та $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A_2$. Тоді

$$f(x) = A_1 + \alpha_1(x) = A_2 + \alpha_2(x) \Leftrightarrow A_1 - A_2 = \alpha_2(x) - \alpha_1(x),$$

де $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ — н. м. ф., коли $x \to x_0$. Остання рівність неможлива, оскільки ліворуч стоїть відмінна від нуля стала, у правій — н. м. ф.

6.1.4. Знаходження границі функції

Основним інструментом знаходження границі функції є

Теорема 6.3 **(про арифметичні дії над границями функцій).**

Якщо існують скінченні $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ та $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$, $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = A^n, n \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = CA$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = A^B, A > 0$.

Доведення. Доведімо, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB$. На підставі теореми 6.5 з умови

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B,$$

випливає, що

$$f(x) = A + \alpha(x), g(x) = B + \beta(x),$$

де α та β — нескінченно малі функції, коли $x \to x_0$.

Розгляньмо

$$f(x)g(x) = (A + \alpha(x))(B + \beta(x)) = AB + (A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x))$$

Оскільки $A\beta(x) + \alpha(x)B + \alpha(x)\beta(x)$ є нескінченно малою функцією послідовно за твердженнями 2, 3, 1 теореми 6.4, то на підставі теореми 6.5 маємо

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB. \blacksquare$$

6.1.5. «Визначеності» й невизначеності

1. У теоремах 6.2 та 6.3 йдеться про ситуації, у яких можна без будь-яких перетворень, відразу, знайти значення границь.

Твердження цих теорем можна узагальнити, поповнюючи перелік відповідних ситуацій, «визначеностей».

Приміром, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \infty; \quad \lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \infty \ (A \neq 0).$$

2. Але можливі й «невизначені» ситуації, які потребують перетворень функцій під знаком границі.

Приміром, добуток н. м. ф. на н. в. ф. може: бути н. м. ф., мати відмінну від нуля границю, бути н. в. ф.:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \cdot \dfrac{a}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} a = a;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot \dfrac{1}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty;$

У цій ситуації говорять про невизначеність типу $0 \cdot \infty$.

3. Усього існує 7 типів *невизначеностей*:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Зведімо всі визначені й невизначені ситуації до табл. 6.1 та 6.2.

Таблиця 6.1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
A	B	$A+B$	AB	$\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$
A	∞	∞	$\infty\ (A\neq 0)$	0
∞	B	∞	$\infty\ (B\neq 0)$	∞
0	0	0	0	$\dfrac{0}{0}$
0	∞	∞	$0\cdot\infty$	0
∞	0	∞	$0\cdot\infty$	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$
$+\infty$	$-\infty$	$\infty-\infty$	$-\infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

Таблиця 6.2

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$
$A>0$	B	A^B
$+0$	$-\infty$	$+\infty$
$+0$	$+\infty$	0
$+0$	0	0^0
$0<A<1$	$-\infty$	$+\infty$
$0<A<1$	$+\infty$	0
1	∞	1^∞
$A>1$	$-\infty$	0
$A>1$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$ або $B<0$	0
$+\infty$	0	∞^0
$+\infty$	$B>0$ або $+\infty$	$+\infty$

4. Розкрити невизначеність — означає знайти границю відповідного виразу, якщо вона існує. Розгляньмо важливий приклад розкриття невизначеності $\dfrac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_0+\dfrac{a_1}{x}+\ldots+\dfrac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0+\dfrac{b_1}{x}+\ldots+\dfrac{b_m}{x^m}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\frac{a_0+\overset{\to 0}{\dfrac{a_1}{x}}+\ldots+\overset{\to 0}{\dfrac{a_n}{x^n}}}{b_0+\underset{\to 0}{\dfrac{b_1}{x}}+\ldots+\underset{\to 0}{\dfrac{b_m}{x^m}}}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1\cdot\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<2.$$

Тому,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+2=3.$$

За теоремою 6.8 (Ваєрштраса) обмежена зверху зростаюча послідовність має границю.■

6.3. ЕКВІВАЛЕНТНІ НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ФУНКЦІЇ

6.3.1. Порівняння нескінченно малих функцій
6.3.2. Перша визначна границя
6.3.3. Друга визначна границя
6.3.4. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

Заміна під знаком границі однієї нескінченно малої на іншу, еквівалентну їй, є зручним та ефективним інструментом розкриття невизначеностей.

6.3.1. Порівняння нескінченно малих функцій

1. Нескінченно малі та нескінченно великі функції порівнюють між собою, досліджуючи їхню частку.

Нехай α та β є нескінченно малі функції, коли $x \to x_0$. Тоді:

1) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то α називають *н. м. ф. вищого порядку мализни*, ніж β, коли $x \to x_0$, і позначають

$$\alpha(x)=o(\beta(x)), x\to x_0,$$

(символ o читають як «о-мале»);

2) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\in\mathbb{R}\ (A\neq 0)$, то α та β називають *н. м. ф. однакового порядку мализни*, коли $x \to x_0$ і позначають

$$\cancel{\alpha(x)\asymp\beta(x), x}\to x_0;$$

$\alpha(x) = O(\beta(x)$

3) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то α та β називають *непорівнянними н. м. ф.*

Означення 6.6. (**еквівалентних н. м. ф.**).

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то α та β називають *еквівалентними н. м. ф.*, коли $x\to x_0$, і позначають

$$\alpha(x)\sim\beta(x), x\to x_0;$$

2. Розгляньмо приклади порівняння функцій:

1) н. м. ф. $\alpha(x)=x^2$ вищого порядку мализни, ніж н. м. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to 0$. Справді,

$\alpha = o(\beta)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0\Leftrightarrow x^2=o(x), x\to 0;$$

2) н. м. ф. $\alpha(x)=2x$ та $\beta(x)=x$ є н. м. ф. одного порядку мализни, коли $x\to 0$, оскільки

$= O(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2\Leftrightarrow 2x\sim x, x\to 0;$$

$|\sin\frac{1}{x}|\le 1$

3) н. м. ф. $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ та $\beta(x)=x$, непорівняні, коли $x\to 0$, оскільки їхнє відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\sin\dfrac{1}{x}$ не має границі в точці $x=0$.

3. **Означення 6.7** **(порядку мализни).**

Нехай α та β є нескінченно малі функції, коли $x\to x_0$. Якщо існує таке $k>0$, що

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=A\in\mathbb{R}\ \ (A\neq 0),$$

то н. м. ф. α називають функцією k-*го порядку мализни* щодо н. м. ф. β, коли $x\to x_0$, і пишуть

$$\alpha(x)\sim A(\beta(x))^k, x\to x_0.$$

Функцію $A(\beta(x))^k$ називають *головною частиною* функції α щодо β, коли $x\to x_0$.

Для нескінченно великих функцій говорять про *порядок росту*.

4. Приміром, функція $\alpha(x)=3x^2+2x^5$, має:

1) порядок мализни $k=2$ щодо н. м. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to 0$, і

2) порядок росту $k=5$ щодо н. в. ф. $\beta(x)=x$, коли $x\to\infty$, оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+2x^5}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(3+2x^3\right)=3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+2x^5\sim 3x^2, x\to 0;$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x^5}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^3}+2\right)=2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+2x^5\sim 2x^5, x\to\infty.$$

Функція $3x^2$ є головною частиною функції $\alpha(x)=3x^2+2x^5$ щодо функції $\beta(x)=x$, коли $x\to 0$.

Функція $2x^5$ є головною частиною функції $\alpha(x)=3x^2+2x^5$ щодо функції $\beta(x)=x$, коли $x\to\infty$.

5. Властивості еквівалентних н. м. ф.

1. Границя частки двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо кожну з них замінити на еквівалентну їй н. м. ф.
2. Різниця двох еквівалентних нескінченно малих функцій є нескінченно малою функцією вищого порядку мализни, ніж кожна з них.
3. Сума скінченної кількості нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку найнижчого порядку мализни (головній частині всієї суми).
4. Сума скінченної кількості нескінченно великих функцій різних порядків еквівалентна доданку найвищого порядку росту (головній частині всієї суми).

Доведення. 1. Нехай f та h — н. м. ф. і $f(x)\sim g(x)$, коли $x\to x_0$. Тоді
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}.$$
2. Нехай f,g — н. м. ф. і $f(x)\sim g(x)$, коли $x\to x_0$. Тоді
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)=1-1=0\Leftrightarrow f(x)-g(x)=o(f(x)), x\to x_0.$$
3. Нехай f,g — н. м. ф. і $f(x)=o(g(x))$, коли $x\to x_0$. Тоді
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)=1+0=1\Leftrightarrow f(x)+g(x)\sim f(x), x\to x_0.\ \blacksquare$$

6. Заміну суми нескінченно малих функцій (нескінченно великих функцій) її головною частиною називають *відкиданням н. м. ф. вищих порядків мализни* (*н. в. ф. нижчих порядків росту*).

Приміром, для функції $f(x) = ax^m + bx^n, m < n.$

$$f(x) \sim ax^m, x \to 0;$$

$$f(x) \sim bx^n, x \to \infty.$$

Тоді,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}.$$

6.3.2. Перша визначна границя

1. Якщо кут x виражений у радіанах, то правдива *перша визначна границя*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Доведення. Спершу доведімо нерівність

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Припустімо, що кут $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. З рисунку 6.11 бачимо, що

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{сек.}OAB} < S_{\Delta OAC}.$$

Оскільки розглянуті площі рівні відповідно

$$\frac{1}{2}\sin x, \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

то

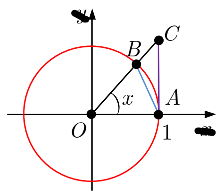


Рис. 6.11. Перша визначна границя

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Розділивши всі члени цієї рівності на $\sin x > 0$, дістанемо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ця нерівність буде правдивою і для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ завдяки парності функцій $y = \cos x$ та $y = \frac{\sin x}{x}$.

З нерівності $|\sin x| < |x|$ випливає, що

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Звідки

$$\overset{\to 1}{\lim_{x\to 0}\cos x} < \underset{=1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} < \lim_{x\to 0} 1$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2} = 1 - 0 = 1.$$

Оскільки $f_1(x) = \cos x \to 1$ та $f_2(x) = 1 \to 1$, коли $x \to 0$, то за теоремою про проміжну функцію одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \blacksquare$$

2. Наслідками першої визначної границі є такі границі:

1) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;}$ 2) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2};}$

3) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1;}$ 4) $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.}$

Доведення. 1. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1. \blacksquare$

6.3.3. Друга визначна границя

1. Узагальненням означення числа e є *друга визначна границя*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Доведення її базується на нерівності

$n \le x < n+1$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, x \ge 1,$$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$

де $n = [x]$ — ціла частина числа x, і теоремі 6.1.5 про двох вартових.

Покладаючи $y = \dfrac{1}{x}$ у другій визначній границі, дістаємо

$x \to \infty$

$n = [x] \to \infty$

$$\boxed{\lim_{y\to 0}(1 + y)^{1/y} = e.}$$

Доведення. 1. Доведімо твердження для $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Нехай $x \ge 1$ і $[x] = n$, тоді

$$n \le x < n + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n};$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Якщо $x \to +\infty$, то $n \to \infty$. Отже,

1^{∞}

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\dfrac{1}{n+1}}_{\to 0}\right)}=\frac{e}{1}=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

За теоремою 6.1.5 про проміжну функцію маємо, що

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

2. Доведімо тепер, що

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Замінюючи x на $(-y)$, маємо

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_{=e}\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot 1=e.\ \blacksquare$$

2. Наслідками другої визначної границі є такі границі:

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a};}$ 2) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;}$

3) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a;}$ 4) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1;}$

5) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu.}$

Зауважмо, що формули, у які входять показникова функція $y=a^x$ чи логарифмічна $y=\log_a x$ мають найпростіший вигляд саме для основи $a=e$.

6.3.4. Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

1. З визначних границь і наслідків з них випливає така таблиця еквівалентностей:

1. $\sin x\sim x, x\to 0.$

6. $\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}, x\to 0.$

2. $\operatorname{tg} x\sim x, x\to 0.$

7. $\ln(1+x)\sim x, x\to 0.$

3. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, x \to 0.$

4. $\arcsin x \sim x, x \to 0.$

5. $\operatorname{arctg} x \sim x, x \to 0.$

8. $a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0.$

9. $e^x - 1 \sim x, x \to 0.$

10. $(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x, x \to 0.$

Н. м. ф., що стоять у правих частинах виписаних еквівалентностей, є головними частинами функцій, що стоять у лівих частинах, коли $x \to 0$.

2. За допомогою еквівалентностей можна одержати **формулу розкриття** однієї зі степенево-показникових невизначеностей:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}.}$$

Доведення. Перетворімо вираз під знаком границі:

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln(1+(u(x)-1))} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln(1+(u(x)-1))} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)}. \blacksquare$$

Приміром,

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-1/2}.$$

3. З таблиці еквівалентностей і п. 2 теореми 6.9 випливають *асимптотичні рівності*. Приміром,

$$\sin x = x + o(x), x \to 0,$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \to 0.$$

4. Формули таблиці еквівалентностей залишаться правильними, якщо x замінити на будь-яку н. м. ф. $u(x)$, коли $x \to x_0$. Приміром,

$$\sin(5(x-1)^2) \sim 5(x-1)^2, x \to 1;$$
$$\sin u \sim u, u \to 0,\ x \to 1$$

5. Обчислюючи границі, у добутку та частці під знаком границі можна замінювати н. м. ф. на еквівалентну їй н. м. ф.

У різниці (сумі) еквівалентних нескінченно малих функцій під знаком границі **не можна** замінювати н. м. ф на еквівалентні. У цьому разі перетворюють різницю (суму) на добуток (частку) або використовують асимптотичні рівності.

6.4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

6.4.1. Неперервність функції в точці
6.4.2. Точки розриву функції
6.4.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Неперервні функції є основним класом функцій, які розглядають у математичному аналізі. Уявлення про неперервну функцію як функцію, графік якої можна накреслити не відриваючи олівця від паперу, є лише початковим уявленням, що потребує уточнення.

6.4.1. Неперервність функції в точці

1. Нехай функцію f означено в деякому околі точки x_0.

Означення 6.8 (функції, неперервної в точці).

Функцію f називають *неперервною в точці* x_0, якщо існує границя функції f, коли $x \to x_0$, і ця границя дорівнює значенню функції в точці:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Отже, функція f є неперервною в точці x_0, якщо виконано умови:

1) вона означена в деякому околі точки x_0;

2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Оскільки $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то останню рівність можна переписати так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right),$$

що дозволяє для неперервних функцій переходити до границі під знаком функції.

3. З означення неперервної в точці x_0 функції $y = f(x)$ випливає, що

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0.$$

Позначмо *приріст аргументу* в точці x_0 як

$$\boxed{\Delta x = x - x_0}$$

і відповідний йому *приріст функції* f як

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).}$$

Тоді умову неперервності можна переписати як

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.}$$

Функція f є *неперервною* в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

4. Властивості функцій, неперервних у точці.

1. Функція, неперервна в точці, обмежена в деякому околі цієї точки.
2. Якщо функція f неперервна в точці x_0, то існує окіл точки x_0, у якому функція f має знак числа $f(x_0)$.
3. Якщо функції f_1 та f_2 неперервні в точці x_0 і виконано нерівність $f_1(x_0) > f_2(x_0)$, то існує окіл точки x_0, у якому $f_1(x) > f_2(x)$.
4. Якщо функції f та g неперервні в точці x_0, то й функції $f \pm g, fg$ та $\dfrac{f}{g}$ (у разі, якщо $g(x_0) \neq 0$) неперервні в точці x_0.

5 (*неперервність складеної функції*). Нехай функція g неперервна в точці x_0, а функція f неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, тоді складена функція $f(g(x))$ неперервна в точці x_0.

Властивості функцій, неперервних у точці, випливають з означення неперервності і відповідних властивостей границі функції в точці.

Доведення. 4. Доведімо, приміром, неперервність функції fg в точці x_0.

З неперервності функцій f та g в точці x_0 випливає, що

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Тоді

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0).$$

Отже, функція fg неперервна в точці x_0.

5. На підставі неперервності f у точці $y_0 = g(x_0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma > 0 \ \forall y : \left| y - y_0 \right| < \sigma \Rightarrow \left| f(y) - f(y_0) \right| < \varepsilon.$$

Унаслідок неперервності функції g в точці x_0 для знайденого σ маємо

$$\exists \delta > 0 \ \forall x : \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| g(x) - g(x_0) \right| < \sigma.$$

З цих нерівностей випливає, що для всіх x, які справджують нерівність $\left| x - x_0 \right| < \delta$, виконано нерівність

$$\left| f(g(x)) - f(g(x_0)) \right| < \varepsilon,$$

тобто функція $f(g)$ неперервна в точці x_0. ■

5. На властивості 5 ґрунтується метод заміни змінної для знаходження границі неперервної функції:

якщо функція $y = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(y)$ неперервна в точці $y_0 = g(x_0)$, то

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y), \quad y = g(x).}$$

6. Теорема 6.6 (про неперервність елементарних функцій).

Елементарні функції неперервні в усіх точках, де вони означені.

Доведення. Доведімо неперервність деяких функцій.

1. Стала функція. Функція $f(x) = c = \text{const}, x \in X$, неперервна в будь-якій точці $x_0 \in X$, оскільки

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} c = c = f(x_0).$$

2. Многочлени та раціональні функції. Доведімо неперервність функції $f(x) = ax^k$ в будь-якій точці x. За біноміальною формулою Ньютона

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x\to 0} (a(x+\Delta x)^k - ax^k) =$$
$$= a \lim_{\Delta x\to 0} (x^k + C_k^1 x^{k-1}\Delta x + C_k^2 x^{k-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^k - x^k) =$$
$$= a \lim_{\Delta x\to 0} (C_k^1 x^{k-1}\Delta x + C_k^2 x^{k-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^k) = 0.$$

Отже, функція $f(x) = ax^k$ неперервна в будь-якій точці x. Тоді многочлен

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

де $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0,n}$, неперервна функція в будь-якій точці x як сума неперервних функцій вигляду $a_{n-k}x^k, k = \overline{0,n}$.

Раціональна функція

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ — многочлени степенів n та m відповідно, у всіх точках, де многочлен $Q_m(x)$ відмінний від нуля, неперервна як відношення двох неперервних функцій.

3. Тригонометричні функції $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$. З нерівності (яка випливає з доведення першої визначної границі)

$$\left|\sin x\right| \le \left|x\right|$$

випливає, що

$$0 \le \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le \frac{\left|\Delta x\right|}{2}.$$

Маємо для будь-якого x_0

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\sin x=\lim_{\Delta x\to 0}(\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=\left|\begin{matrix}\text{добуток н.м.ф.}\\ \text{на обмежену}\end{matrix}\right|=0;$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\cos x=\lim_{\Delta x\to 0}(\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)=\left|\begin{matrix}\text{добуток н.м.ф.}\\ \text{на обмежену}\end{matrix}\right|=0.$$

Тобто функції $f(x)=\sin x$ та $f(x)=\cos x$ — неперервні в будь-якій точці $x\in\mathbb{R}$.

Функція $f(x)=\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ неперервна в точках, де $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$, тобто в точках де $\cos x\neq 0$; функція $f(x)=\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ неперервна в точках, де $x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}$ (як частка неперервних функцій).■

6.4.2. Точки розриву функції

1. Точку, у якій функція f неперервна, називають *точкою неперервності* функції f.

Теорема 6.7 **(критерій неперервності функції в точці).**

Функція f, неперервна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли існують $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ і

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0).$$

2. Розгляньмо функцію f, означену в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

Означення 6.9 **(точки розриву).**

Точку x_0 називають *точкою розриву* функції f, якщо: функція f або не означена в точці x_0, або f означена в цій точці, але не є в ній неперервною.

Розрив функції в точці x_0 геометрично означає «розрив» графіка функції в цій точці.

3. Нехай x_0 — точка розриву функції f (тобто в ній порушено принаймні одну з умов означення 6.8).

Означення 6.10 (типів точок розриву).
Якщо в точці розриву x_0 існують обидві скінченні однобічні границі функції $f(x_0-0)$ та $f(x_0+0)$, то її називають *точкою розриву 1-го роду* (*точкою скінченного розриву*), а величину

$$\delta = f(x_0+0) - f(x_0-0)$$

називають *стрибком функції*.
У разі, якщо в точці розриву x_0 функція f не має хоча б однієї однобічної границі або має нескінченну границю, то точку x_0 називають *точкою розриву 2-го роду*.

Можлива детальніша класифікація розривів.

А. Якщо стрибок функції в точці розриву 1-го роду x_0 дорівнює нулю, то точку x_0 називають *точкою усувного розриву* (рис. 6.12).

Усувний розрив можна «усунути», змінюючи значення функції в точці x_0 (доозначуючи функцію f у точці x_0), тобто утворюючи нову функцію

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ f(x_0 \pm 0), & x = x_0, \end{cases}$$

що збігається з функцією f скрізь, окрім точки x_0. Тоді функція g буде вже неперервною в цій точці (рис. 6.13).

Б. Якщо стрибок функції в точці розриву 1-го роду x_0 не дорівнює нулю, то точку x_0 називають *точкою неусувним розривом* (рис. 6.14).

В. Якщо в точці розриву 2-го роду x_0 існують обидві однобічні границі, але хоча б одна з них нескінченна, то точку x_0 називають *точкою нескінченного розриву* (*полюсом*). У таких точках графік функції має вертикальну асимптоту $x = x_0$ (рис. 6.15).

Г. Якщо в точці розриву 2-го роду x_0 не існує хоча б одна з однобічних границь, то точку x_0 називають *точкою істотного розриву* (рис. 6.16).

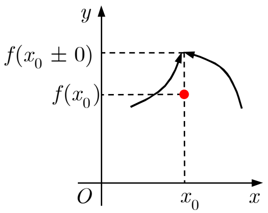


Рис. 6.12. Точка розриву 1-го роду (усувного)

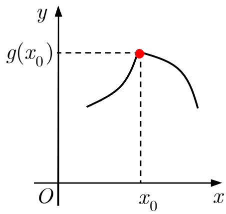


Рис. 6.13. Усунення розриву

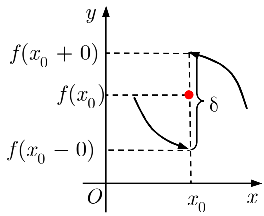


Рис. 6.14. Точка розриву 1-го роду (неусувного)

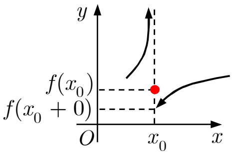


Рис. 6.15. Точка розриву 2-го роду (нескінченного)

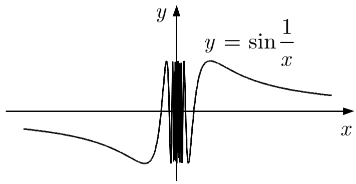


Рис. 6.16. Точка розриву 2-го роду (істотного)

4. Приміром, для функції

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

точка $x_0 = 0$ є точкою розриву.

Обчислімо однобічні границі в точці $x_0 = 0$:

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to +0} 1 = 1;$$
$$f(-0) = \lim_{x \to -0} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \to +0} (-1) = -1.$$

Оскільки в точці $x_0 = 0$ існують скінченні, не рівні між собою, однобічні границі, то це точка розриву 1-го роду, неусувного (рис. 6.17), із стрибком

$$\delta = f(+0) - f(-0) = 1 - (-1) = 2.$$

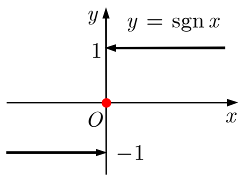


Рис. 6.17. Графік функції $y = \operatorname{sgn} x$

6.4.3. Властивості функцій, неперервних на відрізку

1. Функцію f у точці x_0 називають *неперервною справа*, якщо $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, і *неперервною зліва*, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

Означення 6.11 (функції неперервної на відрізку).

Функцію f називають *неперервною* в інтервалі $(a;b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Функцію f називають *неперервною* на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна в інтервалі $(a;b)$ і в точці a неперервна справа, а в точці b неперервна зліва.

Множину всіх неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій позначають $C[a;b]$.

2. Теорема 6.8 (Ваєрштраса, про обмеженість функції,).

Функція f, неперервна на відрізку $[a;b]$, обмежена на ньому (рис. 6.18).

Якщо функція f неперервна в інтервалі (або на півінтервалі $[a;b)$, або на півінтервалі $(a;b]$), то f не обов'язково обмежена на ньому. Приміром, функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ неперервна на півінтервалі $(0;1]$, але не є обмежена на ньому, оскільки $\dfrac{1}{x} \to +\infty$, коли $x \to +0$.

3. Розгляньмо функцію f, обмежену на множині X.

Означення 6.12 (найменшого і найбільшого значень функції).

Точну верхню межу M значень неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f називають *найбільшим значенням* функції на цьому відрізку і позначають

$$\max_{[a;b]} f(x) = \sup_{x\in[a;b]} f(x) = M.$$

Точну нижню межу m значень неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f називають *найменшим значенням* функції на цьому відрізку і позначають

$$\min_{[a;b]} f(x) = \inf_{x\in[a;b]} f(x) = m.$$

Теорема 6.9 (Ваєрштраса, про найбільше та найменше значення).

Неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f досягає на цьому відрізку свого найбільшого значення M та найменшого значення m (див. рис. 6.18).

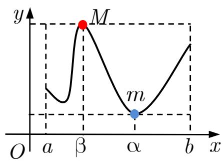


Рис. 6.18. Теореми Ваєрштраса

4. Якщо функція f неперервна в інтервалі $(a;b)$, то вона може й не досягати на ньому найбільшого чи найменшого значення. Приміром, функція $f(x) = x^2, x \in (-1;1)$. Справді, $\sup\limits_{x\in(-1;1)} x^2 = 1$, але в жодній точці інтервалу $(-1;1)$ функція не досягає цього значення. Отже, функція $f(x) = x^2, x \in (-1;1)$, не досягає в цьому інтервалі свого найбільшого значення. Найменше значення $m = \inf\limits_{x\in(-1;1)} x^2$ досягається в точці $x = 0$.

5. Теорема 6.10 (Больцано — Коші, про нулі функції).

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває на його кінцях значень $A = f(a)$ і $B = f(b)$ різних знаків, то всередині інтервалу $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, для якої $f(c) = 0$ (рис. 6.19).

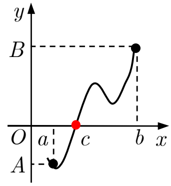


Рис. 6.19. Теорема про нулі функції

Доведення. Нехай для визначеності $f(a) = A < 0, f(b) = B > 0$. Поділімо відрізок $[a;b]$ точкою x_0 навпіл. Якщо $f(x_0) = 0$, то теорему доведено, а якщо $f(x_0) \neq 0$, то візьмімо ту половину $[a_1;b_1]$ відрізка $[a;b]$, для якої $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$, тобто $a_1 = a, b_1 = x_0$ або $a_1 = x_0, b_1 = b$,

Знову поділімо вибраний відрізок $[a_1;b_1]$ навпіл точкою x_1. Якщо $f(x_1) = 0$, то шукану точку $c = x_1$ знайдено. Якщо ж $f(x_1) \neq 0$, то візьмімо ту половину $[a_2;b_2]$ відрізка $[a_1;b_1]$, для якої $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$.

Продовживши ці міркування, або знаходимо через скінченну кількість кроків точку $c \in (a;b)$, що $f(c) = 0$, або існує послідовність *стяжних вкладених* відрізків $[a_n;b_n], n \in \mathbb{N}$, тобто відрізків, які справджують умови:

$$[a_{n+1};b_{n+1}] \subset [a_n;b_n] \Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n; \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$$

для яких $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$.

Зі щільності множини дійсних чисел (теореми Кантора) випливає, що знайдеться єдина точка $c \in (a;b)$, спільна для всіх цих відрізків, причому

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ураховуючи неперервність функції f і спрямувавши в нерівностях $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ n до ∞, одержимо, що

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leq 0, \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \geq 0,$$

тобто $f(c) = 0$. ■

Вимога неперервності функції f на відрізку $[a;b]$ суттєва: функція, що має розрив хоча б в одній точці, може перейти від від'ємного значення до додатного і не набуваючи нульового значення. Приміром, функція (рис. 6.20)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

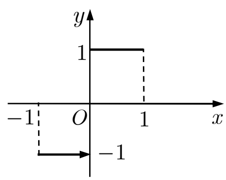


Рис. 6.20. Графік функції, яка має розрив в одній точці

6. Теорема 6.11 (Больцано — Коші, про проміжні значення).

Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, $f(a) = A, f(b) = B$, і C — будь-яке число, що лежить між A та B, то в інтервалі $(a;b)$ знайдеться точка c, у якій (рис. 6.21)

$$f(c) = C.$$

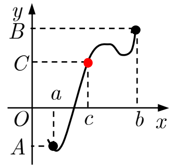


Рис. 6.21. Теорема про проміжні значення функції

Доведення. Нехай для визначеності $A < B$. Тоді для функції $\varphi(x) = f(x) - C$ маємо:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0;$$
$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Отже, функція $\varphi(x)$ на кінцях відрізку $[a;b]$ має різні знаки. За теоремою Больцано — Коші про нулі функції існує така точка $c \in (a;b)$, що

$$\varphi(c) = f(c) - C = 0 \Rightarrow f(c) = C. \blacksquare$$

З того що функція означена на відрізку і набуває всіх своїх проміжних значень на ньому ще не випливає її неперервність на цьому відрізку (рис. 6.22).

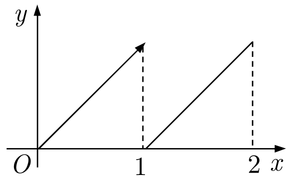


Рис. 6.22. Приклад розривної функції, що набуває всі проміжні значення

8. Теорема 6.12 (про неперервність оберненої функції).

Якщо функція f зростає (спадає) і неперервна на відрізку $[a;b]$, то обернена функція f^{-1} зростає (спадає) і неперервна на відрізку $[A;B]$, де $[A;B]$ — множина значень функції f.

З неперервності та строгої монотонності функції $\sin x$ на відрізку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x$ на $[0;\pi]$, $\operatorname{tg} x$ в інтервалі $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{ctg} x$ в $(0;\pi)$ випливає неперервність обернених тригонометричних функцій $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ та $\operatorname{arcctg} x$ у їхніх областях означення.