Тема 2. Загальна постановка задачі лінійного програмування та її особливості

Лінійне програмування – це наука про методи дослідження та знаходження найбільших та найменших значень лінійної функції, на змінні якої покладено лінійні обмеження.

Загальну задачу лінійного програмування (ЗЛП) визначають наступним чином:

Потрібно знайти такий план $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_j^*, ..., x_n^*)$, *за якого досягається максимум (мінімум) функції*

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n \to \max(\min) \quad (1)$$

і який задовольняє системі лінійних обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n \{\le, =, \ge\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n \{\le, =, \ge\} b_2 \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \{\le, =, \ge\} b_i \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n \{\le, =, \ge\} b_m \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n} \quad (3)$$

Розв’язок x^* називається *розв’язком задачі* або ***оптимальним планом***.

Функція $F(x)$ називається **цільовою функцією**, яка відображає деякий економічний показник, за яким обирається найкращий план.

Система обмежень (2)-(3) визначає множину точок, яку називають **множиною припустимих розв’язків (МПР)** для даної задачі.

Будемо позначати : $\Omega = \left\{ x \in R^n : (2) \text{та } (3) \right\}$

Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$, координати якого задовольняють системі обмежень (2)-(3), називають **припустимим розв’язком ЗЛП.**

Таким чином, ***множину припустимих розв’язків*** (МДР) ЗЛП утворює сукупність усіх припустимих розв’язків (планів) ЗЛП.

x^* – це ***найкращий план*** з множини припустимих розв’язків ***з точки зору цільової функції*** $F(x)$.

<u>**Форми представлення ЗЛП**</u>

Задачу лінійного програмування (ЗЛП) представляють у різних формах: у ***вигляді сум, векторній та матричній***:

ЗЛП зручно записувати за допомогою знака суми. Вирази (1)-(3) можна подати, відповідно, так:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min), \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\geq, =, \leq\} b_i \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{5}$$

$$x_j \geq 0,\ (j = \overline{1, n}). \tag{6}$$

<u>Матрична форма запису ЗЛП</u>

$$F = CX^T \to \max\ (\min), \tag{7}$$

$$AX^T \{\leq, =, \geq\} B, \tag{8}$$

$$X \geq 0. \tag{9}$$

де:

$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ є матрицею коефіцієнтів при змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$;

$X^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець змінних;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матриця-стовпець вільних членів;

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ - матриця-рядок коефіцієнтів при змінних у цільовій функції (1).

Векторна форма запису ЗЛП

$$F = (C, X) \to \max\ (\min) \tag{10}$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n \{\le, =, \ge\} B, \tag{11}$$

$$X \ge 0. \tag{12}$$

де

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ - вектор змінних,

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ - вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції (1)

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots,\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. ***Канонічна форма ЗЛП***

Вважається, що ЗЛП задано у канонічній формі, якщо виконуються наступні ***вимоги****:*

1). Цільова функція $F(x)$ прагне до мінімуму: $F(x) \to \min$

2). Всі обмеження системи (2) мають бути рівностями.

3). На всі змінні задачі накладаються вимоги невід’ємності.

Тобто ЗЛП у канонічній формі має наступний вигляд:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Приведення ЗЛП до канонічної форми:

1. Якщо $F(x) \to \max$, то вводять функцію $F'(x) = -F(x) \to \min$

2. Всі обмеження в системі повинні бути рівностями. Якщо:

а) в системі маємо обмеження $\sum a_{ij} x_j \ge b_i$, то для того щоб провести таке обмеження до канонічного виду необхідно ввести додаткову змінну, зі знаком «–» $\sum a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i$.

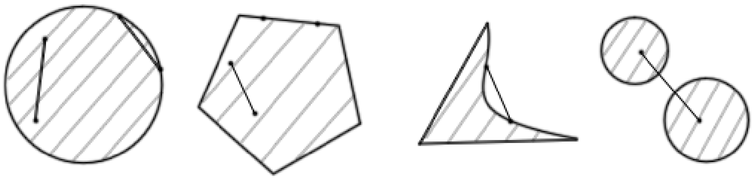
б) якщо обмеження $\sum a_{ij} x_j \le b_i$, то введемо додаткову змінну зі знаком «+» $\sum a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i$

3. Нехай x_j – змінна, на яку не покладено умову невід’ємності, тоді замінимо цю змінну на різницю двох нових невід’ємних змінних наступним чином: $x_j = x_j^1 - x_j^2$, при цьому $x_j^1, x_j^2 \ge 0$.

3. Властивості множини припустимих розв'язків Ω в ЗЛП

Розглянемо деякі означення.

Множина точок називається ***опуклою***, якщо з будь-якими двома своїми точками вона містить і всі точки відрізка, що їх з'єднує.



1 2 3 4

Рис.1. Приклади множин точок: 1,2 – опуклі множини;
3,4 – не опуклі множини

Якщо розглядається відрізок X_1X_2, то будь-яку точку цього відрізку можна представити у вигляді:

$$X = \lambda \cdot X_1 + (1-\lambda) \cdot X_2, \qquad \text{де } \lambda \text{ – це деяке число, } \lambda \in [0;1].$$

Ця формула визначає *лінійну опуклу комбінацію* точок X_1 і X_2.

З цього виплива<u>є</u>, що множина точок є *опуклою*, якщо вона з двома будь-якими своїми точками містить також і їх лінійну опуклу комбінацію.

Гіперплощиною n-вимірного простору називається множина точок, яка задовольняє рівнянню: $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$.

Гіперплощина є простором, розмірність якого на одиницю менше за n .

Напівпростором n-вимірного простору називається множина точок, яка задовольняє нерівності: $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$. Очевидно, що будь-яка гіперплощина є перетином двох на півпросторів.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b \end{cases} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b.$$

Багатогранною множиною називається множина точок, яка є перетином напівпросторів.

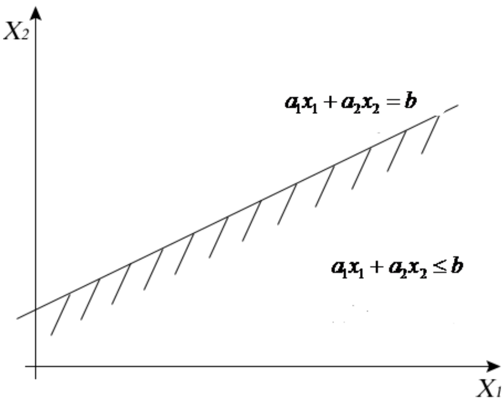


Рис. 2. Приклад гіперплощини та напівпростору для n=2

Властивості МПР <u>задачі лінійного програмування:</u>

1) МПР є ***багатогранною*** множиною;

2) МПР – це ***опукла множина***;

3) МПР як опуклій множині належать всі лінійні комбінації будь-якої кількості її точок.

Кутова точка X – це точка, яку неможна представити у вигляді лінійної опуклої комбінації двох різних відмінних від неї точок.

Приклад: вершини багатокутника є кутовими точками.

4) множина припустимих розв'язків є опуклою комбінацією її кутових точок.

Основна теорема лінійного програмування

1. Якщо цільова функція ЗЛП набуває екстремального значення на МПР, то вона набуває його у кутовій точці.

2. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш, ніж в одній точці, то вона набуває його також в будь-якій їх лінійній комбінації.

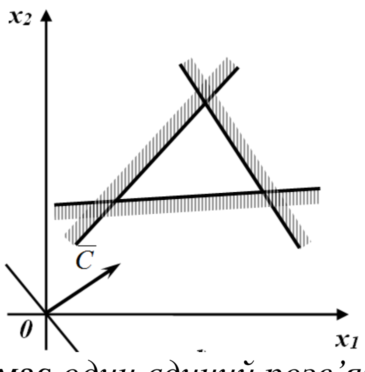
З цього випливає твердження–відповідь на питання:

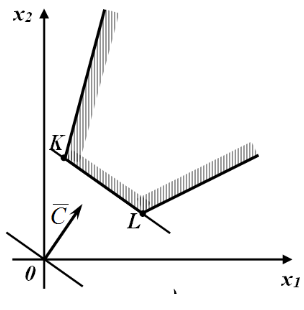
скільки розв'язків може мати задача лінійного програмування (ЗЛП)?:

1) ЗЛП може *не мати розв'язків*:

а) у «поганому сенсі» – якщо МПР порожня ($\Omega \in \varnothing$).

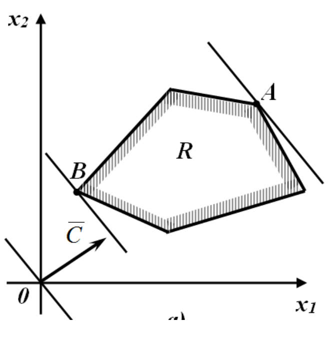
б) у «доброму сенсі» – якщо цільова функція не обмежена на МПР

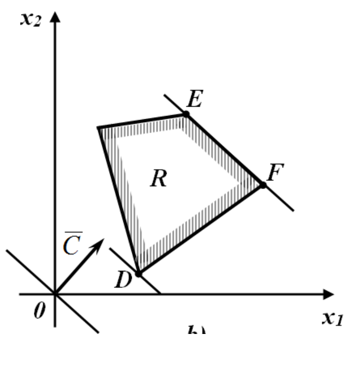




2) має *один єдиний розв'язок*

3) має *нескінченну кількість розв'язків*





Теорема про структуру координат кутової точки:

якщо система обмежень ЗЛП містить ***m*** *лінійно незалежних* обмежень-рівностей, то кутова точка має не більше, ніж *m* ненульових координат.

Кутові точки називаються ***базисними точками (або планами)***.

Якщо у базисної точки немає від'ємних координат, то вона називається **опорною.**

Опорними базисними планами називаються плани (точки), що мають не більше, ніж *m* додатніх координат (компонент).

Якщо опорний базисний план містить менше за *m* додатніх координат, то від називається ***виродженим*** опорний базисний план