

О. К. АБЛЕСІМОВ

# ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ



Освіта України

• •



Я

« 2019 »

УДК 681.5(075.8)  
ББК з965.4я7  
А154

*Рецензенти:*

**В.М. Уваров** – д-р техн. наук, проф.,  
член-кореспондент НАН України,  
лауреат Держ. премії України в галузі науки і техніки  
(Інститут металофізики НАН України)

**Є. Є. Александров** – д-р техн. наук, проф.,  
лауреат Держ. премії України в галузі науки і техніки  
(Національний технічний університет України  
«Харківський політехнічний інститут»)

*Затверджено на засіданні  
навчально-методичної редакційної ради  
Інституту інформаційно-діагностичних систем НАУ  
(протокол № 8 від 04.03.2019 р.)*

**А154 Аблесімов О. К.**

Теорія автоматичного керування : навчальний посібник / О. К. Аблесімов  
– К. : «Освіта України», 2019. – 270 с.

Викладено загальні питання лінійної теорії автоматичного керування і регулювання; дані методи математичного опису лінійних систем у часовій і частотній областях, основи структурного моделювання та аналізу систем, статика і динаміка процесів керування; розглянуті принципи побудови, основні режими і характеристики систем автоматичного керування; представлені методи аналізу і синтезу систем, що знаходяться під впливом випадкових зовнішніх збурень; висвітлені питання оцінки та забезпечення стійкості систем, визначення областей стійкості систем стабілізації інерційних об'єктів керування.

З метою закріплення теоретичних положень і привиття практичних навичок досліджень у посібник включено лабораторний практикум.

Призначений для студентів, які навчаються за напрямом 6.050202 „Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”. Може бути корисний також студентам, які вивчають питання кібернетики.

ISBN 978-617-7111-33-6

**УДК 681.5(075.8)  
ББК з965.4я7**

© О.К. Аблесімов, 2019 ©

«Освіта України», 2019

.....	6
<b>1</b>	
.....	8
<b>1</b>	
.....	9
1.1	9
1.2	-
.....	14
1.3	23
1.4	28
1.5	42
<b>2</b>	
.....	44
2.1	44
.....	44
2.2	47
2.3	51
2.4	55
2.5	57
2.6	59
2.7 ( )	61
2.8	63
2.9	65
2.10	70
2.11	74
2.12	77
2.13	79
2.14	81
2.15	82
2.16	84

<b>3</b>		87
3.1	.....	87
3.1.1	.....	87
3.1.2	.....	89
3.1.3	.....	93
3.1.4	.....	101
3.1.5	.....	104
3.2	.....	106
3.3	.....	108
3.3.1	', .....	108
3.3.2	', .....	110
3.3.3	', .....	111
3.3.4	- , .....	111
3.3.5	, .....	113
3.3.6	', .....	116
3.4	.....	118
3.5	', .....	121
3.6	', .....	126
.....		126
3.7	', .....	128
3.8	.....	130
3.9	', .....	132
3.10	.....	134
<b>2</b>	.....	136
<b>4</b>	.....	137
4.1	.....	137
4.2	.....	143
4.3	- .....	147
4.4	- .....	154
.....		154

4.5	.....	158
4.6	.....	162
<b>5</b>	.....	164
5.1	.....	164
5.2	.....	166
5.3	.....	170
5.3.1	.....	170
5.3.2	— .....	172
5.4	.....	174
5.4.1	.....	174
5.4.2	.....	181
5.5	.....	188
5.6	.....	190
5.7	.....	192
5.8	.....	194
5.9	—	
,	.....	197
5.10	.....	203
	.....	205
.	1	206
	<b>MATL</b> .....	
.	2	230
.	3	238
.	4	—
	.....	243
.	5	—
	.....	248
.	6	.....
.	7	.....
	.....	258
.	8	263
.	9	—
	.....	266
<b>I</b>	.....	268



# H

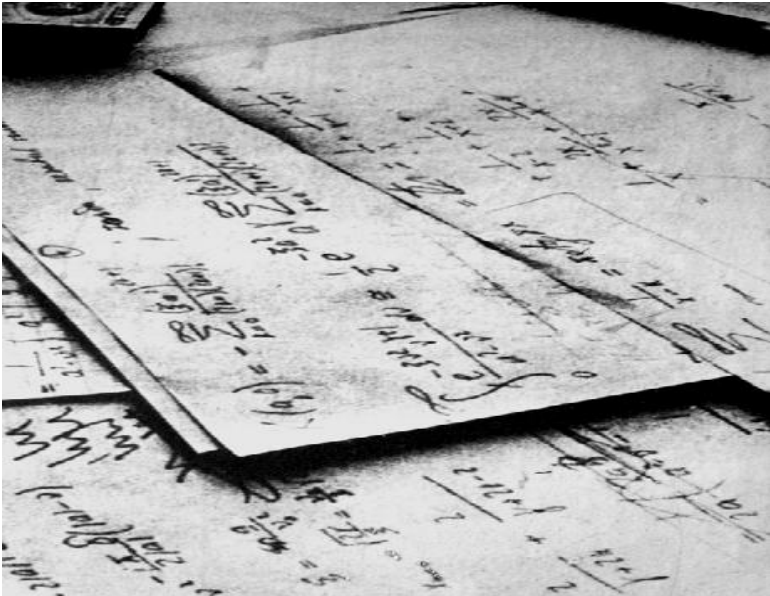
( ) . ( ) .

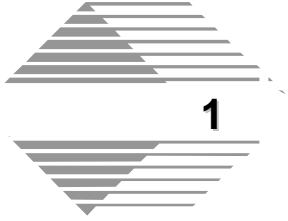
6.050202

« »

>> << >> << >> . <<  
 << -  
 >> -  
 , , , , , , , , , , ,  
 , , , , , , , , , , ,  
 << >> -  
 , , , , , , , , , , ,  
 , , , , , , , , , , ,  
 , , , , , , , , , , ,







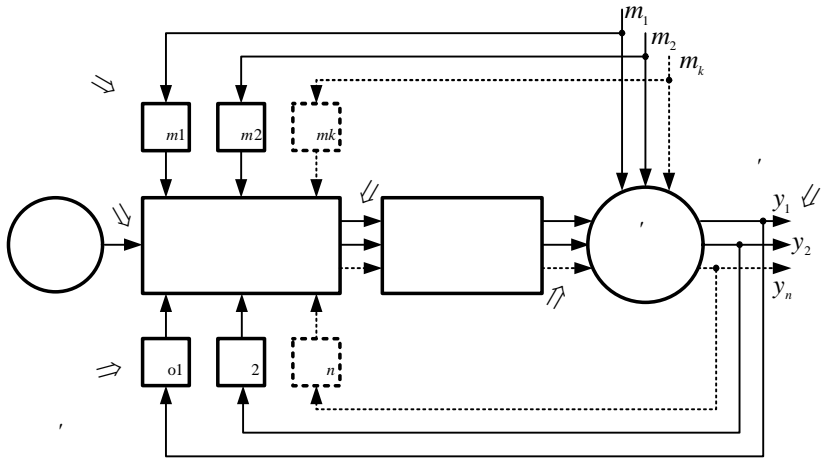
1.1

---

# III

, - , - , , - , . -  
 . , - , -  
 , , - ,  
 ( ), -  
 , -  
 , , -  
 , , -  
 , - , -  
 , , ,  
 , -  
 1. , -  
 , , -  
 . -  
 . -  
 . -  
 2. , -  
 , -  
 , -  
 , -  
 . -  
 3. , -  
 , -  
 , -





. 1.1.

,  $1, 2, \dots, n$

$y_1, y_2, \dots, y_n$

$m_1, m_2, \dots, m_k$

$m_1, m_2, \dots, m_k$

kybernetické –

· , « - » -  
, , -  
· « - », ( ). -  
· - ( *autos -* ). -  
- - , -  
· , -  
· , ( ). -  
· - , -  
· , -  
· , -  
( ), -  
· -  
( ). -

, , -  
 (« ») . -  
 , , -  
 . -  
 , , -  
 . -

1.2



**C**

. -  
 , -  
 . -  
 . 1765 . .. -  
 . 1784 . -  
 XIX . -  
 , -  
 . -  
 1868 . ' -  
 « » . -  
 , « -  
 ». -  
 « » -

. . . , 1871 .  
 1876–1877 . . . ( ). «  
 » « »  
 . . . , . -  
 . -  
 . -  
 . 1893–1899 . -  
 , . -  
 . . . , . -  
 . 1892–1898 . -  
 1892 . . . «  
 » -  
 , « », -  
 . . . « », -  
 1909 ., -  
 . . . . -  
 XIX . , 1830 . -  
 . . . . 1845 . -  
 . . . . 1853 . -  
 . . . . 60-  
 . . . . -  
 -



, 1865–1877 .  
 . . . -  
 , 1881 . -  
 -  
 . . . . . 1880 . -  
 1888 . . . . .  
 , 1898 .  
 ,  
 . . . . . -  
 . . . . . -  
 . . . . .  
 ,  
 . . . . . -  
 . . . . . -  
 . . . . .  
 . . . . .  
 ,  
 : « » .  
 (1905 .), « »  
 . . . (1912 .), « »  
 » . (1919 .), « -  
 » . (1922 .), « -  
 » . . (1922 .), «  
 » . (1934 .) .  
 . 1932 . .  
 , .  
 . . . 1936 .  
 . . . . . «  
 »  
 ,  
 . 1946 . . . . . -  
 , . . . . . -

1939 . . . -  
 -  
 -  
 -  
 1922–1946 . . . -  
 . . . -  
 . . . -  
 . . . -  
 . . . « -  
 », « -  
 », . « contributions  
 to the Theory of Optimal Control», . «Computer Control of  
 a Paper Machine – an Application of Linear Stochastic Control  
 Theory», «On Stochastic Differential Equations» .  
 . . . « -  
 », « », -  
 . . . « -  
 », « -  
 », « », .  
 «Cybernetics», «Non-linear Problems in the Theory of Random  
 Processes». -  
 . . . « -  
 », -

. . . , . . . , . . . , . . . -  
 , . . . , . . . , . . . , . . . ,  
 . . . , . . . , . . . , . . . , . . .  
 , . . . , . . . , . . . . -  
 , -  
 . -  
 . -  
 . . . , . . . , . . . ,  
 : , -  
 , ;  
 - ,  
 ,  
 .  
 , , ,  
 - . -  
 . -  
 ( ). , -  
 , ( ), -  
 , -  
 ( ).  
 1957 ,  
 , , , -  
 , -

International Federation of Automatic  
 Control (IFAC).

1939 . . . . . « . . . . .»

, . . . . . , . . . . . , . . . . .»

. . . . .

. . . . . , . . . . .

. . . . . , . . . . .

. . . . . , . . . . .»

. . . . .» , 1951 . . . . .»

, . . . . . , . . . . .»

, . . . . .»

«Sampled-Data Control Systems», «Synthesis and Critical Study of Sampled-Data Control Systems» . . . . .»

, . . . . .»

« . . . . .» , « . . . . .»

».

...

», « 1955 .

», .: ( . . . « , 1959) , ( ) . ( , ).

« » , . . « » , . . « »

(1948)

« » , « » ,

50-

« » ,

. . . « -  
 », . . . « -  
 », . . . « », -  
 . « », . «To-  
 pics in Mathematical System Theory», . , . « -  
 » . -  
 . . -  
 « -  
 », . . « -  
 ». -  
 . . , -  
 . . , . . -  
 , . . -  
 . . -  
 , , - , -  
 . . « » -  
 , -  
 , -  
 . -  
 . . « -  
 », « -  
 », . . -  
 « . « -  
 », . . « -  
 », « -  
 », . . -  
 », . . -  
 « » -  
 « -  
 », . . « -  
 », « -  
 », . . -  
 », . . -  
 « -  
 », « -  
 », . . -  
 », . . -  
 « -  
 », . . « -  
 », « -  
 » . -  
 « -  
 », « -

«State-space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems», «Guaranteed Margins for LQG Regulators», «Minimum Entropy  $H_\infty$  Control»

«  
»,  
»,  
»

,

20

XXI

«  
» ( ),  
«Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory»

»,  
»,

«Hit and Run: New Design Technique for Stabilization, Robustness and Optimization of Linear Systems».

«

».

### 1.3

---

## Ключовими

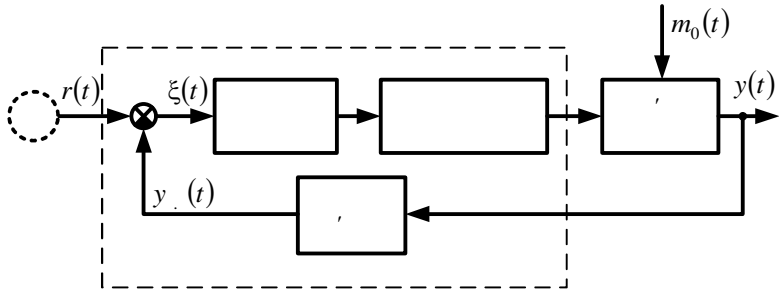
( ) :

;





$$\xi(t) = r(t) - y(t).$$



. 1.2.

$y(t)$

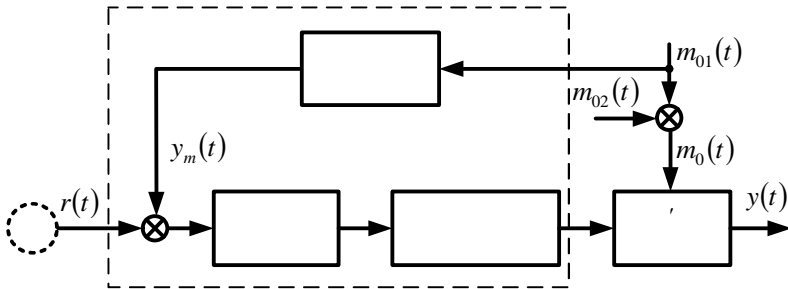
$m_0(t)$

$$y(t) \equiv (t),$$

$$\xi(t) = r(t) - y(t)$$

. 1.2

. 1.3.

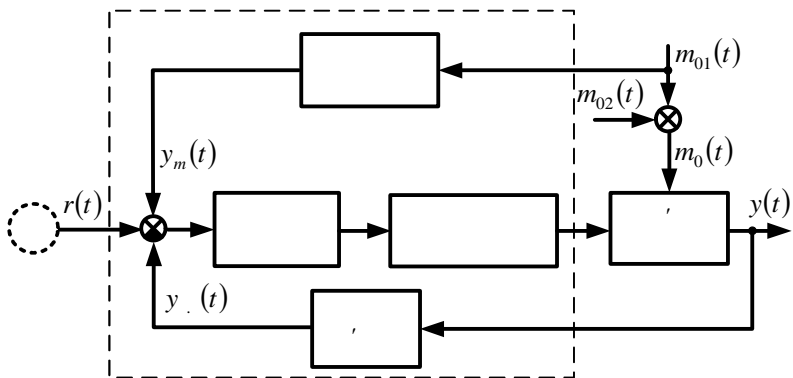


. 1.3.

$m_{01}(t)$ .

$y_m(t)$ .

. 1.4.



. 1.4.

$m_{01}(t),$   
 $m_{01}(t);$   
 $y_m(t),$

( )

1.4

**y**

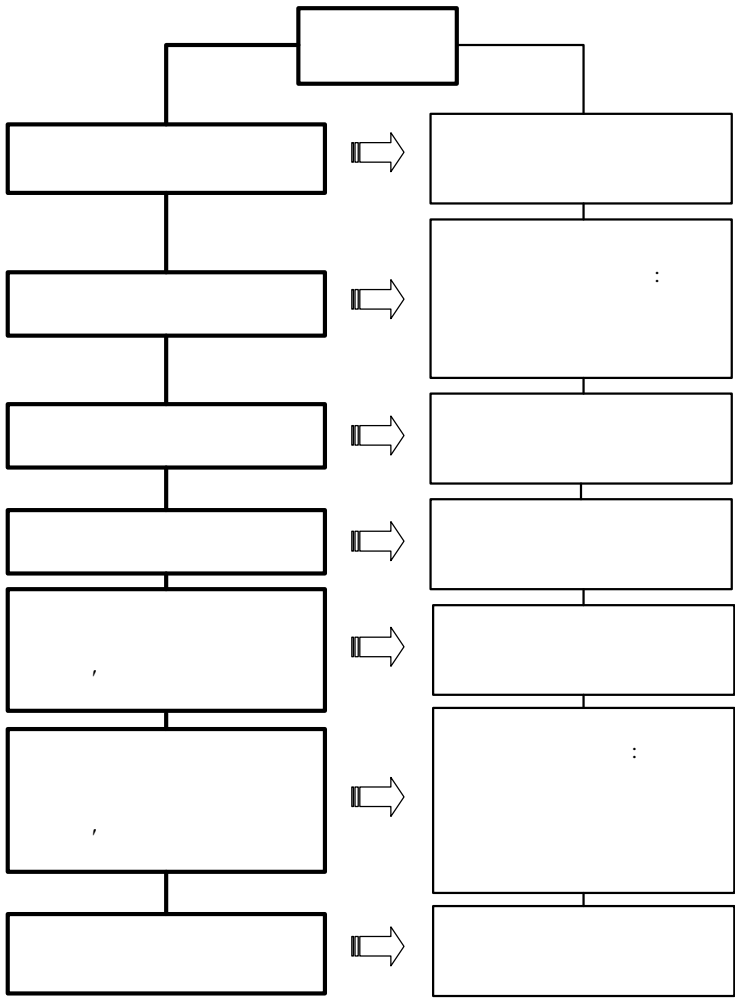
( )

; : ; ; ; . 1.5.

- ; , ,
- ; , ,
- ; , ,

1.3

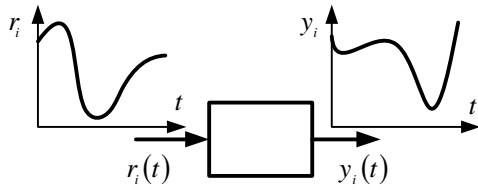
$r(t)$



. 1.5.

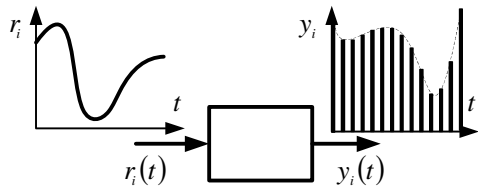


$i -$   
. 1.6.



. 1.6.

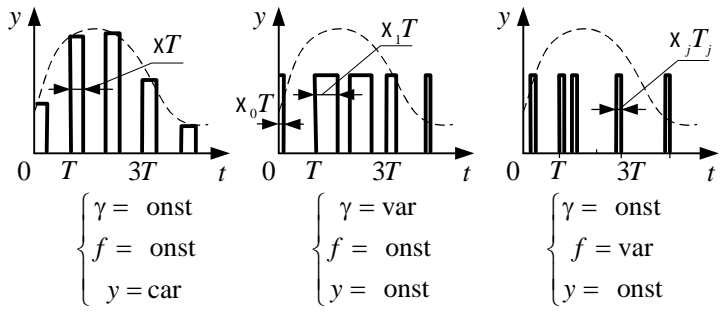
( . 1.7).



. 1.7.

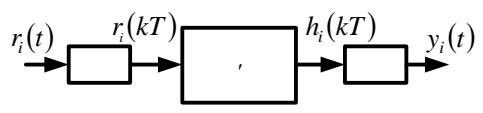
. 1.8.





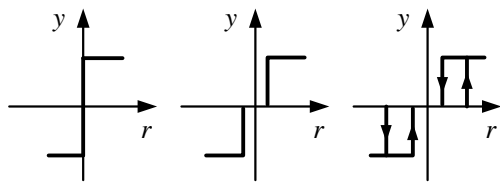
. 1.8.

. 1.9.



. 1.9.

$( \quad )$ ,  $r_i(t)$   $r_i(kT)$ .  
 $( \quad )$ .  $h_i(kT)$ ,  $y_i(t)$ .

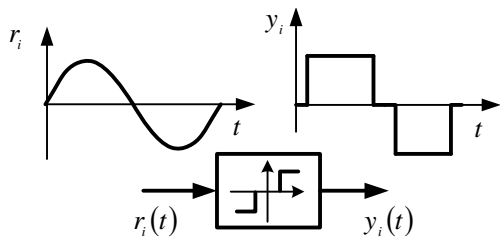


. 1.10.

. 1.10.

« »

. 1.11.



. 1.11.

$$\begin{aligned}
 & F_0 \left[ y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right] = \\
 & = F_B \left[ r(t), \frac{dr(t)}{dt}, \dots, m_1(t), \frac{dm_1(t)}{dt}, \dots, m_2(t), \frac{dm_2(t)}{dt}, \dots \right],
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

(1.1)

$y(t)$

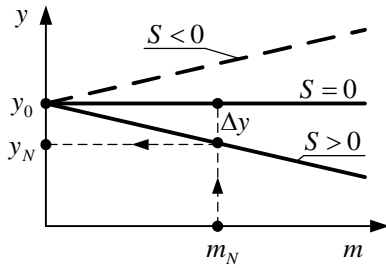
(1.1)

$r(t) \quad m(t)$ .



$$y = f(m).$$

. 1.12.



. 1.12.

$m_N$

$$S = \frac{y_0 - y_N}{y_0} \cdot 100\%. \quad (1.2)$$

$$\Delta y = y_0 - y_N. \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta y = 0 & \quad S = 0. \\ S > 0, & \end{aligned}$$

$$S < 0,$$

$$\dot{r}(t)$$

$$t = t_0$$

$$(\text{ . 1.13, } ),$$

$$\begin{aligned} t_0 - t_1 \\ y(t) \end{aligned}$$

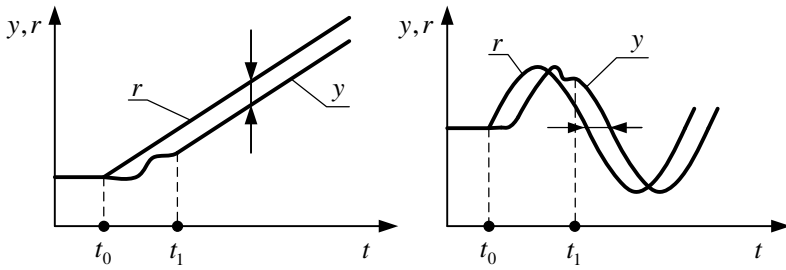
$$= \text{ onst}$$

$$= \int_1 \frac{dr(t)}{dt}. \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} r(t) = a_r \sin \quad r t . \\ (\text{ .1.13, } ) \end{aligned}$$

$$= \text{ onst} .$$

$$= 2 r \cdot \quad (1.5)$$



. 1.13.

( . 1.14, )

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ r(t) \end{pmatrix}$$

$$y = Y(u)$$

$$y(t),$$

$$u(t) = G[y(t)],$$

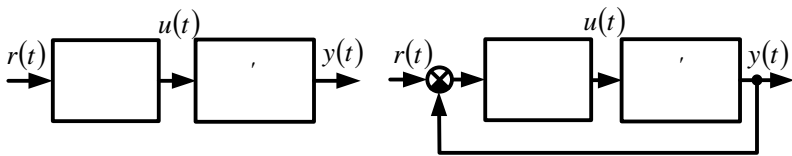
$$u(t)$$

$$y = Y(u),$$

( . 1.14, )

$$u(t)$$

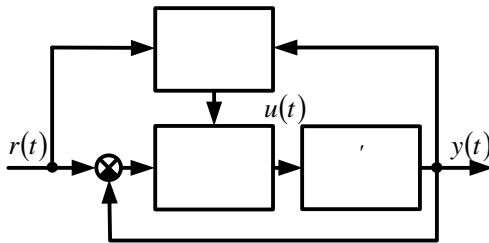
$$\xi(t) = r(t) - y(t)$$



. 1. 14.

. 1.15.





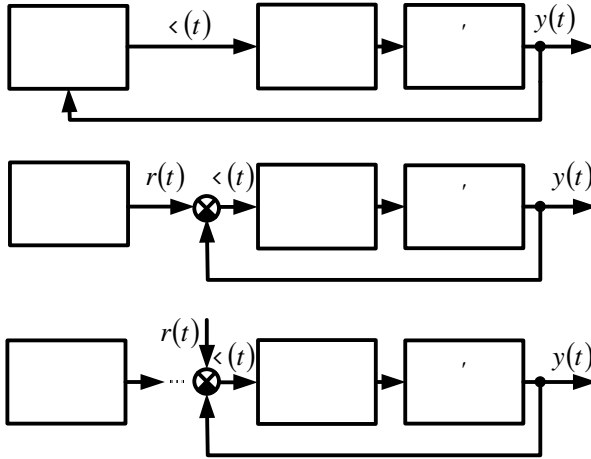
. 1. 15.

( )

( . 1.16).

( . 1.16, )

$\xi(t)$



. 1.16

( . 1.16, )

$r(t)$

$$\xi(t) = r(t) - y(t)$$

( . 1.16, )

1.5

---

1.

2.

3.

4.

5.

?

6.

( ),  
( )?

7.

8.

?

20

9.

IFAC?

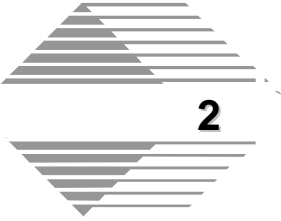
10.

11.

12.

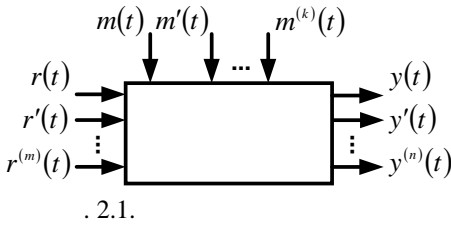
?

- 13. -
- 14. ?
- 15. ?
- 16.
- 17. .
- 18. .
- 19. .
- 20. , -
- 21. -
- 22. -
- ? ?
- 23. ?
- 24. ?
- 25. ?
- 26. ?
- 27. -
- ? ?
- 28. ?
- 29.
- 30. .
- 31. -
- 32. .



2.1

## II



:  $r(t), r'(t), \dots, r^{(k)}(t)$  -

$m(t), m'(t), \dots, m^{(k)}(t)$  -

;  $y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)$  - ( )

$$y(t) = U[r(t), \dots, r^{(m)}(t), m(t), \dots, m^{(k)}(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n)}(t)]. \quad (2.1)$$

$r(t), y(t), m(t)$

$$F[r(t), \dots, r^{(m)}(t), y(t), \dots, y^{(n)}(t)] = C[m(t), \dots, m^{(k)}(t)]. \quad (2.2)$$

$$r(t) = r^0, \quad y(t) = y^0, m(t) = m^0. \quad (2.2)$$

$$F[r^0, 0, \dots, 0, y^0, 0, \dots, 0] = C[m^0, 0, \dots, 0]. \quad (2.3)$$

$\Delta r \quad \Delta y.$

$$r(t) = r^0 + \Delta r; \quad r'(t) = \Delta r'; \quad \dots; \quad r^{(m)}(t) = \Delta r^{(m)},$$

$$y(t) = y^0 + \Delta y, \quad y'(t) = \Delta y'; \quad \dots; \quad y^{(n)}(t) = \Delta y^{(n)}.$$

$$F \quad (2.2)$$

$$F[r^0, 0, \dots, 0, y^0, 0, \dots, 0] + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^0 \Delta r + \left(\frac{\partial F}{\partial r'}\right)^0 \Delta r' + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial r^{(m)}}\right)^0 \Delta r^{(m)} +$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^0 \Delta y' + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)^0 \Delta y^{(n)} = C[m(t), \dots, m^{(k)}(t)] \quad (2.4)$$

(2.4)

$r^0, 0, \dots, 0,$

$y^0, 0, \dots, 0$

(2.4)

$$b_0 = -\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^0; \quad b_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial r'}\right)^0; \quad \dots \quad b_m = \left(\frac{\partial F}{\partial r^{(m)}}\right)^0;$$

$$a_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0; \quad a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^0; \quad \dots \quad a_n = \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)^0.$$

(2.4)

$$F[r^0, 0, \dots, 0, y^0, 0, \dots, 0] - b_0 \Delta r - b_1 \Delta r' - \dots - b_m \Delta r^{(m)} + a_0 \Delta y + a_1 \Delta y' + \dots + a_n \Delta y^{(n)} = C[m(t), \dots, m^{(k)}(t)] \quad (2.5)$$

(2.5)

(2.3),

$$-b_0 \Delta r - b_1 \Delta r' - \dots - b_m \Delta r^{(m)} + a_0 \Delta y + a_1 \Delta y' + \dots + a_n \Delta y^{(n)} = C[m(t), \dots, m^{(k)}(t)] - C[m^0, 0, \dots, 0] \quad (2.6)$$

(2.6)

$$-b_0 \Delta r - b_1 \Delta r' - \dots - b_m \Delta r^{(m)} + a_0 \Delta y + a_1 \Delta y' + \dots + a_n \Delta y^{(n)} = c_0 \Delta m + c_1 \Delta m' + \dots + c_k \Delta m^{(k)}. \quad (2.7)$$

(2.7)

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \\ & = b_m \frac{d^m r}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr}{dt} + b_0 r + \\ & + c_k \frac{d^k m}{dt^k} + c_{k-1} \frac{d^{k-1} m}{dt^{k-1}} + \dots + c_1 \frac{dm}{dt} + c_0 m. \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.8)

$F$   $r$

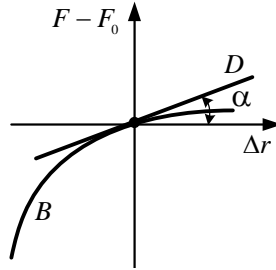
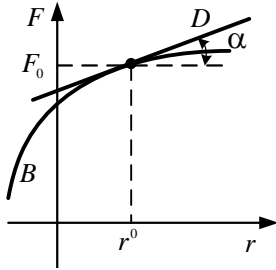
. 2.2. .

$r^0$

. 2.2

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^0 = \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha -$$

$$r = r^0 \quad F^0 = F[r^0, 0, \dots, 0, y^0, 0, \dots, 0].$$



. 2.2.

( . 2.2, )

$$r(t) \quad r^0 + \Delta r$$

$$F \quad F^0.$$

$BC$

$CD$ .

. 2.2,

$\Delta r$ ,

2.2

**Я**

2.1,

$$J \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + f \frac{d\beta(t)}{dt} + C\beta(t) = H(t), \quad (2.9)$$

$\beta(t) -$

(

);  $(t) -$



( $\dots$ );  $J, f, C, \dots$   
 $(\dots)$ ;  $\dots$   
 $\dots$ ;  $\dots$   
 $\dots$ ).

$$\begin{aligned}
 & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\
 & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) + \quad (2.10) \\
 & + c_k \frac{d^k m(t)}{dt^k} + c_{k-1} \frac{d^{k-1} m(t)}{dt^{k-1}} + \dots + c_1 \frac{dm(t)}{dt} + c_0 m(t),
 \end{aligned}$$

$y(t) - \dots$ ;  $r(t) - \dots$ ;  $m(t) - \dots$   
 $\dots$ ;  $a_i, b_i, c_i - \dots$

$p$ ,

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv py(t), \dots, \frac{d^n y(t)}{dt^n} \equiv p^n y(t).$$

$$\left[ \frac{1}{-} \right].$$

$$\int y(t) dt \equiv \frac{y(t)}{p}, \dots, \int \dots \int y(t) dt^n \equiv \frac{y(t)}{p^n}.$$

(2.10),

$$\begin{aligned} a_n p^n y(t) + a_{n-1} p^{n-1} y(t) + \dots + a_1 p y(t) + a_0 y(t) = \\ = b_m p^m r(t) + b_{m-1} p^{m-1} r(t) + \dots + b_1 p r(t) + b_0 r(t) + \\ + c_k p^k m(t) + c_{k-1} p^{k-1} m(t) + \dots + c_1 p m(t) + c_0 m(t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

$p$ ,

(

).

(2.11)

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) y(t) = \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) r(t) + \\ + (c_k p^k + c_{k-1} p^{k-1} + \dots + c_1 p + c_0) m(t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
 A(p) &= (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) ; \\
 B(p) &= (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) ; \\
 C(p) &= (c_k p^k + c_{k-1} p^{k-1} + \dots + c_1 p + c_0) ,
 \end{aligned}$$

$$A(p)y(t) = B(p)r(t) + C(p)m(t) . \quad (2.13)$$

$p$

(2.13)

$$y(t) = \frac{B(p)}{A(p)} r(t) + \frac{C(p)}{A(p)} m(t) . \quad (2.14)$$

$$W_r(p) = \frac{y(t)}{r(t)} = \frac{B(p)}{A(p)} ; W_m(p) = \frac{y(t)}{m(t)} = \frac{C(p)}{A(p)} . \quad (2.15)$$

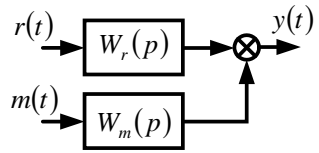
$- W_r(p)$ .

$- W_m(p)$ .

(2.15)

(2.13)

.2.3.



.2.3.

2.3

**P**

$$A(p)y(t) = B(p)r(t) + C(p)m(t) \quad (2.16)$$

(2.16)

(2.16)

$$\left. \begin{aligned} A(p)y(t) &= 0 \\ A(p)y(t) &= B(p)r(t) \\ A(p)y(t) &= C(p)m(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

(2.16).

### 2.3.1

$$(2.16) \quad r(t) = 0, \quad m(t) = 0,$$

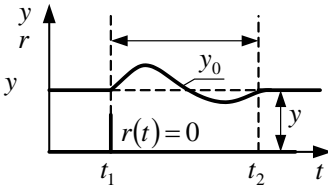
$$A(p)y(t) = 0.$$

$$y_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}. \quad (2.18)$$

$\lambda_i$  —  $A(p)$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

$$A(p) = 0,$$

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0.$$



. 2.4.

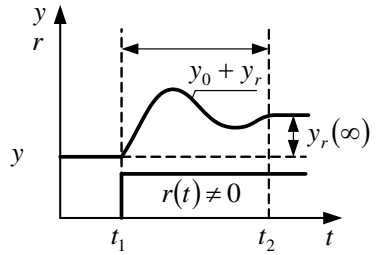
(2.18)

. 2.4.

$$y(t), py(t), \dots, p^n y(t),$$

### 2.3.2

(2.5),



$r(t)$

$$A(p)y(t) = B(p)r(t). \quad (2.19)$$

$$y(t) = y_0(t) + y_r(t),$$

$y_0(t) -$   
 $;$   $y_r(t) -$

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$$

$$y_r(t) = \frac{B(p)}{A(p)} r(t).$$

$t \rightarrow \infty$  ( $p \rightarrow 0$ ).

$$y_r(\infty) = \frac{B(0)}{(0)} r(\infty). \quad (2.19)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} + \frac{B(0)}{(0)} r(\infty). \quad (2.20)$$

$r(\infty)$ .

### 2.3.3

$$A(p)y(t) = (p)m(t). \quad (2.21)$$

2.3.2,

(2.21)

$$y(t) = y_0(t) + y_m(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} + \frac{(0)}{(0)} m(\infty), \quad (2.22)$$

$y_0(t), y_m(t) -$

$m(t)$ .

(2.18 – 2.22),

(2.16)

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} + \frac{B(0)}{A(0)} r(\infty) + \frac{(0)}{(0)} m(\infty). \quad (2.23)$$

(2.23)

$y(t)$

$r(t)$

$m(t),$

**P**

).

(2.23)

$$y(t) = W_r(p)r(t) + W_m(p)m(t). \quad (2.24)$$

$$\frac{W_r(p)r(t)}{W_r(p)} + \frac{W_m(p)m(t)}{W_m(p)} = r(t) + m(t)$$

(2.24)

$$r(t) = r = \text{const}; \quad m(t) = m = \text{const},$$

$$t \rightarrow \infty,$$

$$t \rightarrow \infty \quad p \equiv \frac{d}{dt} \rightarrow 0$$

$$(2.24)$$

$$p = 0.$$

$$y = W_r(0)r + W_m(0)m, \quad (2.25)$$

$$W_r(0) \quad W_m(0)$$

$$y = k_r r + k_m m, \quad (2.26)$$

$$k_r = \frac{b_0}{a_0} = W_r(0) -$$

$$; \quad k_m = \frac{c_0}{a_0} = W_m(0) -$$



$$y = k_r r .$$

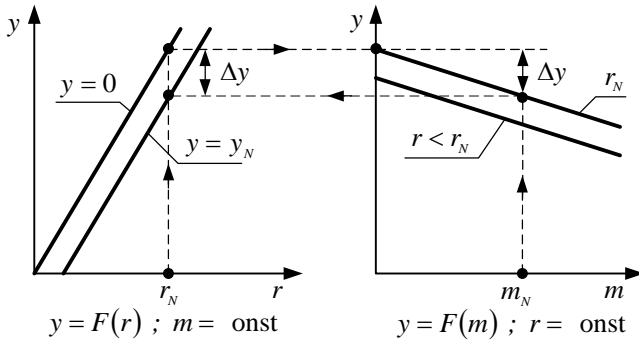
$$\Delta y = k_r r - y = k_m m .$$

$$y = F(r) \quad m = \text{const} ;$$

$$y = F(m) \quad r = \text{const} .$$

. 2.6.

$\Delta y$  .



. 2.6.

$$A(p)y(t) = B(p)r(t),$$

$$W(p) = \frac{y(t)}{r(t)} = \frac{B(p)}{A(p)} .$$

# III

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 r(t). \quad (2.27)$$

$$y(t)|_{t=0} = 0. \quad (2.27)$$

$$a_1 p y(t) + a_0 y(t) = b_0 r(t).$$

$$A(p)y(t) = B(p)r(t), \quad (2.28)$$

$$A(p) = a_1 p + a_0; \quad B(p) = b_0.$$

(2.28)

$$y(t) = y_0(t) + y_r(t). \quad (2.29)$$

$$(2.20) \quad (2.29)$$

$$y(t) = C e^{\lambda t} + \frac{b_0}{a_0} r(\infty), \quad (2.30)$$

 $\lambda -$ 

$$A(p) = 0; \quad C -$$

$$a_1 \lambda + a_0 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{a_0}{a_1}.$$

$$y(t)|_{t=0} = 0 \quad (2.30)$$

$$0 = C e^{\lambda_0} + \frac{b_0}{a_0} r(\infty),$$

$$C = -\frac{b_0}{a_0} r(\infty).$$

, (2.30)

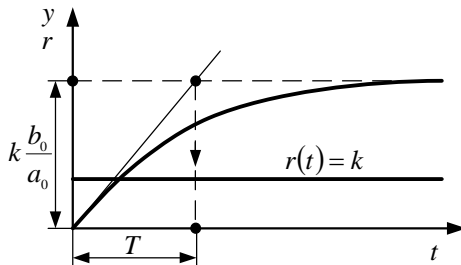
$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} \left( 1 - e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \right) r(\infty). \quad (2.31)$$

$$r(t) = k = \text{const}$$

. 2.7.

$$y(t) = k \frac{b_0}{a_0} \left( 1 - e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \right),$$

$$t \rightarrow \infty \quad k \frac{b_0}{a_0}.$$



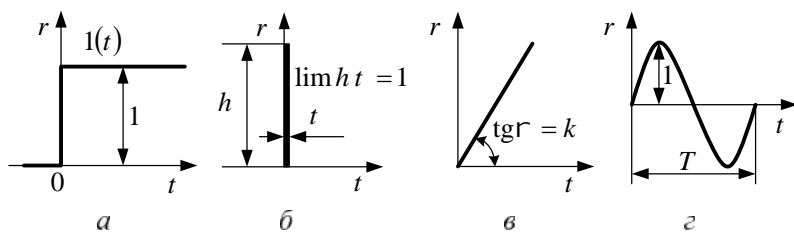
. 2.7.

$T$ ,

# Д

;

$k(t)$



. 2.8.

( )

-  $k(t)$  ; -

( . 2.8, )

$t=0$

$$1(t) \begin{cases} 0 & t < 0 ; \\ 1 & t \geq 0 . \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.28)$$

$$\int \delta(t) dt = 1.$$

$$h_i \rightarrow \infty \quad t_i \rightarrow 0 \quad h_i t_i = 1.$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} [1(t)] = p1(t). \quad (2.32)$$

$$k(t) = \dots \quad (2.28) - \dots$$

$$k(t) = kt.$$

$$k(t) = \dots$$

$$k(t) = k \int 1(t) dt = \frac{k}{p} 1(t). \quad (2.33)$$

$$(2.28) - \dots$$

$$r(t) = 1 \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi/T$$

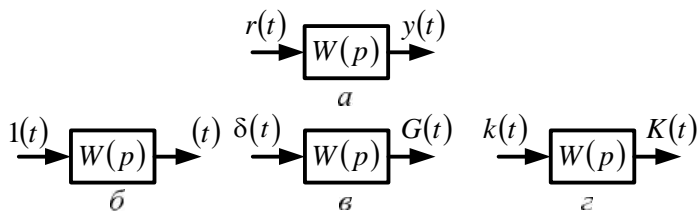
# У

$y(t)$

( , )  $k(t) -$   
 $r(t) \Rightarrow \{ 1(t); \delta(t); k(t) \}.$

$$A(p)y(t) = B(p)r(t) \Rightarrow y(t) = W(p)r(t).$$

. 2.9, .



. 2.9.

-  $r(t); -$  ;

- ; -  $k(t)$ -

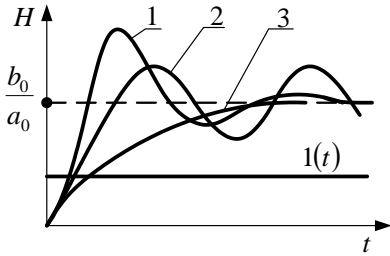
( . 2.9, )

$$r(t) = 1(t)$$

$$H(t).$$

$$H(t) = W(p)1(t),$$

$$H(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} + \frac{b_0}{a_0} \cdot 1, \quad (2.34)$$



. 2.10.

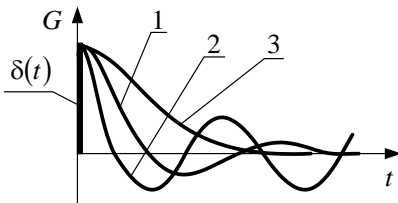
( 2) 1); ( 3).

$G(t)$ .

. 2.9,

$$G(t) = W(p)\delta(t). \quad (2.32),$$

$$G(t) = W(p)\delta(t) = W(p)p1(t) = pH(t). \quad (2.35)$$



. 2.11.

(2.34), (2.35)

$$G(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \lambda_n e^{\lambda_n t} \quad (2.36)$$

. 2.10,

. 2.11.

( 2.9, )  $k(t)$  -  $K(t)$  -

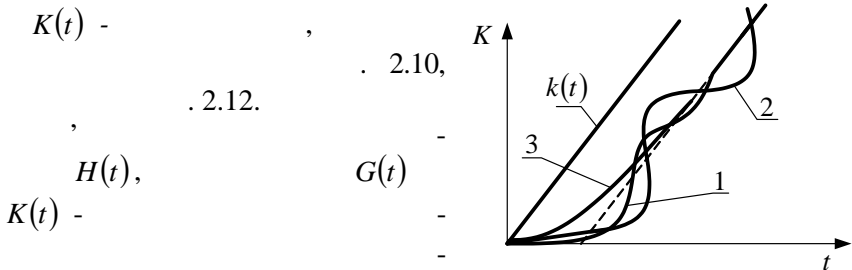
$$K(t) = W(p)k(t) = W(p)\frac{k}{p}1(t) = k\frac{H(t)}{p}. \quad (2.37)$$

(2.34),

$$K(t) = \frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} e^{\lambda_n t} + k_1 t, \quad (2.38)$$

$$k_1 = k \frac{b_0}{a_0}.$$

$K(t)$  -



2.10,

2.12.

$H(t)$ ,

$K(t)$  -

2.12  $K(t)$  -

## 2.8

**Я**

$t = 0,$

$t = \dagger > 0.$

$\tau > 0$

$$r(t) = 1(t - \dagger) -$$

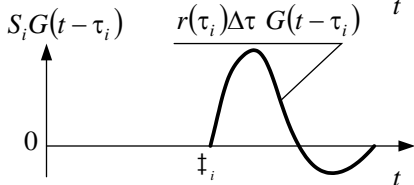
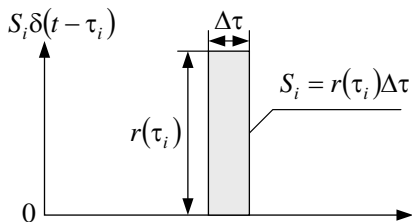
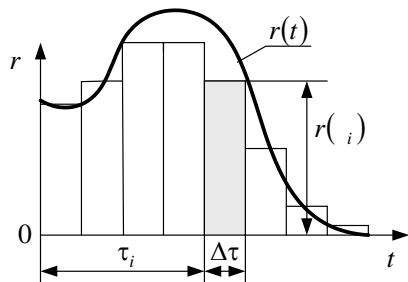
$$r(t) = u(t - \dagger) -$$

$t = \tau$

$t < \tau.$



( . 2.13, )



. 2.13.

$r(t)$

$$\Delta\tau \quad r(\tau_i).$$

( . 2.13, )

$$S_i \delta(t - \tau_i) = r(\tau_i) \Delta\tau \delta(t - \tau_i),$$

$$S_i = r(\tau_i) \Delta\tau$$

$$r(t) \approx \sum_{i=0}^n r(\tau_i) \delta(t - \tau_i) \Delta\tau.$$

$$\delta(t - \tau_i) \quad ( . 2.13, )$$

$$G(t - \tau_i),$$

$$y(t) \approx \sum_{i=0}^n r(\tau_i) G(t - \tau_i) \Delta\tau.$$

,  $n \rightarrow \infty$ ,

$$y(t) \approx \int_0^{\infty} r(\tau_i) G(t - \tau_i) d\tau_i.$$

$$G(t - \tau) = 0 \quad t < \tau,$$

$t$

$$y(t) \approx \int_0^t G(t - \tau) r(\tau) d\tau.$$

$$G(t) r(t).$$

$$\tau = t \quad \tau = 0,$$

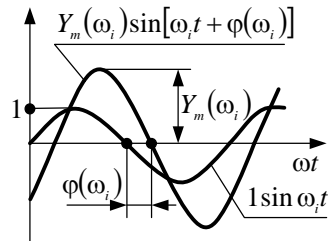
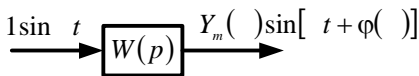
$$y(t) \approx \int_0^t G(\tau)r(t-\tau)d\tau.$$

2.9

### III

$\omega_i$

. 2.14.



. 2.14.

$\omega$

$Y_m$   $\phi$

$$y(t) = Y_m(\omega) \sin[\omega t + \phi(\omega)].$$

$R_m \neq 1,$

$$Y_m(\omega) = \frac{Y(\omega)}{R_m}.$$

( 2.14, )

$$Y_m(\omega)\sin[\omega t + \varphi(\omega)] = W(p) \cdot 1 \sin \omega t. \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} 1 \sin \omega t &= 1 \cdot \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{e^{j\omega t}}{2j} - \frac{e^{-j\omega t}}{2j} = r_1 + r_2; \\ Y_m(\omega)\sin[\omega t + \varphi(\omega)] &= \\ = Y_m(\omega) \frac{e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}}{2j} - Y_m(\omega) \frac{e^{-j[\omega t + \varphi(\omega)]}}{2j} &= y_1 + y_2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$y_1 = W(p)r_1 \quad y_2 = W(p)r_2 \quad (2.41)$$

$$(2.41)$$

$$(2.40)$$

$$W(j\omega) = \frac{Y_m(\omega) e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}}{1 e^{j\omega t}} = Y_m(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.42)$$

$$W(j\omega),$$

$\infty > \omega > 0$

( ) ,  $W(j\omega)$

$$\begin{aligned} &W(p) \\ & \quad \quad \quad j\omega : \\ p \quad &W(p) \xrightarrow{p \rightarrow j\omega} W(j\omega). \end{aligned}$$

$$W(p),$$

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}.$$

$$W(j\omega) = \frac{B_1(\omega) + jB_2(\omega)}{1(\omega) + j2(\omega)},$$

$$B_1(\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots; \quad B_2(\omega) = b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots;$$

$$1(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots; \quad 2(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots.$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.43)$$

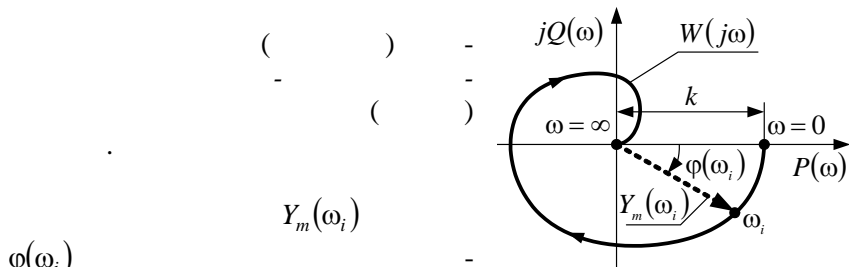
$$P(\omega) = \frac{1(\omega)1(\omega) + 2(\omega)2(\omega)}{1^2(\omega) + 2^2(\omega)}; \quad Q(\omega) = \frac{1(\omega)2(\omega) - 2(\omega)1(\omega)}{1^2(\omega) + 2^2(\omega)}.$$

$$\omega \quad 0 \quad \infty$$

$$P(\omega) \quad Q(\omega)$$

$$P(\omega) \rightarrow jQ(\omega)$$

$$(2.15).$$



2.15.

$$\varphi(\omega_i)$$

$$Y_m(\omega_i)$$

$$\omega_i.$$

$i$

$$|W(j\omega_i)| = Y_m(\omega_i) = \sqrt{P^2(\omega_i) + Q^2(\omega_i)},$$

$$\varphi(\omega_i) = \arctg \frac{Q(\omega_i)}{P(\omega_i)}.$$

$$\infty > \omega > 0.$$

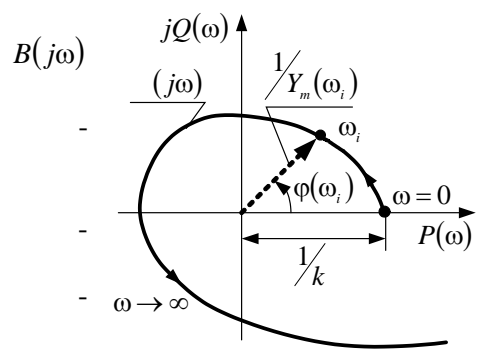
$$\begin{aligned} & \vdots \\ - Y_m(\omega) & - \quad \quad \quad ( \quad ) - \\ - \varphi(\omega) & - \quad \quad \quad ( \quad ) - \\ - P(\omega) & - \quad \quad \quad ( \quad ); \\ - Q(\omega) & - \quad \quad \quad ( \quad ). \end{aligned}$$

$$W(j\omega)$$

$$E(j\omega) = \frac{1}{W(j\omega)} = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}.$$

$$A(j\omega), \quad B(j\omega), \quad m \ll n.$$

. 2.16.



. 2.16.

$$\ln W(j\omega) = \ln[Y_m(\omega)e^{j\varphi(\omega)}] = \ln Y_m(\omega) + j\varphi(\omega),$$

$$W(j\omega)$$

$$\ln Y_m(\omega)$$

$$L(\omega) = 20 \lg Y_m(\omega),$$

( ).

[ ]  
20

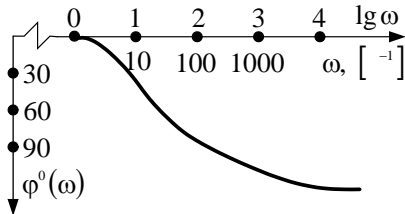
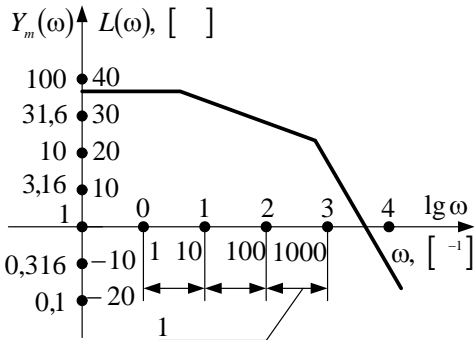
( . 2.17, )

$$L(\omega)$$

lg \omega .

lg \omega

( ) [c^{-1}],



. 2.17.

2.10

**y**

$r(t)$

$$r(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t), \quad (2.44)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad k =$$

( ) ;  $a_0, a_k, b_k =$  , :

$$a_0 = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^T r(t) dt; \quad a_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^T r(t) \cos k\omega_0 t dt; \quad b_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^T r(t) \sin k\omega_0 t dt. \quad (2.45)$$

$$(2.44)$$

$$a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t = a_k \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j} = \quad (2.46)$$

$$= \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t}.$$

$$(2.46)$$

$$a_k, b_k \quad (2.45),$$

$$a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t = \frac{\omega_0}{2\pi} \left[ \left( \int_0^T r(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right) e^{jk\omega_0 t} + \left( \int_0^T r(t) e^{jk\omega_0 t} dt \right) e^{-jk\omega_0 t} \right]. \quad (2.47)$$

$$f(jk\omega_0) = \int_0^T r(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (2.48)$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} f(0) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T r(t) dt = \frac{a_0}{2}, \quad (2.49)$$

$$(2.44)$$

$$r(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} f(0) e^{j0t} + \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [f(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} + f(-jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}]. \quad (2.50)$$

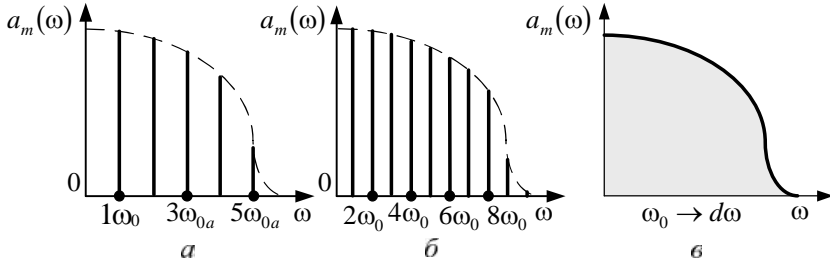
$$(2.50)$$

$$r(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} f(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}. \quad (2.51)$$



$$f(jk\omega_0) = \int_0^T r(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$r(t)$ .



. 2.18.

$\omega_0$     $\omega_0$

. 2.18, , .

$$a_{mk}(\omega) = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = |f(jk\omega_0)|.$$

$$\frac{r(t)}{W(jk\omega_0)} \quad , \quad (2.51)$$

$$\left( \quad \right) \quad , \quad y(t)$$

$r(t)$ :

$$y(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_0^{k=\infty} f(jk\omega_0) W(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_0^{k=\infty} F_k(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad (2.52)$$

$$F_k(jk\omega_0) = f(jk\omega_0) W(jk\omega_0) -$$

$$W(jk\omega_0) = Y_m(k\omega_0) e^{j\varphi(k\omega_0)},$$

$$r(t)$$

$$\omega = -\infty \quad \omega = +\infty,$$

$$d\omega$$

$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad T \rightarrow \infty$$

(2.18, ).

$$\omega_0 \rightarrow d\omega, \quad (2.51)$$

$$r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.53)$$

$$(2.48)$$

$$f(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.54)$$

$$(2.54)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} dk$$

$$(2.53)$$

$$+\infty > t > 0, \quad t < 0 \quad r(t) = 0,$$

$$(2.53) \quad (2.54) \quad r(t),$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(j\omega) W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.55)$$

2.11

**P**

$h_1$

$t_1$ ,

$S_i = h_1 t_1 = 1.$

$t_1 > t_2.$

(2.54)

$$f(j\omega) = \int_0^t \frac{S}{t} e^{-j\omega t} dt = \left| -\frac{S}{j\omega t} e^{-j\omega t} \right|_0^t = -j \frac{S}{\omega t} (1 - e^{-j\omega t}). \quad (2.56)$$

$\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left| -j \frac{S}{\omega t} (1 - e^{-j\omega t}) \right| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left| -j \frac{d(S - S e^{-j\omega t})/d\omega}{d(\omega t)/d\omega} \right| = S.$$

. 2. 19,

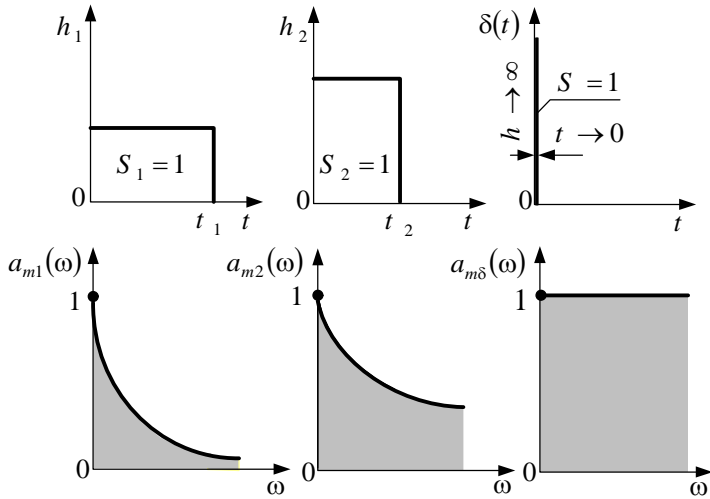
$\delta(t)$

(2.56)  $S = 1, t \rightarrow 0.$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| -j \frac{1}{\omega t} (1 - e^{-j\omega t}) \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{1 \cdot j\omega e^{-j\omega t}}{\omega} \right| = 1.$$

$\delta(t)$

$\delta(t)$  –  
 ( . 2.19, ).



. 2.19.

(2.53)

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} 1 \cdot W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} Y_m(\omega) e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} d\omega \quad (2.57)$$

, (2.54)

$$W(j\omega)$$

:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t, \quad (2.57)$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\infty [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

$$t < 0,$$

$$t = -t,$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\infty [P(\omega) \cos \omega t + Q(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi_0} \int_0^\infty [P(\omega) \cos \omega t] d\omega; \quad G(t) = -\frac{1}{2\pi_0} \int_0^\infty [Q(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (2.58)$$

$$G(t),$$

$$H(t) -$$

$$1(t).$$

$$H(t) = \int G(t) dt,$$

$$(2.57), (2.58)$$

$$\left. \begin{aligned} H(t) &= \frac{Y_m(0)}{2} + \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{Y_m(\omega)}{\omega} \sin[\omega t + \phi(\omega)] d\omega; \\ H(t) &= \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{P(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega; \\ H(t) &= P(0) + \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

$$Y_m(0), P(0) -$$

$$\omega = 0.$$

$$(2.59)$$

2.12

**II**

$$L[r(t)] = \int_0^{\infty} r(t)e^{-st} dt = R(s), \quad (2.60)$$

$$s = \sigma + j\omega \quad , \quad \sigma > 0$$

$$\int_0^{\infty} |r(t)e^{-st}| dt < \infty. \quad (2.61)$$

$$R(s) \quad , \quad L^{-1}$$

$$r(t) \quad R(s).$$

$$R(s) \quad r(t), \quad :$$

$$R(s) \xrightarrow{-\div} r(t) \quad r(t) \xrightarrow{\div-} R(s). \quad (2.60)$$

$$R(s) \quad s.$$

$$r(t) = L^{-1}[R(s)] = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} R(s)e^{st} ds. \quad (2.62)$$

$$s = j\omega \quad (\sigma = 0)$$

(2.53) :

$$r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

$$(2.60),$$

$$\left. \begin{aligned}
 L\left[\frac{dr(t)}{dt}\right] &= sR(s) - r(0) \\
 L\left[\frac{d^2r(t)}{dt^2}\right] &= s^2R(s) - [sr(0) + \dot{r}(0)] \\
 &\dots \\
 L\left[\frac{d^n r(t)}{dt^n}\right] &= s^n R(s) - [s^{n-1}r(0) + s^{n-2}\dot{r}(0) + s^{n-3}\ddot{r}(0) + \dots + s^0 r^{(n-1)}(0)]
 \end{aligned} \right\} (2.63)$$

$$\dot{r}(0) = \left. \frac{dr(t)}{dt} \right|_{t=0}, \quad \ddot{r}(0) = \left. \frac{d^2r(t)}{dt^2} \right|_{t=0}, \quad \dots, \quad r^{(n-1)}(0) = \left. \frac{dr^{(n-1)}(t)}{dt^{n-1}} \right|_{t=0}$$

$$r(t); \quad r(0) = |r(t)|_{t=0}$$

$$r(0) \quad r(t)$$

$$r(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} |R(s)|, \quad t=0$$

$t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |r(t)| = R(0).$$

$\sigma > 0$

$$\left. \begin{aligned}
 |r(t)|_{t < 0} &= 0 \\
 \int_0^{\infty} |r(t)| e^{-st} dt &< \infty
 \end{aligned} \right\}$$

$$kt^n \quad n > 0,$$

# II

$r(t)$	$R(s)$	$r(t)$	$R(s)$
$1(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$1(t-\tau) \begin{cases} 0 & t < \tau \\ 1 & t > \tau \end{cases}$	$\frac{-e^{-s\tau}}{s}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$	1	$\frac{1}{2} \omega t \sin \omega t$	$\frac{s\omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$e^{-\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \lambda)^2 + \omega^2}$
$\frac{t^n}{n}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$e^{-\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{s + \lambda}{(s + \lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{\pm \lambda t}$	$\frac{1}{s \mp \lambda}$	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$te^{-\lambda t}$	$\frac{1}{(s + \lambda)^2}$	$\frac{t^n}{2^n n! \omega} \sin \omega t$	$\frac{s^n}{(s^2 + \omega^2)^{n+1}}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{(s + \lambda)^{n+1}}$	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1 - e^{-t}}{t}$	$\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$



$$= \frac{\alpha^n \beta^m}{\gamma^k}$$

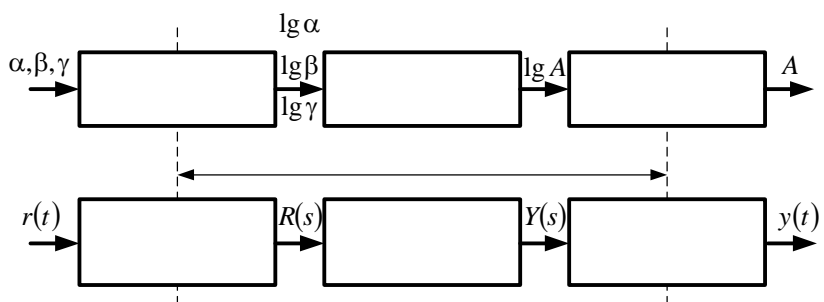
$n, m, k$

$$\lg = n \lg \alpha + m \lg \beta - k \lg \gamma,$$

$\lg \alpha, \lg \beta, \lg \gamma$

$\lg$

. 2.20.



. 2. 20.

« »

. 2. 20.

## 3

(2.10)

$$\begin{aligned}
 & e^{-st} \\
 & t \quad 0 \quad \infty . \\
 & a_n L \left[ \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right] + a_{n-1} L \left[ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \right] + \dots + a_1 L \left[ \frac{dy(t)}{dt} \right] + a_0 L[y(t)] = \\
 & = b_m L \left[ \frac{d^m r(t)}{dt^m} \right] + b_{m-1} L \left[ \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} \right] + \dots + b_1 L \left[ \frac{dr(t)}{dt} \right] + b_0 L[r(t)] + \\
 & + c_k L \left[ \frac{d^k m(t)}{dt^k} \right] + c_{k-1} L \left[ \frac{d^{k-1} m(t)}{dt^{k-1}} \right] + \dots + c_1 L \left[ \frac{dm(t)}{dt} \right] + c_0 L[m(t)] .
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

 $t = 0$ 

$$y(0), r(0), m(0) = 0, \frac{dy^i(t)}{dt^i}, \frac{dr^j(t)}{dt^j}, \frac{dm(t)}{dt} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = \\
 & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) R(s) + \\
 & + (c_k s^k + c_{k-1} s^{k-1} + \dots + c_1 s + c_0) M(s),
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$A(s)Y(s) = B(s)R(s) + C(s)M(s). \tag{2.66}$$

$$(2.66) \quad Y(s),$$

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} R(s) + \frac{C(s)}{A(s)} M(s) = W_r(s)R(s) + W_m(s)M(s). \tag{2.67}$$

(2.12 – 2.14),

$$W_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad W_m(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{C(s)}{A(s)} \tag{2.68}$$

(2.68)

(2.15)

$p$

$s$ .

( )

$$y(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} W_r(s)R(s)e^{st} ds + \frac{1}{2j\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} W_m(s)M(s)e^{st} ds. \quad (2.69)$$

## 2.15

# P

$$r(t) = 1(t).$$

$$A(p)y(t) = B(p) \cdot 1(t).$$

$$R(s) = \int_0^{\infty} 1(t) \cdot e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}. \quad (2.70)$$

$$Y(s) = W(s)R(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{B(s)}{sA(s)}. \quad (2.71)$$

(2.71)

$s$ .  
 $A(s)$ ,

$$sA(s) = 0, \quad n$$

$$\lambda_0 = 0.$$

$$\left. \frac{dA(s)}{ds} \right|_{s=\lambda_i} = A'(s)|_{s=\lambda_i} \neq 0.$$

$$\frac{B(s)}{sA(s)} = \frac{C_0}{s-\lambda_0} + \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \dots + \frac{C_n}{s-\lambda_n} = \sum_0^n \frac{C_i}{s-\lambda_i}, \quad (2.72)$$

$C_i$  –

$$C_i = \left. \frac{B(s)}{[sA(s)]'} \right|_{s=\lambda_i} = \frac{B(\lambda_i)}{A(\lambda_i) + \lambda_i A'(\lambda_i)}. \quad (2.73)$$

$$(2.72) \quad (2.71),$$

$$Y(s) = \sum_0^n \frac{C_i}{s-\lambda_i}. \quad (2.74)$$

$$\frac{1}{s-\lambda_i} \quad e^{\lambda_i t},$$

$$\int_0^\infty e^{\lambda_i t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-\lambda_i)t} dt = \frac{-1}{s-\lambda_i} e^{-(s-\lambda_i)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-\lambda_i}. \quad (2.75)$$

$$(2.75),$$

$$(2.74)$$

$$y(t) = \sum_0^n C_i e^{\lambda_i t} \leftarrow \div - Y(s) = \sum_0^n \frac{C_i}{s-\lambda_i}. \quad (2.76)$$

$$(2.73)$$

$$(2.76)$$

$$y(t) = \sum_0^n \frac{B(\lambda_i)}{A(\lambda_i) + \lambda_i A'(\lambda_i)} \cdot e^{\lambda_i t} \quad (2.77)$$

$$(2.77) \quad , \quad \lambda = 0.$$

$$B(\lambda_0) = B(0);$$

$$A(\lambda_0) = A(0);$$

$$\lambda A'(\lambda_0) = 0.$$

$$A(\lambda_i) = 0,$$

$$A(\lambda_i)$$

$$y(t) = \sum_0^n \frac{B(\lambda_i)}{\lambda_i A'(\lambda_i)} \cdot e^{\lambda_i t} + \frac{(0)}{A(0)} = \sum_0^n C_i e^{\lambda_i t} + \frac{b_0}{a_0}. \quad (2.78)$$

## 2.16

---

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8. , -

9. ? -

$$a_3 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) + c_0 m(t).$$

11. -

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 r(t) + c_1 \frac{dm(t)}{dt} + c_0 m(t).$$

12. ?

13. , -

$$4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3r(t) + m(t).$$

14. , -

$$(p^3 + 2p^2 + p + 1)y(t) = (p + 1)r(t) + 2m(t).$$

15. ( ) , -

16. , ,  $k(t)$  -

17. ,  $1(t)$ ,  $\delta(t)$ ,  $k(t)$ .

18. -

19. ( ) .

20.

21.

22.

23.

$$r(t) = 1 \sin \omega t$$

$$y(t) = Y_m(\omega) \sin[\omega t + \phi(\omega)].$$

24.

25.

$$(a_1 p + a_0)y(t) = (b_1 p + b_0)r(t).$$

26.

27.

28.

29.

$$r(t) = 4(t).$$

30.



## СТРУКТУРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ

### 3.1 Динамічні ланки та їх характеристики

**Б**агато елементів автоматичних пристроїв, різних по фізичній природі і конструктивному виконанню, мають однакові динамічні властивості, а перехідні процеси, що відбуваються в них, описуються однотипними диференціальними рівняннями.

*Елемент системи автоматичного керування, що розглядається з точки зору його динамічних властивостей, називається динамічною ланкою.*

Будь-який складний автоматичний пристрій, у тому числі систему автоматичного керування, можна представити у вигляді з'єднання типових або *елементарних* динамічних ланок. Незважаючи на різноманіття систем, кількість елементарних динамічних ланок порівняно невелика.

#### 3.1.1 Безінерційна підсилювальна ланка

Безінерційними (ідеальними) підсилювальними ланками називаються елементи автоматичних пристроїв, у яких вихідна величина в будь-який момент часу пропорційна вхідному сигналу

$$a_0 y(t) = b_0 r(t) \Leftrightarrow Y(s) = kR(s), \quad (3.1)$$

де  $k = \frac{b_0}{a_0}$  – статичний передатний коефіцієнт ланки (коефіцієнт підсилення).

Таким чином, передатна функція ідеальної підсилювальної ланки має вигляд

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = k. \quad (3.2)$$



Структурну схему ланки показано на рис. 3.1, а.

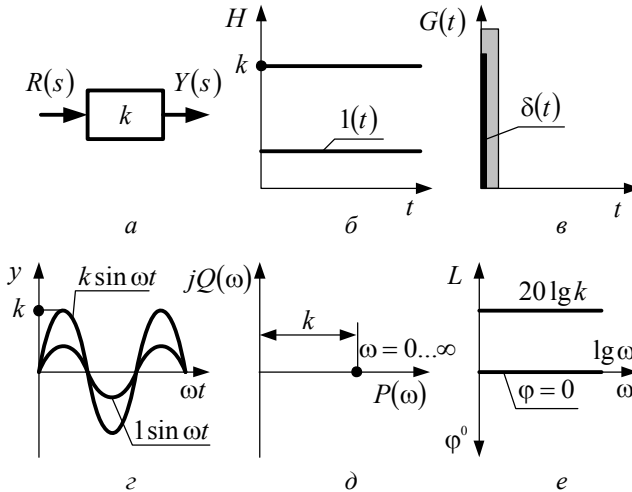


Рис. 3.1. Характеристики безінерційної підсилювальної ланки

Якщо на вході безінерційної підсилювальної ланки діє одинична ступінчаста функція  $1(t)$ , то на її виході миттєво встановлюється величина, яка дорівнює  $k$ . Отже, перехідна функція (рис. 3.1, б) ланки дорівнює

$$H(t) = k. \quad (3.3)$$

Якщо на вході безінерційної підсилювальної ланки діє одиничний імпульс  $\delta(t)$ , то на виході також виникає імпульс, але його потужність дорівнюватиме не одиниці, а  $k$ . Таким чином, функція ваги (рис. 3.1, в) безінерційної підсилювальної ланки

$$G(t) = k\delta(t). \quad (3.4)$$

Під впливом одиничного синусоїдального сигналу на виході безінерційної підсилювальної ланки встановлюються вимушені коливання (рис. 3.1, г) тієї ж фази, що й коливання на вході, але їх амплітуду буде змінено в  $k$  раз

$$y(t) = k \sin \omega t. \quad (3.5)$$

Частотну передатну функцію ланки знаходимо після формаль -

ної заміни в передатній функції (3.2) оператора  $s$  на  $j\omega$

$$W(s) \Rightarrow W(j\omega) = k + j0. \quad (3.6)$$

Відповідно до (3.6) амплітудно-фазова частотна характеристика безінерційної підсилювальної ланки являє собою (рис.3.1,  $\delta$ ) точку з координатами  $P(\omega) = k$ ;  $Q(\omega) = 0$ . Це означає, що у разі зміни частоти вхідного сигналу від 0 до  $\infty$  амплітуда сигналу на виході не змінюється і дорівнює  $Y_m(\omega) = k$ , а фазовий зсув між вихідною і вихідною величинами на усіх частотах буде відсутній  $\phi(\omega) = 0$ .

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg Y_m(\omega) = 20 \lg k \quad (3.7)$$

являє собою пряму паралельну вісі абсцис (рис. 3.1,  $e$ )

Прикладами ланок, найближчих до ідеальних безінерційних, є: електричний ланцюг з активним опором, редуктори (без люфту), електронні та напівпровідникові підсилювачі, поворотні трансформатори, потенціометричні датчики та багато інших пристроїв, інерційністю яких з достатньою для практики точністю можна знехтувати.

Окремим випадком ідеальної безінерційної ланки є *інверторна ланка*, передатний коефіцієнт якої дорівнює  $k = (-1)$ . Інверторна ланка змінює знак (фазу) вхідного сигналу, не змінюючи його величини

$$y(t) = -r(t).$$

Інверторними ланками є, наприклад, редуктори, що складаються з двох однакових шестерень, важелі першого роду із співвідношенням плечей 1:1, блоки зміни знаку в ЕОМ тощо.

### 3.1.2 Інерційна ланка першого порядку

Інерційними ланками першого порядку називаються елементи автоматичних пристроїв, динамічні властивості яких описуються лінійними диференціальними рівняннями першого порядку

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 r(t) \Leftrightarrow (a_1 s + a_0) Y(s) = b_0 R(s). \quad (3.8)$$

Знайдемо передатну функцію ланки як відношення зображення

вихідної величини до зображення вхідної величини

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{k}{Ts + 1}, \quad (3.9)$$

де  $k = \frac{b_0}{a_0}$  – статичний передатний коефіцієнт;  $T = \frac{a_1}{a_0}$  – постійна часу, що має розмірність, *c*. Структурну схему ланки наведено на рис. 3.2, *a*.

Перехідна функція інерційної ланки першого порядку визначається загальним розв'язанням диференціального рівняння (3.8), яке для випадку одиничного ступінчатого сигналу має вигляд

$$H(t) = Ce^{\lambda t} + k,$$

де  $\lambda = -\frac{1}{T}$  – корінь характеристичного рівняння  $T\lambda + 1 = 0$ .

Вважаючи початкові умови нульовими, знаходимо постійну інтегрування

$$0 = Ce^{\lambda \cdot 0} + k \Rightarrow C = -k.$$

Отже,

$$H(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (3.10)$$

Таким чином, вихідна величина інерційної ланки першого порядку при одиничному ступінчатому вхідному сигналі змінюється за експонентним законом (рис. 3.2, *б*), причому ланка тим повільніше реагує на вхідний сигнал, чим більша її постійна часу  $T$ .

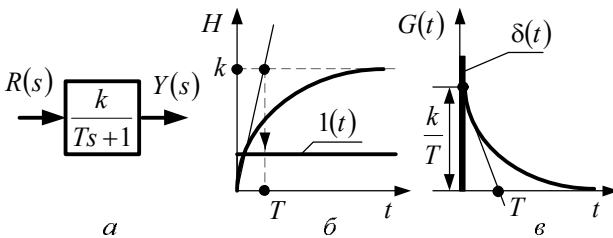


Рис. 3.2. Динамічні характеристики інерційної ланки першого порядку

Теоретично вихідна величина досягає сталого значення  $k$ , якщо  $t = \infty$ , однак, вже при  $t = (3 \dots 4)T$ , можна вважати, що перехідний процес в інерційній ланці першого порядку закінчується, тому що  $y(t) \approx 98\%k$ .

Функцію ваги знайдемо, диференціюючи перехідну функцію (3.10)

$$G(t) = sH(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (3.11)$$

Отже, реакція ланки на одиничний імпульс  $\delta(t)$  загасає за експонентним законом (рис. 3.2, в).

У разі подачі на вхід інерційної ланки першого порядку одиничного гармонійного збурення на виході також встановляться гармонійні коливання (рис. 3.3), амплітуда і фаза яких залежатимуть від частоти вхідного сигналу

$$y(t) = Y_m(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)].$$

Амплітуда і фаза вимушених коливань визначаються за амплітудно-фазовою частотною характеристикою ланки

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}.$$

Розділяючи дійсну і уявну частини, отримуємо

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}, \quad (3.12)$$

де

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}; \quad Q(\omega) = \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Маючи значення  $P(\omega)$  і  $Q(\omega)$ , визначаємо амплітуду вимушених коливань

$$Y_m(\omega) = \sqrt{P(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad (3.13)$$

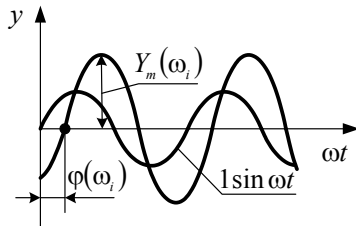


Рис. 3.3. Реакція інерційної ланки першого порядку на гармонійний сигнал

та їх фазу

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg \omega T. \quad (3.14)$$

Отже, при збільшенні частоти  $\omega$  збурення амплітуда вимушених коливань зменшується, а зсув фаз між вхідними та вихідними коливаннями збільшується.

Неважко переконатися, що у діапазоні зміни частоти від 0 до  $\infty$  амплітудно-фазова частотна характеристика інерційної ланки першого порядку представляє собою півколо, яке розташоване в IV квадранті (рис. 3.4, а) комплексної площини  $P(\omega) \rightarrow jQ(\omega)$ . Радіус півкола дорівнює  $\frac{k}{2}$ , а центр має координати  $\left(\frac{k}{2}, j0\right)$ .

Дійсно, розв'язуючи вирази для  $P(\omega)$  і  $Q(\omega)$  відносно  $\omega$  і прирівнюючи результати, отримуємо після простих перетворень параметричне рівняння кола вигляду

$$\left(P - \frac{k}{2}\right)^2 + Q^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2,$$

яке відповідає представлений на рис. 3.4, а амплітудно-фазовій частотній характеристиці та дозволяє визначити  $Y_m$ ,  $\varphi$ ,  $P$  і  $Q$  для будь-яких значень  $0 < \omega < +\infty$ .

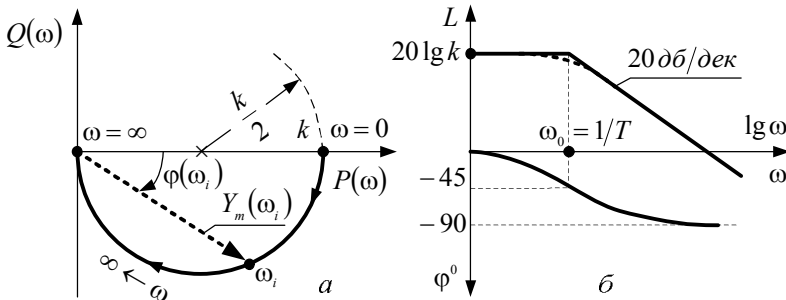


Рис. 3.4. Частотні характеристики інерційної ланки першого порядку:  
а - АФЧХ; б - ЛАЧХ

Відповідно до залежностей (3.13) і (3.14) можна побудувати логарифмічні частотні характеристики ланки.

Логарифмуючи рівняння (3.13), одержимо рівняння логарифміч-

ної амплітудно-частотної характеристики (ЛАЧХ)

$$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg(1 + \omega^2 T^2). \quad (3.15)$$

Характеристику показано на рис. 3.4, б.

При малій частоті вхідного сигналу, коли  $L(\omega) \approx 20 \lg k$ , ЛАЧХ паралельна вісі абсцис; а при великій частоті вхідного сигналу, коли  $T^2 \omega^2 \gg 1$  й  $L(\omega) \approx 20 \lg k - 20 \lg \omega T$ , ЛАЧХ є пряма з від'ємним нахилом  $20 \text{ дб/дек}$ . Отже, у практичних розрахунках ЛАЧХ інерційної ланки першого порядку можна, приблизно, представити у вигляді ламаної лінії, яка складається із двох асимптот.

Асимптоти перетинаються при частоті  $\omega_0 = \frac{1}{T}$ , коли  $\lg \omega T = 0$ . У точці перетину має місце найбільша розбіжність між справжньою і асимптотичною характеристиками, яка приблизно дорівнює  $3 \text{ дб}$ .

На рис. 3.4, б показано також фазову частотну характеристику, яка має вигляд арктангенсоїди у четвертому квадранті. Якщо

$\omega_0 = \frac{1}{T}$  фазове запізнювання ланки складає  $\varphi(\omega_0) = -45^\circ$ .

Прикладами інерційних ланок першого порядку є: електричний двигун незалежного збудження, ланцюг постійного струму з активним опором і індуктивністю, маховик з моментом інерції, магнітний підсилювач зі зворотним зв'язком за струмом та ін.

### 3.1.3 Інерційна ланка другого порядку

Інерційними ланками другого порядку називаються елементи автоматичних пристроїв, динамічні властивості яких описуються лінійними диференціальними рівняннями другого порядку

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 r(t) \Leftrightarrow (a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = b_0 R(s).$$

Відповідно до рівняння руху ланки, знайдемо її передатну функцію

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}, \quad (3.16)$$

де  $k = \frac{b_0}{a_0}$  – статичний передатний коефіцієнт (коефіцієнт підсилення);  $T_2 = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$ ;  $T_1 = \frac{a_1}{a_0}$  – постійні часу.

У ряді випадків диференціальне рівняння інерційної ланки другого порядку записують, використовуючи одну постійну часу  $T = T_2$

$$(T^2 s^2 + 2Td_0s + 1)Y(s) = kR(s), \quad (3.17)$$

де  $d_0 = \frac{T_1}{2T_2}$  – коефіцієнт загасання коливань.

Інколи буває доцільно приведення рівняння до так званого «нормованого» вигляду

$$(s^2 + 2\omega_0 d_0 s + \omega_0^2)Y(s) = k\omega_0^2 R(s), \quad (3.18)$$

де  $\omega_0 = \frac{1}{T_2}$  – кутова частота власних коливань ланки за відсутності загасання, тобто коли  $d_0 = 0$ . Структурні схеми ланки показано на рис. 3.5.

Перехідна функція ланки у загальному випадку визначається як

$$R(s) \rightarrow \left[ \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \right] Y(s) \quad H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + k. \quad (3.19)$$

Вважаючи початкові умови нульовими  $y(t)|_{t=0} = 0$ ;  $y'(t)|_{t=0} = 0$ , маємо

$$R(s) \rightarrow \left[ \frac{k}{T^2 s^2 + 2Td_0 s + 1} \right] Y(s) \quad \left. \begin{aligned} C_1 + C_2 + k &= 0 \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

$$R(s) \rightarrow \left[ \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0 d_0 s + \omega_0^2} \right] Y(s) \quad \left. \begin{aligned} C_1 + C_2 + k &= 0 \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Рис. 3.5. Структурні схеми інерційної ланки другого порядку

Розв'язуючи спільно рівняння (3.20), знаходимо постійні інтегрування

$$C_1 = \frac{\lambda_2 k}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad C_2 = \frac{-\lambda_1 k}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Таким чином,

$$H(t) = \frac{k}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[ \lambda_1 (1 - e^{\lambda_2 t}) - \lambda_2 (1 - e^{\lambda_1 t}) \right]. \quad (3.21)$$

Розв'язок характеристичного рівняння  $T_2^2 s^2 + T_1 s + 1 = 0$  дозволяє знайти його корені

$$\lambda_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2}. \quad (3.22)$$

Залежно від співвідношення між постійними часу  $T_1$  і  $T_2$  змінюється характер коренів  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ , а отже, і вигляд перехідної функції ланки. Розглянемо три основні випадки.

а)  $T_1 > 2T_2$ . Якщо  $T_1 > 2T_2$  ( $d_0 > 1$ ) корені характеристичного рівняння дійсні від'ємні

$$\lambda_1 = -\alpha_1 \text{ і } \lambda_2 = -\alpha_2.$$

У цьому випадку перехідна функція (3.21) матиме вигляд

$$H(t) = \frac{k}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[ \alpha_2 (1 - e^{-\alpha_1 t}) - \alpha_1 (1 - e^{-\alpha_2 t}) \right]. \quad (3.23)$$

Вираз (3.23) описує різницю двох експонент, які прагнуть до сталого значення  $H(\infty) = k$ . Отже, в інерційній ланці другого порядку якщо  $T_1 > 2T_2$  перехідна функція змінюється за аперіодичним законом (рис. 3.6, а).

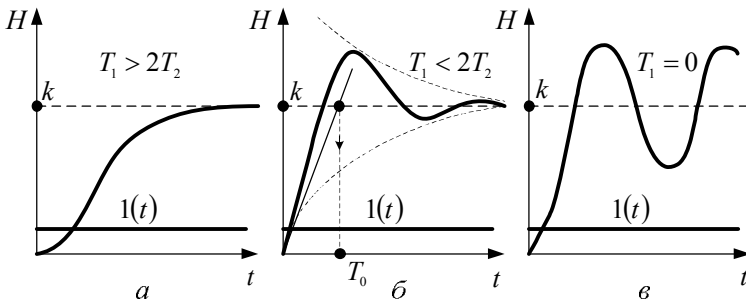


Рис. 3.6. Перехідні функції інерційної ланки другого порядку



Ланка другого порядку, перехідна функція якої змінюється аперіодично, називається аперіодичною ланкою другого порядку.

Аперіодичну ланку другого порядку можна представити як послідовний ланцюжок двох інерційних ланок першого порядку. Дійсно, якщо відомі диференціальні рівняння двох інерційних ланок першого порядку

$$\begin{aligned}(T's + 1)Y_1(s) &= k'R(s) \\ (T''s + 1)Y(s) &= k''Y_1(s),\end{aligned}$$

то, виключаючи проміжну величину  $Y_1(s)$ , маємо

$$(T's + 1)(T''s + 1)Y(s) = k'k''R(s) \Rightarrow [T'T''s^2 + (T' + T'')s + 1]Y(s) = k'k''R(s).$$

Позначаючи  $T'T'' = T_2^2$ ;  $T' + T'' = T_1$ ;  $k'k'' = k$ ,

одержимо рівняння аперіодичної ланки другого порядку

$$(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)Y(s) = kR(s).$$

б)  $T_1 < 2T_2$ . У разі  $T_1 < 2T_2$  ( $d_0 < 1$ ) корені характеристичного рівняння спряжені комплексні

$$\lambda_1 = -\alpha + j\beta; \quad \lambda_2 = -\alpha - j\beta,$$

де

$$\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2} = \frac{1}{T_0}, \quad j\beta = \frac{\sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}.$$

Для цього виду коренів перехідна функція (3.21) матиме вигляд

$$H(t) = k \left[ 1 - e^{-\frac{t}{T_0}} \left( \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right].$$

Позначаючи  $\frac{\alpha}{\beta} = \text{ctg} \psi$  і  $k_1 = \frac{1}{\sin \psi}$ , де  $\psi = \text{arcctg} \frac{\alpha}{\beta}$ , отримаємо остаточно

$$H(t) = k \left[ 1 - k_1 e^{-\frac{t}{T_0}} \sin(\beta t + \psi) \right]. \quad (3.24)$$

Таким чином, перехідна функція являє собою синусоїдальні затухаючі коливання (рис. 3.6, б). Кутова частота цих коливань дорівнює уявній частині коренів характеристичного рівняння, а амплітуда зменшується за експоненціальним законом тим швидше, чим більша у кореня дійсна частина  $\alpha = \frac{T_1}{2T_2^2} = \frac{1}{T_0}$ , де  $T_0$  – постійна часу огинаючої експоненти.

Ланка другого порядку, перехідна функція якої являє собою затухаючі коливання, називається коливальною ланкою.

в)  $T_1 = 0$ . В окремому випадку, коли  $T_1 = 0$  і немає демпфірування коливань, корені характеристичного рівняння виявляються уявними спряженими

$$\lambda_1 = +j\beta; \lambda_2 = -j\beta, \text{ де } \beta = \frac{1}{T_2} = \omega_0.$$

Перехідна функція для цього випадку дорівнює

$$H(t) = k(1 - \cos \omega_0 t) \quad (3.25)$$

і являє собою (рис. 3.6, в) незгасаючі коливання з кутовою частотою  $\omega_0$ .

Ланка другого порядку, перехідна функція якої являє собою незгасаючі гармонійні коливання, називається гармонійною ланкою.

Таким чином, характер перехідних функцій інерційної ланки другого порядку залежить від значення коефіцієнта загасання  $d_0$  (рис. 3.7), яке в свою чергу визначається співвідношенням постійних часу  $T_1$  і  $T_2$ . Вірний вибір параметрів ланки дозволяє отримати необхідний характер перехідної функції.

Реакції інерційної ланки другого порядку на одиничний імпульс  $\delta(t)$  отримаємо, диференціюючи перехідні функції (3.23), (3.24), (3.25).

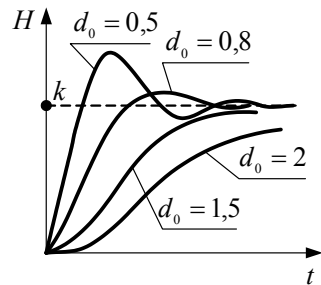


Рис. 3.7. Вплив коефіцієнта загасання на перехідну функцію

Для розглянутих трьох окремих випадків маємо

$$T_1 > 2T_2 \Rightarrow G(t) = k \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}); \quad (3.26)$$

$$T_1 < 2T_2 \Rightarrow G(t) = k \frac{\omega_0^2}{\beta} e^{-\frac{t}{T_0}} \sin \beta t; \quad (3.27)$$

$$T_1 = 0 \Rightarrow G(t) = k \omega_0 \sin \omega_0 t. \quad (3.28)$$

Відповідні функції ваги показано на рис. 3.8.

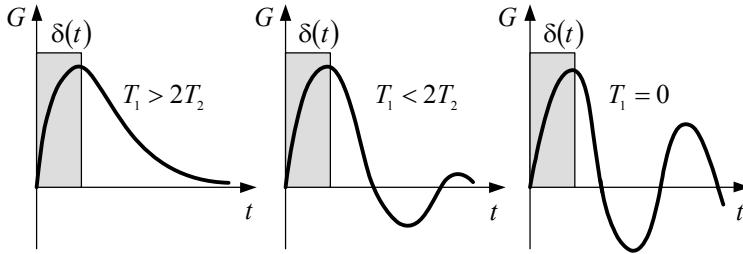


Рис. 3.8. Функції ваги інерційної ланки другого порядку

Знаючи передатну функцію (3.16) ланки, знаходимо її частотну передатну функцію

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - T_2^2 \omega^2) + jT_1 \omega}. \quad (3.29)$$

Позбавляємося від ірраціональності у знаменнику і отримуємо

$$W(j\omega) = \frac{k(1 - T_2^2 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2} - j \frac{kT_1 \omega}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}, \quad (3.30)$$

де 
$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_2^2 \omega^2)}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}; \quad Q(\omega) = -\frac{kT_1 \omega}{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Рівняння (3.30) дозволяють побудувати (рис. 3.9, а) амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ) розглянутої ланки у разі зміни частоти вхідного сигналу від 0 до  $\infty$ .

Амплітуду і фазу вимушених коливань на виході інерційної ланки другого порядку визначимо як

$$Y_m(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}; \quad (3.31)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg \left( \frac{T_1 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2} \right). \quad (3.32)$$

Аналіз показує, що АФЧХ розташовано у четвертому і третьому квадрантах комплексної площини  $P(\omega) \rightarrow jQ(\omega)$ .

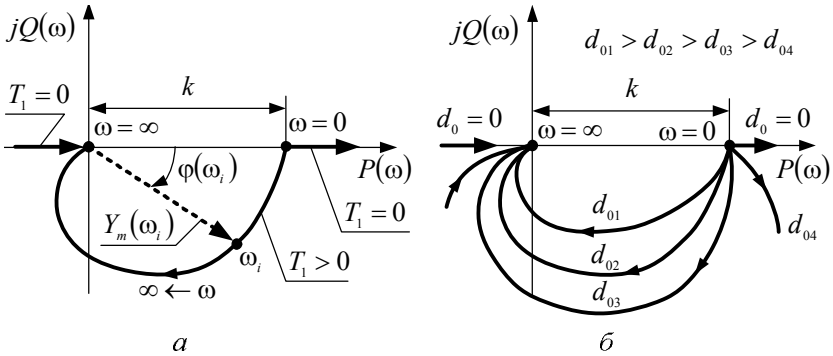


Рис. 3.9. АФЧХ інерційної ланки другого порядку

Якщо  $T_1 > 0$  уявна частина  $Q(\omega) < 0$ , а отже  $\varphi(\omega) < 0$ . Це означає, що вимушені коливання на виході ланки завжди відстають від синусоїдального сигналу на її вході. По мірі збільшення частоти фазове запізнювання збільшується і у разі  $\omega = \infty$  стає рівним  $-\pi$ .

Якщо коефіцієнт загасання  $d_0 \geq 1$ , то амплітуда  $Y_m(\omega)$  із збільшенням частоти безперервно зменшується від значення  $Y_m(\omega) = k$  якщо  $\omega = 0$  до  $Y_m(\omega) = 0$  якщо  $\omega = \infty$ .

Якщо коефіцієнт загасання  $d_0 < 1$ , то у діапазоні частот близькому до власної частоти ланки  $\omega_0 = \frac{1}{T_2}$  амплітуда  $Y_m(\omega)$  вимуше-

них коливань на виході ланки збільшується і стає більшою за  $k$ , тобто має місце резонансний пік амплітуди.

У разі  $d_0 = 0$  ( $T_1 = 0$ ), то при частоті  $\omega_0$  відбувається розрив функції  $Y_m(\omega)$ , оскільки для цієї частоти амплітуда вимушених коливань стає рівною нескінченності. Вплив змін коефіцієнта загасання  $d_0$  на АФЧХ показано на рис. 3.9, б.

Логарифмічні амплітудні і фазові частотні характеристики ланки представлено на рис. 3.10.

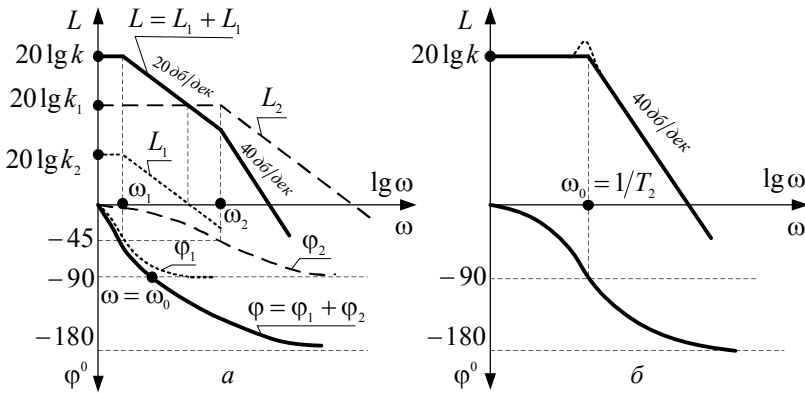


Рис. 3.10 Логарифмічні характеристики інерційної ланки другого порядку:  $a$  – аперіодичної;  $б$  – коливальної

Оскільки аперіодичну ланку другого порядку можна представити послідовним з'єднанням двох інерційних ланок першого порядку, то її амплітудну і фазову логарифмічні частотні характеристики отримуємо з точками зламу  $\omega_1 = \frac{1}{T'}$  і  $\omega_2 = \frac{1}{T''}$  як суму логарифмічних характеристик двох інерційних ланок (рис. 3.10,  $a$ ).

Логарифмічну амплітудну частотну характеристику коливальної ланки можна отримати в результаті логарифмування виразу (3.31)

$$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg \left[ (1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2 \right]. \quad (3.33)$$

Як і для інерційної ланки першого порядку, справжню ЛАЧХ коливальної ланки зазвичай заміняють наближеною асимптотичною характеристикою.

При малій частоті вхідного сигналу  $L(\omega) \approx 20 \lg k$ , тому що  $\left[ (1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2 \right] \approx 1$ . Отже, асимптота ЛАЧХ паралельна вісі абсцис.

При великій частоті вхідного сигналу  $L(\omega) \approx 20 \lg k - 40 \lg T_2 \omega$ , тому що  $\left[ (1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2 \right] \approx T_2^4 \omega^4$ . Асимптота ЛАЧХ являє собою пряму з від'ємним нахилом  $40 \frac{дб}{дек}$ . Асимптоти перетинаються при частоті  $\omega_0 = \frac{1}{T_2}$ , коли  $\lg T_2 \omega = 0$ . Заміна справжньої характеристики асимптотичною ламаною характеристикою проводиться з певною помилкою, величина якої залежить від коефіцієнта  $d_0$  заганяння.

Прикладами інерційних ланок другого порядку є електромашинний підсилювач, електричний ланцюг постійного струму з активним опором, індуктивністю і ємністю, двоступеневий гіроскоп тощо.

### 3.1.4 Диференціююча ланка

Ідеальними диференціюючими ланками називаються елементи автоматичних пристроїв, вихідна величина яких є похідною від вхідної величини

$$a_0 y(t) = b_0 \frac{dr(t)}{dt} \Leftrightarrow a_0 Y(s) = b_0 s R(s). \quad (3.34)$$

Передатна функція ланки

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{a_0} s = ks, \quad (3.35)$$

де  $k = \frac{b_0}{a_0}$  – статичний передатний коефіцієнт. Структурну схему ланки показано на рис. 3.11, а.

Знайдемо реакцію диференціюючої ланки на одиничну ступінчасту функцію

$$H(s) = ks \frac{1}{s} = k, \quad (3.36)$$

де  $\frac{1}{s} \rightarrow 1(t)$ .

Застосовуючи до (3.36) зворотне перетворення Лапласа, отримуємо

$$H(t) = k\delta(t). \quad (3.37)$$

Таким чином, у разі впливу на вхід ланки одиничної ступінчастої функції на її виході виникне миттєво діючий імпульс потужністю  $k$ , з амплітудою, яка прагне до нескінченності (рис. 3.11, б).

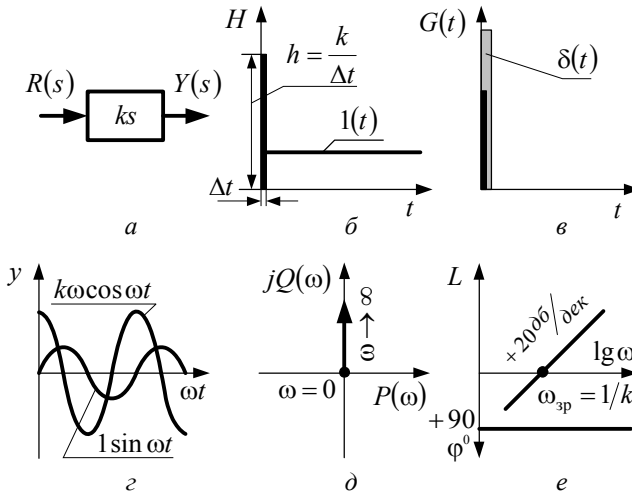


Рис. 3.11. Характеристики диференціюючої ланки

Диференціюванням перехідної функції (3.37) визначаємо функцію ваги

$$G(t) = sH(t) = k\delta_2(t). \quad (3.38)$$

Отже, реакція ланки на одиничний імпульс  $\delta(t)$  є імпульсний сигнал (рис. 3.11, в) другого порядку потужністю  $k$ .

Вимушені коливання на виході ідеальної диференціуючої ланки

$$y(t) = k \frac{d1 \sin \omega t}{dt} = k\omega \cos \omega t \quad (3.39)$$

мають амплітуду, посилену в  $k\omega$  разів, і фазовий зсув  $\varphi(\omega) = +\frac{\pi}{2}$  (рис. 3.11, з).

Амплітудно-фазова частотна характеристика (рис. 3.11, д) ідеальної диференціуючої ланки

$$W(j\omega) = jk\omega \quad (3.40)$$

є пряма, яка збігається з позитивним напрямком уявної вісі комплексної площини  $P(\omega) \rightarrow jQ(\omega)$ .

Амплітуда вимушених коливань

$$Y_m(\omega) = \sqrt{0^2 + (k\omega)^2} = k\omega, \quad (3.41)$$

а їх фаза

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{k\omega}{0} = \arctg \infty = +\frac{\pi}{2}. \quad (3.42)$$

Логарифмуючи вираз (3.41), отримаємо

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \omega. \quad (3.43)$$

Оскільки  $\lg \omega$  – незалежна змінна, то графік ЛАЧХ є пряма з нахилом  $20 \text{ дб/дек}$ . Частота зрізу визначається з умови

$$L(\omega) = 0 \Rightarrow \lg k = -\lg \omega \Rightarrow \omega_{\text{зр}} = \frac{1}{k}.$$

Логарифмічні характеристики ідеальної диференціуючої ланки показано на рис. 3.11, е.

Прикладами диференціуючих ланок можуть служити тахогенератор, гіроскопічний тахометр, трансформатор, що диференціює тощо.



### 3.1.5 Інтегруюча ланка

Ідеальними інтегруючими ланками називаються елементи автоматичних пристроїв, вихідна величина яких пропорційна інтегралу від вхідної величини

$$a_0 y(t) = b_0 \int r(t) dt \Leftrightarrow a_0 Y(s) = b_0 \frac{1}{s} R(s). \quad (3.44)$$

Передатна функція ланки

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{s}, \quad (3.45)$$

де  $k = \frac{b_0}{a_0}$  – статичний передатний коефіцієнт. Структурну схему ланки наведено на рис. 3.12, а.

Реакція інтегруючої ланки на одиничну ступінчасту функцію  $1/s \rightarrow 1(t)$ :

$$H(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{s^2} \rightarrow H(t) = kt. \quad (3.46)$$

Таким чином, при впливі на вхід ланки одиничної ступінчастої функції на її виході виникне лінійно зростаючий сигнал (рис. 3.12, б).

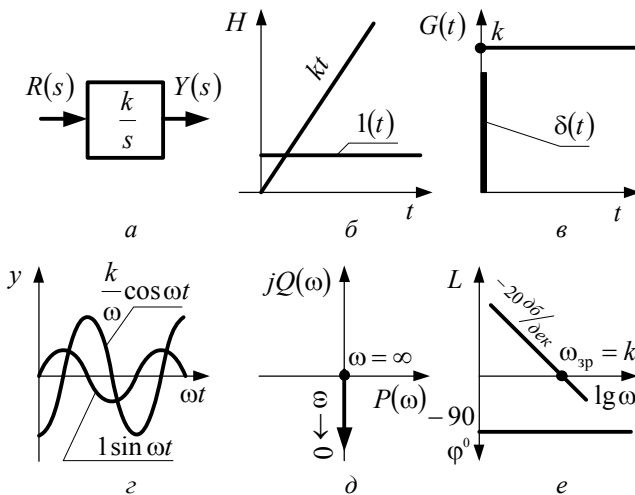


Рис. 3.12. Характеристики інтегруючої ланки

Диференціюванням перехідної функції (3.46) визначаємо функцію ваги

$$G(t) = skt = k \frac{dt}{dt} = k. \quad (3.47)$$

Отже, вплив одиничного імпульсу  $\delta(t)$  на вхід ідеальної інтегруючої ланки викликає ступінчасту зміну вихідного сигналу на величину  $k$  (рис. 3.12, в).

Вимушені коливання на виході ідеальної інтегруючої ланки

$$y(t) = k \int 1 \sin \omega t dt = -\frac{k}{\omega} \cos \omega t \quad (3.48)$$

мають амплітуду, посилену в  $\frac{k}{\omega}$  разів, і фазовий зсув  $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$  (рис. 3.12, з).

Амплітудно-фазова частотна характеристика (рис. 3.12, д) ідеальної інтегруючої ланки

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega} \quad (3.49)$$

є пряма, яка збігається з від'ємним напрямом уявної вісі комплексної площини  $P(\omega) \rightarrow jQ(\omega)$ .

Амплітуда вимушених коливань

$$Y_m(\omega) = \sqrt{0^2 + \frac{k^2}{\omega^2}} = \frac{k}{\omega}, \quad (3.50)$$

а їх фаза

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{k}{\omega}\right) \cdot \frac{1}{0} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}. \quad (3.51)$$

Логарифмуючи вираз (3.50), отримаємо

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \quad (3.52)$$

Отже, ЛАЧХ ідеальної інтегруючої ланки є пряма з нахилом  $-20 \text{ дБ/дек}$ . Частота зрізу визначається з умови

$$L(\omega) = 0 \Rightarrow \lg k = \lg \omega \Rightarrow \omega_{\text{зр}} = k.$$

Логарифмічні характеристики ідеальної інтегруючої ланки показано на рис. 3.12, е.

Прикладами інтегруючих ланок є інтегруючий  $R - C$  контур, керований гідравлічний циліндр, вал, редуктор, передача тощо.

### 3.2 Структурні схеми і графи

Залежно від структури будь-яку систему автоматичного керування можна представити з'єднанням динамічних ланок, які входять до її складу. З'єднання ланок має якісно нові динамічні і статичні характеристики, відмінні від їх власних.

Графічне представлення системи у вигляді з'єднаних між собою динамічних ланок називається *структурною схемою системи*. Структурна схема тотожна структурному зображенню системи диференціальних рівнянь, які описують рух елементів систем автоматичного керування.

Застосування апарату структурних зображень дозволяє за допомогою простих правил перетворити структурну схему системи до еквівалентного вигляду, визначити по ньому її передатні функції і отримати рівняння руху.

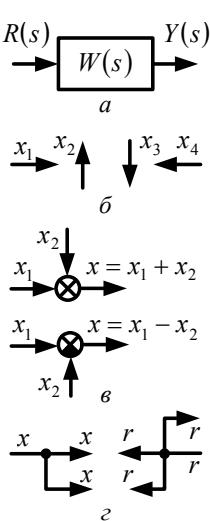


Рис. 3.13. Елементи структурних схем

Основними елементами структурних схем є:

- *динамічні ланки* спрямованої дії з відомими передатними функціями; структурна схема ланки зображується прямокутником, всередині якого записана його передатна функція (рис. 3.13, а);
- *лінії зв'язку*, що вказують напрямок передачі впливу; позначаються лініями із стрілками по напрямку проходження сигналу (рис. 3.13, б);
- *суматори*, що забезпечують алгебричне підсумовування вхідних впливів; позначаються кружечком розділеним на чотири сектори (рис. 3.13, в); якщо вплив має знак «мінус», то сектор суматора на який він надходить штрихується;
- *вузли розгалуження* впливів на два і більше напрямків; позначаються точками (рис. 3.13, г).

З'єднання динамічних ланок у структурних схемах можуть бути: послідовними, рівнобіжними, зустрічно-

рівнобіжними, складними з перехресними зв'язками. Як приклад, на рис. 3.14 показано структурну схему системи.

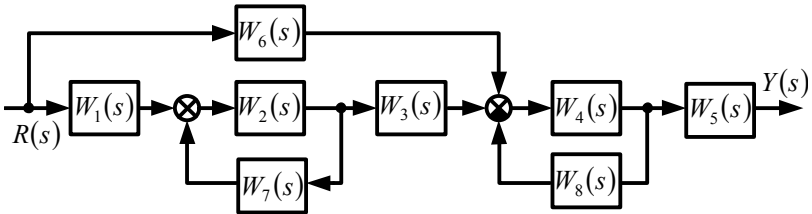


Рис. 3.14. Структурна схема системи

Інший спосіб графічного представлення з'єднаних між собою динамічних ланок засновано на використанні *сигнальних графів*. Граф, як і структурна схема являє собою математичну модель системи. Сигнальний граф, який відповідає структурній схемі (рис. 3.14) показано на рис. 3.15.

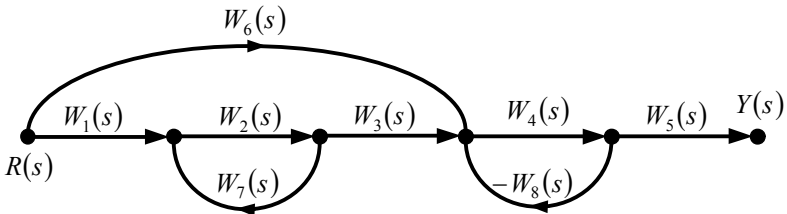


Рис. 3.15. Граф системи

Граф складається з дуг і вершин:

– *дуга* зображується відрізком прямої або кривої із стрілкою, що вказує напрямок проходження сигналу (рис. 3.16, а); дуга відповідає динамічній ланці і характеризується передатною функцією; починається і закінчується дуга у вершині;

– *вершина* зображується точкою і представляє змінну (рис. 3.16, б); якщо до вершини підходить тільки одна дуга (рис. 3.16, в), то змінна, що відповідає вершині, вважається вихідною величиною дуги; якщо ж у вершині сходяться кілька дуг (рис. 3.16, з), то відповідна їй змінна дорівнює сумі вихідних змінних цих дуг; якщо з вершини виходять кілька дуг (рис. 3.16, д), то вхідна змінна усіх цих дуг та ж сама.

Вершина графа, що має тільки дуги які виходять з неї, визначає зовнішню змінну і називається *вхідною вершиною графа*.

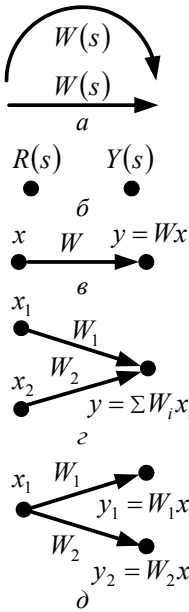


Рис. 3.16. Елементи сигнальних графів

Граф зручний тим, що дозволяє обчислювати передатну функцію системи без будь-яких попередніх перетворень моделі. Разом з тим для розрахунку еквівалентної передатної функції по сигнальному графу можна скористатися і правилами перетворення структурних схем.

### 3.3 Перетворення структурних схем

Для визначення основних передатних функцій досліджуваної системи доводиться перетворювати її структурну схему до найпростішого (еквівалентного) вигляду. Під час таких перетворень проводиться зміна порядку підсумовування сигналів, перенесення точок підсумовування і точок відбору сигналів, заміна різних з'єднань ланок однією еквівалентною ланкою і інші операції. Розглянемо основні правила перетворення структурних схем.

#### 3.3.1 Послідовне з'єднання ланок

При послідовному з'єднанні ланок вхідна величина кожної наступної ланки є вихідною величиною ланки, яка їй передус.

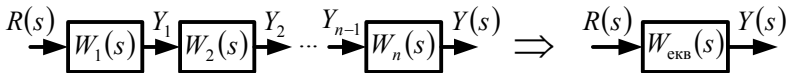


Рис. 3.17. Послідовне з'єднання ланок

Вважаючи диференціальні рівняння ланок відомими, запишемо

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= W_1(s)R(s); \\ Y_2 &= W_2(s)Y_1; \\ &\dots \\ Y(s) &= W_n(s)Y_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Послідовно виключаючи із системи диференціальних рівнянь (3.53) проміжні змінні

$$Y_2 = W_2(s)W_1(s)R(s) \Rightarrow Y_3 = W_3(s)Y_2 = W_3(s)W_2(s)W_1(s)R(s) \text{ і т.д.,}$$

отримуємо рівняння руху системи, яка розглядається

$$Y(s) = W_n(s)W_{n-1}(s) \dots W_2(s)W_1(s)R(s). \quad (3.54)$$

Відповідно до (3.54) запишемо

$$W_{\text{екв}}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \prod_1^n W_i(s). \quad (3.55)$$

Таким чином, *еквівалентна передатна функція послідовного з'єднання дорівнює добутку передатних функцій послідовно включених ланок.*

У результаті проведених змін структурна схема системи перетворюється до еквівалентного вигляду, який показано на рис. 3.17.

Амплітудно-фазову частотну характеристику послідовного з'єднання отримаємо, зробивши підстановку  $s = j\omega$  в (3.55)

$$W_{\text{екв}}(j\omega) = \prod_1^n W_i(j\omega).$$

Так як

$$W_{\text{екв}}(j\omega) = Y_{m\Sigma}(\omega) e^{j\varphi_\Sigma(\omega)},$$

то амплітуда  $Y_{m\Sigma}(\omega)$  і фаза  $\varphi_\Sigma(\omega)$  вихідної величини з'єднання визначаються за правилом множення комплексних чисел

$$Y_{m\Sigma}(\omega) = Y_{m1}(\omega)Y_{m2}(\omega)\dots Y_{mn}(\omega) = \prod_1^n Y_{mi}(\omega); \quad (3.56)$$

$$\varphi_\Sigma(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2 + \dots + \varphi_n(\omega) = \sum_1^n \varphi_i(\omega). \quad (3.57)$$

Для аналізу послідовного з'єднання ланок вельми зручні логарифмічні частотні характеристики, так як у цьому випадку сумарну логарифмічну амплітудно-частотну характеристику

$$L_\Sigma(\omega) = 20 \lg Y_{m\Sigma}(\omega)$$

можна визначити відповідно до (3.56) як суму логарифмічних амплі-

тудно-частотних характеристик послідовно включених ланок

$$L_{\Sigma}(\omega) = L_1(\omega) + L_2 + \dots + L_n(\omega) = \sum_1^n L_i(\omega). \quad (3.58)$$

Заміна добутку амплітуд вихідних величин ланок сумою їх логарифмів істотно спрощує розрахунки.

### 3.3.2 Рівнобіжне з'єднання ланок

При рівнобіжному з'єднанні на вході усіх ланок діє один і той же вхідний сигнал, а вихідні величини окремих ланок після додавання утворюють вихідну величину з'єднання (рис. 3.18). Додавання вихідних величин окремих ланок проводиться з урахуванням їх знака (фази).

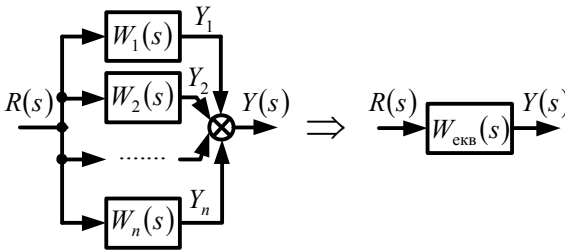


Рис. 3.18. Рівнобіжне з'єднання ланок

Рівняння руху рівнобіжного з'єднання має вигляд

$$Y(s) = W_1(s)R(s) + W_2(s)R(s) + \dots + W_n(s)R(s). \quad (3.59)$$

Отже, передатна функція з'єднання

$$W_{\text{екв}}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = W_1(s) + W_2(s) + \dots + W_n(s) = \sum_1^n W_i(s). \quad (3.60)$$

Таким чином, *еквівалентна передатна функція рівнобіжного з'єднання дорівнює сумі передатних функцій рівнобіжно включених ланок.*

Амплітуда  $Y_{m\Sigma}(\omega)$  і фаза  $\varphi_{\Sigma}(\omega)$  вихідної величини з'єднання визначаються виходячи з АФЧХ

$$W_{\text{екв}}(j\omega) = Y_{m\Sigma}(\omega)e^{j\varphi_{\Sigma}(\omega)}$$

за правилом додавання комплексних чисел

$$Y_{m\Sigma}(\omega) = \sqrt{P_{\Sigma}^2(\omega) + Q_{\Sigma}^2(\omega)}; \quad (3.61)$$

$$\varphi_{\Sigma}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q_{\Sigma}(\omega)}{P_{\Sigma}(\omega)}, \quad (3.62)$$

де

$$P_{\Sigma}(\omega) = P_1(\omega) + P_2(\omega) + \dots + P_n(\omega) = \sum_1^n P_i(\omega);$$

$$Q_{\Sigma}(\omega) = Q_1(\omega) + Q_2(\omega) + \dots + Q_n(\omega) = \sum_1^n Q_i(\omega).$$

### 3.3.3 Змішане з'єднання ланок

Варіант змішаного з'єднання ланок показано на рис. 3.19.

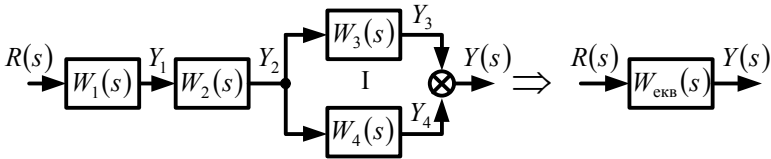


Рис. 3.19. Змішане з'єднання ланок

Знайдемо, в першу чергу, передатну функцію контуру I з рівнобіжним з'єднанням ланок

$$W_I(s) = W_3(s) + W_4(s).$$

Для визначення еквівалентної передатної функції залишається розрахувати передатну функцію всієї схеми, як послідовного з'єднання трьох ланок

$$W_{\text{екв}}(s) = W_1(s)W_2(s)W_I(s) = W_1(s)W_2(s)[W_3(s) + W_4(s)].$$

Подібним чином визначаються передатні функції і для більш складних випадків з'єднання елементарних ланок в автоматичних системах.

### 3.3.4 Зустрічно-рівнобіжне з'єднання ланок

Зустрічно-рівнобіжне з'єднання показано на рис. 3.20. Тут прийняті позначення:  $W_n(s)$  – передатна функція ланки або з'єднання



ланок прямого ланцюга;  $W_{3.3}(s)$  – передатна функція ланки або з'єднання ланок зворотного зв'язку.

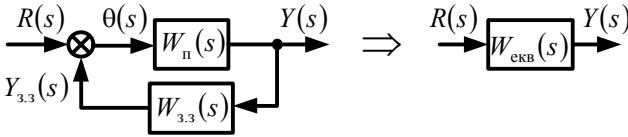


Рис. 3.20. Зустрічно-рівнобіжне з'єднання ланок

Таким чином, при зустрічно-рівнобіжному з'єднанні вихідна величина ланок прямого ланцюга через спеціальні ланки зворотного зв'язку впливає на вхід з'єднання, змінюючи величину вхідного сигналу.

Сума сигналів вхідного  $R(s)$  і  $Y_{3.3}(s)$  зворотного зв'язку називається сигналом розузгодження

$$\theta(s) = R(s) \pm Y_{3.3}(s), \quad (3.63)$$

де знак *плюс* відповідає позитивному зворотному зв'язку, а знак *мінус* – негативному.

Еквівалентну передатну функцію зустрічно-рівнобіжного з'єднання отримаємо як відношення зображення вихідної величини  $Y(s)$  до зображення вхідної величини  $R(s)$

$$W_{\text{екв}}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Y(s)}{\theta(s) \mp Y_{3.3}(s)} = \frac{\frac{Y(s)}{\theta(s)}}{1 \mp \frac{Y_{3.3}(s)}{\theta(s)}}, \quad (3.64)$$

де знак *плюс* відповідає негативному зворотному зв'язку, а знак *мінус* – позитивному.

Візьмемо до уваги, що за визначенням

$$\frac{Y(s)}{\theta(s)} = W_n(s), \quad \frac{Y_{3.3}(s)}{\theta(s)} = \frac{Y(s)}{\theta(s)} \cdot \frac{Y_{3.3}(s)}{Y(s)} = W_n(s)W_{3.3}(s).$$

Тоді еквівалентна передатна функція з'єднання приймає вигляд

$$W_{\text{екв}}(s) = \frac{W_n(s)}{1 \mp W_n(s)W_{3.3}(s)} = \frac{W_n(s)}{1 \mp W_p(s)}. \quad (3.65)$$

Добуток  $W_{\text{п}}(s)W_{\text{з.з.}}(s) = W_{\text{р}}(s)$ , що входить до знаменника, є передатною функцією з'єднання, розімкненого у точці підключення зворотного зв'язку до входу прямого ланцюга. Знак плюс як і раніше відповідає негативному зворотному зв'язку, а знак мінус – позитивному.

### 3.3.5 Еквівалентні перетворення

Системи автоматичного керування мають, як правило, складну багатоконтурну структуру, зумовлену наявністю цілого ряду зв'язків, які перехрещуються. Спрощення складних структурних з'єднань ланок досягається відповідно до загальних правил їх еквівалентних перетворень, які показано на рис. 3.21. Слід пам'ятати, що під час перетворень *не можна переносити суматори через точки відбору і навпаки*. Таке перенесення принципово змінює структуру системи і, отже, призведе до помилкових результатів при обчисленні передатних функцій.

#### Зміна порядку підсумовування сигналів

Припустимо, що у структурній схемі (рис. 3.21, *a*) є два послідовно включених суматора. На перший надходять сигнали  $x_1$  і  $x_2$ , на другий – сигнал  $x_3$ . Сумарний сигнал на виході ланцюжка визначиться як

$$x = x_1 + x_2 + x_3. \quad (3.66)$$

У ході перетворень структурної схеми може виникнути потреба поміняти місцями суматори, тобто змінити порядок підсумовування. Схему еквівалентну початковій подано на рис. 3.21, *a'*. У цьому випадку сумарний сигнал ланцюжка дорівнюватиме

$$x = x_1 + x_3 + x_2. \quad (3.67)$$

Легко побачити, що вирази (3.66) і (3.67) дають однаковий результат.

Отже, якщо між суматорами немає ланок і точок відбору сигналів, то їх можна міняти місцями, тобто виконувати підсумовування можна в будь-якій послідовності.

### Зміна положення точок відбору сигналу

Нехай структурна схема має вигляд, показаний на рис. 3.21, б.

Якщо між точками відбору сигналу відсутні ланки і суматори, то точки відбору можна міняти місцями, усуваючи можливі перехрещення зв'язків. Схему ідентичну початковій показано на рис. 3.21, б'.

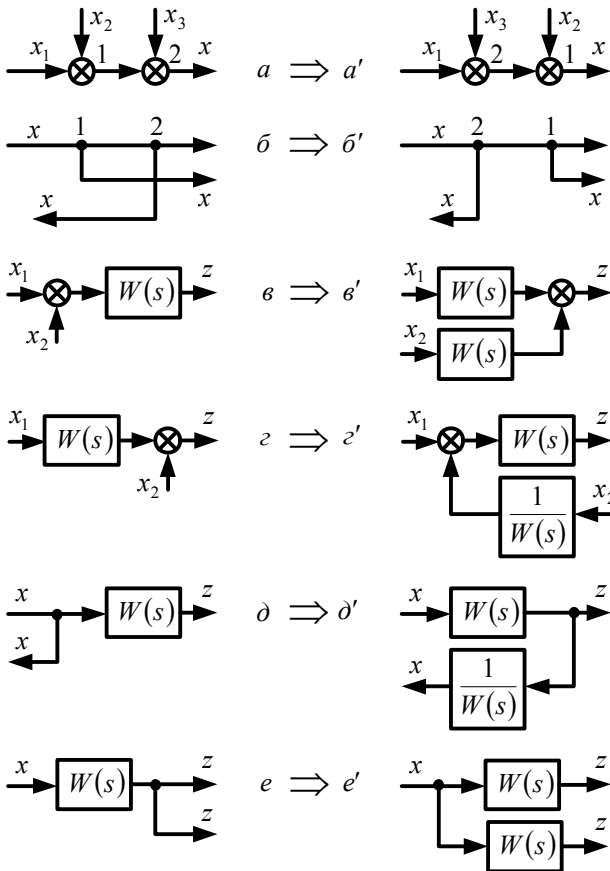


Рис. 3.21. Еквівалентні перетворення структурних схем

### Перенесення суматора через ланку

Припустимо, що суматор (рис. 3.21, в) розташовано перед ланкою з передатною функцією  $W(s)$ . Знайдемо сигнал на виході ланки

$$z = W(s)(x_1 + x_2) = W(s)x_1 + W(s)x_2. \quad (3.68)$$

Якщо суматор перенести із входу ланки на її вихід, то умовою збереження незмінної вихідної величини  $z$  є виконання вимоги (3.68). Ця вимога виконається, якщо у всіх гілках, що надходять на перенесений суматор, будуть знаходитися ланки з передатною функцією  $W(s)$ . Умова еквівалентності схем ілюструється рис. 3.21, в - в'.

Таким чином, *при перенесенні суматора зі входу ланки на її вихід необхідно сигнал, який переносимо, помножити на передатну функцію ланки, через яку здійснюється перенесення.*

Якщо у початковій схемі суматор розташовано на виході ланки (рис. 3.21, г), то сигнал на виході ланцюжка визначиться як

$$z = W(s)x_1 + x_2. \quad (3.69)$$

*При перенесенні суматора з виходу ланки на її вхід умова збереження вихідного сигналу (3.69) забезпечується у тому випадку, якщо сигнал, який переносимо розділити на передатну функцію ланки, через яку здійснюється перенесення (рис. 3.21, г').*

### Перенесення точок відбору сигналів через ланку

У тому випадку, коли точка відбору сигналу переноситься зі входу ланки (рис. 3.21, д) на її вихід (рис. 3.21, д'), потрібно забезпечити незмінність величини  $x$ , яка відбирається. Згідно зі схемою еквівалентних перетворень, показаною на рис. 3.21, д', маємо

$$x = W(s)x \cdot \frac{1}{W(s)} = x.$$

Отже, *при перенесенні точки відбору сигналу зі входу ланки на її вихід, необхідно сигнал, що відбирається, розділити на передатну функцію ланки, через яку здійснюється перенесення.*

Якщо точка відбору сигналу переноситься з виходу ланки на її вхід (рис. 3.21,  $e-e'$ ), потрібно забезпечити незмінність величини  $z$ , що відбирається. Це можна виконати помноженням відведеного сигналу на  $W(s)$

$$W(s)x = z.$$

Таким чином, при перенесенні точки відбору сигналу з виходу ланки на її вхід, необхідно сигнал, що відбирається, помножити на передатну функцію ланки, через яку здійснюється перенесення.

### 3.3.6 Складні з'єднання ланок

У загальному випадку структурні схеми являють собою складні з'єднання ланок. Застосування розглянутих вище способів перетворення структурних схем дозволяє привести їх до найпростішого еквівалентного вигляду.

Припустимо, що систему автоматичного керування подано структурною схемою, що на рис. 3.22, *a*.

Перенесемо зовнішній вплив  $M(s)$  з виходу ланки  $W_1(s)$  на її вхід, а точку відбору сигналу  $Y_2$  – з входу ланки  $W_3(s)$  на її вихід. Структурна схема прийме вигляд, який показано на рис. 3.22, *б*.

Перетворимо контур I як зустрічно-рівнобіжне з'єднання ланцюжків ланок

$$W_1(s) = \frac{W_2(s)W_3(s)}{1 \mp W_2(s)W_3(s)W_4(s)}. \quad (3.70)$$

Послідовне з'єднання ланок  $W_5(s)$  і  $\frac{1}{W_3(s)}$  замінимо однією еквівалентною ланкою з передатною функцією  $\frac{W_5(s)}{W_3(s)}$ .

Після виконаних заходів структурна схема спрощується до вигляду, показаного на рис. 3.22, *в*.

Контур II являє собою зустрічно-рівнобіжне з'єднання ланцюжків ланок і може бути замінений однією еквівалентною ланкою з

передатною функцією

$$W_{II}(s) = \frac{W_1(s)W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_1(s) \frac{W_5(s)}{W_3(s)}}. \quad (3.71)$$

Структурну схему, еквівалентну початковій, показано на рис. 3.22, з.

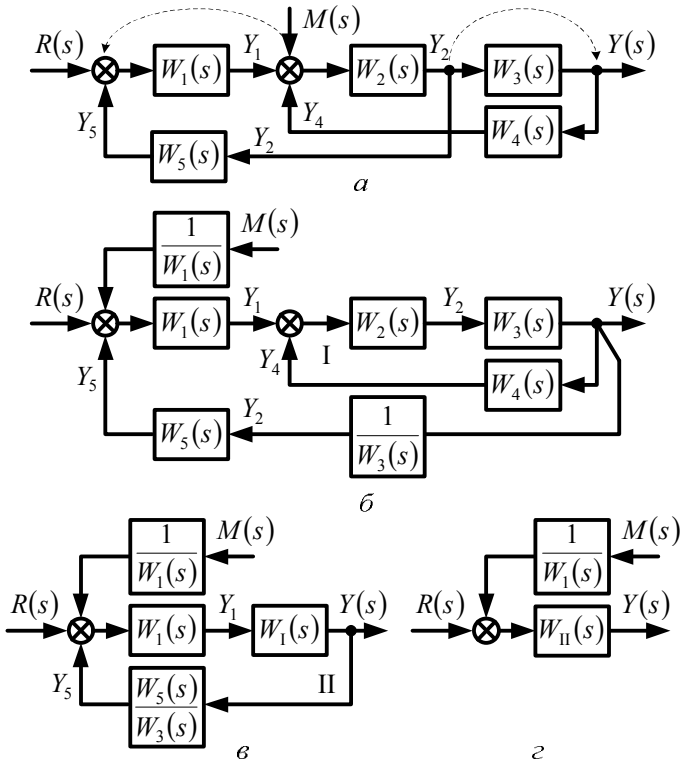


Рис. 3.22. Приведення структурної схеми до еквівалентного вигляду:  
а – початкова, б – проміжні; з – еквівалентна

Схема дозволяє визначити передатні функції системи:  
– по керуючому впливу

$$W_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = W_{II}(s); \quad (3.72)$$

– по збурювальному впливу

$$W_m(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{W_{II}(s)}{W_I(s)}. \quad (3.73)$$

Підставляючи (3.70), (3.71) у рівняння (3.72), (3.73), на підставі методу суперпозиції знаходимо рівняння руху досліджуваної системи

$$\begin{aligned} Y(s) &= W_r(s)R(s) + W_m(s)M(s) = \\ &= \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 \mp W_2(s)W_3(s)W_4(s) \mp W_1(s)W_2(s)W_5(s)} R(s) + \\ &+ \frac{W_2(s)W_3(s)}{1 \mp W_2(s)W_3(s)W_4(s) \mp W_1(s)W_2(s)W_5(s)} M(s). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Рівняння (3.74) дозволяє проводити дослідження, як статичні, так і динамічні системи, яка розглядається.

### 3.4 Формула Мейсона

---

Обчислення передатних функцій системи по її графу можна виконати із застосуванням формули Мейсона. Метод має певні переваги при аналізі простих систем. Дамо деякі додаткові визначення, необхідні при застосуванні цієї формули.

*Шлях* – це безперервна послідовність дуг від вершини до вершини, причому всі сигнали розповсюджуються в одному напрямку, тобто стрілки на всіх дугах спрямовані в один і той же бік.

*Контур* – це замкнутий шлях, в якому всі сигнали розповсюджуються в одному напрямку, а кожна вершина зустрічається не більше одного разу.

*Прямий шлях* – це шлях від вершини входу керуючого впливу до вершини виходу керованої величини, в якому жодна вершина не зустрічається більше одного разу.

*Коефіцієнт передачі шляху* – добуток передатних функцій всіх дуг, що утворюють шлях.

*Коефіцієнт передачі контуру* – добуток передатних функцій всіх дуг, що утворюють контур.

*Контури, які не торкаються* – контури, які не мають спільних вершин.

Проілюструємо введені поняття на прикладі графа, показаного на рис. 3.15. Тут два контури, один з коефіцієнтом передачі  $W_2(s)W_7(s)$ , інший з коефіцієнтом передачі  $-W_4(s)W_8(s)$ . Ці два контури не торкаються один одного. Граф має два прямих шляхи від входу  $R(s)$  до виходу  $Y(s)$ : один з коефіцієнтом передачі  $W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_5(s)$ , інший з коефіцієнтом передачі  $W_6(s)W_4(s)W_5(s)$ . Прямий шлях  $W_6(s)W_4(s)W_5(s)$  не торкається контуру  $W_2(s)W_7(s)$ , але торкається контуру  $-W_4(s)W_8(s)$ . Шлях  $W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_5(s)$  торкається як контуру  $W_2(s)W_7(s)$ , так і контуру  $-W_4(s)W_8(s)$ .

Формула Мейсона визначає передатну функцію системи відносно вершин входу керуючого впливу  $R(s)$  і виходу керованої величини  $Y(s)$

$$W_{YR}(s) = W_{\text{екв}}(s) = \frac{\sum_{i=1}^k W_{pi}(s)\Delta_i}{\Delta}, \quad (3.75)$$

де  $\Delta$  – визначник графа;  $W_{pi}(s)$  – коефіцієнт передачі  $i$ -го прямого шляху від початкової до кінцевої вершин;  $k$  – загальне число прямих шляхів;  $\Delta_i$  – визначник підграфа  $i$ -го прямого шляху.

Визначник  $\Delta_i$  знаходиться, зазвичай, як значення визначника  $\Delta$  для тієї частини графа, що не стосується  $i$ -го прямого шляху.

Визначником графа називається передатна функція, яка розраховується відповідно до алгоритму

$$\Delta = 1 - \sum_i W_{0i} + \sum_{i,j} W_{0i}W_{0j} - \sum_{i,j,l} W_{0i}W_{0j}W_{0l} + \dots, \quad (3.76)$$

де  $\sum_i W_{0i}$  – сума коефіцієнтів передачі всіх окремих контурів;

$\sum_{i,j} W_{0i}W_{0j}$  – сума добутків коефіцієнтів передачі всіх можливих комбінацій контурів, які не торкаються, узятих по два;



$\sum_{i,j,l} W_{0i}W_{0j}W_{0l}$  – сума добутків коефіцієнтів передачі всіх можливих

комбінацій контурів, які не торкаються, взятих по три, і т.д.

Застосуємо формулу Мейсона до графа на рис. 3.15 і визначимо передатну функцію системи.

Позначимо через  $L_i$  коефіцієнт передачі  $i$ -го контуру. Тоді коефіцієнти передачі кожного з двох контурів запишемо як

$$L_1 = W_2(s)W_7(s);$$

$$L_2 = -W_4(s)W_8(s).$$

Граф має два прямих шляхи з коефіцієнтами передачі

$$W_{n1}(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_5(s);$$

$$W_{n2}(s) = W_6(s)W_4(s)W_5(s).$$

Знаходимо значення визначника

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (L_1 + L_2) + L_1L_2 = \\ &= 1 - W_2(s)W_7(s) + W_4(s)W_8(s) - W_2(s)W_7(s)W_4(s)W_8(s). \end{aligned}$$

Обчислюємо визначники  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2$ ). Для цього виключимо з графу спочатку перший прямий шлях (повинні бути видалені і усі вузли першого прямого шляху), потім другий. Результати операцій показано на рис. 3.23 та рис. 3.24.

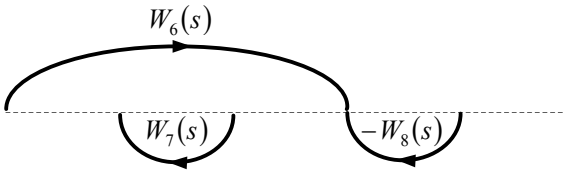


Рис. 3.23. Граф з виключеним першим прямим шляхом

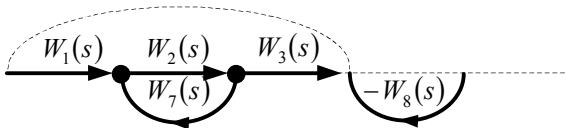


Рис. 3.24. Граф з виключеним другим прямим шляхом

Таким чином  $\Delta_1$ , може бути знайдений як визначник для графа на рис. 3.23, а  $\Delta_2$  – як визначник для графа на рис. 3.24.

Оскільки граф на рис. 3.23 не має контурів, то  $\Delta_1 = 1$ . Граф на рис. 3.24 має один контур, отже  $\Delta_2 = 1 - W_2(s)W_7(s)$ .

Підставляючи отримані значення  $W_{n1}(s)$ ,  $W_{n2}(s)$ ,  $\Delta$ ,  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$  в (3.75) отримуємо еквівалентну передатну функцію системи

$$W_{\text{екв}}(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)W_5(s) + W_6(s)W_4(s)W_5(s)[1 - W_2(s)W_7(s)]}{1 - W_2(s)W_7(s) + W_4(s)W_8(s) - W_2(s)W_7(s)W_4(s)W_8(s)}$$

Аналогічний результат можна отримати при визначенні еквівалентної передатної функції на підставі перетворень структурної схеми системи, показаної на рис. 3.14.

### 3.5 Зворотні зв'язки та їх властивості

**З**воротним зв'язком називається вплив вихідної величини якого-небудь елемента автоматичної системи на вхід цього елемента або на вхід одного з попередніх йому елементів (рис. 3.25).

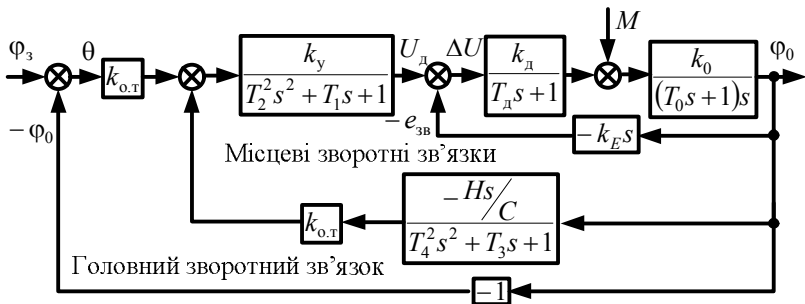


Рис. 3.25. Типова система стабілізації

Зворотні зв'язки у системах автоматичного керування служать для формування бажаних статичних і динамічних характеристик елементів і системи в цілому. Якщо зворотний зв'язок охоплює всю автоматичну систему, тобто з'єднує її вихід із входом, то його називають *головним*.

*Головний зворотний зв'язок необхідний для забезпечення порів -*

няння поточного й заданого значень керованої величини.

Зворотні зв'язки, що охоплюють окремі елементи або ланцюжки елементів, називаються *місцевими*.

За характером впливу зворотній зв'язки діляться на *жорсткі* і *гнучкі*, які у свою чергу можуть бути *позитивними* і *негативними*.

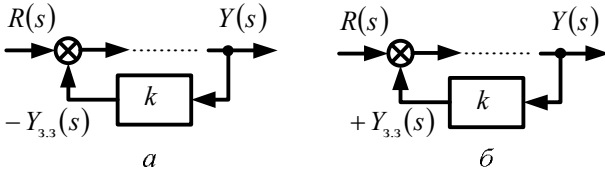


Рис. 3.26. Жорсткий зворотний зв'язок:  
а – негативний; б – позитивний

*Жорсткий зворотний зв'язок* – такий зв'язок, який діє у системі постійно, тобто як в усталеному, так і перехідному режимах. Він реалізується (рис. 3.26) за допомогою безінерційних динамічних ланок і має передатну функцію

$$W_{ж.3.3}(s) = \frac{Y_{3.3}(s)}{Y(s)} = k.$$

Таким чином, дія жорсткого зворотного зв'язку на вхід з'єднання в будь-який момент часу пропорційна вихідній величині, яка надходить на вхід ланки зворотного зв'язку, тобто

$$Y_{3.3}(s) = kY(s).$$

Якщо під час керування коефіцієнт  $k$  змінюється, то жорсткий зворотний зв'язок називається *змінним*. У тих випадках коли  $k = 1$ , зворотний зв'язок є *повним* або *стовідсотковим*.

Жорсткий зворотний зв'язок є *негативним* (рис. 3.26, а), якщо він зменшує сигнал на вході прямого ланцюга з'єднання, і *позитивним* (рис. 3.26, б), якщо його дія призводить до збільшення вхідного сигналу.

*Гнучкий зворотний зв'язок* – такий зв'язок, який діє в системі тільки тоді, коли має місце зміна у часі вихідної величини, тобто в перехідному режимі. В усталеному режимі дія гнучкого зворотного зв'язку припиняється.

Гнучкий зворотний зв'язок (рис. 3.27) реалізується за допомо -

гою диференціюючих динамічних ланок і має у загальному випадку передатну функцію

$$W_{\Gamma.3.3}(s) = \frac{Y_{3.3}(s)}{Y(s)} = ks^n.$$

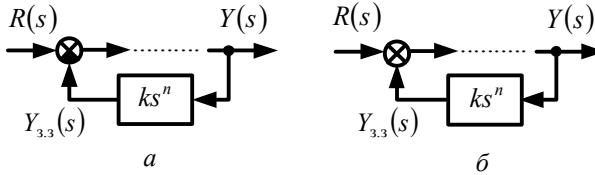


Рис. 3.27. Гнучкий зворотний зв'язок:  
а – негативний; б – позитивний

Таким чином, дія гнучкого зворотного зв'язку на вхід з'єднання в будь-який момент часу пропорційна похідній  $n$ -го порядку вихідної величини, яка надходить на вхід ланки зворотного зв'язку, тобто

$$Y_{3.3}(s) = ks^n Y(s).$$

Найбільш часто застосовуються на практиці гнучкі зворотні зв'язки першого порядку  $W_{\Gamma.3.3}(s) = ks$  (за швидкістю) і другого порядку  $W_{\Gamma.3.3}(s) = ks^2$  (за прискоренням).

Гнучкий зворотний зв'язок називається *негативним* (рис. 3.27, а), якщо він затримує зміну вихідної величини, зменшуючи швидкість її зміни, і *позитивним* (рис. 3.27, б), якщо він сприяє збільшенню швидкості зміни вихідної величини.

При дії на вхід ланки, що реалізує гнучкий зворотний зв'язок гармонійного сигналу, вплив зворотного зв'язку зростає із збільшенням частоти сигналу. Дійсно, частотна передатна функція гнучкого зворотного зв'язку у загальному випадку має вигляд

$$W_{\Gamma.3.3}(j\omega) = k(j\omega)^n,$$

отже, амплітуда гнучкого зворотного зв'язку виявляється пропорційною  $n$ -й ступені частоти сигналу

$$Y_m^{\Gamma.3.3}(\omega) = k\omega^n.$$

При зміні порядку передатної функції  $ks^n$  на одиницю фаза гнучкого зворотного зв'язку змінюється (рис. 3.28) на  $90^\circ$ . У разі  $n = 1$  фаза  $\varphi_1 = 90^\circ$ ; у разі  $n = 2$  фаза  $\varphi_2 = 180^\circ$ ; у разі  $n = 3$  фаза  $\varphi_3 = 270^\circ \equiv -90^\circ$  і т.д.

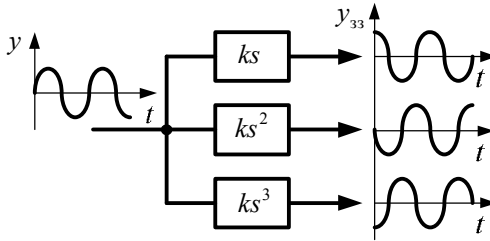


Рис. 3.28. Властивості гнучкого зворотного зв'язку

Щодо фізичної реалізації жорсткі і гнучкі зворотні зв'язки можуть бути внутрішніми (природними) і зовнішніми (штучними).

*Внутрішні зворотні зв'язки* являють собою природну залежність сигналу  $y_{3.3}$  від сигналу  $y$ . У ряді випадків дію внутрішнього зворотного зв'язку покладено в основу робочого процесу елемента і визначає його статичні та динамічні характеристики. Цей зв'язок не можна розімкнути, так як він органічно входить у структуру елементів.

Вигляд внутрішніх зв'язків враховується знаком, який ставиться перед передатною функцією  $W_{3.3}(s)$  у структурній схемі. Для негативних зворотних зв'язків перед передатною функцією ставиться знак «-» або штрихується сектор суматора, на який надходить сигнал зворотного зв'язку.

Прикладом внутрішнього зворотного зв'язку (рис. 3.25) може служити проти-ЕРС в електродвигуні, яка дорівнює  $e_{зв} = c_E \Phi_E \Omega = k_E s \varphi_0$ . Цей зв'язок є жорстким негативним зворотним зв'язком за частотою обертання якоря, так як він спрямований зустрічно прикладеній до якоря напрузі  $\Delta U = U_d - e_{зв}$ .

*Зовнішні зворотні зв'язки* створюють спеціально шляхом введення в автоматичну систему додаткових елементів. Щоб вказати знак зовнішніх негативних зворотних зв'язків у структурну схему

вводиться передатна функція інвертора  $W(s) = -1$ . Зовнішній зворотний зв'язок може бути не тільки змінений за величиною, а й відключено.

Прикладом зовнішнього зворотного зв'язку (рис. 3.25) є стовідсотковий жорсткий негативний зворотний зв'язок по куту відхилення об'єкта керування у типовій системі стабілізації  $-\varphi_0 = -1 \cdot \varphi_0$ . Зв'язок реалізується, як правило, за допомогою гіроскопічних датчиків кута і спрямований назустріч сигналу керування  $\theta = \varphi_3 - \varphi_0$ .

У загальному випадку зворотні зв'язки систем автоматичного керування можуть являти собою складні з'єднання цілого ряду ланок, включених між собою послідовно, рівнобіжно або змішано. Дія зворотного зв'язку при цьому визначається властивостями ланок, які входять до його складу, та їх з'єднаннями між собою. Наприклад, зворотній зв'язок, показаний на рис. 3.29, створений змішаним з'єднанням інерційної, безінерційної і диференціюючої ланок.

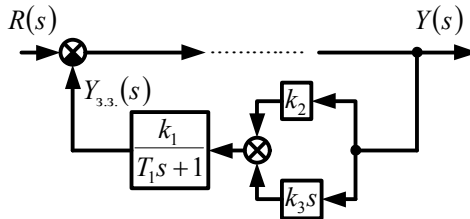


Рис. 3.29 Складний зворотний зв'язок

Передатна функція такого зв'язку дорівнює

$$W_{3.3}(s) = \frac{Y_{3.3}(s)}{Y(s)} = \frac{k_1(k_2 + k_3s)}{T_1s + 1}.$$

Отже, при  $Y(s) = \text{const}$  її дія буде еквівалентна жорсткому зворотному зв'язку з передатним коефіцієнтом  $k = k_1k_2$ , а при  $Y(s) = \text{var}$  на величину сигналу будуть впливати складові  $k_3s$ ,  $T_1s$ . У цілому ряді випадків інерційність зворотних зв'язків істотно позначається на характері перехідних процесів з'єднання і її вплив потрібно обов'язково враховувати.

### 3.6 Вплив зворотних зв'язків на властивості динамічних ланок

**М**етодику оцінки впливу жорсткого і гнучкого негативних зворотних зв'язків на властивості динамічних ланок розглянемо на прикладі аналізу їх впливу на інерційну динамічну ланку другого порядку.

Структурну схему ланки показано на рис. 3.30.

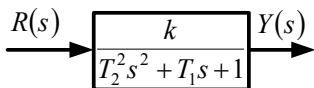


Рис. 3.30. Інерційна ланка другого порядку

Вважаємо параметри ланки відомими, а співвідношення її постійних часу, що визначають коефіцієнт загасання, рівним  $T_1 < 2T_2$ . Перехідну функцію ланки, що описується рівнянням

$$y_1(t) = H(t) = k \left[ 1 - e^{-\frac{t}{T_0}} \left( \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right],$$

показано на рис. 3.32.

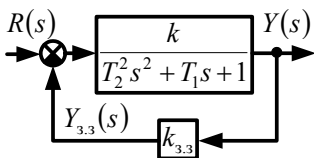


Рис. 3.31. Інерційна ланка другого порядку, охоплена ЖНЗЗ

Після охоплення ланки жорстким негативним зворотним зв'язком (ЖНЗЗ) з коефіцієнтом  $k_{3.3}$ , схема з'єднання набуває вигляду, який показано на рис. 3.31.

Оскільки передатна функція ланки й коефіцієнт зворотного зв'язку відомі, то скористаємося формулою (3.65) і одержимо еквівалентну передатну функцію розглянутого зустрічно-рівнобіжного з'єднання

$$W_{\text{екв}}(s) = \frac{\frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}}{1 + \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} k_{3.3}} = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + (1 + k k_{3.3})}. \quad (3.77)$$

Приводимо рівняння (3.77) до стандартного вигляду

$$W_{\text{екв}}(s) = \frac{k'}{(T_2')^2 s^2 + T_1' s + 1}, \quad (3.78)$$

$$\text{де } k' = \frac{k}{1 + kk_{3.3}}; T_2' = \frac{T_2}{\sqrt{1 + kk_{3.3}}}; T_1' = \frac{T_1}{1 + kk_{3.3}}.$$

Перехідну функцію ланки при охопленні її ЖНЗЗ показано на рис. 3.32 та позначено як  $y_2(t)$ .

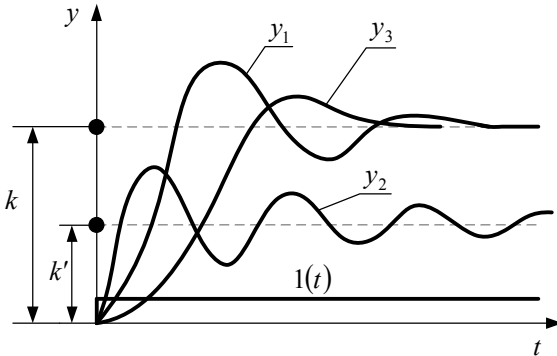


Рис. 3.32. Перехідні функції

Аналіз передатних функцій інерційної ланки другого порядку і тієї ж ланки з ЖНЗЗ, а також їх перехідних функцій дозволяє зробити такі висновки:

- охоплення ланки жорстким негативним зворотним зв'язком не змінює характеру передатної функції;
- статичний передатний коефіцієнт ланки із ЖНЗЗ менше статичного передатного коефіцієнта ланки без зворотного зв'язку  $k' < k$ . Отже, у ланки з ЖНЗЗ менше усталене значення вихідної величини;
- статичний передатний коефіцієнт ланки з ЖНЗЗ зменшується тим сильніше, чим більше значення коефіцієнта зворотного зв'язку;
- постійні часу ланки із ЖНЗЗ менше постійних часу ланки без зворотного зв'язку  $T_2' < T_2$ ;  $T_1' < T_1$ ; при цьому коливальність вихідної величини ланки з ЖНЗЗ вище, що пояснюється зменшенням у ній коефіцієнта загасання

$$d_0 = \frac{T_1}{2T_2} > d_0' = \frac{T_1'}{2T_2'} = \frac{T_1}{2T_2\sqrt{1 + kk_{3.3}}} = \frac{d_0}{\sqrt{1 + kk_{3.3}}}.$$



Якщо інерційну ланку другого порядку охопити гнучким негативним зворотним зв'язком (ГНЗЗ) з коефіцієнтом  $k_{3.3}s$ , то схема з'єднання прийме вигляд, показаний на рис. 3.33.

Знаходимо еквівалентну передатну функцію з'єднання

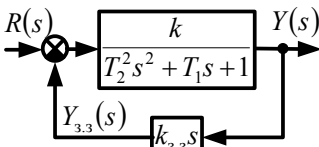


Рис. 3.33. Інерційна ланку другого порядку, охоплена ГНЗЗ

$$W_{\text{екв}}(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + (T_1 + k k_{3.3})s + 1}$$

або у стандартному вигляді

$$W_{\text{екв}}(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1'' s + 1}, \text{ де } T_1'' = T_1 + k k_{3.3}.$$

Перехідну функцію ланки при охопленні її ГНЗЗ показано на рис. 3.32 і позначено як  $y_3(t)$ .

Таким чином, гнучкий негативний зворотний зв'язок не змінює характеру передатної функції ланки. Статичний передатний коефіцієнт при введенні ГНЗЗ залишається незмінним; отже, усталене значення вихідної величини ланки із ГНЗЗ не змінюється. Змінюється тільки постійна часу  $T_1'' > T_1$ .

Збільшення постійної часу ланки із ГНЗЗ призводить до збільшення коефіцієнта загасання

$$d_0 = \frac{T_1}{2T_2} < d_0'' = \frac{T_1''}{2T_2} = \frac{T_1 + k k_{3.3}}{2T_2}.$$

Колівальність вихідної величини ланки із ГНЗЗ зменшується.

На закінчення відзначимо, що формування необхідних властивостей автоматичних систем за допомогою введення зворотних зв'язків широко застосовується при їх синтезі.

### 3.7 Закон керування. Передатні функції системи

**Д**ля повного дослідження процесів керування, що протікають в автоматичних системах, необхідно у першу чергу описати процес керування, тобто визначити залежність вихідної (керованої) величини від заданих сигналів керування і збурювальних впливів.

Коли передатні функції усіх динамічних ланок, на які розділена система, розраховані і побудована її структурна схема, то відповідно до методу еквівалентних перетворень структурна схема системи приводиться до спрощеного еквівалентного вигляду. При цьому у ній мають бути збережені точки прикладання сигналів управління і збурювальних впливів.

Розглянемо еквівалентну структурну схему системи, показану на рис. 3.34, яка складається з об'єкта керування, регулятора і ЖНЗЗ між виходом і входом. Вважаємо, що на систему діє сигнал керування  $R(s)$  і основне збурення  $M(s)$ .

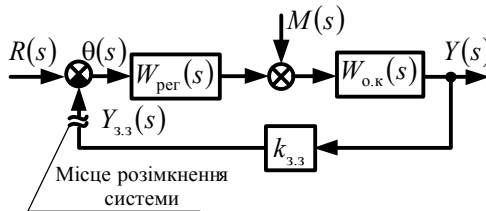


Рис. 3.34. Еквівалентна структурна схема одноконтурної САК

Будемо вважати відомими передатні функції  $W_{o.k.}(s)$  – об'єкта керування,  $W_{per}(s)$  – регулятора і  $k_{3.3}$  – головного зворотного зв'язку.

Для аналізу статичних і динамічних властивостей системи знаходяться такі передатні функції:

- *передатна функція за сигналом керування*  $W_r(s)|_{m(t)=0}$

$$W_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W_{per}(s)W_{o.k.}(s)}{1 + W_{per}(s)W_{o.k.}(s)k_{3.3}} = \frac{W_{пр.}(s)}{1 + W_p(s)}, \quad (3.79 \text{ а})$$

де  $W_{пр.}(s) = W_{per}(s)W_{o.k.}(s)$  – передатна функція ланок прямого ланцюга між сигналом  $R(s)$  і керованою величиною  $Y(s)$ ;

$W_p(s) = W_{per}(s)W_{o.k.}(s)k_{3.3}$  – передатна функція розіркненого контуру.

- *передатна функція за зовнішнім збуренням*  $W_m(s)|_{r(t)=0}$

$$W_m(s) = \frac{Y(s)}{M(s)} = \frac{W_{o.k.}(s)}{1 + W_{per}(s)W_{o.k.}(s)k_{3.3}} = \frac{W_{зм.}(s)}{1 + W_p(s)}, \quad (3.79 \text{ б})$$

де  $W_{пм}(s) = W_{о.к}(s)$  – передатна функція ланок прямого ланцюга між збуренням  $M(s)$  і керованої величиною  $Y(s)$ .

У реальних умовах сигнали керування і зовнішні збурення діють одночасно. Закон керування системою у цьому випадку визначається як сума від усіх впливів і, виходячи з методу суперпозиції, має вигляд

$$Y(s) = W_r(s)R(s) + W_m(s)M(s). \quad (3.80)$$

Рівняння (3.80) дозволяє досліджувати як динамічні, так і статичні властивості системи.

### 3.8 Передатна функція розузгодження

У деяких випадках, наприклад при дослідженні слідкуючих систем, якість керування зручно оцінювати за величиною і характером зміни розузгодження

$$\theta(s) = R(s) - Y_{3.3}(s). \quad (3.81)$$

Закон зміни розузгодження визначається передатною функцією розузгодження

$$W_s(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)}. \quad (3.82)$$

Передатна функція  $W_s(s)$  дозволяє визначити реакцію замкненої системи на зовнішній вплив у точці прикладання цього впливу.

Перетворимо рівняння (3.82), приймаючи до уваги (3.81)

$$W_s(s) = \frac{R(s) - Y_{3.3}(s)}{R(s)} = 1 - \frac{Y_{3.3}(s)}{R(s)}. \quad (3.83)$$

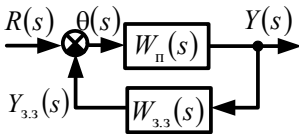


Рис. 3.35 До визначення передатної функції розузгодження

Якщо передатні функції елементів системи та її структурна схема (рис. 3.35) відомі, то, помноживши у (3.83) чисельник і знаменник від'ємника на  $Y(s)$ , маємо

$$W_s(s) = 1 - \frac{Y_{3.3}(s)}{Y(s)} \cdot \frac{Y(s)}{R(s)} = 1 - W_{3.3}(s)W(s).$$

Підставимо в отриманий вираз значення

$$W(s) = \frac{W_n(s)}{1 + W_n(s)W_{3.3}(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W_p(s)}$$

і знайдемо остаточно

$$W_s(s) = 1 - \frac{W_n(s)W_{3.3}(s)}{1 + W_n(s)W_{3.3}(s)} = \frac{1}{1 + W_p(s)}. \quad (3.84)$$

У рівняння (3.84) входить тільки передатна функція  $W_p(s)$  розімкненого ланцюга. Це показує, що *передатна функція розузгодження не залежить від характеру і точки докладання зовнішнього впливу*.

*Передатна функція розузгодження системи автоматичного керування – величина незмінна і визначається тільки власними динамічними властивостями самої системи.*

За відомою передатною функцією  $W_s(s)$  можна знайти всі інші передатні функції замкнутої системи. Для цього достатньо передатну функцію розузгодження помножити на еквівалентну передатну функцію ланок, включених між точкою прикладання зовнішнього впливу і місцем, де визначається реакція системи на даний вплив.

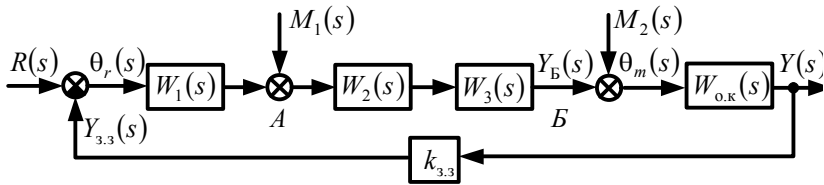


Рис. 3.36. Визначення реакції системи у довільній точці

Як приклад, визначимо за структурною схемою, що на рис. 3.36, реакцію системи у точці Б на збурення, діюче в точці А.

Передатна функція системи щодо входу збурювального впливу  $M_1(s)$  і виходу  $Y_B(s)$  має вигляд

$$W_{M_1}(s) = \frac{Y_B(s)}{M_1(s)} = \frac{W_{AB}(s)}{1 + W_p(s)} = W_s(s)W_{AB}(s),$$

де  $W_{AB}(s) = W_2(s)W_3(s)$  – передатна функція ланок між точками А і Б.

Отже, реакція системи дорівнюватиме

$$Y_B(s) = W_s(s)W_{AB}(s)M_1(s).$$

Якщо необхідно знайти реакцію системи на виході ланки з передатною функцією  $W_2(s)$  на збурення  $M_2(s)$ , маємо

$$Y_2(s) = W_s(s)W_{o,k}(s)k_{3,3}W_1(s)W_2(s)M_2(s).$$

Таким чином, знаючи передатну функцію розузгодження, можна визначити будь-яку з передатних функцій замкнутої системи.

### 3.9 Зв'язок між основними передатними функціями системи автоматичного керування

**В**ідомо, що замикання контуру керування головним зворотним зв'язком, який завжди є жорстким і негативним, призводить до зміни власних динамічних і статичних якостей системи. Отже, процеси керування в замкнутій системі протікають інакше, ніж у відповідній їй розімкненій системі.

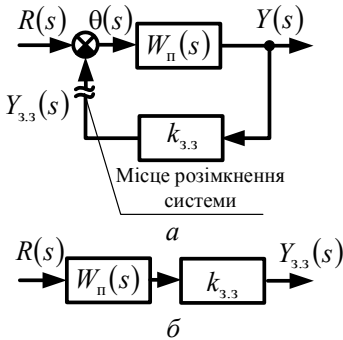


Рис. 3.37. Замкнута (а) і розімкнена (б) системи

Припустимо, що на вході замкнутої системи (рис. 3.37, а) діє тільки сигнал керування  $R(s)$ . Рівняння руху такої системи має вигляд

$$A(s)Y(s) = B(s)R(s). \quad (3.85)$$

Якщо систему розімкнути у місці замикання головного зворотного зв'язку (рис. 3.37, б), то при тому ж законі зміни сигналу керування  $R(s)$  рівняння руху розімкненої системи матиме характеристичний багаточлен, відмінний від характеристичного багаточлена рівняння (3.85)

$$G(s)Y_{3,3}(s) = B(s)R(s). \quad (3.86)$$

Це означає, що перехідний процес у розімкненій системі відбувати-

меться за іншим законом.

Виходячи з рівнянь (3.85) і (3.86) знайдемо передатні функції систем замкнутої

$$W_3(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3.87)$$

і розімкненої

$$W_p(s) = \frac{Y_{3.3}(s)}{R(s)} = \frac{B(s)}{G(s)}. \quad (3.88)$$

Згідно зі структурними схемами (рис. 3.37) ці ж передатні функції можуть бути записані як

$$W_3(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W_p(s)}. \quad (3.89)$$

$$W_p(s) = \frac{Y_{3.3}(s)}{R(s)} = W_n(s)k_{3.3}. \quad (3.90)$$

Знайдемо із рівняння (3.90) передатну функцію ланок прямого ланцюга

$$W_n(s) = \frac{W_p(s)}{k_{3.3}}. \quad (3.91)$$

Підставимо у рівняння (3.91) значення передатної функції (3.88) розімкненої системи

$$W_n(s) = \frac{B(s)}{k_{3.3}G(s)}. \quad (3.92)$$

Запишемо передатні функції замкнутої системи (3.87) і (3.89) з урахуванням (3.90) і (3.92)

$$W_3(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W_p(s)} = \frac{B(s)}{k_{3.3}[G(s) + B(s)]}. \quad (3.93)$$

Отриманий вираз визначає зв'язок між передатними функціями і операторними багаточленами замкнутої і розімкненої систем, які знаходяться під впливом одних і тих же сигналів керування.

З рівняння (3.93) випливає, зокрема, що

$$A(s) = k_{3.3}[G(s) + B(s)], \quad (3.94)$$

тобто *характеристичний багаточлен замкнутої системи можна виразити через операторні багаточлени відповідної розімкненої системи.*

Отже, дослідження власного руху замкнутої системи можна проводити за допомогою рівняння

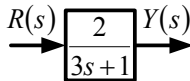
$$[G(s)+B(s)]Y(s)=0. \quad (3.95)$$

Останній висновок надзвичайно важливий для практики, оскільки теоретичне і експериментальне дослідження розімкненої системи значно простіше, ніж дослідження відповідної замкнутої системи.

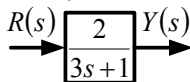
### 3.10 Контрольні питання й завдання

---

1. Дайте визначення типової динамічної ланки.
2. Перерахуйте типові динамічні ланки, наведіть їх рівняння руху і структурні схеми.
3. Отримайте рівняння і побудуйте графік перехідної функції безінерційної підсилювальної ланки.
4. Поясніть яким чином на підставі рівняння перехідної функції інерційної ланки першого порядку можна отримати рівняння імпульсної перехідної функції ланки.
5. На прикладі інерційної ланки другого порядку поясніть принцип розрахунку і побудови її АФЧХ.
6. Розрахуйте і побудуйте зворотну АФЧХ інерційної ланки другого порядку.
7. На прикладі інерційної ланки першого порядку поясніть принцип розрахунку і побудови її ЛАЧХ.
8. Що таке частотна передатна функція типової динамічної ланки? Області її застосування.
9. Побудуйте АФЧХ системи зі структурною схемою вигляду

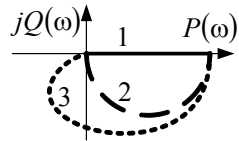


10. Розрахуйте і побудуйте імпульсну перехідну функцію системи для нульових початкових умов її стану



11. Як зміниться перехідна функція інерційної ланки другого порядку при оберненні в нуль постійної часу  $T_2 = 0$ ?

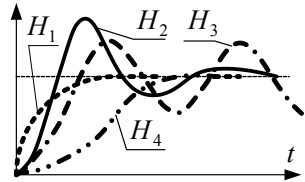
12. На рисунку подані АФЧХ трьох динамічних ланок. Яка з них відповідає інерційній ланці першого порядку? Обґрунтуйте рішення.



13. Виходячи з аналізу передатної функції

інерційної ланки другого порядку  $W(s) = \frac{2}{0,1s^2 + 0,1s + 1}$  визначте вигляд її перехідної функції.

14. За виглядом перехідних функцій ідентифікуйте аперіодичну динамічну ланку другого порядку.



15. Виходячи з аналізу передатної функції інерційної ланки другого порядку

$W(s) = \frac{2}{0,1s^2 + 1}$  визначте вигляд її перехідної функції.

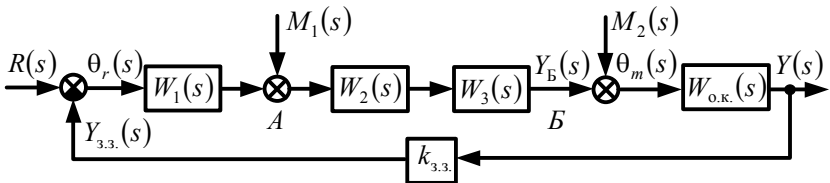
16. Як зміниться перехідна функція диференціюючої ланки при збільшенні статичного передатного коефіцієнту ланки у три рази?

17. Визначте амплітуду  $Y_m(\omega)$  і фазу  $\varphi(\omega)$  вимушених коливань на виході диференціюючої ланки з передатною функцією  $W(s) = 3s$ .

18. Як позначиться на властивостях інерційної ланки першого порядку її охоплення гнучким позитивним зв'язком?

19. Визначте передатну функцію розузгодження  $W_s(s) = \frac{\theta_m(s)}{M_2(s)}$

системи зі структурною схемою вигляду









## ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

**Р**озглянуті в попередніх главах підходи до досліджень систем автоматичного керування ґрунтувались на використанні керуючих та збурювальних впливів, які були заданими функціями часу.

У реальних умовах зовнішні впливи змінюються випадково, коли не можна заздалегідь встановити з повною визначеністю їх значення для будь-якого заданого наперед моменту часу. Взяти, наприклад, автопілот літака. Його роботу, зазвичай, визначають пориви вітру, коливання щільності атмосфери, зміна сили тяги двигуна, напруга живлення підсилювачів. На точність стабілізації курсу морського судна впливає морське хвилювання, напрям і сила вітру, режими роботи силової установки і т.д.

Методи дослідження динаміки систем автоматичного керування, які знаходяться під впливом випадкових збурень, засновані на використанні апарату теорії ймовірностей і теорії випадкових функцій.

### 4.1 Випадкові величини та їх характеристики

---

**В** *випадковою* називають величину, яка приймає у результаті досліду одне із багатьох значень, причому появу того чи іншого значення цієї величини до її вимірювання неможливо передбачити достеменно. Випадкові величини можуть бути дискретними та неперервними.

*Дискретною* вважається випадкова величина, яка приймає окремі можливі значення з певними ймовірностями.

*Неперервна* випадкова величина може приймати усі значення з деякого кінцевого або нескінченного інтервалу.

Припустимо, що у ході експерименту було проведено  $N$  вимірювань величини  $X$  і отримані наступні результати

$$X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_{n-1}, X_n.$$

Визначимо середнє значення величини  $X$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \dots + X_{n-1} + X_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{N}. \quad (4.1)$$

Звичайно, що серед всієї вибірки результатів можуть бути значення, які повторюються. Позначимо однакові результати вимірювань  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), наприклад,

$$X_1 = X_8 = X_{n-1} = x_1, \quad X_3 = X_n = x_2, \quad \dots$$

Уведемо до розгляду величину  $n_k$ , яка показує скільки разів в ході експерименту був отриманий результат  $x_k$ . Помітимо, що

$$\sum_k n_k = N.$$

З урахуванням зроблених зауважень, перепишемо вираз (4.1) для середнього значення величини  $X$

$$\bar{X} = \frac{\sum_k x_k n_k}{N} = \sum_k x_k \frac{n_k}{N}. \quad (4.2)$$

Відношення

$$\frac{n_k}{N} = F_k, \quad (4.3)$$

являє собою частоту реалізації результату  $x_k$ , котра показує, як дане вимірювання розподілено серед отриманих значень.

Оскільки

$$\sum_k n_k = N,$$

то

$$\sum_k F_k = 1, \quad (4.4)$$

тобто сума частот реалізації усіх можливих результатів вимірювань  $x_k$  дорівнює одиниці.

Беручи до уваги (4.3), отримуємо

$$\bar{X} = \sum_k x_k F_k . \quad (4.5)$$

Таким чином, середнє значення величини  $X$  являє собою зважену суму всіх значень  $x_k$ , отриманих у ході експерименту.

Розподіл результатів вимірів можна представити *гістограмою* – графіком залежності  $F_k$  від  $x_k$  (рис. 4.1, *a*). На гістограмі частота кожної реалізації даних  $x_k$  визначається висотою стовпчика над нею. Гістограма досить повно характеризує *дискретну випадкову величину*. Подібні гістограми зручні у випадках, коли значення  $x_k$  далеко стоять один від одного і визначаються цілими числами.

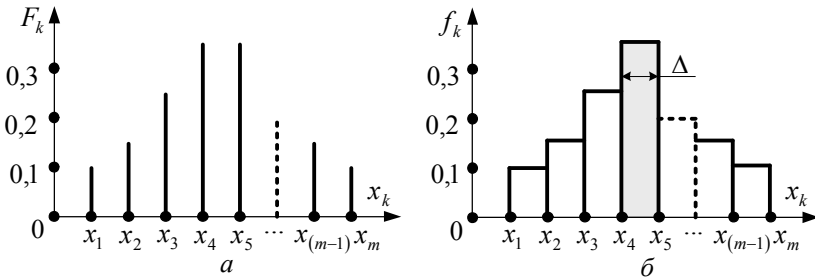


Рис. 4.1. Гістограми випадкових величин:  
*a* – дискретної; *б* – безперервної

Під час аналізу безперервних випадкових величин користуються стовпчастими гістограмами розподілу. Стовпчасту гістограму показано на рис. 4.1, *б*.

Увесь діапазон можливих значень  $x_k$  розбивається на однакові інтервали  $\Delta$ . Припустимо, що вибрана ширина інтервалу збігається зі значеннями  $\Delta x_k = \Delta x_m - \Delta x_{(m-1)}$ , як показано на рис. 4.1, *б*, тобто  $\Delta = \Delta x_k$ .

Висота кожного стовпчика  $f_k$  гістограми визначається з умови забезпечення рівності його площі частоті  $F_k$  реалізації результату  $x_k$

$$f_k \Delta = F_k . \quad (4.6)$$

Іншими словами, на гістограмі для неперервної випадкової величини площа  $k$ -го стовпчика має те ж значення, що й висота  $k$ -го стовпчика на гістограмі дискретної випадкової величини.

Використання подібних гістограм дозволяє визначати не тільки частоту реалізації якого-небудь результату експерименту, але і частку результатів, що потрапляють в той чи інший інтервал.

Якщо вибрати ширину інтервалу  $\Delta = 1$ , то згідно з (4.6) висота стовпчика  $f_k$  гістограми стає рівною частоті  $F_k$ . Отже, площа всіх стовпчиків також буде рівною одиниці. У цьому випадку гістограма називається *нормованою*.

Із зростанням кількості вимірів до нескінченності  $N \rightarrow \infty$  і зменшенні інтервалу  $\Delta \rightarrow 0$  отримуємо стовпчики гістограми нескінченно малої ширини. Лінія, проведена через їх вершини (рис. 4.2, а), є графіком функції, яку називають *щільністю розподілу ймовірностей* випадкової величини. Щільність розподілу позначають  $f(x)$ ; тут  $x$  – одне з допустимих значень випадкової величини.

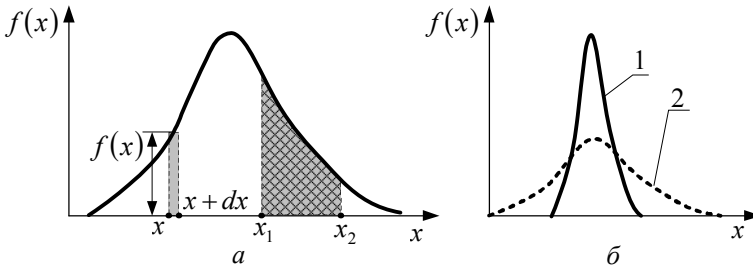


Рис. 4.2. Щільності розподілу ймовірностей

Частка вимірювань, яка потрапить (рис. 4.2, а) у будь-який малий інтервал від  $x$  до  $x + dx$ , дорівнюватиме площі  $f(x)dx$ . Отже  $f(x)dx$  є ймовірністю того, що будь-яке одиничне вимірювання призведе до результату, який лежить в інтервалі від  $x$  до  $x + dx$ .

Інтеграл від  $f(x)$  на деякому інтервалі  $[x_1; x_2]$  визначає ймовірність того, що випадкова величина  $X$  при черговому випробуванні опиниться у даному інтервалі

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx .$$

У загальному випадку, коли випадкова величина може приймати будь-які дійсні значення, повна ймовірність отримання результату складе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (4.7)$$

Рівняння (4.7) є аналогом рівняння (4.4) для дискретних випадкових величин.

Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини матиме гостру верхівку (крива 1 на рис. 4.2, б), якщо в ході експерименту виконувались досить точні вимірювання і навпаки – якщо точність вимірювань була недостатньою, то і результати будуть дуже відрізнятися один від одного, і щільність розподілу виявиться пологою і широкою (крива 2 на рис. 4.2, б).

Наявність щільності розподілу ймовірностей  $f(x)$ , дозволяє отримати важливі для практики характеристики випадкової величини:

- $M[X]$  – математичне сподівання (середнє значення). Якщо відома щільність розподілу, то сума в (4.2) замінюється інтегралом

$$M[X] = \bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = m_x. \quad (4.8)$$

- $D[X]$  – дисперсію (міру розсіювання) випадкової величини  $X$  відносно її математичного сподівання  $m_x$

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x) dx = D_x. \quad (4.9)$$

- $\sigma[X]$  – середньоквадратичне відхилення

$$\sigma[X] = \sqrt{D_x} = \sigma_x. \quad (4.10)$$

- $E[X]$  – середнє (ймовірне) відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Воно зазвичай знаходиться із умови

$$\int_{-E}^{+E} f(x) dx = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad E = 0,674 \sigma_x = \delta_b. \quad (4.11)$$

Існує багато видів розподілів: рівномірний, нормальний (Гауса), експоненціальний, біноміальний, Пуассона, Стюдента, Фішера тощо. Нормальний розподіл, зване нормальним законом розподілу Гауса, грає дуже важливу роль в технічних системах і займає серед інших розподілів особливе положення. Цей розподіл найчастіше зустрічається на практиці. Головна його особливість у тому, що він є граничним, до якого наближаються інші розподіли у разі типових умов, котрі досить часто зустрічаються.

Нормальний закон розподілу характеризується щільністю ймовірності, яка має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right),$$

де  $m_x$  – математичне сподівання;  $\sigma_x$  – середньоквадратичне відхилення випадкової величини.

Крива розподілу за нормальним законом має симетричний горбистий вигляд (рис. 4.3). Максимальна ордината кривої, яка дорівнює  $\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}$ , відповідає точці  $x = m_x$ ; якщо віддалятися від  $m_x$ , то щільність розподілу зменшується, і, у разі  $x \rightarrow \pm\infty$ , крива асимптотично наближається до вісі абсцис.

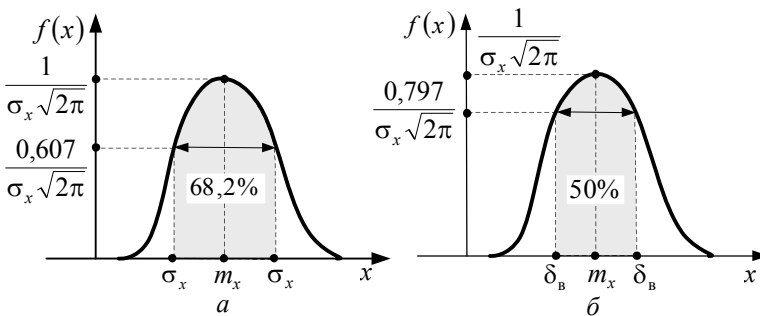


Рис. 4.3. Нормальний закон розподілу:  
 a – 68% довірна межа;  
 б – 50% довірна межа.

Середньоквадратичне відхилення  $\sigma_x$  випадкової величини визначає 68%-у довірчу межу (рис. 4.3, *a*), для якої ймовірність того, що будь-яке вимірювання потрапить в інтервал в межах  $\sigma_x$  від середнього значення  $x = m_x$  дорівнює 68% .

Серединне відхилення  $\delta_b$  випадкової величини визначає 50%-у довірчу межу (рис. 4.3, *b*), для якої ймовірність того, що будь-яке вимірювання потрапить в інтервал в межах  $\delta_b$  від середнього значення  $x = m_x$  дорівнює 50%. Отже, серединне відхилення – це таке відхилення випадкової величини від її математичного сподівання, при якому як більші, так і менші відхилення рівноймовірні.

Для нормального закону розподілу  $\delta_b \approx 0,674\sigma_x$  .

Розподіл Гауса має ряд чудових властивостей:

- сума випадкових величин з нормальними розподілами також має нормальний розподіл;
- якщо на величину діє багато незалежних перешкод, її щільність ймовірності прагне до нормального закону;
- при проходженні випадкового сигналу з нормальним розподілом через лінійну систему сигнал на виході також має нормальний розподіл.

Характеристики випадкових величин широко застосовуються при оцінці коливань літака, корпусу рухомого автомобіля, бойової машини, качки корабля тощо.

## 4.2 Випадкові процеси та їх характеристики

---

***B*** *випадковою функцією* називатимемо функцію, яка в результаті досліду може прийняти той чи інший конкретний вигляд, невідомо заздалегідь – який саме. Вигляд, який приймає випадкова функція в результаті досліду, має назву *реалізації випадкової функції*.

*Випадковий процес* – це випадкова функція часу. Дослідник має справу, як правило, тільки з однією реалізацією випадкового процесу із багатьох можливих функцій.



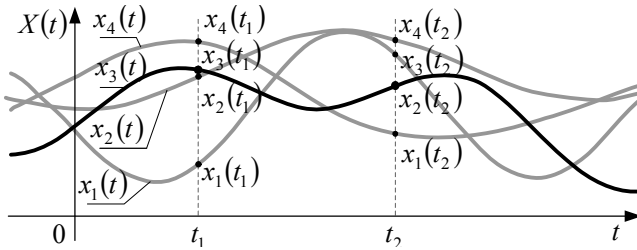


Рис. 4.4. Ансамбль реалізацій (випадковий процес)

Повний набір усіх можливих реалізацій випадкового процесу називають *ансамблем*. У загальному вигляді випадковий процес – це і є ансамбль реалізацій (рис. 4.4), а не функція у звичайному розумінні. Надалі увесь ансамбль (випадковий процес) будемо позначати  $X(t)$ , а окрему реалізацію -  $x(t)$ .

Характеристикою ансамблю реалізацій (випадкового процесу) у кожен фіксований момент часу  $t = t_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) є щільність розподілу  $f(X_i, t_i)$  ймовірностей випадкової величини

$$X_i = \{x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), \dots\} = X(t_i).$$

Для кожного значення часу  $t_i$  щільність розподілу ймовірностей може бути різною.

Як результат, *математичне сподівання* ансамблю реалізацій (випадкового процесу), його *дисперсія* і *середньоквадратичне відхилення* будуть змінюватися у часі

$$M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f(X, t) dX = m_x(t), \quad (4.12)$$

$$D[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [X - m_x(t)]^2 \cdot f(X, t) dX = D_x(t), \quad (4.13)$$

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (4.14)$$

Математичне сподівання ансамблю  $m_x(t)$  являє собою деяку середню криву (рис. 4.5), біля якої групуються всі можливі реалізації  $X_i = \{x_1(t_i), x_2(t_i), x_3(t_i), x_4(t_i), \dots\}$  випадкового процесу.

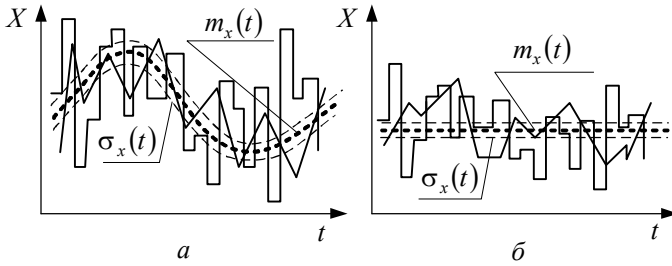


Рис. 4.5. Випадкові процеси:  
*a* – нестационарний; *б* – стаціонарний

Дисперсія і середньоквадратичне відхилення характеризують можливе розсіювання окремих реалізацій ансамблю відносно його математичного сподівання.

Окрім ймовірнісних характеристик випадкового процесу  $m_x(t)$  і  $D_x(t)$ , котрі для кожного моменту часу є середніми за ансамблем, можуть бути розглянуті ймовірнісні характеристики окремих реалізацій на всьому часовому діапазоні  $(-T \dots +T)$  їх зміни.

Математичне сподівання і дисперсію реалізації знаходимо як

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt, \quad (4.15)$$

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [x(t) - m_x]^2 dt. \quad (4.16)$$

Перехід до межі у разі  $T \rightarrow \infty$  необхідний для того, щоб характеризувати не окрему ділянку, а всю реалізацію  $x(t)$  у цілому.

Випадкові процеси, ймовірнісні характеристики яких є функціями часу, називаються *нестационарними*.

Для нестационарних випадкових процесів характеристики ансамблю (4.12 – 4.13) не співпадають з характеристиками (4.15 – 4.16) реалізацій

$$m_x(t) \neq m_x, \quad D_x(t) \neq D_x.$$

Строго говорячи, усі реальні процеси – нестационарні. Проте, вважають, що на певному інтервалі часу (наприклад при перельоті літака з одного пункту призначення в інший) властивості випадко-

вих процесів (вітру, атмосфери) не змінюються. Практика показує, що подібні припущення прийнятні для багатьох зовнішніх впливів на системи автоматичного керування. У цьому випадку процес називається *стаціонарним*.

Щільність розподілу ймовірностей стаціонарного ансамблю реалізацій не залежить від часу і для кожного значення  $t_i$  буде величиною постійною

$$f(X, t) = f(X) = \text{const} .$$

Математичне сподівання і дисперсія на будь-якому інтервалі реалізації стаціонарного ансамблю також будуть мати одні й ті ж значення

$$m_x(t) = \text{const} , \quad D_x(t) = \text{const} .$$

У стаціонарному випадковому процесі математичне сподівання буде горизонтальною прямою, а розсіювання відносно нього випадкових реалізацій визначиться постійним значенням середньоквадратичного відхилення (рис.4.5, б).

У низці випадків стаціонарні випадкові процеси володіють чудовою властивістю *ергодичності* – середнє за ансамблем реалізацій достовірно дорівнює відповідному середньому у часі для однієї реалізації. Наприклад, математичне сподівання стаціонарного випадкового процесу можна знайти або через його щільність розподілу

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f(X) dX , \quad (4.17)$$

або як середнє значення на інтервалі однієї реалізації

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt . \quad (4.18)$$

В обох випадках отримуємо однаковий результат, тобто

$$m_x(t) = m_x = \text{const} .$$

Для дисперсій і середньоквадратичних відхилень стаціонарних ергодичних випадкових процесів маємо

$$D_x(t) = D_x = \text{const} ,$$

$$\sigma_x(t) = \sigma_x = \text{const} .$$

Таким чином, досліджуючи будь-яку реалізацію випадкового процесу і виявляючи для цієї реалізації математичне сподівання і

дисперсію, отримаємо той самий результат, що й при дослідженні ансамблю реалізацій.

Стосовно до дослідження коливань літака, корабля, автомобіля це означає, що тривале спостереження випадкових коливань на одному об'єкті дозволяє отримати ті ж результати, що й велике число спостережень, зроблене за аналогічних умов на великому числі однотипних об'єктів.

### 4.3 Кореляційна функція і спектральна щільність стаціонарного випадкового процесу

**У** динаміці стаціонарних випадкових процесів роль часової функції відіграє кореляційна функція  $R(\tau)$ , а як частотна характеристика використовується спектральна щільність  $S(\omega)$ .

*Кореляційна функція* будь-якого стаціонарного ергодичного випадкового процесу  $x(t)$ , який спостерігається в інтервалі часу  $(-T \dots +T)$ , дорівнює

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\tau)dt \quad (4.19)$$

і формально означає середню величину за часом від добутку  $x(t)x(t+\tau)$ .

Фізична суть кореляційної функції полягає у тому, що вона дозволяє виявити зв'язок подальшого значення випадкового процесу  $x(t+\tau)$  з його попереднім значенням  $x(t)$  і є мірою цього зв'язку. Графіки кореляційної функції показано на рис. 4.6.

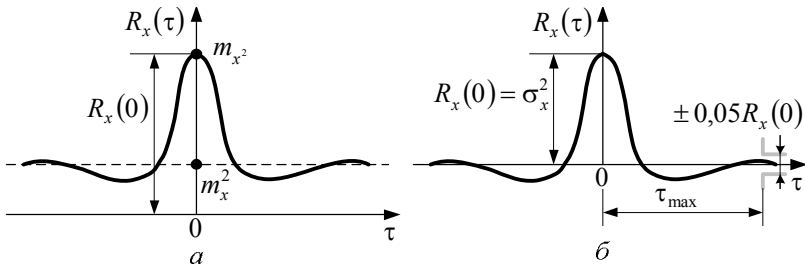


Рис. 4.6. Кореляційна функція випадкового процесу:  
 а – нецентрованого; б – центрованого

Кореляційна функція має низку важливих властивостей:

- початкове значення кореляційної функції (рис. 4.6, *a*) дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкового  $x(t)$  процесу

$$R(0) = m_{x^2};$$

- кінцеве значення кореляційної функції (рис. 4.6, *a*) дорівнює квадрату математичного сподівання випадкового процесу  $x(t)$

$$R(\infty) = m_x^2;$$

- дисперсія випадкового процесу  $x(t)$  визначається (рис. 4.6, *a*) різницею початкового та кінцевого значень кореляційної функції

$$D_x = \sigma_x^2 = R_x(0) - R_x(\infty);$$

для центрованих (рис. 4.6, *b*) процесів  $m_x = 0$ , відповідно,

$$D_x = \sigma_x^2 = R_x(0);$$

- у всіх випадках якщо  $\tau = 0$  кореляційна функція має найбільше значення, у тому числі і найбільше за модулем, тобто  $R_x(0) > |R_x(\tau)|$  при усіх  $\tau$ ;

- кореляційна функція є парна (симетрична) функція

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau),$$

тому можна розраховувати кореляційну функцію тільки для  $\tau \geq 0$ , а іншу частину будувати симетрично;

- значення кореляційної функції зі збільшенням інтервалу, як правило, зменшується, оскільки зв'язки між розглянутими значеннями випадкового процесу послаблюються.

За виглядом графіка кореляційної функції можна судити і про об'єкт спостереження. Наприклад, чим менше інерційність рухомого об'єкта, тим швидше спадає кореляційна функція, тобто легший і маневреніший літак (корабель, автомобіль), тим менший зв'язок між наступними і попередніми положеннями його корпусу. Звідси випливає, що чим швидше спадає кореляційна функція (рис. 4.7), тим більш високі частоти будуть наявні у випадковому процесі.

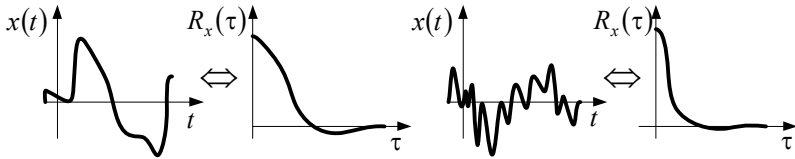


Рис. 4.7. Реалізації процесів та їх кореляційні функції

Кореляційну функцію можна отримати як результат обробки експериментально знятих реалізацій досліджуваного випадкового процесу при досить тривалому його запису.

Обробка осцилограми (рис. 4.8) проводиться таким чином:

– часовий інтервал запису  $T$  поділяється на  $N$  рівних частин

тривалістю  $\Delta t = \frac{T}{N}$ ;

– для різних значень  $\tau$ , кратних  $\Delta t$

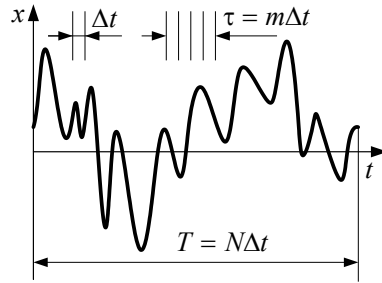


Рис. 4.8. Обробка реалізації випадкового процесу

$$\tau = m\Delta t \quad (m = 1, 2, 3, 4, \dots),$$

знаходяться середні значення добутку ординат

$$R(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} x_n x_{n+m};$$

– за отриманими значеннями будується графік кореляційної функції в залежності від інтервалу  $m$  або часу  $\tau = m\Delta t$ ;

– відповідно до кореляційної функції визначаються характеристики досліджуваного процесу.

Для автоматизації вельми громіздких і трудомістких обчислень застосовуються комп'ютерно-інтегровані системи обробки експериментальних досліджень.

Для того, щоб отриману експериментальним шляхом кореляційну функцію можна було використовувати у розрахунках систем автоматичного керування, її попередньо апроксимують якою-

небудь аналітичною залежністю. Досвід показує, що для центрального випадкового процесу найзручнішою формою апроксимації вважається вираз

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau + \sum D_{xk}^2 \cos \omega_k \tau, \quad (4.20)$$

де  $D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$  – загасаюча складова кореляційної функції,  $\sum D_{xk}^2 \cos \omega_k \tau$  – сума гармонічних складових кореляційної функції, відповідних гармонічним складовим досліджуваного процесу.

У більшості випадків при апроксимації вдається обмежитись однією чи двома гармонічними складовими.

*Спектральна щільність*  $S_x(\omega)$  являє собою масштабований комплексний частотний спектр випадкового процесу  $x(t)$  і характеризує розподіл середньої потужності цього процесу по спектру частот

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |f(j\omega)|^2, \quad (4.21)$$

де  $f(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$  – комплексний частотний спектр;  $T$  – інтервал спостереження процесу.

Графік  $S_x(\omega)$  розташований вище вісі абсцис і симетричний відносно вісі ординат (рис. 4.9).

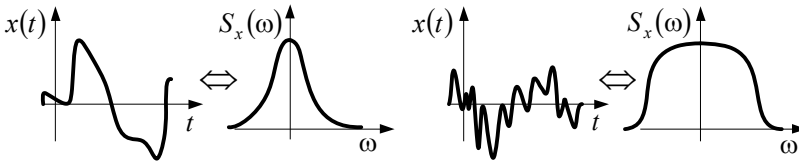


Рис. 4.9. Реалізації процесів та їх спектральні щільності

Важливою властивістю спектральної щільності є те, що інтегрування її на всьому діапазоні частот від  $-\infty$  до  $+\infty$  дає середньоквадратичне значення випадкового процесу

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega.$$

По вигляду спектральної щільності (рис. 4.9) можна зробити висновки відносно процесу, який вона описує:

- чим вузчий графік  $S_x(\omega)$ , тим меншими частотами представлений випадковий процес, а значить, тим повільніше змінюється він у часі;

- чим ширший графік  $S_x(\omega)$ , тим більшими частотами представлений випадковий процес, відповідно, тим швидше змінюється він у часі.

Спектральна щільність і кореляційна функція є взаємними перетвореннями Фур'є

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (4.22)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4.23)$$

Використовуючи формулу Ейлера, запишемо в (4.22), (4.23) експоненти у вигляді суми дійсної (косинусної) та уявної (синусної) складових

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau,$$

$$e^{j\omega\tau} = \cos \omega\tau + j \sin \omega\tau.$$

Тоді

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \sin \omega\tau d\tau. \quad (4.24)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \sin \omega\tau d\omega. \quad (4.25)$$

При інтегруванні в симетричних межах другі інтервали рівнянь (4.24) і (4.25) будуть дорівнювати нулю, оскільки функція  $\sin \omega\tau$  непарна.

Відповідно,

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (4.26)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (4.27)$$

оскільки функція  $\cos \omega\tau$  – парна.



Таким чином, по рівнянню кореляційної функції відповідно (4.22) або (4.26) можна розрахувати спектральну щільність і навпаки.

У разі апроксимації центрованої кореляційної функції виразом (4.20), отримуємо алгоритм спектральної щільності, який може використовуватись в аналітичних дослідженнях систем

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2 + \omega_0^2 + \omega_1^2}{(\alpha^2 + \omega_0^2)^2 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega_1^2 + \omega_1^4} + \sum D_{xk} \delta(\omega - \omega_k), \quad (4.26)$$

де  $\delta(\omega - \omega_k)$  – дельта функція у точці  $\omega = \omega_k$ .

На практиці можуть застосовуватися й інші види апроксимації кореляційної функції й спектральної щільності.

Поряд із розрахунковими методами, спектральну щільність можна отримати у разі обробки експериментально знятої реалізації випадкового процесу. Для цього необхідно розкласти реалізацію  $x(t)$  на гармонічні складові (рис. 4.10), сукупність яких у моменти часу  $t_i$  визначає поточне значення процесу  $x(t)$ .

Кожна гармоніка має свою частоту  $\omega_k = \frac{2\pi}{T_k}$  і амплітудне значення  $x_{mk}$  сигналу. Тож якщо тепер побудувати графічну залежність амплітуд гармонічних складових випадкового процесу від їх частот, то вона, власне, і буде спектральною щільністю випадкового процесу. Звернемо увагу, що при побудові спектральної щільності  $S(\omega)$  амплітуда кожної гармоніки (рис. 4.11) масштабується

$$S_x(\omega_k) = \frac{x_{mk}^2}{\omega_k}.$$

Після визначення, наприклад, методом планіметрування, площі  $S$ , обмеженої графіком спектральної щільності  $S_x(\omega)$  і віссю абсцис знаходимо дисперсію і середньоквадратичне відхилення досліджуваного випадкового процесу

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{S/\pi}.$$

В теоретичних дослідженнях іноді буває зручно скористатися випадковими процесами, які неможливо реалізувати на практиці. Наприклад, коли у розробника САК нема інформації про випадкові збурення, які діють на систему автоматичного керування, то можна зробити припущення про їх необмежену потужність. Якщо для обраних найгірших умов функціонування системи внаслідок досліджень будуть отримані задовільні результати і характеристики системи залишаться в межах норм технічних умов, то можна припустити, що вони будуть не гірші і при будь-яких інших випадкових збуреннях.

В теорії автоматичного керування роль випадкового процесу із нескінченно великою енергією відіграє, так званий, *білий шум*. Спектральна щільність білого шуму постійна на всьому діапазоні зміни частот

$$S_x(\omega) = S_0 = \text{const},$$

а кореляційна функція дорівнює

$$R_x(\tau) = S_0 \delta(\tau).$$

При моделюванні систем зазвичай використовують *білі*

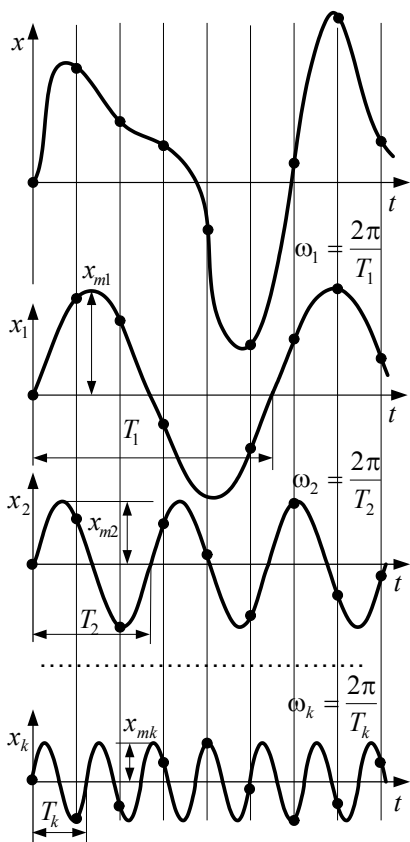


Рис. 4.10. Розкладання реалізації на гармоніки

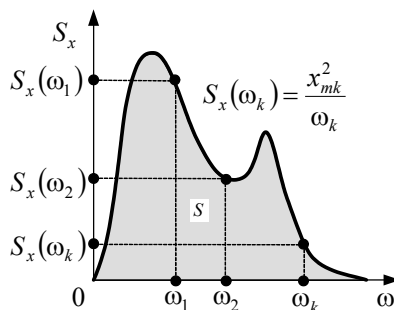


Рис. 4.11. Спектральна щільність

лий шум з обмеженою смугою пропускання (рис. 4.12).

$$R_x(\tau) = \frac{S_0 \omega_0}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau},$$

$$S_x(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

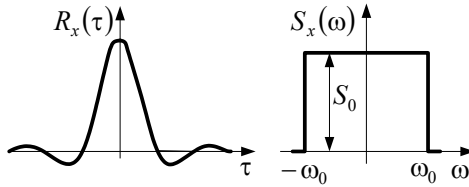


Рис. 4.12. Характеристики білого шуму з обмеженою смугою

#### 4.4 Проходження випадкового сигналу через лінійну систему

**Р**озглянемо лінійну САК з передатною функцією  $W(s)$ . Вважатимемо, що на її вхід надходить випадковий сигнал  $x(t)$ , кореляційна функція  $R_x(\tau)$  і спектральна щільність  $S_x(\omega)$  якого відомі. Структурну схему САК показано на рис. 4.13. Завдання полягає у тому, щоб визначити ймовірнісні характеристики керованої величини  $y(t)$ .

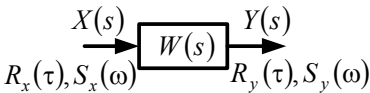


Рис. 4.13. Структурна схема

Для вирішення поставленого завдання зручно виходити із відомої спектральної щільності сигналу

на вході системи автоматичного керування.

За визначенням спектральна щільність  $S_x(\omega)$  пов'язана з комплексним частотним спектром  $f_x(j\omega)$  випадкового процесу  $x(t)$  співвідношенням

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |f_x(j\omega)|^2. \quad (4.27)$$

Подібне співвідношення матиме місце і для спектральної щільності  $S_y(\omega)$  керованої величини  $y(t)$  з її комплексним частотним спектром  $f_y(j\omega)$

$$S_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |f_y(j\omega)|^2. \quad (4.28)$$

В лінійній САК комплексний частотний спектр керованої величини  $f_y(j\omega)$  може бути обчислений за комплексним частотним спектром  $f_x(j\omega)$  сигналу на її вході і частотною передатною функцією

$$f_y(j\omega) = W(j\omega)f_x(j\omega). \quad (4.29)$$

Підставимо (4.29) в (4.28). У результаті отримаємо

$$S_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |f_x(j\omega)|^2 \cdot |W(j\omega)|^2.$$

Із врахуванням (4.27) маємо

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) \cdot |W(j\omega)|^2. \quad (4.30)$$

Таким чином, *спектральна щільність керованої величини може бути отримана помноженням спектральної щільності випадкового сигналу на вході системи на квадрат модуля її частотної передатної функції.*

За знайденою спектральною щільністю  $S_y(\omega)$  керованої величини можуть бути розраховані її кореляційна функція  $R_y(\tau)$

$$R_y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \quad (4.31)$$

і середньоквадратичне відхилення  $\sigma_y$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega. \quad (4.32)$$

Якщо спектральну щільність  $S_y(\omega)$  уявити дробово-раціональною функцією, то обчислення згідно (4.31) і (4.32) зведуться до визначення табличних інтегралів виду

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{|H(j\omega)|^2} d\omega.$$

На практиці, як правило, спектральну щільність (4.30) керованої величини  $S_y(\omega)$  знаходять графоаналітичним методом (рис. 4.14).

Порядок розрахунків при цьому наступний:

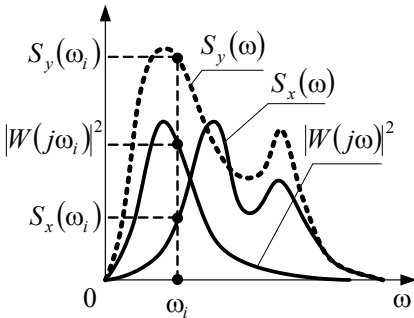


Рис. 4.14. Графо-аналітичний метод визначення спектральної щільності

- відповідно до передатної функції  $W(s)$  системи визначають її частотну передатну функцію

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega);$$

- обчислюють квадрат модуля частотної передатної функції

$$|W(j\omega)|^2 = P^2(\omega) + Q^2(\omega);$$

і, задаючись частотами від 0 до  $\infty$ , будують графік  $|W(j\omega)|^2$ ;

- у тих самих координатах і в такому ж масштабі будують графік спектральної щільності  $S_x(\omega)$  сигналу входу;
- перемножують однойменні ординати  $S_x(\omega_i)$  і  $|W(j\omega_i)|^2$  на кожній із частот  $\omega_i$  і отримують значення ординат спектральної щільності керуваної величини  $S_y(\omega_i)$ ;
- з'єднуючи ординати  $S_y(\omega_i)$  плавною лінією, отримують графік спектральної щільності  $S_y(\omega)$  керуваної величини;
- визначають планіметруванням площу  $S_y$ , обмежену кривою спектральної щільності  $S_y(\omega)$  і віссю абсцис;
- знаходять середньоквадратичне значення керуваної величини

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{S_y}{\pi}};$$

- у разі необхідності апроксимують отриману криву спектральної щільності  $S_y(\omega)$ .

*Розглянемо приклад* знаходження середньоквадратичного значення керуваної величини системи з передатною функцією

$W(s) = \frac{1}{s+1}$ , на вхід якої надходить випадковий стаціонарний сигнал необмеженої потужності  $S_x(\omega) = N \left[ \frac{\text{град}^2 \text{с}}{\text{рад}} \right]$ .

Знаходимо частотну передатну функцію системи

$$W(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \cdot \frac{1-j\omega}{1-j\omega} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{1+\omega^2} - j \frac{\omega}{1+\omega^2}.$$

Розраховуємо квадрат модуля частотної передатної функції

$$|W(j\omega)|^2 = \left( \frac{1}{1+\omega^2} \right)^2 + \left( \frac{\omega}{1+\omega^2} \right)^2 = \frac{1}{1+\omega^2}.$$

Відповідно до (4.30) отримуємо спектральну щільність керованої величини

$$S_y(\omega) = \frac{N}{1+\omega^2}.$$

Тоді, згідно (4.32) маємо

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N}{1+\omega^2} d\omega. \quad (4.33)$$

Обчислюємо інтеграл (4.33) і знаходимо

$$\sigma_y^2 = \frac{N}{2\pi} \arctg\omega \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{N}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{N}{2}.$$

Отже, середньоквадратичне відхилення керованої величини складе  $\sigma_y = \sqrt{N/2}$ . Якщо матиме значення  $N = 0,5$  отримаємо  $\sigma_y = 0,5[\text{град}]$ .

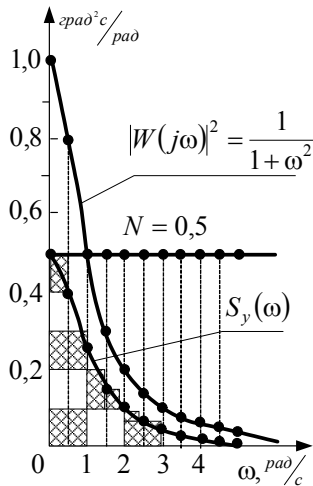


Рис. 4.15. Приклад розрахунку

Розрахунок тієї ж системи графо-аналітичним методом ілюструє рис. 4.15.

Знаходимо площу, обмежену кривою  $S_y(\omega)$  і вісями координат

$$S_y = 7,5 \cdot 0,1 = 0,75[\text{град}^2].$$

Отже,

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{S_y}{\pi}} = \sqrt{0,2387} \approx 0,489 \text{ [град]}.$$

В обох випадках маємо близькі результати. Точність графоаналітичного методу визначається правильним вибором масштабу графіків.

#### 4.5 Оцінка точності автоматичних систем

**П**ри дослідженні систем автоматичного керування виникає необхідність оцінки їх точності. Як критерій оцінки точності береться зазвичай величина помилки в тому чи іншому режимі роботи системи.

При впливі на САК випадкових сигналів управління і зовнішнього збурення кінцевою метою оцінки точності є знаходження кореляційних функцій, спектральних щільностей і середньоквадратичних значень керованої величини і помилки.

Структурну схему системи автоматичного керування за відхиленням з повним зворотним зв'язком показано на рис. 4.16. Точність системи, як у режимі стабілізації, так і в режимі слідкування у повній мірі характеризується величиною і характером зміни помилки розузгодження  $\theta(t) = r(t) - y(t)$ .

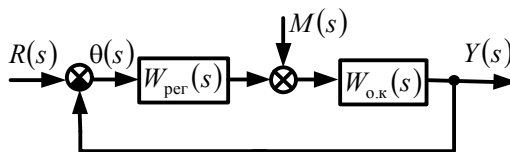


Рис. 4.16. Структурна схема системи

Припустимо, що ймовірнісні характеристики випадкового сигналу керування  $r(t)$  і збурювального впливу  $m(t)$  відомі.

Знайдемо передатну функцію розузгодження

$$W_s(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + W_{\text{пер}}(s)W_{\text{ок}}(s)} = \frac{1}{1 + W_p(s)} \quad (4.34)$$

і передатну функцію помилки за зовнішнім збуренням

$$W_{sm}(s) = \frac{\theta(s)}{M(s)} = \frac{W_{o.k}(s)}{1 + W_{per}(s)W_{o.k}(s)} = \frac{W_{o.k}(s)}{1 + W_p(s)}, \quad (4.35)$$

де  $W_p(s)$  – передатна функція розімкненої системи.

Відповідно до принципу суперпозиції помилка розузгодження визначається як

$$\theta(s) = W_s(s)R(s) + W_{sm}(s)M(s). \quad (4.36)$$

Беручи до уваги випадковий характер сигналу керування і збурювального впливу, маємо

$$S_\theta(\omega) = |W_s(j\omega)|^2 S_r(\omega) + |W_{sm}(j\omega)|^2 S_m(\omega), \quad (4.37)$$

де  $S_r(\omega), S_m(\omega)$  – спектральні щільності сигналу керування і збурювального впливу відповідно;  $|W_s(j\omega)|^2, |W_{sm}(j\omega)|^2$  – квадрати модулів частотних передатних функцій розузгодження і помилки за зовнішнім збуренням.

Після підстановки в (4.37) значень частотних передатних функцій згідно з (4.34), (4.35) отримуємо рівняння розрахунку спектральної щільності помилки розузгодження

$$S_\theta(\omega) = \left| \frac{1}{1 + W_p(j\omega)} \right|^2 S_r(\omega) + \left| \frac{W_{o.k}(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} \right|^2 S_m(\omega). \quad (4.38)$$

Інтегрування виразу (4.38) на всьому діапазоні частот дозволяє визначити дисперсію і середньоквадратичне значення помилки розузгодження

$$\sigma_\theta = \sqrt{D_\theta} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(\omega) d\omega}.$$

У разі необхідності, за знайденою спектральною щільністю  $S_\theta(\omega)$  розраховується кореляційна функція  $R_\theta(\tau)$  помилки.

Розглянемо тепер систему (рис. 4.17, а), на вхід якої надходять як сигнал керування  $r(t)$ , так і збурювальний вплив  $m(t)$ . Спектра-



льні щільності  $S_r(\omega)$ ,  $S_m(\omega)$  і кореляційні функції  $R_r(\tau)$ ,  $R_m(\tau)$  вхідних впливів вважаємо відомими.

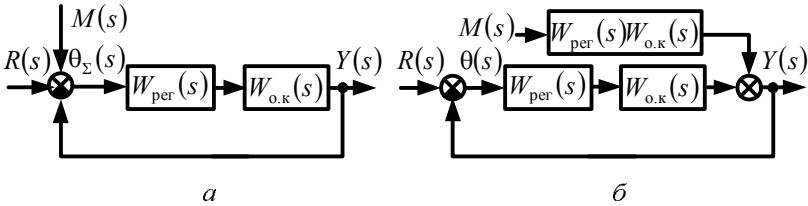


Рис. 4.17. Структурні схеми системи:  
а – початкова; б – еквівалентна

Виділимо на схемі помилку розузгодження – у зображеннях  $\theta(s) = R(s) - Y(s)$ , яка визначає точність системи. Для цього перетворимо початкову структурну схему і перенесемо точку прикладання збурювального впливу  $M(s)$  на вихід ланки з передатною функцією  $W_{o.k}(s)$ , яка описує об’єкт керування (рис. 4.17, б). Відповідно до структурної схеми, керуючись принципом суперпозиції, визначаємо помилку розузгодження

$$\theta(s) = \frac{1}{1+W_p(s)} R(s) + \frac{W_{per}(s)W_{o.k}(s)}{1+W_p(s)} M(s). \quad (4.39)$$

Переходячи в (4.39) до частотних передатних функцій, згідно (4.32) визначаємо середньоквадратичне значення помилки

$$\sigma_\theta = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+W_p(j\omega)} \right|^2 S_r(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{W_{per}(j\omega)W_{o.k}(j\omega)}{1+W_p(j\omega)} \right|^2 S_m(\omega) d\omega}.$$

Таким чином, помилка розузгодження зумовлена з одного боку помилкою відпрацювання системою сигналу керування

$$\sigma_{\theta r} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+W_p(j\omega)} \right|^2 S_r(\omega) d\omega},$$

з іншого – помилкою дії збурювального впливу

$$\sigma_{\theta m} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{W_{\text{пер}}(j\omega)W_{\text{ок}}(j\omega)}{1+W_p(j\omega)} \right|^2 S_m(\omega) d\omega},$$

яка у ряді випадків може розглядатися як перешкода сигналу керування.

Наявність у розробника систем інформації про ймовірнісні характеристики збурювальних впливів дозволяє так обирати параметри регулятора  $W_{\text{пер}}(j\omega)$ , щоб забезпечувалось максимальне, по можливості, розходження піків АФЧХ систем і спектральних щільностей збурювальних впливів (перешкод). В цьому випадку, складова помилки розузгодження  $\sigma_{\theta m}$ , зумовлена перешкодами буде зведена до мінімуму. Іншими словами – система матиме мінімальну смугу пропущення перешкод.

Спектральна щільність збурювального впливу  $S_m(\omega)$  і квадрати модулів  $|W_{sm_{1,2}}(j\omega)|^2$  амплітудно-фазових частотних характеристик двох систем з різними параметрами регуляторів наведено на рис. 4.18.

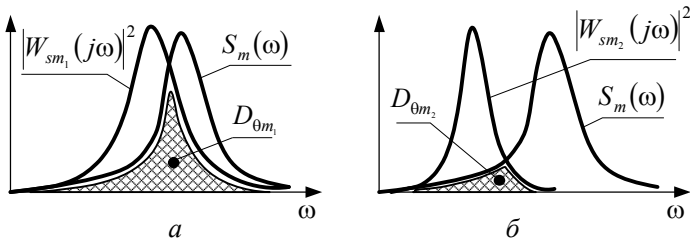
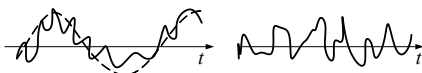


Рис. 4.18. Оптимізація параметрів системи

Аналіз показує, що у другому випадку (рис. 4.18, б) середньоквадратична помилка менша, ніж у першому  $\sigma_{\theta m_1} > \sigma_{\theta m_2}$ . Підвищення перешкодостійкості досягнуто завдяки оптимізації параметрів регулятора.

## 4.6 Контрольні питання й завдання

1. Дайте визначення дискретній випадковій величині.
2. Що називається неперервною випадковою величиною?
3. Наведіть приклади дискретних і неперервних випадкових величин.
4. Ймовірнісні характеристики випадкових величин.
5. Призначення гістограм розподілу випадкових величин. Види гістограм.
6. Назвіть призначення щільності розподілу випадкової величини.
7. Які характеристики випадкової величини можуть бути визначені за щільністю її розподілу?
8. Що таке математичне сподівання і дисперсія випадкової величини?
9. Фізична суть середньоквадратичного і серединного відхилень випадкової величини.
10. Нормальний закон розподілу випадкової величини.
11. Дайте визначення випадкової функції і випадковому процесу.
12. Які види випадкових процесів ви знаєте? Наведіть приклади.
13. Ідентифікуйте випадкові процеси за їх реалізаціями.

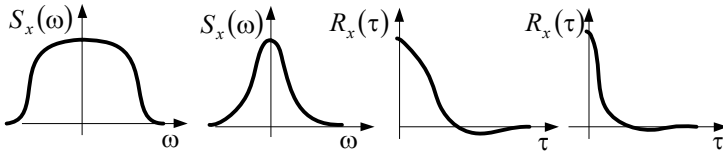


14. Дайте визначення кореляційної функції випадкового процесу.
15. Назвіть основні властивості кореляційної функції.
16. Ідентифікуйте випадкові процеси за їх ймовірнісними характеристиками

$$\left. \begin{aligned} m_x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X \cdot f(X, t) dX; \\ D_x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [X - m_x(t)]^2 \cdot f(X, t) dX \end{aligned} \right\} 1 \quad \left. \begin{aligned} m_x(t) &= \text{const} \\ D_x(t) &= \text{const} \end{aligned} \right\} 2.$$

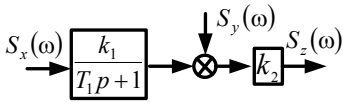
17. Для чого потрібна апроксимація кореляційних функцій?
18. Дайте визначення спектральної щільності випадкового процесу.
19. Зв'язок між спектральною щільністю і кореляційною функцією.
20. Перерахуйте основні властивості спектральної щільності.

21. Ідентифікуйте спектральні щільності випадкових процесів їх кореляційним функціям



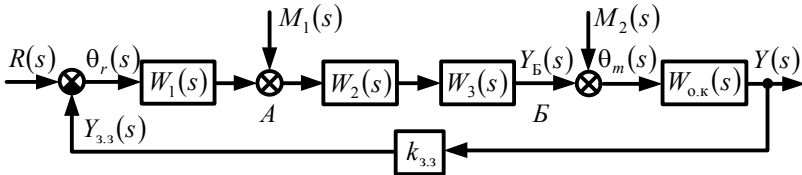
22. Напишіть рівняння зв'язку спектральної щільності вихідного сигналу САК зі спектральною щільністю випадкового сигналу на її вході.

23. Розкажіть принцип графо-аналітичного методу визначення спектральної щільності випадкового сигналу на виході системи за наявності випадкового сигналу на її вході.



24. Визначте спектральну щільність випадкового сигналу на виході САК.

25. Визначте дисперсію помилки розузгодження системи, яка знаходиться під впливом випадкових сигналів управління та зовнішніх збурень



26. Викладіть графічний і аналітичний методи обчислення середньоквадратичної похибки системи автоматичного керування.

27. Назвіть недоліки та переваги оцінки точності системи за середньоквадратичною похибкою.

28. Викладіть методику визначення середньоквадратичної похибки системи автоматичного керування при впливі на систему випадкового сигналу керування і збурювального впливу:

- а) прикладених у різних точках;
- б) прикладених в одній точці.

29. Викладіть принцип підвищення перешкодостійкості САК.



## СТІЙКІСТЬ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ

### 5.1 Стійкість технічних систем

**С**тійкістю називається здатність технічної системи повертатися в положення рівноваги після припинення дії зовнішніх сил, які вивели її з цього стану.

Під станом (положенням) рівноваги будемо розуміти стан системи, яка знаходиться у спокої, тобто, сигнал її виходу – постійна величина, а всі його похідні дорівнюють нулю. Стосовно до САК такий стан називають усталеним режимом роботи.

Три механічні системи, що знаходяться в положенні рівноваги, показані на рис. 5.1. У першій – куля розташована в чаші. Якщо її трохи зрушити з місця і відпустити, то куля повернеться у початкове положення. Таке положення кулі буде називатися стійким. Однак, якщо кулю сильно відхилити від початкового положення, вона може вивалитися із чаші, тобто стійкість порушиться.

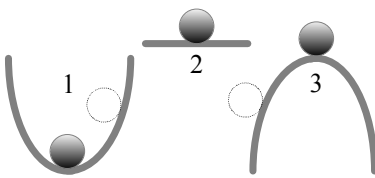


Рис. 5.1. Стани механічної системи

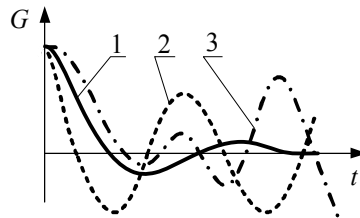


Рис. 5.2. Імпульсні перехідні функції

У третій системі куля знаходиться на випуклій поверхні чаші. При найменшому зсуві кулі убік і відпуску вона скотиться з вершини, тобто положення кулі *нестійке*.

У другій системі положення кулі *нейтральне* – за незначного зсуву вона залишається у тому положенні, в якому буде відпущена.

Кажуть, що така система нейтрально стійка або знаходиться на межі стійкості.

Висновок про стійкість систем автоматичного керування можна зробити аналізуючи їх часові характеристики, наприклад імпульсні перехідні функції (рис. 5.2).

Система автоматичного керування називається стійкою, якщо перехідний процес, викликаний в ній короткочасним зовнішнім впливом, буде затухаючим (крива 1). Якщо у системі виникають незгасаючі гармонічні коливання (крива 2), то вона перебуває на межі стійкості. У нестійкій системі перехідний процес розбіжний (крива 3).

У разі, коли до системи автоматичного керування прикладено постійний зовнішній вплив, наприклад одиничний ступінчатий сигнал  $1(t)$ , то для висновку про її стійкість досліджуються перехідні функції (рис. 5.3). Стійка САК після загасання перехідного процесу (крива 1) перейде з початкового усталеного режиму  $y_{ycr1}(t)$  в новий усталений режим  $y_{ycr2}(t)$ .

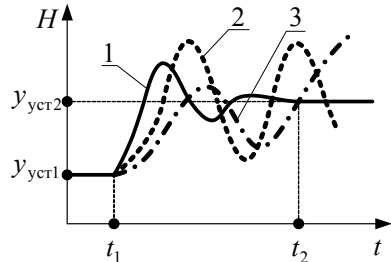


Рис. 5.3. Перехідні функції

Система автоматичного керування, у якій не наступають усталені режими, тобто перехідні процеси не загасають, практично непрацездатна. Це необхідно враховувати під час експлуатації САК і домагатися у ході її налаштування і регулювання таких значень параметрів, які забезпечили б необхідну якість перехідного процесу і стійкість системи.

Сувору математичну теорію стійкості було створено в роботах академіка О.М. Ляпунова. Для системи першого порядку з однією змінною стану  $x(t)$  стійкість за Ляпуновим можна сформулювати так: *система називається стійкою у положенні рівноваги  $y^*$ , якщо при початковому відхиленні  $y_0$  від положення рівноваги не більше, ніж на  $\delta$ , траєкторія руху  $y(t)$  відхиляється від  $y^*$  не більше, ніж на  $\varepsilon$ , причому для кожного  $\varepsilon$  можна знайти відповідне йому  $\delta(\varepsilon)$*

$$|y_0 - y^*| < \delta \Rightarrow |y(t) - y^*| < \varepsilon \quad \text{для всіх } t > 0.$$

Фактично це означає, що чим менше початкове відхилення, тим менше траєкторія руху відхиляється від положення рівноваги. Якщо крім того вектор стану прагне до положення рівноваги, тобто,

$$|y(t) - y^*| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

система називається *асимптотично стійкою* в положенні рівноваги  $y^*$ .

Поняття стійкості за Ляпуновим широко використовується під час досліджень як лінійних, так і нелінійних систем автоматичного керування.

## 5.2 Методи оцінки стійкості

---

Основним методом визначення стійкості системи автоматичного керування є метод, заснований на розв'язанні її лінійного диференціального рівняння руху.

Оскільки у разі лінеаризації нелінійних диференціальних рівнянь систем зазвичай обмежуються величинами першого порядку малості, то лінеаризовані рівняння їх динаміки (параграф 2.1) у відхиленнях у деяких літературних джерелах називають *рівняннями першого наближення*.

Питання про правочинність використання рівнянь першого наближення для оцінки стійкості систем, які є у загальному випадку нелінійними, вперше було поставлено і вирішено академіком О.М. Ляпуновим.

У главі 2 було показано, що процес керування, викликаний зовнішнім впливом, можна представити як суму власного  $y_0(t)$  і вимушеного  $y_m(t)$  рухів. Власний рух (перехідний процес) описується рівнянням

$$y_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (5.1)$$

де  $\lambda_i$  – корені характеристичного рівняння  $A(s) = 0$ , порядок якого дорівнює  $n$ ;  $C_i$  – постійні інтегрування.

Таким чином, перехідний процес являє собою суму експонент, які визначаються коренями характеристичного рівняння.

Виходячи із параметрів системи, корені  $\lambda_i$  можуть бути дійсними  $\lambda_i = \pm\alpha_i$ , комплексними  $\lambda_i = \pm\alpha_i \pm j\beta_i$  або уявними  $\lambda_i = \pm j\beta_i$ . Розглянемо кожен з можливих видів коренів характеристичного рівняння і оцінімо їх вплив на перехідні характеристики системи.

Дійсні корені. Якщо корінь від'ємний  $\lambda_i = -\alpha_i$ , то, зумовлена їм у рівнянні (5.1) експонента  $C_i e^{-\alpha_i t}$ , у разі  $t \rightarrow \infty$  буде затухаючою (рис. 5.4, а). При додатному корені  $\lambda_i = +\alpha_i$ , отримуємо висхідну експоненту  $C_i e^{+\alpha_i t}$ . Якщо корінь виявиться нульовим  $\lambda_i = 0$ , то відповідна йому експонента приймає вигляд постійної величини  $C_i e^{0t} = \text{const}$ .

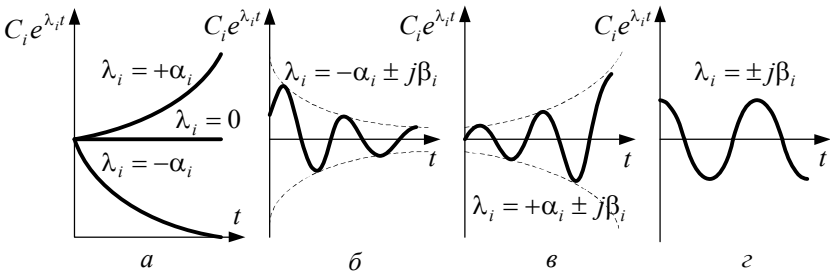


Рис. 5.4 Вплив коренів на характер зміни експонент:  
а - корені дійсні; б, в - корені комплексні; г - корені уявні

Комплексні корені. У разі від'ємної дійсної частини маємо сполучені корені  $\lambda_i = -\alpha_i \pm j\beta_i$ . Зумовлена ними у рівнянні (5.1) складова  $C_i e^{\lambda_i t} = C_i e^{-\alpha_i t} e^{\pm j\beta_i t}$ , являє собою синусоїдальні  $C_i e^{\pm j\beta_i t}$  затухаючі за експоненціальним законом  $e^{-\alpha_i t}$  коливання, кутова частота яких дорівнює уявній частині  $\beta_i$  кореня (рис. 5.4, б). У разі додатної дійсної частини сполучених коренів  $\lambda_i = +\alpha_i \pm j\beta_i$  синусоїдальні коливання  $C_i e^{\pm j\beta_i t}$  стануть розбіжними за експоненціальним  $e^{+\alpha_i t}$  законом (рис. 5.4, в).

Уявні корені. Припустимо, що  $\lambda_i = \pm j\beta_i$ . Тоді складова  $C_i e^{\lambda_i t} = C_i e^{\pm j\beta_i t}$  опише незгасаючі гармонічні коливання з постійною амплітудою (рис. 5.4, г).



Для виконання умови стійкості системи необхідно, щоб всі експоненти рівняння (5.1) загасали, тобто якщо  $t \rightarrow \infty$  прагнули до нуля. Із аналізу впливу коренів  $\lambda_i$  характеристичного рівняння на поведінку експонент випливає, що затухання перехідного процесу в системі забезпечується тільки у тому випадку, якщо дійсні частини всіх коренів будуть від'ємними.

У разі рівності нулю одного кореня  $\lambda_i = 0$  і від'ємних дійсних частинах усіх інших коренів перехідний процес буде прагнути до деякої постійної складової  $C_i e^{0t} = \text{const}$ . Якщо хоча б у одного кореня виявиться додатна дійсна частина, то перехідний процес стане розбіжним. Випадок, коли крім коренів з від'ємною дійсною частиною є корені уявні, відповідає системі із незатухаючими гармонійними коливаннями.

Таким чином:

- якщо всі корені характеристичного рівняння лінеаризованої системи мають від'ємні дійсні частини, то система стійка;
- якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння лінеаризованої системи буде мати додатну дійсну частину, то система нестійка;
- якщо серед коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи з від'ємними дійсними частинами є хоча б один уявний корінь система перебуватиме на межі стійкості;
- якщо серед коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи з від'ємними дійсними частинами є нульовий корінь, система вважається аперіодично стійкою.

Представлені висновки загальновідомі як теореми Ляпунова. Перші два належать до некритичних випадків дослідження стійкості систем по першому наближенню, другі два - до критичних.

Якщо корені характеристичного рівняння відобразити у вигляді векторів комплексної  $S$  - площини у координатах  $\alpha \rightarrow j\beta$ , то уявна вісь  $j\beta$  буде межею стійкості (рис. 5.5). Зліва від межі стійкості, де  $\alpha < 0$ , лежить область стійких процесів керування. При цьому запас стійкості системи можна характеризувати найменшим значенням модуля від'ємної дійсної частини кореня. На рис.5.5 запас стійкості дорівнює  $|- \alpha_1|$ .

Корені характеристичного рівняння залежать тільки від поєднання конструктивних параметрів системи і не залежать ні від вигляду зовнішніх впливів, ні від початкових умов. Отже, при проектуванні системи має бути передбачено експлуатаційне регулювання її параметрів, яке забезпечить стійкість процесів керування.

Викладена умова стійкості систем автоматичного керування призводить до важливого наслідку.

У загальному випадку характеристичне рівняння має вигляд

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (5.2)$$

Знаючи його корені  $\lambda_i$ , розкладемо багаточлен (5.2) на множники

$$A(s) = a_n (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_{n-1})(s - \lambda_n) = 0. \quad (5.3)$$

Система буде стійкою, якщо всі корені її характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини

$$\lambda_1 = -\alpha_1; \lambda_2 = -\alpha_2; \dots; \lambda_n = -\alpha_n.$$

Підставимо значення коренів  $\lambda_i$  у рівняння (5.3); отримуємо

$$A(s) = a_n (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) \dots (s + \alpha_{n-1})(s + \alpha_n) = 0. \quad (5.4)$$

Якщо тепер розкрити дужки і повернутися до рівняння вигляду (5.2), то якщо  $a_n > 0$  усі коефіцієнти  $a_i$  рівняння виявляються додатними.

Отже, усі коефіцієнти характеристичного рівняння стійкої системи додатні. Ця умова є необхідною, але недостатньою ознакою стійкості систем. За наявності від'ємних коефіцієнтів у характеристичному рівнянні система нестійка.

Далеко не завжди буває зручно обчислювати корені характеристичного рівняння. Тому у теорії автоматичного керування розроблено спеціальні методи, що дозволяють судити про стійкість системи, засновані на використанні так званих критеріїв стійкості.

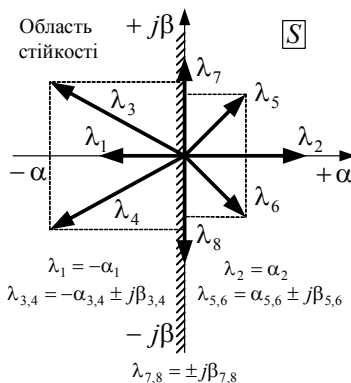


Рис. 5.5. Зображення коренів на комплексній площині

## 5.3 Алгебричні критерії стійкості

Алгебричні критерії дозволяють оцінювати стійкість системи за результатами аналізу її параметрів, що визначаються коефіцієнтами характеристичного рівняння.

Необхідна умова стійкості, яку викладено у параграфі 5.2, полягає у тому, що коефіцієнти характеристичного рівняння стійкої системи мають бути додатними, виявляється достатньою тільки для систем, які описуються диференціальними рівняннями першого і другого порядків.

При перевірці та дослідженні стійкості систем більш високих порядків необхідно знати не тільки знаки коефіцієнтів характеристичного рівняння, а й граничні значення параметрів (межу стійкості) системи, при яких дійсна частина хоча б одного кореня змінює знак.

### 5.3.1 Критерій Вишнеградського

Алгебричний критерій стійкості для систем, які описуються диференціальними рівняннями третього порядку, розроблено професором Петербурзького технологічного інституту І.О. Вишнеградським.

Згідно з критерієм Вишнеградського для стійкості системи, характеристичне рівняння якої має вигляд

$$A(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0, \quad (5.5)$$

необхідно і достатньо, щоб:

- усі коефіцієнти характеристичного рівняння були додатними

$$a_3 > 0; a_2 > 0; a_1 > 0; a_0 > 0;$$

- добуток середніх коефіцієнтів був більшим за добуток крайніх

$$a_2 a_1 > a_3 a_0.$$

Межа стійких процесів керування визначається рівністю

$$a_2 a_1 = a_3 a_0,$$

яка дозволяє знайти граничні співвідношення між конструктивними параметрами системи.

Вишнеградський запропонував приводити рівняння (5.5) до вигляду

$$u^3 + Au^2 + Bu + 1 = 0, \quad (5.6)$$

де  $u = s^3 \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$  – нова змінна;  $A = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3^2 a_0}}$ ;  $B = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3 a_0^2}}$  – параметри

Вишнеградського.

У цьому випадку рівняння межі стійкості дорівнюватиме

$$AB = 1.$$

Зважаючи на простоту запропонованого І.О. Вишнеградським критерію він використовується під час дослідження систем третього порядку частіше, ніж усі інші методи.

Застосуємо критерій до виконавчого приводу, структурну схему якого показано на рис. 5.6, а.

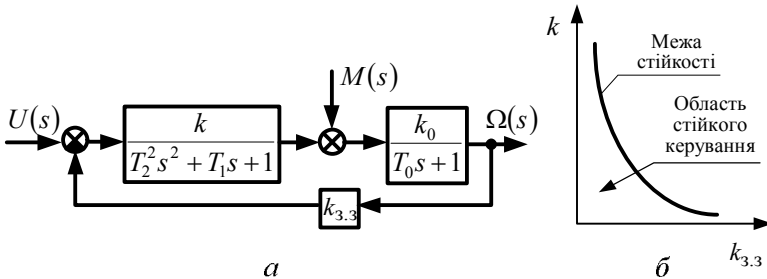


Рис. 5.6. Стійкість системи:

а – структурна схема; б – межа стійкості

Характеристичний багаточлен системи дорівнює

$$A(s) = T_2^2 T_0 s^3 + (T_2^2 + T_0 T_1) s^2 + (T_1 + T_0) s + (1 + k k_0 k_{3.3}).$$

Тоді умови стійкості процесів керування визначаються нерівностями

$$\left. \begin{aligned} T_2^2 > 0, T_1 > 0, T_0 > 0, 1 + k k_0 k_{3.3} > 0 \\ (T_2^2 + T_0 T_1)(T_1 + T_0) > T_2^2 T_0 (1 + k k_0 k_{3.3}) \end{aligned} \right\},$$

а межа стійкості рівністю

$$(T_2^2 + T_0 T_1)(T_1 + T_0) = T_2^2 T_0 (1 + k k_0 k_{3.3})$$

або

$$k k_0 k_{3.3} T_2^2 T_0 = T_1 (T_2^2 + T_1 T_0 + T_0^2).$$

Відповідно до останнього співвідношення можна знайти допустиме значення будь-якого з параметрів системи при заданих значеннях інших параметрів. Якщо необхідно, наприклад, визначити

граничне значення статичного передатного коефіцієнта виконавчого приводу, то отримаємо

$$k_{\max} = \frac{T_1(T_2^2 + T_1T_0 + T_0^2)}{k_0k_{3,3}T_2^2T_0}.$$

Межу стійкості на площині статичного передатного коефіцієнта  $k$  і коефіцієнта зворотного зв'язку  $k_{3,3}$  показано на рис. 5.6, б. Межа стійкості розбиває площину двох параметрів на області стійких і нестійких процесів керування. З її допомогою можна знаходити співвідношення між параметрами системи, які забезпечать стійкість керування.

### 5.3.2 Критерій Гурвіца - Рауса

У 1895 р. професор А. Гурвіц запропонував алгебричний критерій стійкості для систем автоматичного керування, описуваних диференціальними рівняннями як завгодно високих порядків. Раніше А. Гурвіца, у дещо іншій формі, це було зроблено Е. Раусом. Узагальнений алгебричний критерій стійкості називається критерієм Гурвіца - Рауса.

Згідно з критерієм Гурвіца-Рауса, для стійкості системи  $n$ -го порядку необхідно і достатньо, щоб  $n$  визначників, які складаються з коефіцієнтів характеристичного рівняння

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0,$$

були додатні, причому визначники беруться як головні мінори квадратної матриці:

$n$	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	...	3	2	1	0
$n-1$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	...	0	0	0	0
$n-2$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	...	0	0	0	0
$n-3$	0	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...	0	0	0	0
$n-4$	0	$a_0$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...	0	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
3	0	0	0	0	...	$a_3$	$a_1$	0	0
2	0	0	0	0	...	$a_4$	$a_2$	$a_0$	0
1	0	0	0	0	...	$a_5$	$a_3$	$a_1$	0
0	0	0	0	0	...	$a_6$	$a_4$	$a_2$	$a_0$

Правило складання матриці таке:

– у головну діагональ матриці вписуються усі коефіцієнти характеристичного рівняння  $A(s) = 0$  по порядку індексів, починаючи з коефіцієнта  $a_{n-1}$ ;

– у непарні рядки матриці  $(n-1); (n-3); (n-5); \dots; 5; 3; 1$  в порядку убування індексів вписуються коефіцієнти з непарними індексами, а в парні рядки матриці  $(n-2); (n-4); (n-6); \dots; 4; 2; 0$  – коефіцієнти з парними індексами;

– клітини матриці, що залишилися вільними, заповнюються нулями.

Система автоматичного керування, характеристичне рівняння якої відповідає матриці, буде стійкою, якщо визначники

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = a_{n-3}\Delta_2 - a_{n-4}a_{n-1}^2 > 0; \dots; \quad \Delta_n = a_0\Delta_{n-1} > 0$$

Зауважимо, що останній визначник включає всю матрицю.

Розглянемо кілька прикладів. Для системи четвертого порядку матриця має вигляд

$$A(s) = a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix},$$

а критерій Гурвіца-Рауса може бути записаний такими чотирма нерівностями

$$\Delta_1 = a_3 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3a_2 - a_4a_1 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1\Delta_2 - a_0a_3^2 > 0; \quad \Delta_4 = a_0\Delta_3 > 0.$$

Неважко помітити, що критерій Гурвіца-Рауса для системи третього порядку збігається з критерієм Вишнеградського

$$A(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_2 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0; \quad \Delta_3 = a_0 \Delta_2 > 0.$$

Через громіздкість обчислення визначників розглянутий критерій рідко застосовується для систем, вище шостого порядку.

## 5.4 Частотні критерії стійкості

**Ч**астотні критерії мають певні переваги перед алгебричними. По-перше, не потрібно розв'язувати диференціальні рівняння систем, тим паче рівнянь високих порядків. По-друге, це їх наочність. По-третє – можливість використання частотних характеристик систем, які визначаються експериментально. За допомогою частотних критеріїв досить просто прийняти рішення про заходи щодо забезпечення стійкості системи, якщо в результаті досліджень отримано дані про те, що вона нестійка.

### 5.4.1 Критерій Михайлова

У 1936 р. О.В. Михайлов показав, що про знаки дійсних частин коренів якого-небудь багаточлена

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (5.7)$$

можна судити за графіком функції

$$A(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega), \quad (5.8)$$

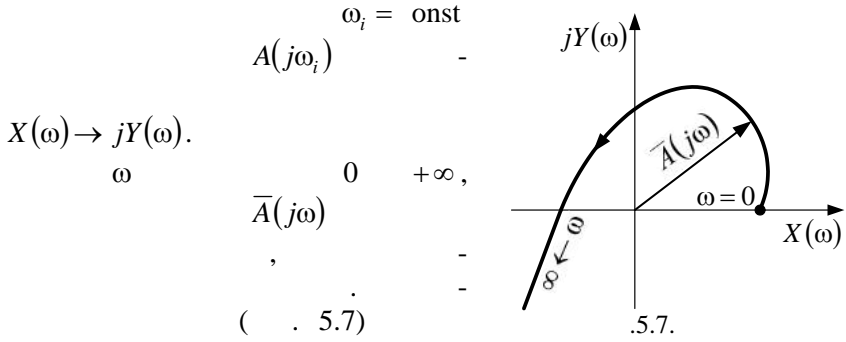
яка виходить після підстановки у багаточлен  $A(s)$  замість  $s$  уявного аргументу  $j\omega$ .

Дійсна частина комплексної функції  $A(j\omega)$  дорівнює

$$X(\omega) = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots, \quad (5.9)$$

а уявна

$$Y(\omega) = a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots \quad (5.10)$$



(5.7)

$$A(s) = 0 \Rightarrow \lambda_i = \pm\alpha_i \pm j\beta_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

$$A(s) = a_n (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_{n-1})(s - \lambda_n),$$

$$(j\omega) = a_n (j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_{n-1})(j\omega - \lambda_n). \quad (5.11)$$

$$A(j\omega) = a_n \prod_{i=1}^n (j\omega - \lambda_i), \quad (5.11)$$

$$\bar{A}(j\omega) = a_n (\bar{j}\omega - \bar{\lambda}_1)(\bar{j}\omega - \bar{\lambda}_2) \dots (\bar{j}\omega - \bar{\lambda}_{n-1})(\bar{j}\omega - \bar{\lambda}_n). \quad (5.12)$$

$$\bar{A}(j\omega) = a_n \prod_{i=1}^n (\bar{j}\omega - \bar{\lambda}_i),$$

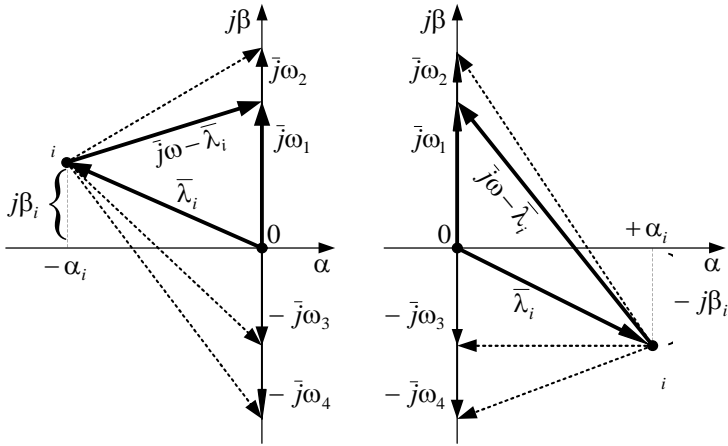
$$|\bar{A}(j\omega)| = \sqrt{X^2(\omega) + Y^2(\omega)} = \prod_{i=1}^n |(j\omega - \bar{\lambda}_i)|, \quad (5.13)$$



$$\varphi_{\Sigma}(\omega) = \text{arctg} \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{(j\omega - \bar{\lambda}_i)}$$

S -  $\alpha \rightarrow j\beta$ .



. 5.8.

$$\lambda_i = -\alpha_i \pm j\beta_i,$$

$$\bar{\lambda}_i,$$

$$(-\alpha_i; \pm j\beta_i).$$

$$\omega \cdot \frac{1}{(j\omega - \bar{\lambda}_i)},$$

$$(-\alpha_i; \pm j\beta_i),$$

$$\frac{1}{(j\omega - \bar{\lambda}_i)} \cdot 5.8,$$

$$\omega \quad -\infty \quad +\infty$$

$$\pi$$

( 5.8, )

$$\lambda_i = +\alpha_i \pm j\beta_i, \quad \bar{\lambda}_i, \quad (+\alpha_i; \pm j\beta_i), \quad (\bar{j}\omega - \bar{\lambda}_i), \quad (+\alpha_i; \pm j\beta_i),$$

$$(5.14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{j}\omega - \bar{\lambda}_i) \pi \omega \, d\omega = (n-m) \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(j\omega) \, d\omega$$

$$\varphi_{\Sigma}(\omega) = (n-m)\pi - m\pi = (n-2m)\pi. \quad (5.15)$$

$$A(s) \cdot \bar{A}(j\omega)$$

$$0 + \infty (\omega, )$$

$$\bar{A}(j\omega) \quad \varphi_{\Sigma}(\omega) = (n-2m)\frac{\pi}{2}. \quad (5.16)$$

$$n - m$$

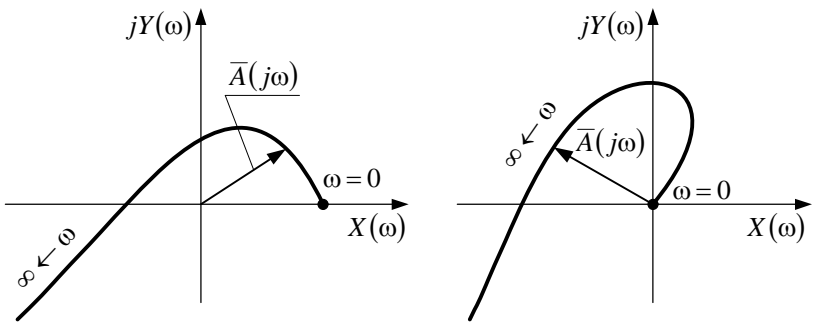
$$\varphi_{\Sigma}(\omega) = n\frac{\pi}{2}. \quad (5.17)$$

$\omega = 0$        $\omega = \infty$   
 $n$

$A(s)$        $\bar{A}(j\omega)$

$X(\omega) \rightarrow jY(\omega)$

. 5.9, .



. 5.9. ; -

$(5.13), \quad \omega = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \bar{A}(j\omega)$

$$|\bar{A}(j\omega)| = \sqrt{X^2(0) + Y^2(0)} = \prod_{i=2}^n \omega |\bar{\lambda}_i|_{\omega=0} = 0. \quad (5.18)$$

$X(\omega) \rightarrow jY(\omega)$

. 5.9, .

$\lambda_{1,2} = \pm j\beta_0,$

$$(5.13), \quad \omega = \beta_0 \quad \bar{A}(j\omega) \quad -$$

$$|\bar{A}(j\omega)| = \sqrt{X^2(\beta_0) + Y^2(\beta_0)} = \prod_{i=2}^n |\bar{j}\omega \mp \bar{j}\beta_0| |j\omega - \bar{\lambda}_i|_{\omega=\beta_0} = 0. \quad (5.19)$$

$$(\bar{j}\omega - \bar{j}\beta_0)$$

. 5.10, .

$$(\bar{j}\omega - \bar{j}\beta_0) - \quad , \quad -$$

$$\omega = -\infty$$

$$\omega = \beta_0$$

$$(\bar{j}\omega - \bar{j}\beta_0)$$

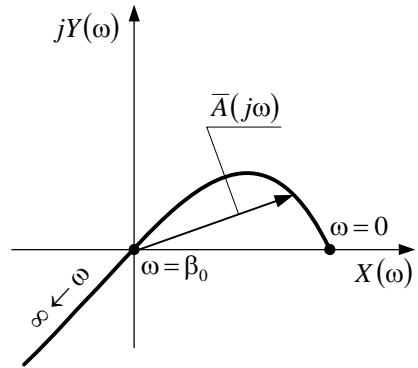
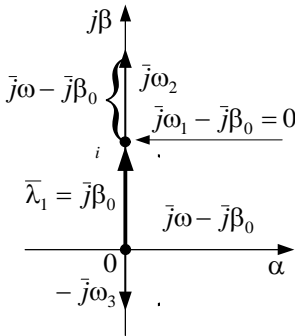
$$\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\omega = \beta_0$$

$$\omega = +\infty$$

$$(\bar{j}\omega - \bar{j}\beta_0)$$

$$\left(+\frac{\pi}{2}\right).$$



. 5.10.

$$- \quad (\bar{j}\omega - \bar{j}\beta_0); \quad -$$

,

$$\bar{A}(j\omega) \quad (5.15)$$

$$-\infty \quad +\infty \quad -$$

$$\varphi_{\Sigma}(\omega) = (n-1)\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = (n-1)\pi. \quad (5.20)$$

$$0 \rightarrow +\infty, \quad \omega$$

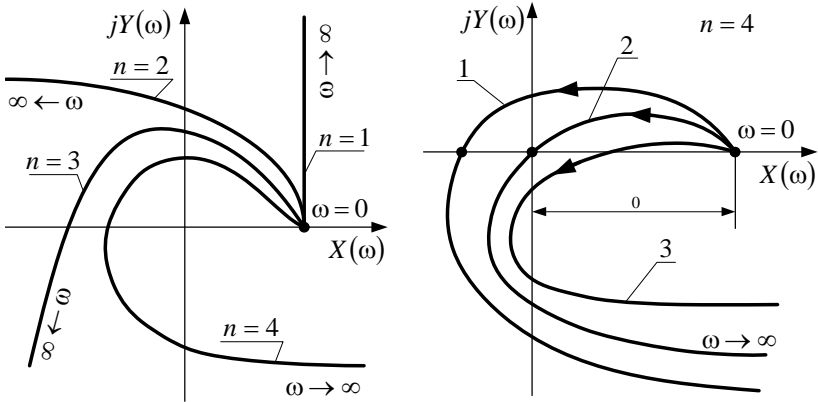
$$\varphi_2(\omega) = (n-1)\frac{\pi}{2}. \quad (5.21)$$

$$(5.19) \quad (5.21)$$

$$X(\omega) \rightarrow jY(\omega).$$

5.10.

5.11,



5.11.

:

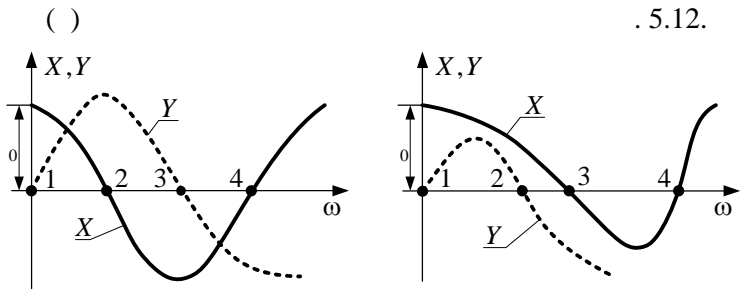
5.11, . 1

$$-(j\omega)$$

2,

$X(\omega)$   $Y(\omega)$   $\bar{A}(j\omega)$   
 $n-$   
 $\omega=0$   $\omega=\infty$   
 $\omega=0.$   
 $X(\omega)$   $Y(\omega)$  ( )

. 5.12.



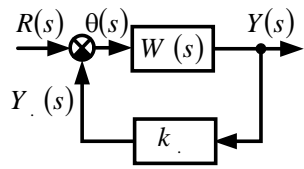
. 5.12.

$X(\omega)$   $Y(\omega)$

5.4.2

1932 .

1936 - 1938 . . .



. 5.13.

. 5.13.

$$A(s)Y(s) = B(s)R(s) \Rightarrow W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (5.22)$$

$$G(s)Y(s) = B(s)R(s) \Rightarrow W(s) = \frac{B(s)}{G(s)}. \quad (5.23)$$

$$W(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}. \quad (5.24)$$

(5.24)

$$E_s(s) = 1 + W_p(s) = 1 + \frac{B(s)}{G(s)} = \frac{G(s) + B(s)}{G(s)}. \quad (5.25)$$

3.9

(s)

$$E_s(s) = k [G(s) + B(s)], \quad (5.26)$$

$G(s)$  –

$$k = 1. \quad (5.26)$$

(5.25),

$$E_s(s) = 1 + W_p(s) = \frac{G(s)}{G(s)}. \quad (5.27)$$

(s)

$G(s)$

$$(s) = 0$$

$$G(s) = 0$$

$$s(j\omega). \quad (5.27) \quad s = j\omega,$$

$$E_s(j\omega) = 1 + W_p(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{G(j\omega)}, \quad (5.28)$$

$$W_p(j\omega) -$$

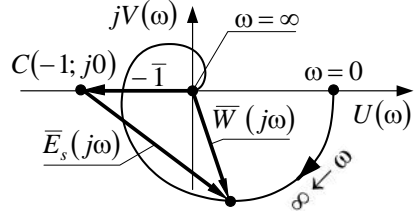
$$\bar{E}_s(j\omega)$$

(5.14)

$$\bar{E}_s(j\omega) = \bar{W}(j\omega) - (-1). \quad (5.29)$$

$$\bar{E}_s(j\omega)$$

$$U(\omega) \rightarrow jV(\omega) \\ (-1; j0),$$



5.14.

$$s(j\omega)$$

$$\bar{W}(j\omega).$$

$$0 + \infty$$

$$\bar{E}_s(j\omega)$$

$$\varphi_\Sigma(\omega),$$

$$\bar{E}_s(j\omega)$$

(5.28)

$$\bar{A}(j\omega)$$

$$\bar{G}(j\omega)$$

$$\varphi_\Sigma(\omega) = \varphi_A(\omega) - \varphi_G(\omega).$$

$$(5.30)$$



(5.16),

$$\varphi_{\Sigma}(\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2} - (n_G - 2m_G) \frac{\pi}{2}, \quad (5.31)$$

$n, n_G -$

$$\begin{aligned} G(s) &= 0 & - \\ G(s) &= 0 & - \end{aligned}$$

;  $m, m_G -$

$$G(s) = 0$$

$$G(s) = 0 \quad -$$

$$n = n_G,$$

$$m = 0,$$

(5.31)

$$\varphi_{\Sigma}(\omega) = m_G \pi. \quad (5.32)$$

(5.32)

$$m_G = 0. \quad (5.32)$$

$$\bar{E}_s(j\omega)$$

$$\varphi_{\Sigma}(\omega) = 0.$$

$$\bar{E}_s(j\omega)$$

. 5.14

$$\bar{E}_s(j\omega) \quad ( \quad )$$

$(-1; j0)$ .

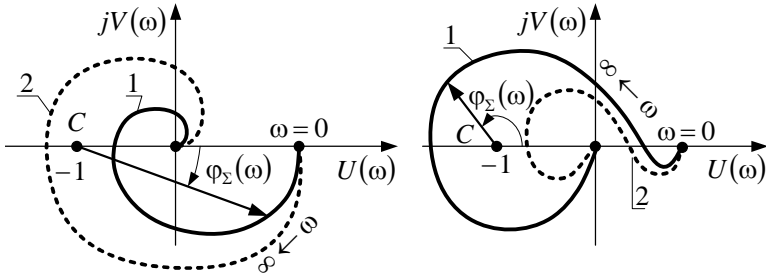
. 5.15, .

$$G(s) = 0$$

$m_G$

$$\bar{E}_s(j\omega) \quad (5.32)$$

$$\varphi_\Sigma(\omega) = m_G \pi.$$



. 5.15.

1- ( ) ; 2- ( ) :

$$\bar{E}_s(j\omega) \quad m_G \pi. \quad \omega \quad 0 \quad +\infty$$

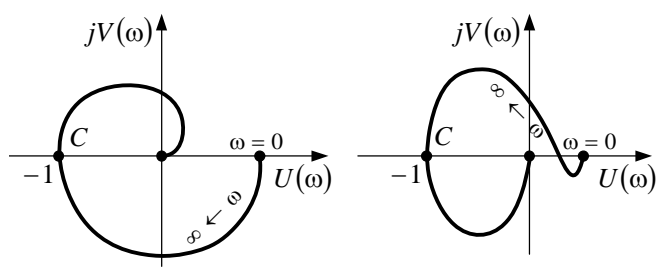
$$\bar{E}_s(j\omega)$$

$m_G$

$$0 \quad +\infty$$

( $-1; j0$ )  $m_G \pi$   
 ).  
 , 5.15, - (1).

(2),  
 -  
 (-1; j0)  
 (. 5.16).



. 5.16.  
 ( )

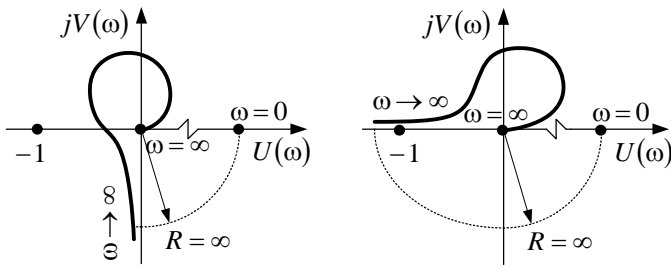
(-1; j0)  
 $\omega_c$ ,  
 $r(t)$ ,  
 $\varphi(\omega_c) = -\pi$ .  
 $\pi$ ,  
 $y(t)$   
 $r(t)$ .

$$s = j\omega$$

$$G(j\omega) = g_n(j\omega - 0)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_n) = j\omega G'(j\omega),$$

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{j\omega G'(j\omega)} = -j \frac{B(j\omega)}{\omega G'(j\omega)}$$

. 5.17, .  $\omega \rightarrow 0$   $W(j\omega)$   
 $[-jV(\omega)].$



. 5.17.  $W(j\omega)$

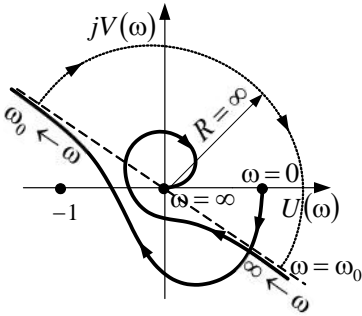
$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{(j\omega)^2 G''(j\omega)} = -j \frac{B(j\omega)}{\omega^2 G''(j\omega)},$$

$$G''(j\omega), \quad G(j\omega).$$

$\omega \rightarrow 0$   $W(j\omega)$   
 $[-U(\omega)]$  ( . 5.17, ).

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{(j\omega - j\omega_0)(j\omega + j\omega_0)G''(j\omega)}$$

$\omega = \omega_0$  , , -  
 $\omega > \omega_0 \ll \gg$  . 5.18.



5.18.  $W(j\omega)$

( 5.17 – 5.18).

$(-1; j0)$ .

5.17,

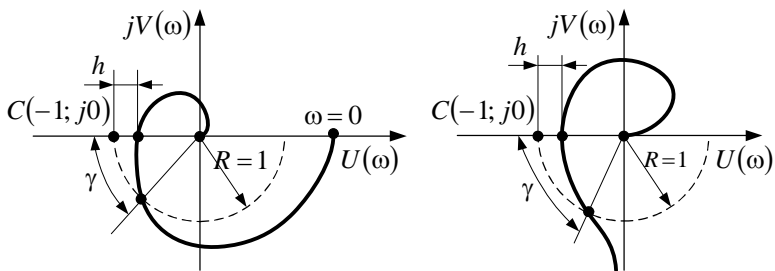
5.18,

5.17, - .

## 5.5

---

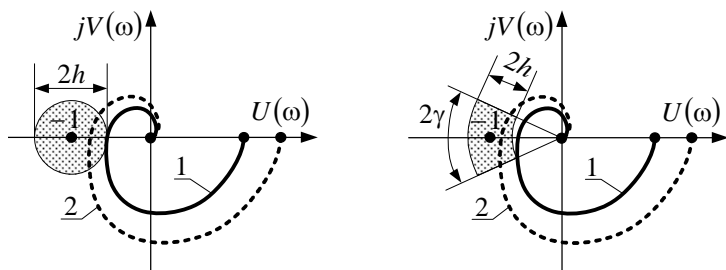
# II



5.19.

$W_p(j\omega)$  (5.19).  
 $R$ ,  
 $W_p(j\omega)$ ,  
 $\gamma$ ,  
 $(-\pi)$   $m_p = 1$ .  
 «  
 $(-1; j0)$ ,  
 $W_p(j\omega)$  «  
 $2\gamma$ ,  
 $(1)$ ,  
 $h$ ,  
 $2h$

« ( 2),



. 5.20.

« »:

- ; -

, -  
 , -  
 , -  
 $h \geq 0,6$   
 $\gamma \geq 30 - 35$  ,  $h \geq 0,2$   $\gamma \geq 10 - 20$  .

### 5.6



# II

$$E(j\omega) = \frac{1}{W(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{B(j\omega)}, \quad (5.33)$$

$G(s)$ .  $B(s)$  , -

. 5.21.

(5.28),

$$D(s) = 1 + (s).$$

$$s = j\omega, \quad (5.33)$$

$$D(j\omega) = 1 + \frac{A(j\omega)}{j\omega}, \quad (5.34)$$

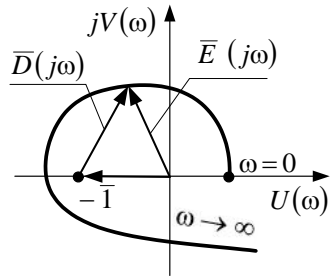
$p(j\omega) -$  ;  $(j\omega) -$

$$\bar{D}(j\omega) \quad (5.21)$$

$$\bar{D}(j\omega) = - (j\omega) - (-1). \quad (5.35)$$

$$\bar{D}(j\omega)$$

$U(\omega) \rightarrow jV(\omega)$   
 $(-1; j0),$



5.21.

$$0 \quad +\infty \quad \bar{D}(j\omega)$$

$$\varphi_{\Sigma}(\omega),$$

$$\bar{D}(j\omega) \quad (5.34)$$

$$\bar{A}(j\omega) - (j\omega).$$

$$: \quad , \quad \bar{D}(j\omega) \quad \omega$$

$$0 \quad +\infty$$

$$\varphi_{\Sigma}(\omega) = n \frac{\pi}{2} - (n - 2m) \frac{\pi}{2}, \quad (5.36)$$

$$n - \quad (s) = 0$$

$$; n - \quad (s); m -$$

$$(s)$$

$$(s)$$



$$n = 0,$$

$$(s) = k = \prod_{i=1}^N k_i .$$

$$\varphi_{\Sigma}(\omega) = n \frac{\pi}{2}, \quad (5.37)$$

$$\bar{D}(j\omega) = 1 + \dots (j\omega)$$

$\omega = 0 \qquad \omega = \infty$

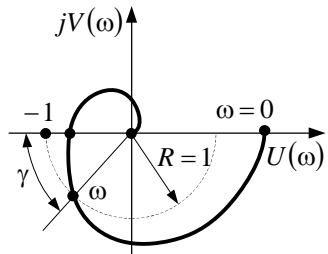
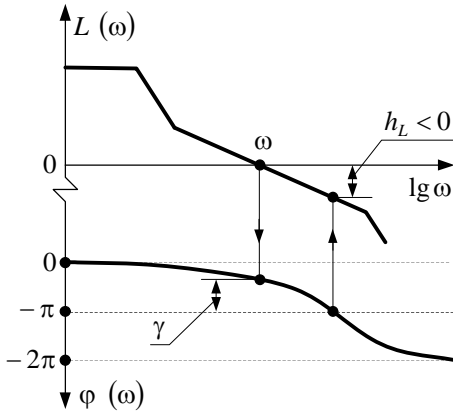
$n$

5.7

**Д**

$$L(\omega) = 20 \lg A_{mp}(\omega)$$

$$\varphi(\omega)$$



. 5.22.

$$W_p(j\omega) \quad (5.22),$$

$$(-1; j0),$$

$$\varphi(\omega) = -\pi$$

$$A_{mp}(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi$$

$$L(\omega) < 0.$$

$$\varphi(\omega) > -\pi.$$

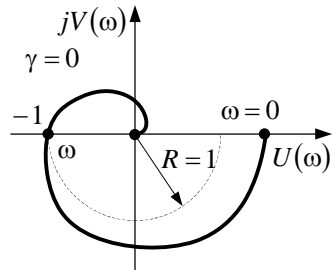
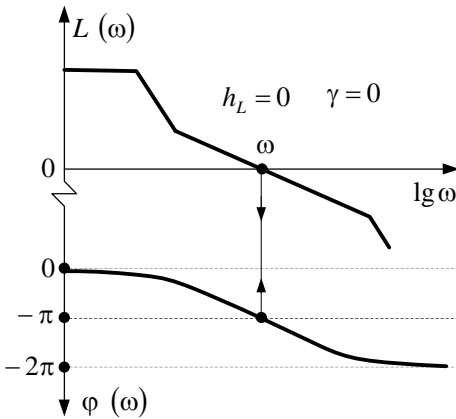
$$\varphi(\omega) = -\pi + \gamma, \quad \varphi(\omega) = -\pi \quad L(\omega) = -h_L.$$

$$L(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = -\pi,$$

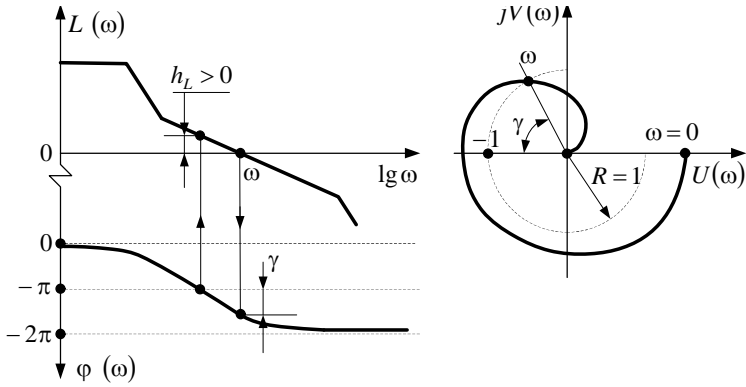
$$(5.23).$$

$$h_L = 0, \quad \gamma = 0.$$



. 5.23.

$$\varphi(\omega) = -\pi L(\omega) > 0, \quad (5.24).$$



5.24.

5.22 – 5.24

## 5.8

# II

$$\overline{W}(j\omega), \overline{W}(j\omega) \quad \overline{W}(j\omega)$$

$D-$

$$u^3 + u^2 + u + 1 = 0$$

$$= 1. \tag{5.38}$$

(5.38)

(5.25)

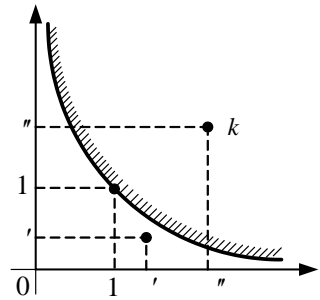
(« »).

$> 0$ ;  $> 0$

$> 1$ .

$k$ ,

$i - i$ ,



5.25.

$$\left. \begin{aligned} &U(\cdot, \cdot, \omega) = 0 \\ &Y(\cdot, \cdot, \omega) = 0 \end{aligned} \right\}; \left. \begin{aligned} &U(\cdot, \cdot, \omega) = -1 \\ &V(\cdot, \cdot, \omega) = 0 \end{aligned} \right\}. \tag{5.39}$$

(5.39)  $\omega = F(A)$

(5.39)  $\omega = F(A)$

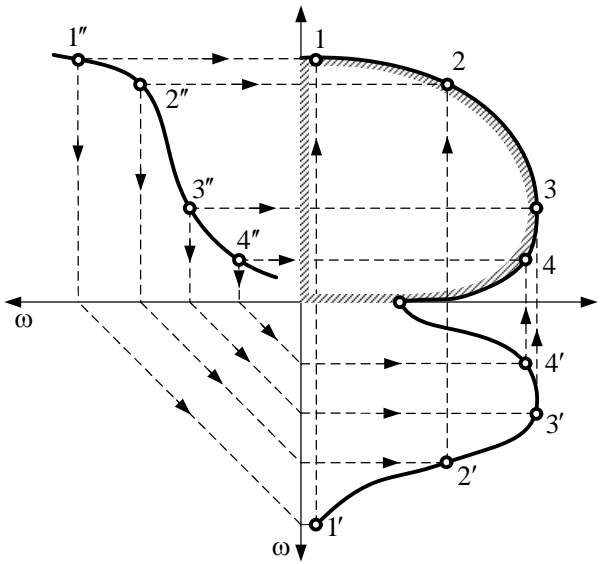
$= f_1(\omega) \quad B = f_2(\omega)$  (5.40)

(5.40)

$= f_1(\omega) \quad B = f_2(\omega)$  . 5.26.

( . 5.26),  $B$

$= F(A)$ .



. 5.26.

$$\left| \frac{U(\cdot, \cdot, \omega)}{Y(\cdot, \cdot, \omega)} - \frac{V(\cdot, \cdot, \omega)}{Y(\cdot, \cdot, \omega)} \right|, \tag{5.41}$$

$\omega \rightarrow \infty$

(5.41),

$(\cdot, \cdot, \omega); Y(\cdot, \cdot, \omega)$

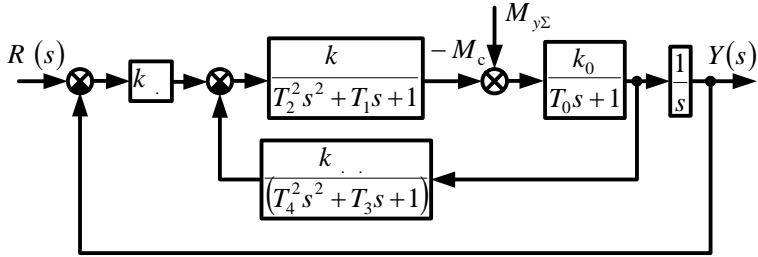
$U(\cdot, \cdot, \omega), V(\cdot, \cdot, \omega)$

5.9



# B

.5.27.



. 5.27.

$$W_0(s) = \frac{k_0}{(T_0 s + 1)} \quad ; \quad ( ) ;$$

$$W(s) = \frac{k}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} \quad ;$$

$$W(s) = k \quad ;$$

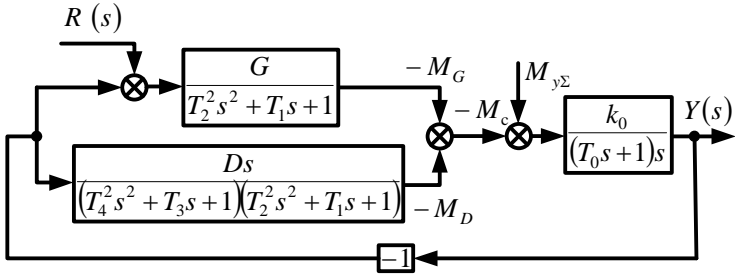
$$W(s) = \frac{k}{T_4^2 s^2 + T_3 s + 1} \quad ;$$

$$M_\Sigma \quad ;$$

$$M \quad ;$$

. 5. 28,

$$G = k \cdot k \quad (5.42)$$



. 5.28.

$$D = k \cdot k \quad (5.43)$$

$$W_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_0 G (T_4^2 s^2 + T_3 s + 1)}{A(s)},$$

$$W_m(s) = \frac{k_0 (T_4^2 s^2 + T_3 s + 1) (T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)}{A(s)}$$

$$A(s) =$$

$$A(s) = a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + (a_2 + k_0 G T_4^2) s^2 + k_0 (D_\Sigma + G T_3) s + k_0 G$$



$$\begin{aligned}
a_6 &= T_4^2 T_2^2 T_0; \\
a_5 &= T_4^2 T_2^2 + T_4^2 T_1 T_0 + T_3 T_2^2 T_0; \\
a_4 &= T_4^2 T_1 + T_4^2 T_0 + T_3 T_2^2 + T_3 T_1 T_0 + T_2^2 T_0; \\
a_3 &= T_4^2 + T_3 T_1 + T_3 T_0 + T_2^2 + T_1 T_0; \\
a_2 &= T_3 + T_1 + T_0.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$D_\Sigma = D_0 + D,$$

$$D_0 = \frac{1}{k_0} = f_0,$$

$D,$

$$s \rightarrow j\omega$$

$$\begin{aligned}
A(j\omega) &= [-a_6\omega^6 + a_4\omega^4 - (a_2 + k_0GT_4^2)\omega^2 + k_0G] + \\
&+ j[a_5\omega^5 - a_3\omega^3 + k_0(D_\Sigma + GT_3)\omega].
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
(\omega) &= -a_6\omega^6 + a_4\omega^4 - [a_2 + k_0G T_4^2]\omega^2 + k_0G = 0 \\
Y(\omega) &= a_5\omega^5 - a_3\omega^3 + k_0(D_\Sigma + GT_3)\omega = 0
\end{aligned} \right\}, \tag{5.45}$$

$G \quad D_\Sigma -$

$$D_\Sigma = F(G).$$

(5.45).

(5.45)

$$\left. \begin{aligned} G(\omega) &= \frac{a_6\omega^4 - a_4\omega^2 + a_2}{k_0(1 - T_4^2\omega^2)} \omega^2; \\ D(\omega) &= \frac{a_3 - a_5\omega^2}{k_0} \omega^2 - G(\omega)T_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

(5.46)

5.26.

$$D_\Sigma(\omega) = G(\omega)$$

5.8,

$$D_\Sigma = F(G) \quad (5.29)$$

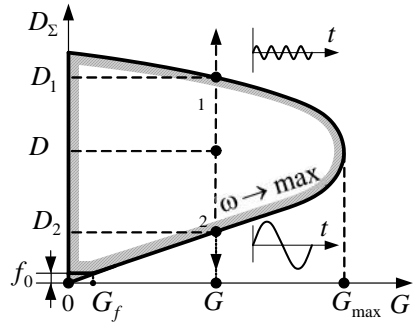
(5.41)

$$\left| \frac{X(G, D, \omega)}{Y(G, D, \omega)} \right| = \left| \frac{(G, D, \omega)}{D} \right| = \left| \begin{matrix} k_0(1 + T_4^2\omega^2) & 0 \\ k_0T_3\omega & k_0\omega \end{matrix} \right| = k_0^2\omega(1 + T_4^2\omega^2) > 0.$$

5.29

$\omega \rightarrow \max$ .

( $G_A \quad D_A$ )



5.29.

1.

$$G(\omega) \quad D_{\Sigma}(\omega),$$

2.

$$G_A, \\ D_1 < D_{\Sigma A} < D_2.$$

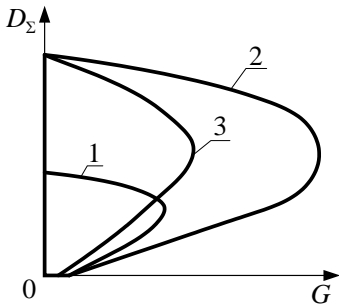
3.

$$G_{\max},$$

4.

$$G_f,$$

$$f_0.$$



. 5.30.

$$T_0 = \frac{J_0}{f_0}$$

$$J_0 \quad G(\omega)$$

$$D(\omega) - \\ (5.45).$$

$$1 - J_0, T_1; \quad 2 - 2J_0, T_1; \quad 3 - J_0, 2T_1$$

. 5.30

1

$J_0,$

2 --

$2J_0.$

$T_1,$

-

-

-

$T_1$

3

.5.30.

### 5.10

1.

2

?

3

4

-

5.

$$A(s) = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4 \pm j2, \lambda_3 = +5.$$

6.

$$A(s) = 2(s+1)(s-2)(s+3).$$

7.

S -

$$\alpha \rightarrow j\beta -$$

8.

?

9.

10.

11.

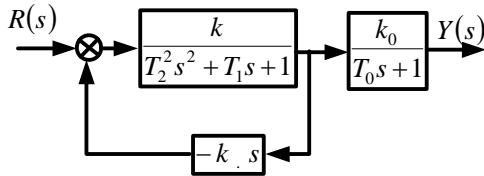
$$A(s) = 0,1s^3 + 0,1s^2 + 2s + 1 = 0.$$

12.

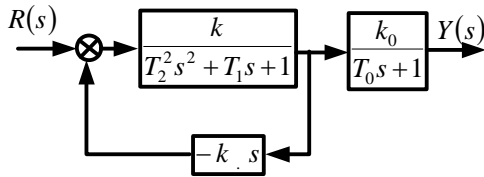
13.

14.

15.



16.

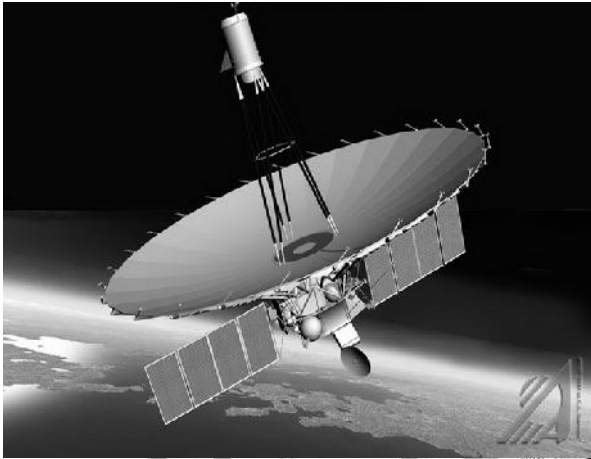


17.

$$A(s) = a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

18.

19.



## Лабораторна робота №1

### ПАКЕТ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

#### 1. Мета

У ході виконання лабораторної роботи вивчаються і практично відпрацьовуються основні операції за завданням і редагуванню динамічних блоків моделювання автоматичних систем у середовищі MATLAB - Simulink, способи отримання довідкової інформації та методи її реєстрації.

#### 2. Рекомендації щодо підготовки до заняття

Повторити теоретичні питання дисципліни:

- методи математичного опису лінійних систем автоматичного керування (САК);
- структурні зображення диференціальних рівнянь руху САК;
- динамічні характеристики лінійних систем автоматичного керування.

#### 3. Завдання до виконання роботи

3.1. Усвідомити методика одержання із браузера головної бібліотеки Simulink необхідної для моделювання інформації.

3.2. Засвоїти порядок відкриття і збереження вікна моделювання системи.

3.3. Виконати моделювання найпростішої технічної системи з реєстрацією графіка вихідної перемінної.

3.4. Освоїти методи практичної побудови складної моделі системи автоматичного керування.

3.5. Навчитися редагувати структурні схеми.

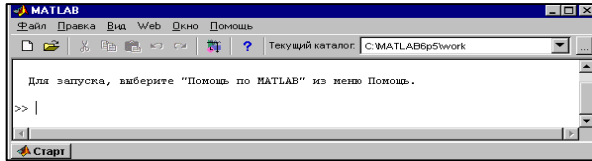
3.6 Засвоїти і практично виконати операції з панеллю інструментів діалогового вікна блоку Scope (Осцилограф).

3.7. Змоделювати задану автоматичну систему і провести дослідження її динамічних характеристик.

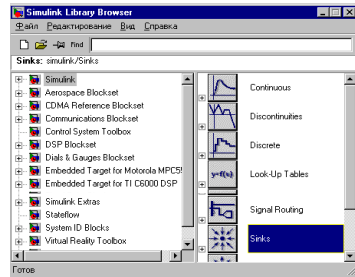
## 4. Порядок і методика виконання лабораторної роботи

### 4.1. Запуск Simulink із системи MATLAB

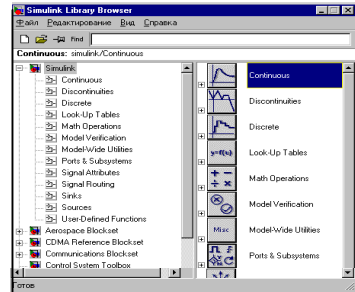
Система Simulink запускається із системи MATLAB шляхом вибору покажчиком миші піктограми **Simulink** (8-а ліворуч) на панелі інструментів системи MATLAB (можна також увести команду `simulink` у командному рядку системи MATLAB):



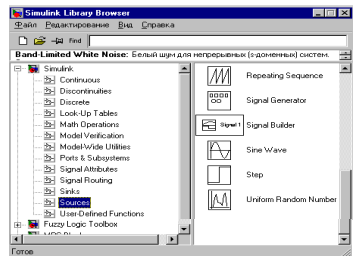
У результаті з'являється вікно **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink) системи Simulink:



При подвійному натисканні лівої клавіші миші, коли її покажчик перебуває на піктограмах у лівій частині вікна **Simulink Library Browser**, з'являється список бібліотек блоків, як показано на рисунку.

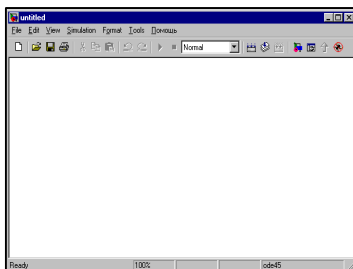


У випадку натискання лівої клавіші миші, коли її покажчик перебуває на рядку з найменуванням бібліотеки блоків, у правій частині вікна з'являється список блоків зазначеної бібліотеки.





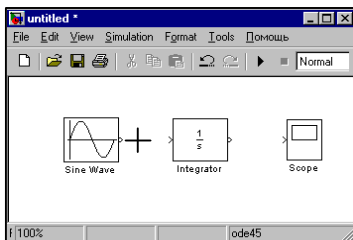
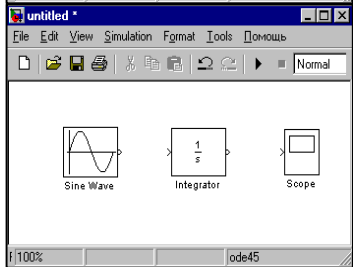
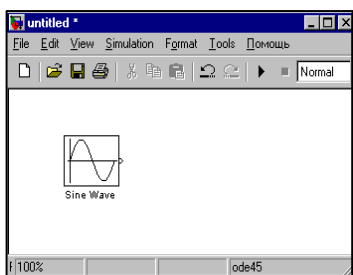
## 4.2. Відкриття і збереження вікна моделювання системи



Відкриття нового вікна моделі здійснюється натисканням лівої клавіші миші, коли її покажчик перебуває на піктограмі **Create a new model** (1-а ліворуч) панелі інструментів системи MATLAB чи панелі інструментів вікна **Simulink Library Browser**.

Ім'я вікна (ім'я моделі) задається за замовчуванням – **untitled**.

У цьому вікні будується модель системи у вигляді структурної схеми.



## 4.3. Моделювання найпростішої технічної системи

Для побудови структурної схеми моделі, з бібліотек блоків **Sources** – *Джерела сигналів*, **Continuous** – *Елементи неперервних систем* і **Sinks** – *Засоби реєстрації*, у вікно моделі з іменем **untitled** переміщуються зображення блоків **Sine Wave** (*Генератор синусоїди*), **Integrator** (*Інтегратор*), **Scope** (*Осцилограф*) як показано на рисунках.

Для переміщення зображення блоку необхідно:

- встановити покажчик миші на зображенні обраного блоку;
- натиснути ліву клавішу миші і, утримуючи її, перемістити покажчик на чисте поле вікна моделі;
- відпустити клавішу миші.

Потім треба провести лінії зв'язку.

Для цього покажчик миші поміщається на вихідний порт блоку **Sine Wave**, який позначається кутковою

дужкою ( $\triangleright$ ) на правій стороні зображення блоку. При цьому покажчик набуває вигляд хреста.

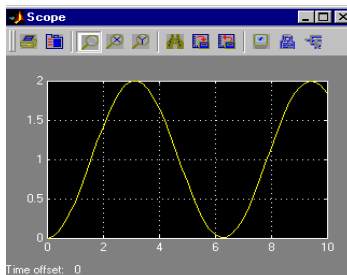
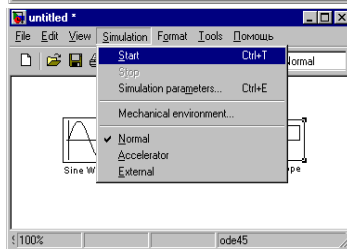
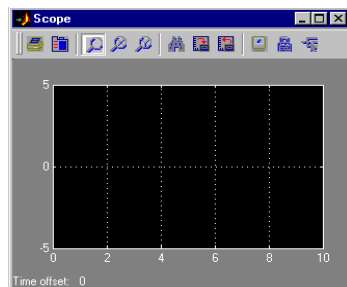
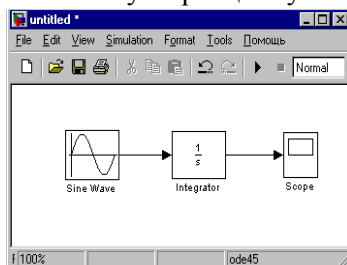
Далі, при натиснутій лівій клавіші миші, покажчик миші переміщається до вхідного порту блоку **Integrator**, він позначається кутовою дужкою ( $\triangleright$ ), розташованою на лівій стороні зображення блоку. У випадку вірно обраної точки входу покажчик набуває вигляд подвійного хреста.

Лінія зв'язку закінчується стрілкою для індикації напрямку передачі сигналу. Побудова структурної схеми завершується проведенням лінії зв'язку від вихідного порту блоку **Integrator** до вхідного порту блоку **Scope**.

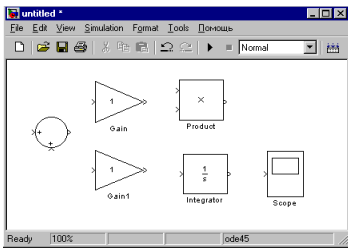
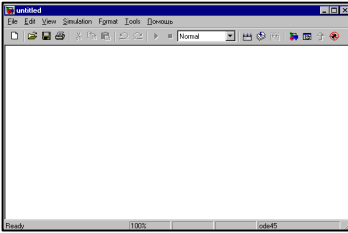
При подвійному натисканні лівої клавіші миші, коли її покажчик перебуває на зображенні блоку **Scope**, відкривається діалогове вікно блоку.

Вибір команди **Start** меню **Simulation** робить запуск процесу моделювання.

При цьому у вікні блоку **Scope** будується графік, що відображає значення вихідної перемінної у функції часу моделювання.



#### 4.4. Побудова складної моделі системи автоматичного керування



У разі побудови моделі у вигляді структурної схеми потрібно відкрити нове вікно моделі.

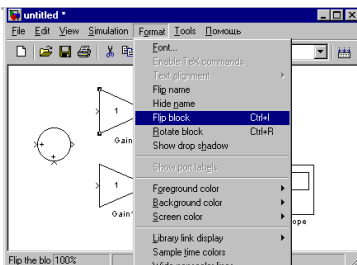
Далі потрібно перемістити зображення блоку Integrator з бібліотеки блоків **Continuous** у вікно *untitled*, як показано на рисунку.

Подібним чином у вікні розміщуються блоки Gain з бібліотеки блоків **Math** (Математичні функції). Слід звернути увагу, що другий блок Gain має ім'я Gain 1. У вікно копіюються блоки Sum (Суматор) і Product (Добуток елементів масиву) з бібліотеки блоків **Math** і блок Scope з бібліотеки блоків **Sinks**.

Зображення блоків і їхня орієнтація, прийняті в системі за замовчуванням, припускають розміщення *вхідного порту* на лівій стороні і *вихідному порту* – на правій стороні зображення блоку.

Слід намагатися до проведення лінії зв'язку найкоротшими шляхами з мінімальним числом перетинів. На виконання рекомендацій буває доцільно здійснити *поворот зображень* блоків **Product** і **Gain**.

Із цією метою покажчик миші поміщується на зображення блоку, наприклад Product, що приводить до появи довкола нього прямокутної рамки з маркером типу квадрат.



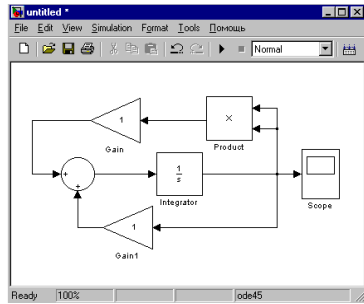
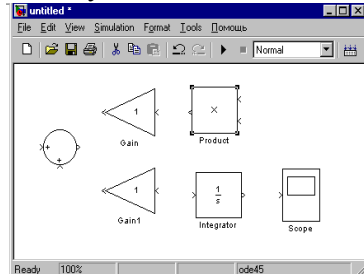
Для дзеркального відображення зображень блоків використовується команда **Flip block** меню **Format** вікна моделі. При цьому вхідні і вихідні порти на зображенні блоку змінюють своє місце розташування.

Далі проводяться лінії зв'язку між вихідними і вхідними портами блоків, виконуються розгалуження ліній зв'язку.

Для здійснення розгалужень:

- покажчик миші поміщується на лінію зв'язку і натискається права клавіша миші, яка утримується в натиснутому стані в процесі проведення лінії зв'язку (вигляд покажчика – хрест);
- покажчик підводиться до вхідного порту блоку і, коли він набуває вигляд подвійного хреста, права клавіша миші відпускається.

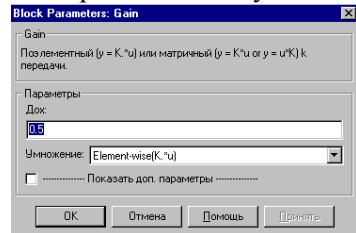
*Система Simulink автоматично відпрацьовує злами лінії зв'язку (кут перетинання лінії зламу складає  $\pm 90^\circ$ ).*



У побудованій структурній схемі динамічної системи необхідно відредагувати параметри блоків:

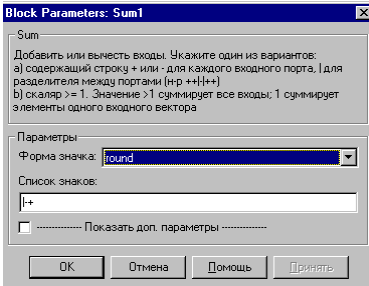
- величину коефіцієнта підсилення блоку Gain,
- знак операції для одного з вхідних портів блоку Sum,
- початкові умови для блоку Integrator.

Диалогове вікно блоку Gain виводиться при подвійному натисканні лівої клавіші миші, коли її покажчик перебуває на зображенні блоку. Для зміни заданої за замовчуванням величини коефіцієнта підсилення, необхідно ввести в текстовому полі Gain величину рівну 0.5 і натиснути кнопку ОК.



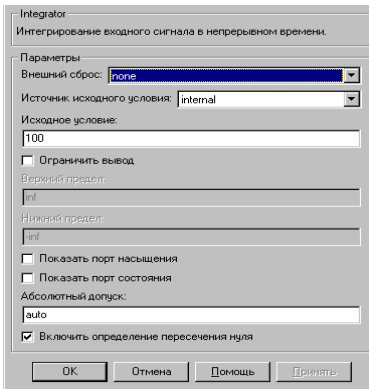
Уведене значення коефіцієнта підсилення блоку Gain відображається на зображенні блоку в структурній схемі.

Діалогове вікно блоку Sum виводиться при подвійному натисканні лівої клавіші миші, коли її покажчик перебуває на зображенні даного блоку.



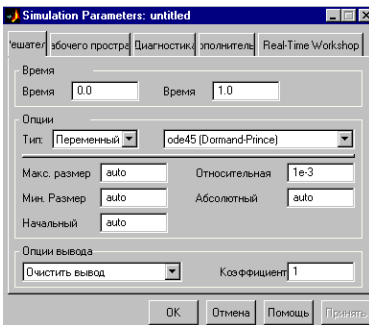
Змінимо один із знаків операції підсумовування. Для цього скористаємося текстовим полем **List of signs** (поле містить рядок «|- +»).

Перший знак додавання (+) замінимо на знак вирахування (-) і натиснемо кнопку ОК. На зображенні блоку Sum графічне позначення верхнього вхідного порту блоку прийме вигляд «-».



Для завдання початкових умов скористаємося діалоговим вікном блоку Integrator. Воно виводиться при подвійному натисканні лівої клавіші миші, коли її покажчик перебуває на зображенні блоку.

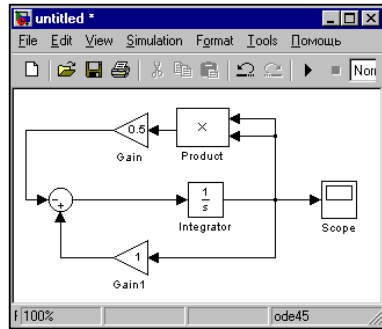
У текстовому полі **Initial Condition** уведемо значення рівне 100 і натискаємо кнопку ОК.



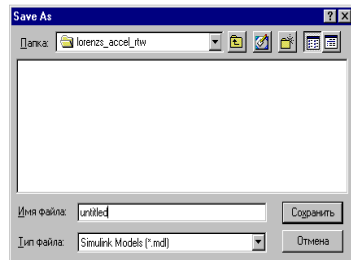
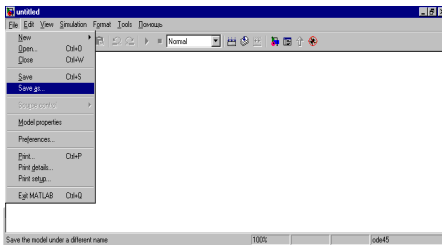
За замовчуванням у системі Simulink час моделювання встановлюється рівним 10. Після вибору команди **Simulation Parameters** меню **Simulation** вікна моделі виводиться діалогове вікно **Simulation Parameters**, де на вкладці **Solver** у текстовому полі **Stop time** уведемо значення 1.0. Потім натискаємо кнопку ОК.

Побудована модель може бути використана для досліджень.

Модель перед виконанням наступних дій рекомендується зберегти. Для цього вибирається команда **Save** меню **File** чи піктограма *Save* (у вигляді дискети) на панелі інструментів, а у діалоговому вікні **Save As** вводиться ім'я файлу без розширення.

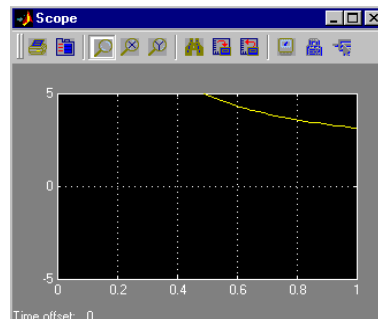


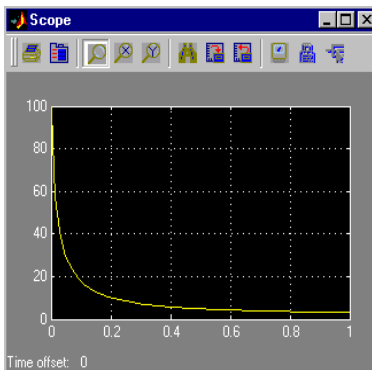
У системі Simulink моделі структурних схем зберігаються у файлах з розширенням «.mdl», при цьому заголовок вікна моделі змінюється, відображаючи введене ім'я.



Щоб запустити процес моделювання обирається команда **Start** меню **Simulation**.

Вікно блоку **Scope** виводиться при подвійному натисканні клавіші миші, коли її покажчик перебуває на зображенні блоку.

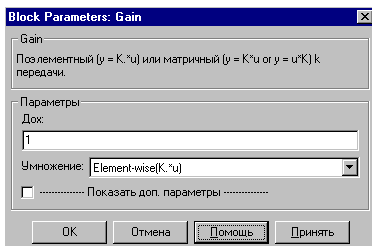




Для автоматичного встановлення границь по всім координат, на панелі інструментів вікна **Scope** обирається значок **Autoscale** (має вигляд бінокля). При цьому графік автоматично оновлюється

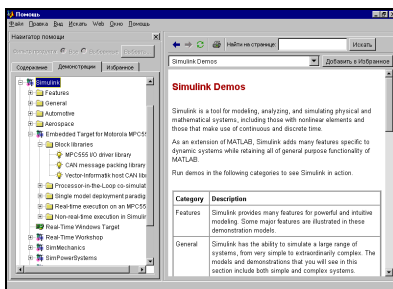
Система Simulink забезпечує користувача довідковою інформацією у разі:

- вибору команди **Simulink Help** меню **Help** вікна моделі,
- натискання на кнопку **Help** у діалоговому вікні **Block Parameters**,
- натискання на кнопку **Help** у діалоговому вікні **Simulation Parameters**.



Виклик вікна довідкової системи з інформацією про необхідний блок здійснюється натисканням кнопки **Help** (Допомога) у діалоговому вікні **Block Parameters** даного блоку (у нашому прикладі блоку з ім'ям Gain)

Вікно **Help**, де у правій області виведено довідкову інформацію про блок Gain, показано на рисунку:



Вікно **Help** має дві панелі:

- *права* – містить довідкову інформацію за розділом, який обрано;
- *ліва* – включає до себе чотири вкладки, які дозволяють виводити інформацію у вигляді таблиці, групувати за алфавітом, забезпечувати пошук інформації і формувати вікно користувача – **Contents** (Зміст), **Index** (Покажчик), **Search** (Пошук) і **Favorites** (Обране).

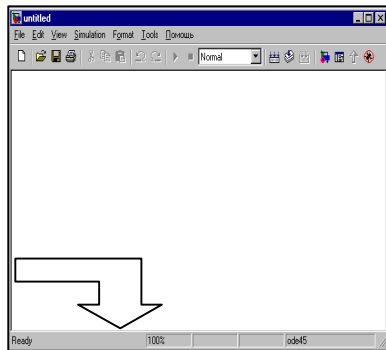
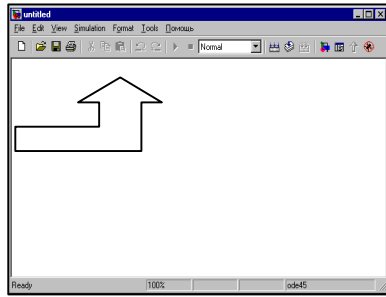
Якщо текст довідки розміщений у правій панелі, то до вкладки **Favorites** можна додати розділи довідкової інформації шляхом вибору кнопки **Add to Favorites** (Додати в обране).

#### 4.5. Редагування структурних схем

У вікні моделі системи Simulink задаються:

- **панель інструментів**, піктограми якої дозволяють звертатися до команд, котрі застосовуються найчастіше (збереження моделі, запуск процесу моделювання тощо);

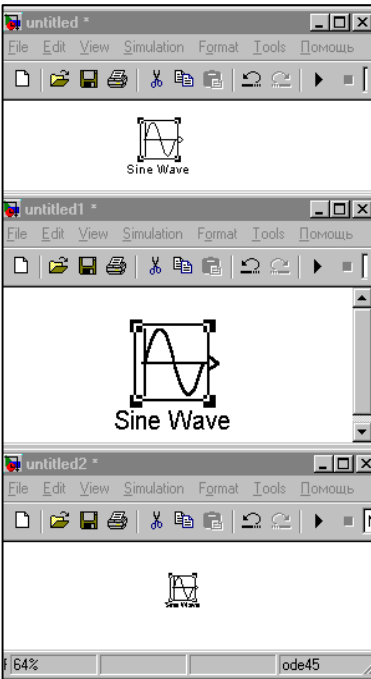
- **панель стану**, на якій відображаються коефіцієнт масштабу, час моделювання і обрана функція інтегрування.



Панелі можуть бути сховані чи знову розміщені у вікні по командах **Toolbar** і **Status Bar** меню **View**.



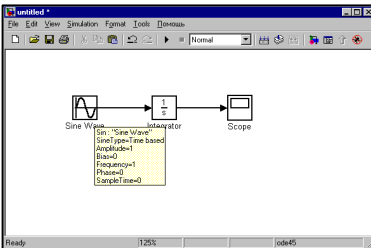
### 4.5.1. Зміна масштабу зображення



Команди меню **View** вікна моделі служать для завдання масштабу зображення схеми:

- команда **Zoom In** збільшує зображення;
- команда **Zoom Out** зменшує зображення;
- команда **Fit Selection to View** (Узгодження виділених об'єктів) забезпечує візуалізацію обраних об'єктів у вікні моделі;
- команда **Normal (100%)** повертає зображення в початковий стан.

### 4.5.2. Відображення інформації щодо блоку



Інформація щодо блоку відображається у вікні підказки, яка з'являється, якщо покажчик миші поміщено на зображення блоку і залишається там більш однієї секунди.

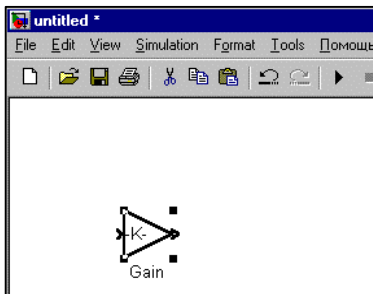
Настроювання форми подання даних у вікні підказки виконуються у меню другого рівня команди **Block data tips options** меню **View** вікна моделі.

### 4.5.3. Зміна розмірів зображення блоку

На виконання операції слід відкрити браузер головної бібліотеки і помістити блок у вікні моделі.

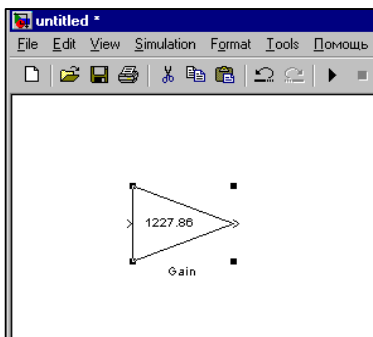
Припустимо, що необхідно задати коефіцієнт підсилення 1227.86 для блоку Gain з бібліотеки блоків Matc.

Оскільки дане значення не може бути розміщено на зображенні блоку стандартних розмірів, то система автоматично переходить до позначення у вигляді символу « -K- ».



Для зміни розмірів зображення блоку натискається ліва кнопка миші, коли її покажчик знаходиться на зображенні блоку, що призводить до появи прямокутної рамки з маркерами (типу квадрат) у вершинах (дані дії називаються операцією вибору блоку).

Далі треба помістити покажчик на обрану вершину (новий вид покажчика – похилий відрізок зі стрілками), натиснути ліву клавішу миші і, не відпускаючи її, перемістити обрану вершину.



Коли зображення блоку досягне розміру, достатнього для відображення значення коефіцієнта підсилення, клавіша миші відпускається

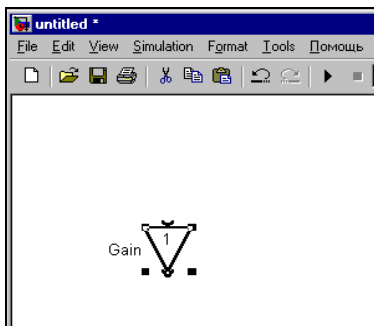
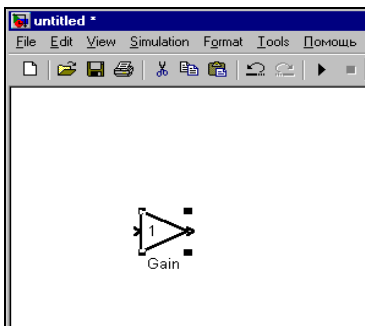
Щоб стерти маркери слід натиснути ліву клавішу миші поза зображення блоку.

#### 4.5.4. Обертання зображення блоку

Щоб повернути зображення блоку треба:

- виконати операцію вибору блоку;
- використовувати команду **Rotate** (Обертання) меню **Format** вікна моделі.

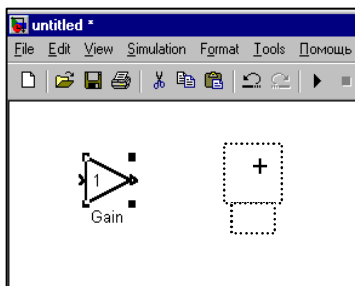
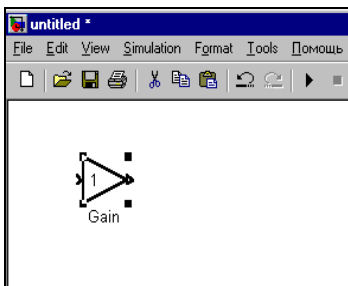
Обертання здійснюється на  $90^\circ$  за годинниковою стрілкою.



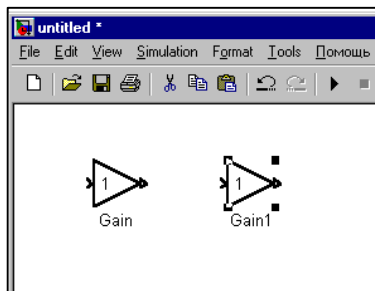
#### 4.5.5. Копіювання блоку

Для копіювання зображення блоку покажчик миші слід помістити на зображення блоку, натиснути праву клавішу і, не відпускаючи її, перемістити прямокутну рамку з маркерами у вершинах у вказане положення.

Далі треба відпустити праву клавішу миші, а щоб видалити маркери потрібно натиснути на ліву клавішу миші поза зображення блоку.



Альтернативним методом є:  
вибір команди **Copy** меню **Edit** (можна використовувати комбінацію клавіш **Ctrl + C**) і подальше застосування команди **Paste** меню **Edit** (альтернатива – комбінація клавіш **Ctrl + V**).



#### 4.5.6. Видалення блоку

Для виконання даної операції слід вибрати блок і натиснути клавішу **Delete**. Альтернативним способом є вибір блоку і застосування команди **Clear** меню **Edit** або використання піктограми **Cut** панелі інструментів вікна моделі.

У разі вибору команди **Cut** меню **Edit** або піктограми **Cut** панелі інструментів (можна використовувати комбінацію клавіш **Ctrl + X**) блок видаляється зі схеми і поміщається в буфер обміну.

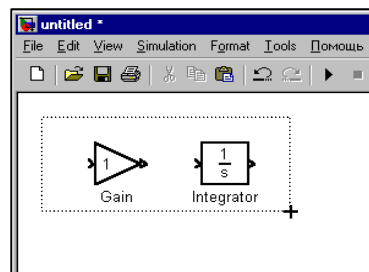
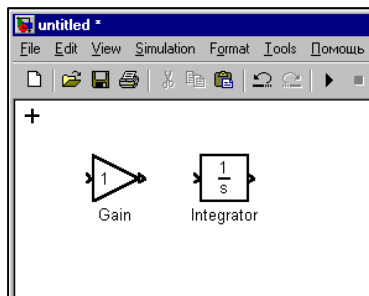
#### 4.5.7. Множинний вибір

Вибір ряду об'єктів (множинний вибір) дозволяє використовувати групові операції редагування. Існують два способи множинного вибору:

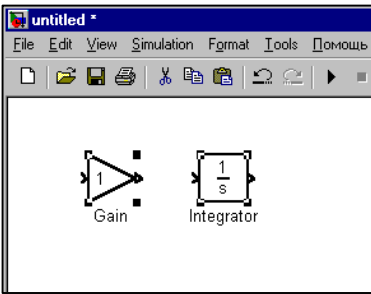
– можна натиснути клавішу **Shift** і, не відпускаючи її, вибрати мишею кожен об'єкт групи;

– можна використовувати область виділення.

Для виділення області необхідно: помістити покажчик миші поза зображення блоків, ліній зв'язку та текстових областей, натиснути *ліву клавішу миші* і, не відпускаючи клавіші, переміщати вільну вершину прямокутника, що виділяє, поки не вдасться охопити усі об'єкти, які

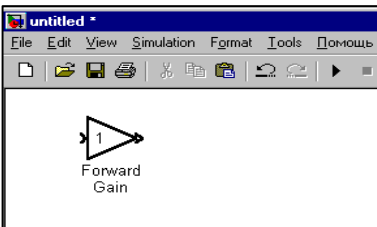
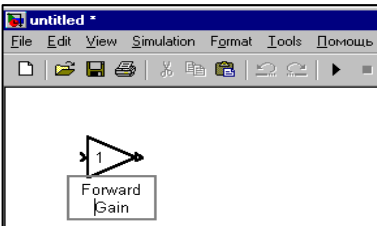
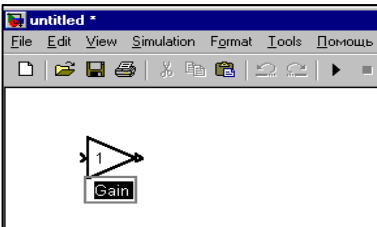


слід вибрати. Тоді клавіша миші відпускається.



До групи множинного вибору можна застосовувати операції переміщення, копіювання і видалення, які виконуються так само як і у випадку роботи з одним блоком. Наприклад, для видалення обраних об'єктів слід натиснути клавішу **Delete** або вибрати команду **Cut** меню **Edit**, можна вибрати команду **Clear** меню **Edit** вікна моделі.

#### 4.5.8. Редагування імені блоку



Кожен блок, розміщений у вікні моделі, повинен мати унікальне ім'я, яке включає принаймні *один буквений або цифровий символ*. Ім'я обов'язково повинно починатися з літери. Наприклад, перший блок, який поміщається в робоче поле, має ім'я «Gain», другий блок буде мати ім'я «Gain1» тощо.

Щоб редагувати ім'я блоку необхідно: помістити покажчик миші у текстовій області імені блоку і натиснути ліву клавішу миші (редагування текстових рядків імені блоку проводиться в рамці, що з'явилася, з використанням маркера введення, який має вигляд вертикальної риси).

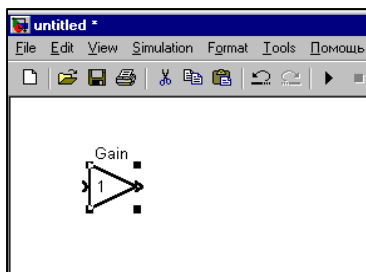
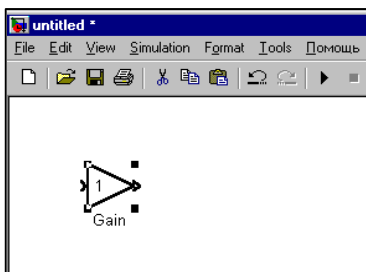
Перехід на новий рядок здійснюється натисканням клавіші **Enter**.

Для видалення виділюючої рамки необхідно натиснути ліву клавішу миші, коли її покажчик знаходиться за межами текстової області.

### 4.5.9. Зміна розташування імені блоку

У разі зміни положення імені блоку слід виконати наступні дії: вибрати блок, використовувати команду **Flip name** меню **Format**, або натиснути на ліву клавішу миші і, не відпускаючи її, перемістити текстову область у вказане положення.

Якщо блок повернути на  $\pm 90^\circ$ , то ім'я блоку буде розташовуватися відповідно або ліворуч, або праворуч зображення блоку.

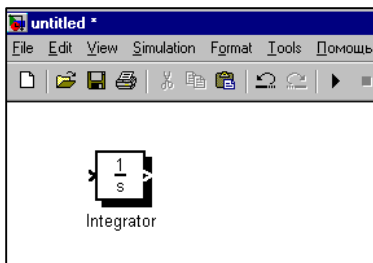
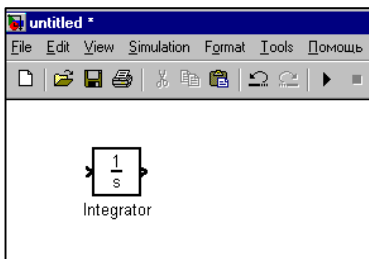


### 4.5.10. Приховання імені блоку

У деяких випадків не потрібно відображати на екрані ім'я блоку. Наприклад, графічне зображення блоку Gain дозволяє класифікувати тип даного блоку, тому повне уявлення структурної схеми допускає приховування імен даних блоків без втрати інформації. Для приховування імені блоку вибирається команда **Hide name** меню **Format**. Якщо ім'я блоку приховане, то для його візуалізації слід застосовувати команду **Show name** меню **Format** вікна моделі.

### 4.5.11. Додавання тіні до зображення блоку

Для додання ефекту глибини можна додати тінь до зображення блоку.



Для цього варто виконати наступні дії: вибрати блок і використувати команду **Show drop shadow** меню **Format** вікна моделі.

Якщо зображення блоку має додану тінь, команда **Hide drop shadow** меню **Format** повертає вихідне зображення блоку.

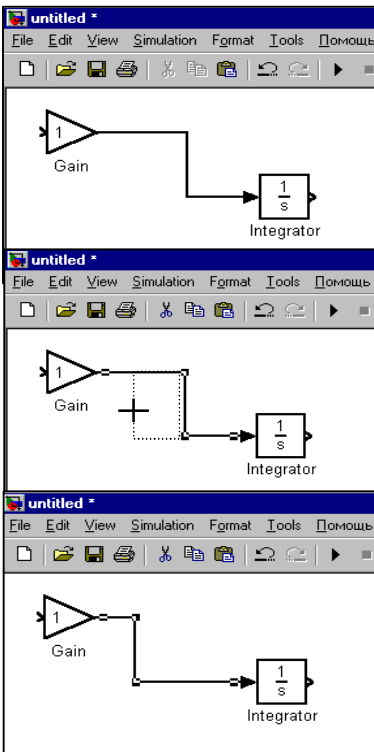
#### 4.5.12. Використання кольору

Можна встановити колір зображення переднього плану і колір фону для зображень окремого блоку і групи блоків.

*Колір зображення переднього плану* являє собою колір графічного зображення блоку і колір символів імені блоку.

*Колір фону* задає колір заливання графічного зображення блоку.

Для завдання кольору треба вибрати блок (блоки) і застосувати команду **Foreground color** (Колір переднього плану) меню **Format** чи команду **Background color** (Колір фону) меню **Format** вікна моделі.



Можна також здійснити заливання робочого поля вікна моделі. Для цього використовується команда **Screen color** меню **Format** вікна моделі.

#### 4.5.13. Переміщення відрізка лінії зв'язку

Для переміщення окремого відрізка виконується операція вибору лінії зв'язку – покажчик миші поміщається на обраний сегмент і натискається ліва клавіша миші. При цьому зображення покажчика миші змінюється і приймає вигляд хреста зі стрільцями. Точки зламів лінії зв'язку позначаються маркером типу квадрат.

Далі, не відпускаючи ліву клавішу миші, необхідно перемістити відрізок, задаючи його фіксоване положення, і відпустити клавішу миші.

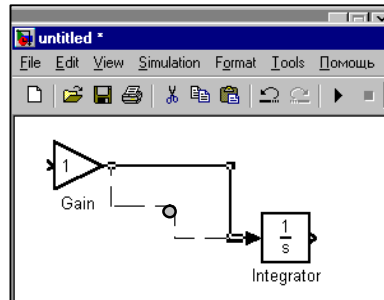
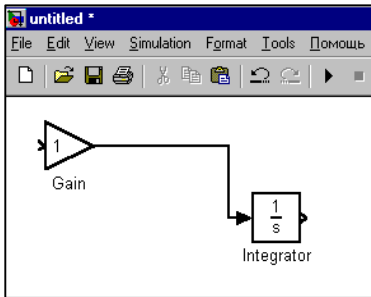
Для видалення маркерів треба

натиснути ліву клавішу миші, коли її покажчик перебуває поза лінії зв'язку.

#### 4.5.14. Переміщення точки зламу лінії зв'язку

Для переміщення точки зламу необхідно виконати наступні дії:

– помістити покажчик миші в точку зламу і натиснути ліву клавішу миші (вигляд зміненого покажчика — коло);



– не відпускаючи лівої клавіші миші, точку зламу треба перемістити в необхідне місце.

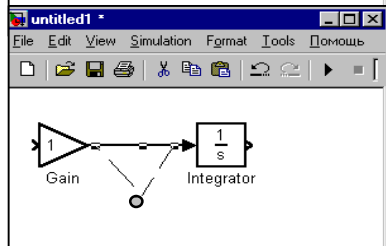
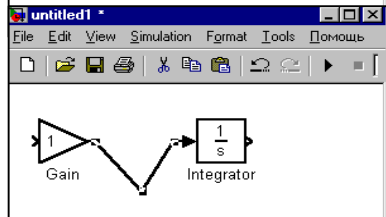
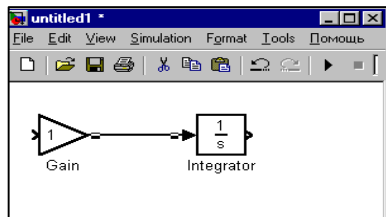
#### 4.5.15. Видалення лінії зв'язку

У разі видалення обраної лінії зв'язку треба натиснути клавішу **Delete**, або використовувати команду **Clear** меню **Edit** чи вибрати команду **Cut** меню **Edit** вікна моделі.

#### 4.5.16. Завдання зламу на лінії зв'язку

У разі виконання даної операції треба установити покажчик миші на обраній лінії зв'язку, натиснути кнопку **Shift** і ліву клавішу миші, коли її покажчик перебуває в точці, що буде точкою зламу.

Покажчик миші змінює своє зображення (вигляд покажчика – коло), і сегмент лінії зв'язку позначається у

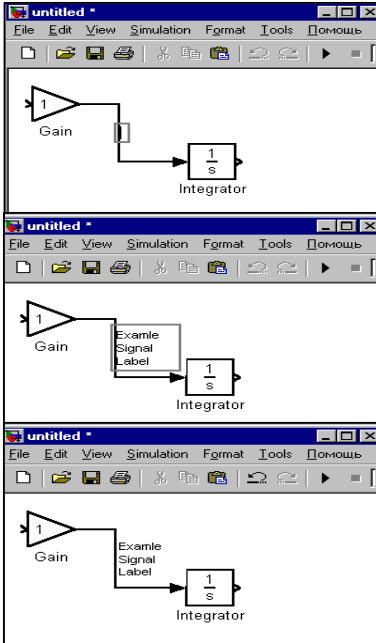




вигляді двох відрізків.

Для завершення операції необхідно відпустити клавішу миші і кнопку **Shift**.

#### 4.5.17. Позначення лінії зв'язку



Позначення лінії зв'язку не є унікальним ім'ям, на відміну від імені блоків.

Для нанесення позначення лінії зв'язку треба виконати наступні дії:

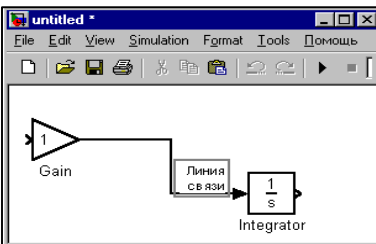
- помістити покажчик миші на лінію зв'язку і два рази натиснути на ліву клавішу миші. Це приведе до появи рамки і маркера введення, який має вигляд вертикальної риси;

- набрати текстовий рядок (для переходу на новий рядок треба натиснути клавішу **Enter**);

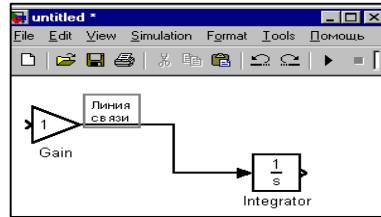
- натисканням лівої клавіші миші, коли її покажчик перебуває поза текстової області, видаляється виділяюча рамка.

#### 4.5.18. Переміщення або копіювання позначення лінії зв'язку

Для переміщення позначення лінії зв'язку необхідно виконати операцію вибору лінії зв'язку, натиснути і, утримуючи ліву клавішу миші, задати нове визначене положення позначення і далі, для завершення операції, відпустити клавішу миші.

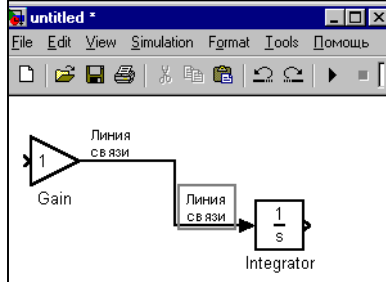


Для копіювання позначення лінії зв'язку треба натиснути клавішу **Ctrl** і помістити копію позначення у визначене положення.



#### 4.5.19. Редагування позначень ліній зв'язку

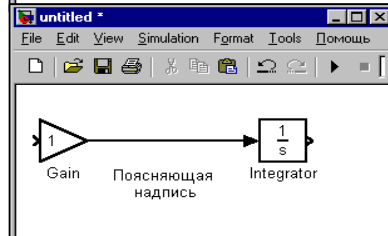
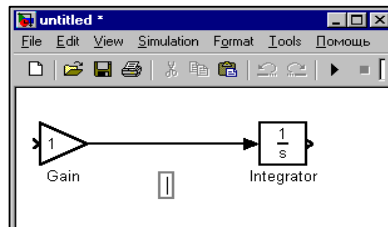
Виконується також, як і операція редагування імені блоку.



#### 4.5.20. Додавання пояснюючого напису

Для додавання пояснюючого напису, слід:

- встановити покажчик миші в місце розміщення пояснюючого напису і двічі натиснути ліву клавішу миші (при цьому з'являється рамка і маркер уведення);
- ввести текст пояснюючого напису (для переходу на новий рядок треба натиснути **клавішу Enter**);
- під час завершення операції натискається ліва клавіша миші, коли її покажчик знаходиться поза текстової області.



*У разі переміщення і копіювання пояснюючого напису використовуються операції, аналогічні операціям редагування зображення блоку.*

## 4.6. Операції з панеллю інструментів діалогового вікна блоку **Scope** (Осцилограф)

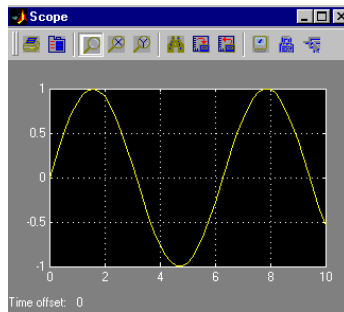
Блок **Scope** призначений для побудови перехідних процесів і забезпечує можливість створення твердої копії.

Блок може бути поміщений у структурну схему і не мати з'єднань з точками схеми, при цьому він визначається як блок **Floating Scope** (Плаваючий осцилограф). Даний блок призначений для оперативного з'єднання з лініями зв'язку шляхом вибору лінії в процесі моделювання.

Відкриття діалогового вікна блоку **Scope** здійснюється подвійним натисканням лівої клавіші миші, коли її покажчик перебуває на зображенні даного блоку.

Результати моделювання представляються у вигляді осцилограм.

### 4.6.1. Діалогове вікно блоку **Scope** і панель інструментів діалогового вікна



Піктограма **Print** служить для виведення графіків до друку.

Піктограма **Parameters** служить для відкриття вікна **Scope parameters**. Вікно має дві вкладки **General** та **Data history** і дозволяє задавати параметри форматування графіків, встановлювати режим плаваючого осцилографа і розміщувати масиви даних у робочій області.

Піктограма **Zoom** служить для збільшення масштабу області, укладеної в прямокутник виділення.

Піктограма **Zoom X – axis** служить для збільшення масштабу області по осі абсцис без зміни коефіцієнта масштабу по осі ординат.

Піктограма **Zoom Y – axis** служить для збільшення масштабу області по осі ординат без зміни коефіцієнта масштабу по осі абсцис.

Піктограма **Autoscale** автоматично задає граничні значення по осі абсцис і ординат, які відповідають першому головному розподілу, що виходить за межі значень даних.

Піктограма **Save current axes setting** служить для збереження діапазонів по всім координат для опрацювання графіків, отриманих при наступному моделюванні.

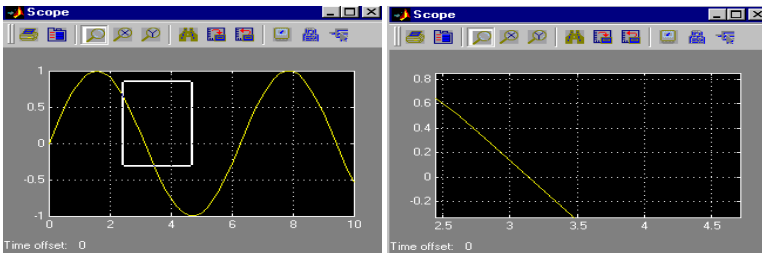
Піктограма **Restore saved axes** служить для відновлення діапазонів, заданих при моделюванні.

Піктограма **Floating Scope** служить для визначення блоку Scope як плаваючого осцилографа чи скасування даного режиму. Блоки Scope і Floating Scope мають однакові параметри і можуть виконувати однакові функції. Відмінність полягає в тому, що блок Floating Scope має встановлений за замовчуванням прапорець **floating scope**

Піктограма **Lock (Unlock) axes selection** служить для побудови графіка зміни перемінної (чи перемінних), яка відповідає обраної лінії зв'язку за допомогою блоку Floating Scope (блоку Scope у режимі плаваючого осцилографа)

Піктограма **Signal selection** служить для виклику діалогового вікна **Signal Selector** і настроювання режимів роботи блоку Floating Scope.

#### 4.6.2. Управління масштабом осцилограми

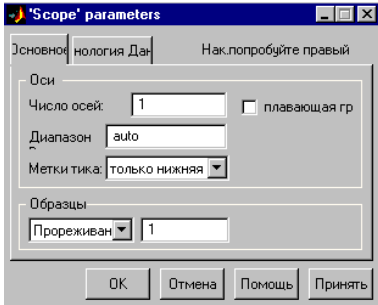


Для збільшення масштабу області графічного вікна що задається виділяючим прямокутником необхідно:

- вибрати піктограму **Zoom**;
- побудувати виділяючий прямокутник і відпустити ліву клавішу миші.

У вікні блоку Score буде сформований графік, межі на осях якого визначаються координатами вершин виділеного прямокутника.

### 4.6.3. Діалогове вікно Score parameters (Параметри блоку Score)

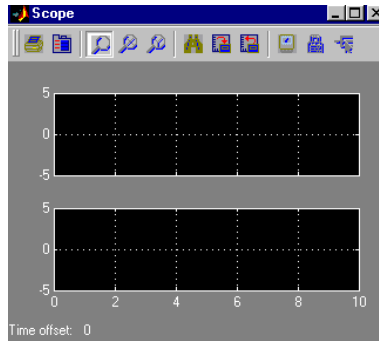


Діалогове вікно з'являється у разі вибору піктограми **Parameters** панелі інструментів вікна **Score** і має дві вкладки.

Вкладка **General** (Основна) у групі опцій **Axes** (Вісі) має кілька полів. У текстовому полі **Number of axes** (Кількість Вісей) задається кількість графіків, формованих у вікні блоку Score, і кількість вхід-

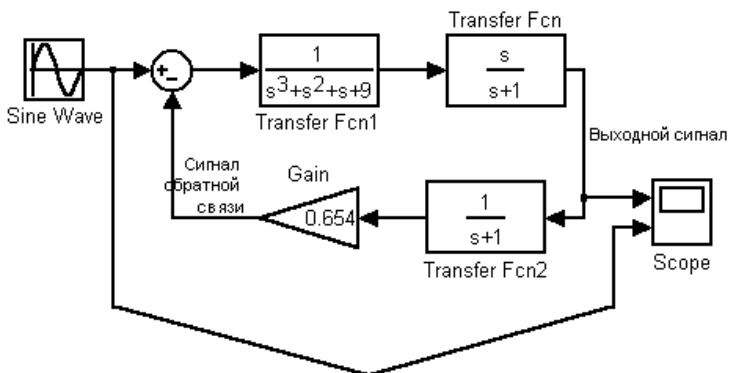
них портів блоку Score.

Для кожного вхідного порту будується відповідний графік. Наприклад, якщо в текстовому полі **Number of axes** вводиться значення 2, то зображення вікна блоку Score прийме вигляд двох осцилографів.



### 4.7 Моделювання автоматичної системи і дослідження її динамічних характеристик

Самостійно змоделювати наведену на рисунку автоматичну систему та отримати її вихідну характеристику:



## 5. Зміст звіту

У звіті по лабораторній роботі повинні бути представлені:

- мета і завдання до роботи;
- моделі найпростішої і складної систем автоматичного керування і їхні вихідні характеристики;
- модель заданої системи автоматичного керування та її динамічна характеристика;
- докладний аналіз отриманих результатів для кожної з моделей.

## 6. Контрольні питання

1. Диференціальне рівняння руху систем автоматичного керування.
2. Рішення неоднорідного диференціального рівняння руху.
3. Операторна форма запису диференціального рівняння руху.
4. Передатна функція.
5. Структурне зображення диференціального рівняння руху.

## Лабораторна робота №2

### ТИПОВІ ДИНАМІЧНІ ЛАНКИ

#### 1. Мета

У ході виконання лабораторної роботи вивчаються принципи дії найпростіших технічних систем, аналізуються рівняння їхнього руху й практично виконується моделювання типових динамічних ланок і дослідження їх часових і частотних характеристик.

#### 2. Рекомендації щодо підготовки до заняття

Повторити теоретичні питання дисципліни:

- структурні зображення диференціальних рівнянь руху технічних систем;
- стандартні впливи на системи;
- типові динамічні ланки, їх статика і динаміка.

#### 3. Завдання до виконання досліджень

- 3.1. Досліджувати безінерційні підсилювальні ланки.
- 3.2. Змоделювати інерційні ланки першого порядку і провести їхні експериментальні дослідження.
- 3.3. Провести дослідження перехідних і частотних характеристик диференціюючих і інтегруючих ланок.

#### 4. Порядок і методика виконання лабораторної роботи

##### 4.1. Дослідження безінерційних підсилювальних ланок

- За матеріалами лекцій та практичних занять розглянути варіанти технічної реалізації безінерційних підсилювальних ланок і усвідомити принципи роботи електричного ланцюга з активним опором, редуктора без люфту, електронного підсилювача перемінного струму.

Проаналізувати рівняння руху приведених ланок і їх передатні функції. Переконайтеся, що статичний передатний коефіцієнт безінерційної підсилювальної ланки визначається її технічними параметрами.

- Запустити систему **Simulink** із програми **MATLAB**.
- Відкрити нове вікно моделі.

- Відкрити список бібліотек блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузера головної бібліотеки Simulink).

- Для дослідження моделі безінерційної підсилювальної ланки, з бібліотек блоків **Math Operations** – *Математичні операції*, **Sources** – *Джерела сигналів*, і **Sinks** – *Засоби реєстрації*, у вікно моделі з іменем untitled послідовно перемістити зображення блоків:

**Gain** (*Коефіцієнт підсилення*),

**Step** (*Сходінка*),

**Ramp** (*Зростаюча*),

**Signal Builder** (*Будування сигналів*),

**Sine Wave** (*Генератор синусоїди*),

**Scope** (*Осцилограф*)

як показано на рисунку.

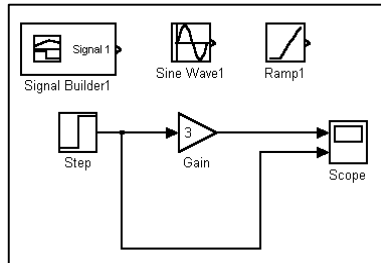
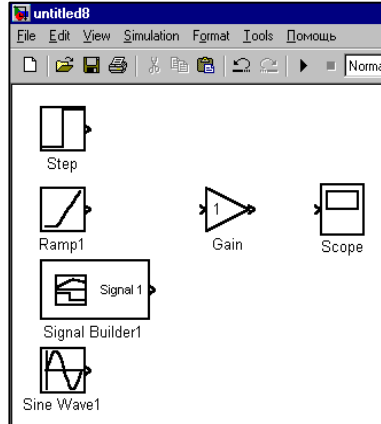
- Задати кількість вхідних портів блоку **Scope** (*Осцилограф*) рівну двом, використовуючи вкладку **General** (Основна) панелі інструментів **Parameters** вікна **Scope**.

- З набраних блоків побудувати модель для дослідження безінерційної підсилювальної ланки зі статичним коефіцієнтом підсилення рівним 3.

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа *перехідну функцію* досліджуваної ланки як реакцію на одиничний ступінчатий сигнал.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** пульта управління комп'ютером.

- Повторити експеримент, змінюючи значення вхідного ступінчатого сигналу  $Step \equiv r(t)$  від 1 до 5, фіксуючи вихідний сигнал досліджуваної ланки



$Step \equiv r(t)$	1	2	3	4	5
$y(t)$					



- За отриманими даними побудувати *регульовальну характеристику*  $y = f(r)$  безінерційної підсилювальної ланки.

- Замінити в моделі джерело ступінчатого сигналу на джерело **Ramp** (*Зростаюча*) і, запустивши процес моделювання, визначити реакцію на нього безінерційної підсилювальної ланки –  $K(t)$  функцію. Зафіксувати отриманий результат.

- Підключити на вхід досліджуваної ланки **Signal Builder** (*Будування сигналів*). Налаштувати **Signal Builder** на формування імпульсного сигналу тривалістю 0,5с і амплітудою рівною 100 од.

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа *імпульсну перехідну функцію* досліджуваної ланки як реакцію на одиничний імпульсний сигнал.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** панелі управління комп'ютером.

- Підключити на вхід безінерційної підсилювальної ланки **Sine Wave** (*Генератор синусоїди*). Налаштувати **Sine Wave** на формування одиничного синусоїдального сигналу.

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа реакцію досліджуваної ланки на одиничний синусоїдальний сигнал.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** панелі управління комп'ютером.

- Повторити експеримент, змінюючи частоту вхідного сигналу  $\omega$  від 1 до 5 рад/с, і *переконатися, що амплітуда вихідного сигналу досліджуваної ланки залишається без змін, а його фазове запізнення стосовно вхідного у всіх випадках дорівнює нулю.*

$\omega$ , рад/с	1	2	3	4	5
$Y_m(\omega)$					
$\phi$					

За отриманими даними побудувати *амплітудно-фазову частотну характеристику* безінерційної підсилювальної ланки.

## 4.2. Моделювання й експериментальні дослідження інерційних ланок першого порядку

- Розглянути приклади технічних реалізацій інерційних ланок першого порядку й усвідомити принципи їх роботи.

Проаналізувати рівняння руху ланок і їх передатні функції. Переконатися, що статичний передатний коефіцієнт інерційної ланки першого порядку і постійна часу визначаються тільки її технічними параметрами і не залежать від зовнішніх впливів.

- Відкрити нове вікно моделі.
- Відкрити список бібліотек блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink).

- Для дослідження моделі інерційної ланки першого порядку, з бібліотек блоків **Continuous** – *Елементи неперервних систем*, **Sources** – *Джерела сигналів*, і **Sinks** – *Засоби реєстрації*, у вікно моделі з іменем *untitled* послідовно перемістити зображення блоків:

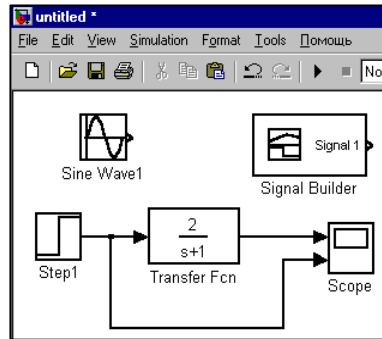
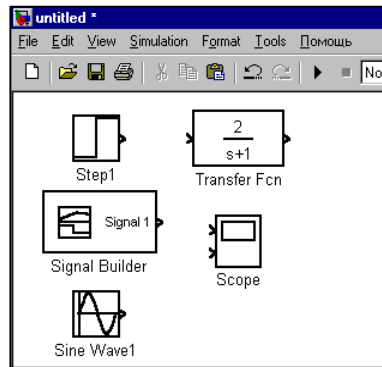
**Transfer Fcn** (*Передатна ланка*),  
**Step** (*Сходінка*),  
**Signal Builder** (*Будування сигналів*),  
**Sine Wave** (*Генератор синусоїди*),  
**Scope** (*Осцилограф*)

як показано на рисунку.

- З набраних блоків побудувати модель для дослідження інерційної ланки першого порядку із коефіцієнтом підсилення  $k = 2$  та постійною часу  $T = 1$ .

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа *перехідну функцію* досліджуваної ланки як реакцію на одиничний ступінчатий сигнал.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** панелі управління комп'ютером.



- Підключити на вхід досліджуваної ланки **Signal Builder** (*Будування сигналів*). Налаштувати **Signal Builder** на формування імпульсного сигналу тривалістю 0,5с і амплітудою 100 одиниць.

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа імпульсну перехідну функцію інерційної ланки першого порядку як реакцію на одиничний імпульсний сигнал.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** панелі управління комп'ютером.

- Збільшити постійну часу ланки до значення  $T = 3$  і визначити експериментально перехідну й імпульсну перехідну функції зміненої ланки.

*Порівняти результати експериментів для ланок з  $T = 1$  і  $T = 3$ .*

- Підключити на вхід інерційної ланки першого порядку з параметрами  $k = 2$ ;  $T = 1$  **Sine Wave** (*Генератор синусоїди*). Налаштувати **Sine Wave** на формування одиничного синусоїдального сигналу з частотою  $\omega = 0,5$  рад/с.

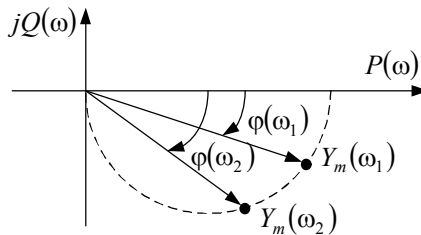
- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа реакцію досліджуваної ланки на одиничний синусоїдальний сигнал з частотою  $\omega = 0,5$  рад/с.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** панелі управління комп'ютером.

- Повторити експерименти при зміні частоти вхідного сигналу  $\omega$  від 0,5 рад/с до  $\omega = 10$  рад/с з визначенням для кожної частоти амплітуди  $Y_m(\omega)$  вихідного сигналу ланки і часу  $t$  його запізнювання стосовно вхідного. (*Час запізнювання визначається порівнянням двох осцилограм – вхідного і вихідного сигналів*).

$\omega$ , рад/с	0,5	1	2	4	6	8	10
$Y_m(\omega)$							
$t$ , с							
$\varphi = \omega t$ , рад							

- За результатами вимірів  $Y_m(\omega)$  та розрахунку  $\varphi = \omega t$  побудувати *амплітудно-фазову частотну характеристику* інерційної ланки першого порядку у координатах :



#### 4.3. Дослідження перехідних і частотних характеристик диференціюючих і інтегруючих ланок

- Самостійно розглянути приклади технічних реалізацій диференціюючих і інтегруючих ланок, усвідомити принципи їх роботи. Проаналізувати рівняння руху ланок і їх передатні функції.

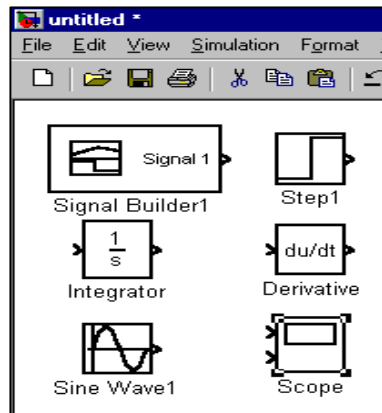
- Відкрити нове вікно моделі.

- Відкрити список бібліотек блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink).

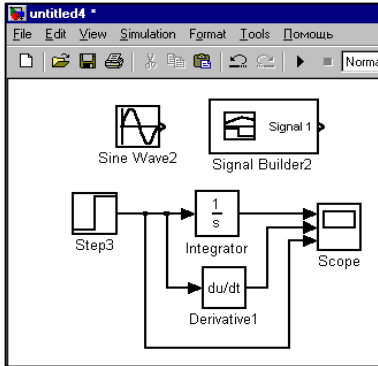
Для дослідження моделей диференціюючих і інтегруючих ланок, з бібліотек блоків **Continuous** – *Елементи неперервних систем*, **Sources** – *Джерела сигналів*, і **Sinks** – *Засоби реєстрації*, у вікно моделі з іменем *untitled* послідовно перемістити зображення блоків:

- Integrator** (Інтегратор),
- Derivative** (Диференціювання),
- Step** (Сходінка),
- Signal Builder** (Будування сигналів),
- Sine Wave** (Генератор синусоїди),
- Scope** (Осцилограф)

як показано на рисунку.



- Задати кількість портів входу блоку **Scope** (*Осцилограф*) рівну трьом, використовуючи вкладку **General** (Основна) панелі інструментів **Parameters** вікна **Scope**.



- Підключити на вхід ланок **Signal Builder** (*Будування сигналів*). Налаштувати **Signal Builder** на формування імпульсного сигналу тривалістю 0,5с і амплітудою 100 од.

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа *імпульсні перехідні функції* диференціюючих і інтегруючих ланок, як реакції на імпульсний сигнал.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** панелі управління комп'ютером.

- Підключити на вхід досліджуваних ланок **Sine Wave** (*Генератор синусоїди*). Налаштувати **Sine Wave** на формування одиничного синусоїдального сигналу з частотою  $\omega = 1$  рад /с .

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа реакції диференціюючих і інтегруючих ланок на одиничний синусоїдальний сигнал.

- Зафіксувати за допомогою операції **Print Screen** панелі управління комп'ютером отримані результати і провести їх порівняльний аналіз.

## 5. Зміст звіту

У звіті по лабораторній роботі повинні бути представлені:

- мета і завдання до роботи;

- 3 набраних блоків побудувати моделі для дослідження ланок.

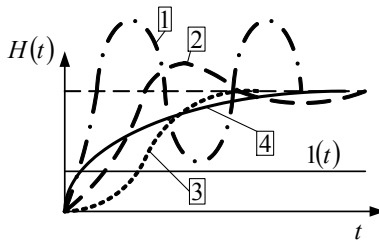
- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа *перехідні функції* ланок як реакції на одиничний ступінчатий сигнал.

- Зафіксувати отримані результати, використовуючи операцію **Print Screen** панелі управління комп'ютером.

- моделі досліджуваних типових динамічних ланок і відповідні їм експериментальні характеристики;
- розрахункові характеристики динамічних ланок;
- докладний аналіз отриманих результатів для кожної динамічної ланки.

## 6. Контрольні питання

1. Типові динамічні ланки: визначення, рівняння рухів, приклади технічної реалізації.
2. Часові й частотні характеристики типових динамічних ланок.
3. По виду перехідних характеристик ідентифікувати динамічну ланку першого порядку:



4. Як зміниться перехідна функція диференціюючої ланки при збільшенні статичного передатного коефіцієнту ланки у три рази?
5. На прикладі безінерційної ланки поясніть принцип розрахунку і побудови її ЛАЧХ.
6. На підставі рівняння перехідної функції інерційної ланки першого порядку отримайте рівняння імпульсної перехідної функції ланки.

## Лабораторна робота №3

### ІНЕРЦІЙНІ ЛАНКИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

#### 1. Мета

У ході виконання лабораторної роботи вивчаються принципи дії найпростіших технічних систем, аналізуються рівняння їх руху й практично виконується моделювання інерційних ланок другого порядку і дослідження їх часових і частотних характеристик.

#### 2. Рекомендації щодо підготовки до заняття

Повторити теоретичні питання дисципліни:

- структурні зображення диференціальних рівнянь руху технічних систем;
- стандартні впливи на системи;
- інерційні ланки другого порядку, їх статика і динаміка.

#### 3. Завдання до виконання досліджень

3.1. Змоделювати інерційні ланки другого порядку з різними співвідношеннями постійних часу.

3.2. Провести аналітичні й експериментальні дослідження динамічних характеристик ланок другого порядку.

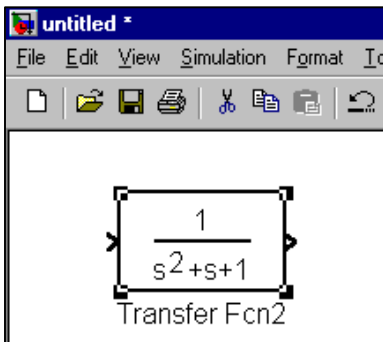
#### 4. Порядок і методика виконання лабораторної роботи

- За матеріалами лекцій розглянути приклади технічних реалізацій інерційних ланок другого порядку й усвідомити принципи їх роботи.

Проаналізувати рівняння руху ланок другого порядку і передатні функції. Переконаватися, що статичний передатний коефіцієнт інерційної ланки другого порядку і постійні часу визначаються тільки її технічними параметрами і не залежать від зовнішніх впливів.

- Відкрити нове вікно моделі.
- Відкрити список бібліотек блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink).

- З бібліотеки блоків **Continuous** – *Елементи неперервних систем*, у вікно моделі з іменем **untitled** перемістити зображення блоку **Transfer Fcn** (*Передатна ланка*), що відповідає передатній функції інерційної ланки другого порядку, як показано на рисунку.



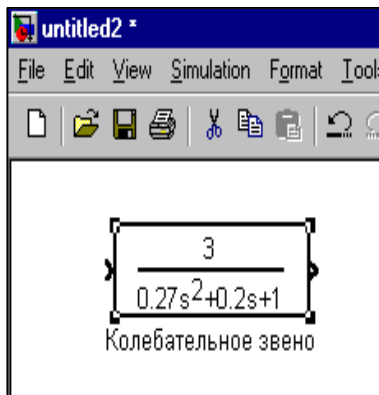
- Припустимо що ланка має параметри

$$T_2 = \sqrt{0,27}; \quad T_1 = 0,2; \quad k = 3.$$

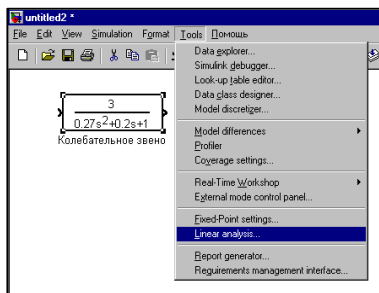
- Ввести значення параметрів у модель досліджуваної ланки.

- Ввести найменування ланки «*Коливальне*», тому що коефіцієнт загасання перехідних процесів

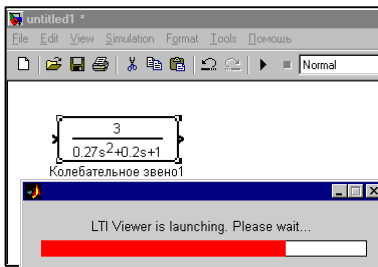
$$d_0 = \frac{T_1}{2T_2} = \frac{0,2}{\sqrt{0,27}} \leq 1.$$



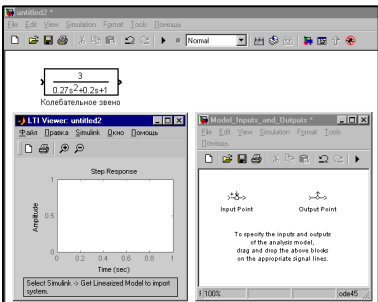
- Показчиком миші вибрати команду **Linear analysis** (*Лінійні дослідження*) меню **Tools** (*Інструментарій*) вікна моделі і натиснути ліву клавішу миші.





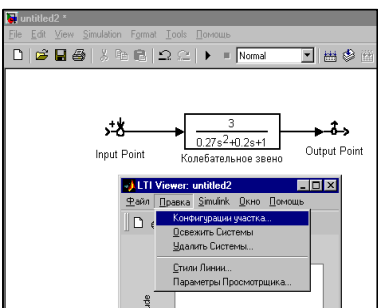


У вікні моделі з'являється табло **LTI Viewer is launching** із проханням витримати паузу до завершення процесу запуску системи лінійних досліджень.



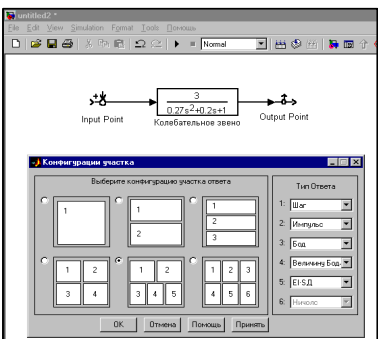
По завершенні процесу запуску системи лінійних досліджень у вікні моделі встановлюються:

- вікно **LTI Viewer** результатів досліджень;
- вікно **Model Inputs and Outputs** з вузлами підведення сигналів **Input**, **Point** до досліджуваної моделі і відведення їх **Output Point** від неї.



• Показчиком миші перенести вузли підведення **Input Point** і відведення **Output Point** сигналів у вікно моделі та з'єднати їх з досліджуваною ланкою в напрямку проходження сигналу по неї.

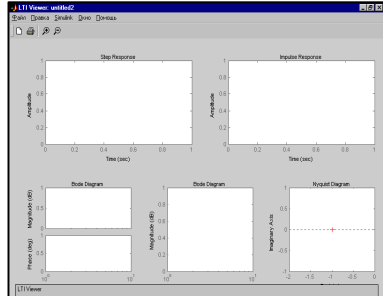
• Показчиком миші вибрати команду **Конфігурація ділянки** меню **Виправлення** вікна **LTI Viewer** результатів досліджень і натиснути ліву клавішу миші.



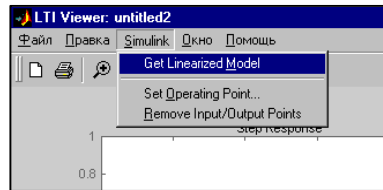
З'являється вікно **Конфігурація ділянки** з пропозицією вибрати бажані для аналізу динамічні характеристики досліджуваної ланки відповідно до типових входних впливів.

- Вибрати покажчиком миші перехідну, імпульсну перехідну функції, логарифмічні частотні характеристики й амплітудно-фазову частотну характеристику та натиснути кнопку ОК.

На екрані з'являється вікно **LTI Viewer** з полями під бажані характеристики досліджуваної ланки.

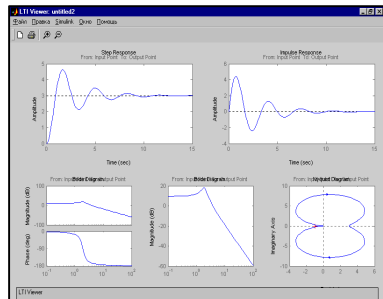


- Покажчиком миші вибрати команду **Get Linearised Model** (Дослідження лінійної моделі) меню Simulink вікна LTI Viewer результатів досліджень і натиснути ліву клавішу миші.



По завершенні процесу дослідження у вікні **LTI Viewer** отримуюмо динамічні характеристики інерційної (коливальної) ланки другого порядку.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** панелі управління комп'ютером.



- Змінити постійну часу  $T_1$  досліджуваної ланки і ввести нові параметри в модель:  $T_2 = \sqrt{0,27}$ ;  $T_1 = 1$ ;  $k = 3$ .

- Позначити ланку як «*Аперіодична*», тому що коефіцієнт загасання перехідних процесів став більш одиниці

$$d_0 = \frac{T_1}{2T_2} = \frac{1}{\sqrt{0,27}} \geq 1.$$

- Виконати дослідження часових і частотних характеристик *Аперіодичної ланки* відповідно до вищевикладеної методики для інерційної ланки другого порядку.

- Змінити постійну часу  $T_1$  досліджуваної ланки і ввести нові параметри в модель:  $T_2 = \sqrt{0,27}$ ;  $T_1 = 0$ ;  $k = 3$ .

- Позначити ланку як «*Гармонічна*», тому що коефіцієнт загасання перехідних процесів став рівним нулю

$$d_0 = \frac{T_1}{2T_2} = 0.$$

- Виконати дослідження часових і частотних характеристик *Гармонічної ланки* відповідно до вищевикладеної методики для інерційної ланки другого порядку.

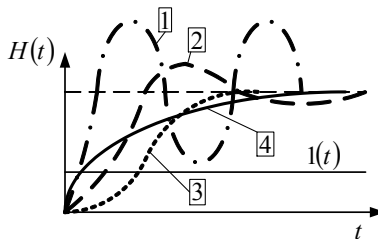
### 5. Зміст звіту

У звіті по лабораторній роботі повинні бути представлені:

- мета і завдання до роботи;
- моделі досліджуваних типових динамічних ланок і відповідні їм експериментальні характеристики;
- розрахункові характеристики динамічних ланок;
- докладний аналіз отриманих результатів для кожної динамічної ланки.

### 6. Контрольні питання

1. Інерційні ланки другого порядку: визначення, рівняння руху, приклади технічної реалізації.
2. Часові й частотні характеристики інерційних ланок другого порядку.
3. Ідентифікувати аперіодичну динамічну ланку другого порядку за виглядом перехідних характеристик:



1.

,  
 ,  
 ,  
 ,  
 ,  
 .

2.

- ,  
 - ;  
 - ;  
 , .

3.

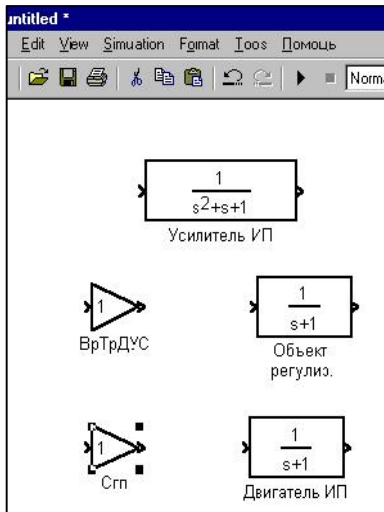
3.1. ,  
 3.2. ,  
 3.3. .

4.

4.1.

- ,
  - .
- :

• **Simulink** **MATLAB.**  
 •  
 • **Simulink Library**  
**Browser** (**Simulink**).  
 •  
**Math Operations** – **Continuous** –  
 , **untitled** –  
 • **Sources** – **Sinks** –  
 ( **Sine Wave** ( **Scope** ( **Step** ).



$$\begin{aligned}
 k &= 2 \\
 k_1 &= 40 & k_2 &= 40 \\
 k_1 &= k_2 = 2 & k &= 0 \\
 0 &= 0,5 & & = \dots = 0,2
 \end{aligned}$$

$$\frac{k}{2s^2 + 1s + 1} = \frac{5}{0,002s^2 + 0,01s + 1}$$

$$\frac{\quad}{4s^2 + 3s + 1} = \frac{0,09}{0,006s^2 + 0,01s + 1}$$

$$\frac{k}{s+1} = \frac{0,2}{0,9s+1}$$

$$\frac{k}{s+1} = \frac{0,4}{0,1s+1}$$

•

•

4.2.

•

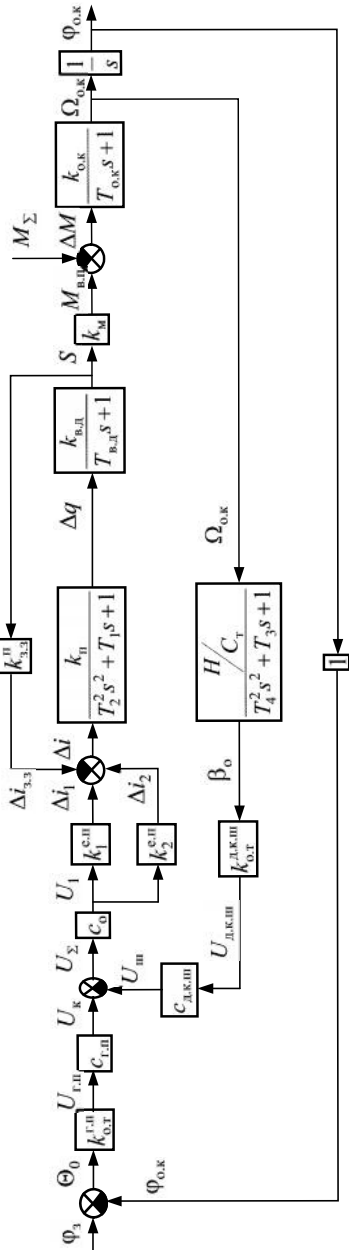
Simulation

Print Screen

Step ( )

Scope ( )

Start



•

2 3

•

•

Sine Wave (

),

Scope (

)

Sine Wave (

).

2,5 / .

•

Simulation

Print Screen

Start

•

Linear analysis (

)

Tools (

•

•

•

= 0,4 .

5.

—  
—  
—  
—

6.

1.  
2.  
3.

:

;

;

;

.

.

,

—

,

—

,

.

:

,

,

,

.



# Лабораторна робота №5

## ЗВОРОТНІ ЗВ'ЯЗКИ У СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

### 1. Мета

У ході виконання лабораторної роботи вивчаються основні види зворотних зв'язків у САК, виконується моделювання систем у разі охоплення їх елементів різними типами зворотних зв'язків, експериментально досліджуються впливи зворотних зв'язків на властивості типових динамічних ланок.

### 2. Рекомендації щодо підготовки до заняття

Повторити наступні теоретичні питання дисципліни:

- типи зворотних зв'язків;
- технічні реалізації зворотних зв'язків;
- подання закону керування через передатні функції;
- еквівалентні перетворення структурних схем.

### 3. Завдання до виконання досліджень

3.1. Освоїти принципи складання і перетворення структурних схем з різними типами зворотних зв'язків.

3.2. Провести експериментальні дослідження впливу зворотних зв'язків на типові динамічні ланки.

3.3. Виконати дослідження основних властивостей гнучких зворотних зв'язків.

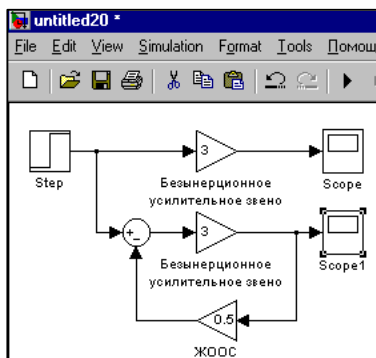
### 4. Порядок і методика виконання лабораторної роботи

#### 4.1. Дослідження впливу зворотних зв'язків на типові динамічні ланки

##### 4.1.1. Жорсткі зворотні зв'язки

- Запустити систему **Simulink** із програми **MATLAB**.
- Відкрити нове вікно моделі.
- Відкрити список бібліотек блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink).

- Використовуючи бібліотеку блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink), побудувати, як показано на рисунку, модель для дослідження впливу *жорсткого негативного зворотного зв'язку* (ЖНЗЗ) на безінерційну підсилювальну ланку з передатним коефіцієнтом  $k = 3$ .



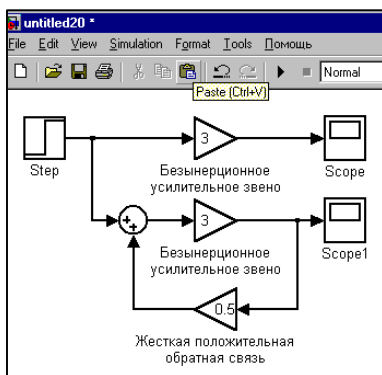
- Присвоїти ланці і зворотному зв'язку відповідні найменування.

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екранах осцилографів *перехідні функції* безінерційної підсилювальної ланки і безінерційної підсилювальної ланки, охопленої ЖНЗЗ.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** пульта управління комп'ютером.

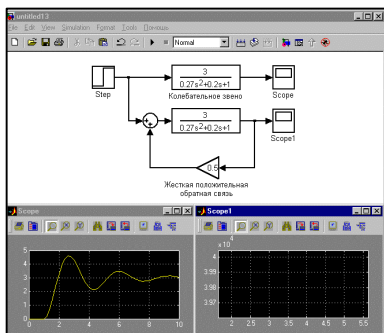
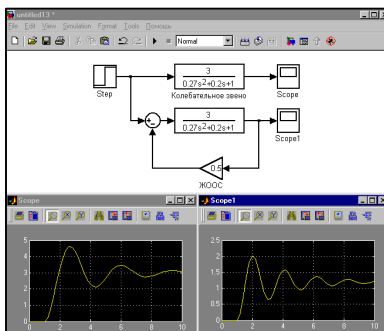
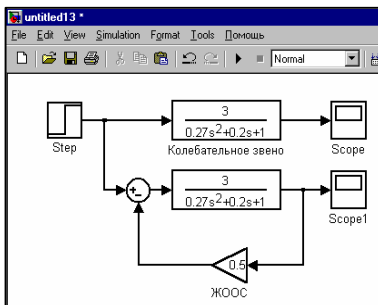
- Зберегти для оформлення звіту вікно моделі з досліджуваною схемою, присвоївши вікну відповідне ім'я.

- Перенести модель у нове вікно і змінити в моделі *жорсткий негативний зворотний зв'язок на позитивний*.



- Повторити експеримент із реєстрацією перехідних функцій.
- Провести аналіз отриманих результатів з обґрунтуванням впливу жорсткого зворотного зв'язку на властивості безінерційної підсилювальної ланки.

- Відкрити нове вікно моделі.
- Використовуючи бібліотеку блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink), побудувати, як показано на рисунку, модель для дослідження впливу *жорсткого негативного зворотного зв'язку* (ЖНЗЗ) на інерційну ланку друго-



ланки, охопленої жорсткими негативним і позитивним зворотними зв'язками, порівняти отримані дані з аналогічними показниками коливальної ланки без зворотних зв'язків.

- Зробити висновки щодо впливу жорстких зворотних зв'язків на статику і динаміку інерційної ланки другого порядку .

го порядку (коливальну) зі статичним передатним коефіцієнтом  $k = 3$  і постійним часу

$$T_2 = \sqrt{0,27}, T_1 = 0,2 .$$

- Установити значення коефіцієнта ЖНЗЗ яке дорівнює 0,5 і надати ланці і зворотному зв'язку відповідні найменування.

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екранах осцилографів перехідні функції інерційної ланки другого порядку і тієї ж ланки, охопленої ЖНЗЗ .

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** пульта управління комп'ютером. При цьому для звіту можна рекомендувати варіант, який показано на рисунку праворуч.

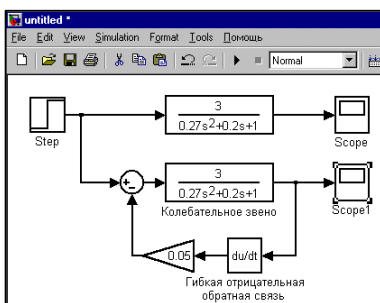
- Перемістити модель у нове вікно і замінити у ній *жорсткий негативний зворотний зв'язок на позитивний*.

- Повторити експеримент із реєстрацією перехідних функцій.

- Розрахувати статичні передатні коефіцієнти  $k$  і коефіцієнти загасання  $d_0 = T_1/2T_2$  коливальної

#### 4.1.2. Гнучкі зворотні зв'язки

- Відкрити нове вікно моделі.
- Використовуючи бібліотеку блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink), побудувати, як показано на рисунку, модель щодо дослідження впливу гнучкого негативного зворотного зв'язку (ГНЗЗ) на інерційну ланку другого порядку (коливальну) зі статичним передатним коефіцієнтом  $k=3$  і постійними часу  $T_2 = \sqrt{0,27}, T_1 = 0,2$ .

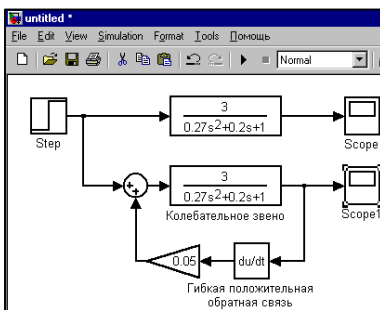


- Установити значення коефіцієнта ГНЗЗ яке дорівнює 0,05 і надати каналу зворотного зв'язку найменування «Гнучкий негативний зворотний зв'язок».

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екранах осцилографів перехідні функції інерційної ланки другого порядку і тієї ж ланки, охопленої ГНЗЗ.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** пульта управління комп'ютером.

- Перемістити модель у нове вікно і замінити у ній *гнучкий негативний зворотний зв'язок на позитивний* зі зміною найменування каналу зворотного зв'язку.



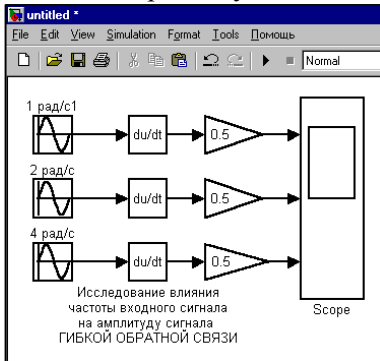
- Повторити експеримент відповідно до методики дослідження впливу гнучкого негативного зворотного зв'язку.

- Порівняти результати досліджень і зробити необхідні висновки щодо впливу гнучких зворотних зв'язків на характеристики інерційної ланки другого порядку.

- Узагальнити матеріали досліджень впливу жорстких і гнучких зворотних зв'язків на типові динамічні ланки. Головну увагу звернути на те, як зворотні зв'язки змінюють статичні передатні коефіцієнти ланок і їх постійні часу.

#### 4.2. Дослідження впливу частоти вхідного сигналу на амплітуду сигналу гнучкого зворотного зв'язку

- Відкрити нове вікно моделі.
- Використовуючи бібліотеку блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink), побудувати, як показано на рисунку, модель з проведення досліджень, попередньо встановивши 3 вхідних порти осцилографа.



**Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink), побудувати, як показано на рисунку, модель з проведення досліджень, попередньо встановивши 3 вхідних порти осцилографа.

- Установити значення коефіцієнтів ГНЗЗ, які дорівнюють 0,5 .
- Установити значення амплітуд усіх вхідних синусоїд, які дорівнюють 1, а частоти вхідних

сигналів для верхнього, середнього і нижнього ланцюжків відповідно 1 рад/с, 2 рад/с і 4 рад/с.

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і зафіксувати на екрані осцилографа гармонічні сигнали ланцюжків.
- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** пульта управління комп'ютером.
- Порівняти амплітуди сигналів і зробити висновки, відобразивши їх у звіті разом з осцилограмами.

#### 4.3. Дослідження впливу порядку передатної функції ГНЗ на фазу її вихідного сигналу

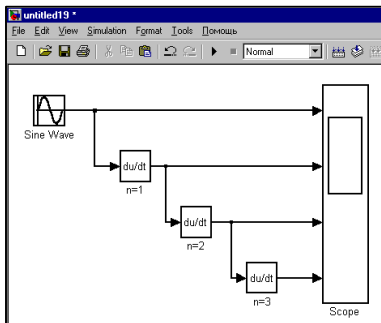
- Відкрити нове вікно моделі.
- Використовуючи бібліотеку блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink), побудувати, як показано на рисунку, модель з проведення досліджень, попередньо встановивши 4 вхідних порта осцилографа.

- Установити частоту одиничного гармонічного сигналу 3 рад/с.

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і зафіксувати на екрані осцилографа гармонічні сигнали кожного з ланцюжків.

- Зафіксувати отриманий результат, використовуючи операцію **Print Screen** пульта управління комп'ютером.

- Порівняти фази сигналів і зробити висновки, відобразивши їх у звіті разом зі схемою дослідження й осцилограмами.



## 5. Зміст звіту

У звіті по лабораторній роботі повинні бути представлені:

- мета і завдання до роботи;
- моделі досліджуваних систем;
- експериментальні характеристики;
- докладний аналіз отриманих результатів.

## 6. Контрольні питання

1. Зворотні зв'язки в САК: визначення, класифікація, структурні зображення, приклади технічної реалізації.

2. Як позначиться на властивостях типових динамічних ланок охоплення їх жорсткими негативними зворотними зв'язками?

3. Як позначиться на властивостях типових динамічних ланок їх охоплення їх гнучкими негативними зворотними зв'язками?

1.

2.

3.

3.1.

3.2.

4.

- 
- 
- 

**Simulink**

**MATLAB.**

**Simulink Library**

**Browser (**

Simulink).

**Math Operations –**

**Continuous –**

untitled

- 

**Sources -**

**Sinks -**

**Step (**  
**)**.

**Sine Wave (**

**), Scope (**

$$k = 2$$

$$k_1 = 40 \quad k_2 = 40$$

$$k_{11} = k_{21} = 2 \quad k_{12} = 0$$

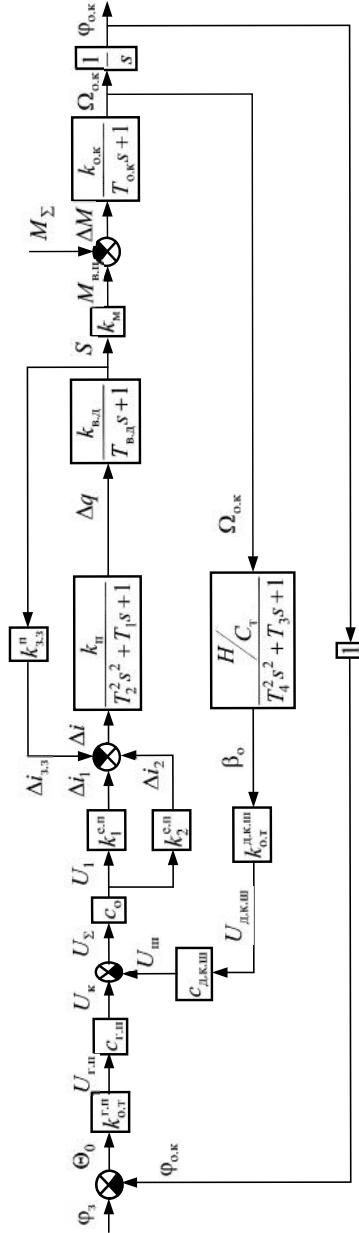
$$T_{01} = 0,5 \quad T_{02} = \dots = 0,2$$

$$\frac{k}{s+1} = \frac{0,2}{0,9s+1}$$

$$\frac{k}{s+1} = \frac{0,4}{0,1s+1}$$

$$\frac{k}{2s^2 + 1s + 1} = \frac{5}{0,002s^2 + 0,01s + 1};$$

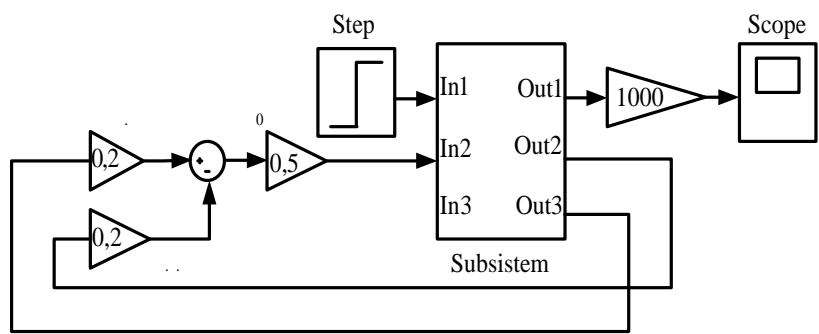
$$\frac{k}{4s^2 + 3s + 1} = \frac{0,09}{0,006s^2 + 0,01s + 1}$$





- 
- 
- 

Step ( )  
Scope ( )-



- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 

= 0; 0,1; 0,2; 0,4 ,

= 0,2 .

= 0; 0,1; 0,2; 0,4 ,

= 0,2 .

5.

— ;  
— ;  
— ;  
— .

6.

1. , : , -
2. , . -
3. , .
4. , ? -
5. , ? ,

## Лабораторна робота №7

### ДИНАМІКА СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ У РАЗІ ВИПАДКОВИХ ВХІДНИХ ВПЛИВІВ

#### 1. Мета

У ході виконання лабораторної роботи вивчаються принципи проходження випадкових сигналів через лінійні системи автоматичного керування і практично досліджується динаміка перетворення автопілотом випадкових сигналів по каналах керування і збурювальних впливів.

#### 2. Рекомендації щодо підготовки до заняття

Повторити наступні теоретичні питання дисципліни:

- випадкові величини та їх характеристики;
- випадкові процеси, стаціонарність, ергодична властивість;
- кореляційні функції і спектральні щільності випадкових процесів;
- проходження випадкового сигналу через лінійну САК.

#### 3. Завдання до виконання досліджень

3.1. Дослідити частотний спектр сигналу типу «білий шум».

3.2. Змодельовати стаціонарний випадковий сигнал на базі гармонійних складових.

3.3. Провести дослідження автопілоту при дії на літак сигналів типу «білий шум» і стаціонарного збурювального впливу.

3.4. Виконати розрахунки динамічної точності автопілоту аналітичними методами.

#### 4. Порядок і методика виконання лабораторної роботи

##### 4.1. Дослідження частотного спектру сигналу типу «білий шум»

- Запустити систему **Simulink** із програми MATLAB.
- Відкрити нове вікно моделі.
- Відкрити список бібліотек блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink).
- Із бібліотек **Simulink** (блоки **Sinks** – *Засоби реєстрації*, **Sources** – *Джерела сигналів*) і **Simulink Extras** (блок **Additional sinks**

– додаткові засоби реєстрації) у вікно моделі з іменем *untitled* по-сплідовно перемістити зображення блоків:

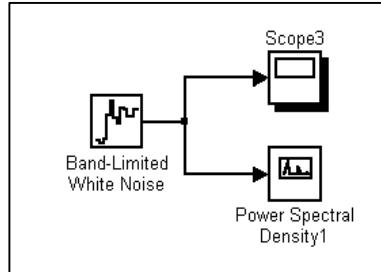
**Scope** (*Осцилограф*);

**Band-Limited White Noise** (*Джерело сигналу типу «Білий шум»*);

**Power Spectral Density** (*Спектрограф*).

- З набраних блоків побудувати модель для дослідження частотного спектру сигналу типу «білий шум».

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа випадковий сигнал типу «білий шум», а на екрані спектрографа спектральну щільність сигналу.



- Зафіксувати отримані результати, використовуючи операцію, наприклад, **Print Screen** пульта управління комп'ютером.

- Проаналізувати отримані матеріали і зробити висновки.

#### 4.2. Моделювання стаціонарного випадкового сигналу на базі гармонічних складових

- Відкрити нове вікно моделі.

- Відкрити список бібліотек блоків вікна **Simulink Library**

**Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink).

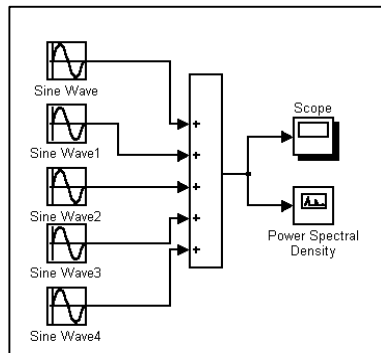
- Із бібліотек **Simulink** (блоки **Sinks** – *Засоби реєстрації*, **Sources** – *Джерела сигналів*, **Math Operations** – *Математичні операції*) і **Simulink Extras** (блок **Additional sinks** – додаткові засоби реєстрації) у вікно моделі посплідовно перемістити зображення блоків:

**Scope** (*Осцилограф*);

**Sine Wave** (*Генератор*);

**Sum** (*Суматор*);

**Power Spectral Density** (*Спектрограф*).



- З набраних блоків, у разі тиражування моделі генератора синусоїди, побудувати модель для дослідження частотного спектра стаціонарного випадкового сигналу.

- Встановити на кожному з генераторів синусоїди значення амплітуди сигналу, яка дорівнює 1, а значення частот відповідно 1, 5, 6, 7 і 8 рад/с.

- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа вид випадкового стаціонарного сигналу, а на екрані спектрографа – його спектральну щільність.

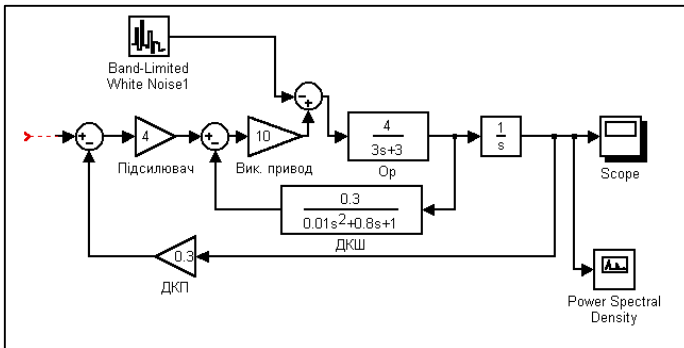
- Зафіксувати отримані результати.

- Проаналізувати матеріали експерименту та зробити висновки.

### 4.3. Дослідження автопілоту у разі дії на літак сигналів типу «білий шум» і стаціонарного випадкового збурювального впливу

- Відкрити нове вікно моделі.

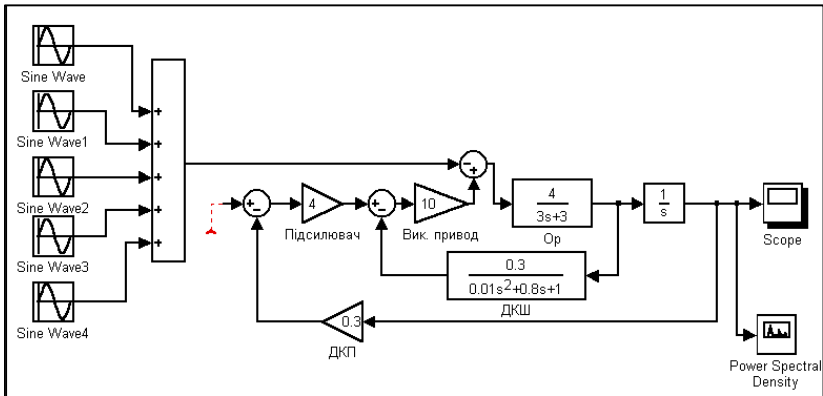
- Використовуючи блоки бібліотек **Simulink (Continuous – Безперервні системи, Sinks – Засоби реєстрації, Sources – Джерела сигналів, Math Operations – Математичні операції) і Simulink Extras** (блок **Additional sinks** – додаткові засоби реєстрації) у вікні побудувати модель автопілоту із вказаними параметрами у разі дії на літак збурю вального впливу типу «білий шум»



- Запустити процес моделювання вибором команди **Start** меню **Simulation** і визначити на екрані осцилографа зміну кутового відхилення літака у часі у разі впливу на нього випадкового збурення типу «білий шум»

лий шум», а на екрані спектрографа – спектральну щільність кутового відхилення літака.

- Зафіксувати отримані результати.
- Порівняти спектральні характеристики випадкових процесів на вході і виході автопілота. Провести аналіз отриманих матеріалів і зробити висновки.
- Повторити дослідження якщо на автопілот діятиме стаціонарний випадковий зовнішній вплив:



- Аналізувати отримані матеріали і зробити узагальнювальні висновки.

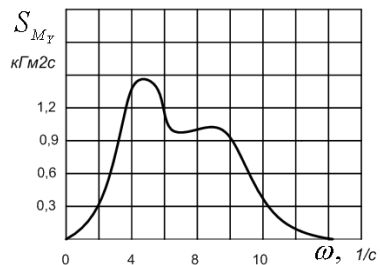
#### 4.4. Розрахунок динамічної точності автопілота

Вважатиме, що еквівалентна передатна функція автопілота за зовнішнім збуренням має вигляд

$$W(p) = \frac{\varphi_{o.k}}{M_{y\Sigma}} = \frac{0,3}{0,1s^2 + 0,1s + 1},$$

а спектральну щільність зовнішнього збурення  $M_{y\Sigma}$ , подано графічно.

Потрібно знайти спектральну щільність кутового відхилення літака від заданого напрямку



польоту графо-аналітичним методом і визначити за неї середнє квадратичне значення.

## **5. Зміст звіту**

У звіті з лабораторної роботи повинні бути представлені:

- мета і завдання до роботи;
- моделі досліджуваних процесів і систем та відповідні до них експериментальні характеристики;
- розрахункові характеристики;
- детальний аналіз отриманих результатів.

## **6. Контрольні питання**

1. Випадкові процеси: визначення, види, основні імовірнісні характеристики.

2. Кореляційна функція: визначення, математичний опис, обчислення на підставі експериментально отриманих реалізацій випадкового процесу.

3. Основні властивості спектральних щільностей.

4. Зв'язок спектральної щільності вихідного сигналу САК зі спектральною щільністю випадкового сигналу на її вході.

5. Порядок розрахунку спектральної щільності випадкового сигналу на виході САК у разі наявності спектральної щільності випадкового сигналу на її вході й АФЧХ системи.

## Лабораторна робота №8

### СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

#### 1. Мета

У ході виконання лабораторної роботи освоюються методи визначення стійкості систем автоматичного керування і експериментально досліджується стійкість за перехідними та частотними характеристиками.

#### 2. Рекомендації щодо підготовки до заняття

Повторити наступні теоретичні питання дисципліни:

- стійкість технічних систем;
- перехідні характеристики САК та їх аналіз;
- алгебраїчні критерії стійкості;
- частотні критерії стійкості Михайлова і Найквіста-Михайлова.

#### 3. Завдання до виконання досліджень

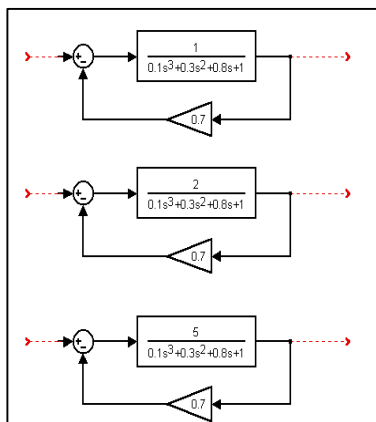
3.1. Дослідити стійкість систем автоматичного керування за виглядом їх перехідних характеристик.

3.2. Дослідити стійкість систем автоматичного керування за критерієм Найквіста-Михайлова з перевіркою результатів дослідження за виглядом перехідних функцій замкнутої системи.

#### 4. Порядок і методика виконання лабораторної роботи

##### 4.1. Дослідження стійкості за виглядом перехідних характеристик

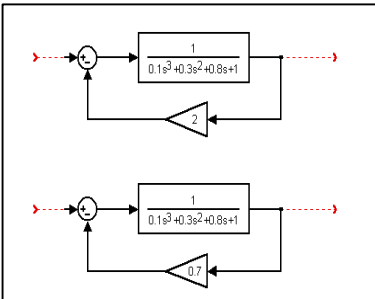
- Запустити систему **Simulink** з програми **MATLAB**.
- Відкрити нове вікно моделі.
- Відкрити список бібліотек блоків вікна **Simulink Library Browser** (Браузер головної бібліотеки Simulink).
- З бібліотек **Simulink** у вікно моделі з ім'ям **untitled** послідов-





но перемістити зображення необхідних блоків і побудувати структурні схеми досліджуваних систем.

- Використовуючи моделі засобів реєстрації і джерел сигналів, визначити перехідні характеристики систем.
- Зафіксувати результати експерименту.
- Проаналізувати отримані матеріали і зробити висновки щодо стійкості досліджуваних систем.



#### 4.2. Дослідження стійкості за критерієм Найквіста-Михайлова

- Відкрити нове вікно моделі.
- З бібліотек **Simulink** перемістити у вікно моделі зображення блоків і побудувати структурні схеми систем, які потрібно дослідити.
- Застосовуючи операцію лінійного аналізу, отримати амплітудно-фазові частотні характеристики досліджуваних систем у розімкненому стані.
- Зафіксувати отримані результати.
- Здійснити аналіз матеріалів і зробити висновки про стійкість систем у разі замикання у них контурів управління.
- Використовуючи моделі засобів реєстрації і джерел сигналів, визначити перехідні характеристики систем у замкнутому стані.
- Зафіксувати отримані результати.
- Порівняти результати досліджень за критерієм Найквіста-Михайлова і на основі аналізу перехідних характеристик.

#### 5. Зміст звіту

У звіті з лабораторної роботи повинні бути представлені:

- мета і завдання до роботи;
- моделі досліджуваних систем і відповідні ним експериментальні характеристики;
- детальний аналіз отриманих результатів.

## **6. Контрольні питання**

1. Визначення стійкості систем автоматичного керування за виглядом перехідних характеристик та корінь характеристичного рівняння.
2. Критерій стійкості Вишнеградського.
3. Визначення стійкості за критерієм Гурвица-Рауса
4. Критерій стійкості Михайлова: формулювання, графічна інтерпретація.
5. Частотні критерії стійкості систем: формулювання, області застосування.
6. Принципи побудови амплітудно-фазової частотної характеристики розімкненої системи у разі оцінки стійкості за критерієм Найквіста-Михайлова.

## Лабораторна робота №9

### ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

#### 1. Мета

У ході виконання лабораторної роботи освоюються методи визначення областей стійкості складних технічних систем у площині регульованих параметрів.

#### 2. Рекомендації щодо підготовки до заняття

Повторити наступні теоретичні питання дисципліни:

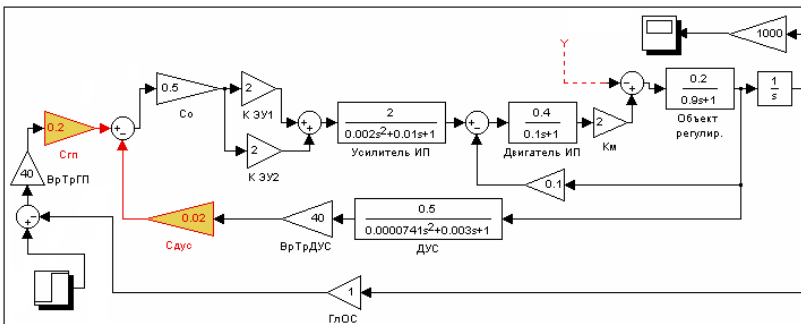
- частотні критерії стійкості Михайлова і Найквіста-Михайлова;
- запаси стійкості за модулем і фазою, методи їх визначення;
- області стійкості в просторі варійованих параметрів.

#### 3. Завдання до виконання досліджень

Експериментально визначити і побудувати область стійкості системи стабілізації в просторі регульованих параметрів  $c_{г.п} - c_{д.к.ш}$ .

#### 4. Порядок і методика виконання лабораторної роботи

- Відкрити нове вікно моделі.
- За допомогою блоків із бібліотек **Simulink** побудувати модель системи стабілізації із вказаними параметрами:



- Встановити значення потенціометрів  $c_{г.п} - c_{д.к.ш}$  нульовими.
- Установити показання потенціометра  $c_{г.п} = 0,1$ .
- Послідовно збільшувати сигнал потенціометра  $c_{д.к.ш}$  від 0 до 1 через 0,01 або 0,1 ділення, при цьому:  
для кожного проміжного значення визначати експериментально

перехідну характеристику системи; з вигляду перехідних характеристик потрібно зробити висновок щодо знаходження системи на межі стійкості.

*якщо робоча точка знаходиться на нижній межі області стійкості – в системі виникають низькочастотні коливання з великою амплітудою.*

*якщо робоча точка знаходиться на верхній межі області стійкості – в системі виникають високочастотні коливання з малою амплітудою.*

- Отримані дані  $c_{д.к.ш}$ , за яких система знаходиться на межі стійкості, занести до таблиці.

- До кожного зі значень потенціометра  $c_{г.п}$ , зазначених у таблиці, повторити експеримент, визначаючи точки нижньої і верхньої меж області стійкості.

	$c_{г.п}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Нижня границя	$c_{д.к.ш}$										
Верхня границя	$c_{д.к.ш}$										

- За результатами експерименту побудувати область стійкості системи стабілізації в параметрах  $c_{г.п} - c_{д.к.ш}$ .

- Відкласти в області стійкості точку, яка відповідає оптимальному регулюванню  $c_{г.п} = 0,8$ ;  $c_{д.к.ш} = 0,4$ .

- Визначити перехідну характеристику системи при її оптимальному регулюванню.

- Проаналізувати отримані матеріали і зробити загальні висновки.

## 5. Зміст звіту

У звіті з лабораторної роботи повинні бути представлені:

- мета і завдання до роботи;
- моделі досліджуваних систем і відповідні до них експериментальні характеристики;
- детальний аналіз отриманих результатів.

## 6. Контрольні питання

1. Частотні критерії стійкості систем автоматичного керування: формулювання, області застосування.

2. Принципи побудови області стійкості систем автоматичного керування.



1. . . . / . . . . - ∴ -  
 , 1956. - 539 .
2. . . . / . . . -  
 , . . . , . . . . - ∴ , 2003. - 270 .
3. . . . / . . . , . . . ,  
 . . . . - ∴ : . . . , 2008. - 443 .
4. . . . / . . . , . . . . - ∴ , 2004. - 752 .
5. . . . / . . . . - ∴  
 , 1999. - 576 .
6. . . . / . . . ,  
 . . . , . . . , . . . . - ∴  
 , 2004. - 911 .
7. . . . / . . . , . -  
 , . . . . - ∴  
 , 2002. - 832 .
8. . . . Simulink 5/6/7: / . . .  
 - ∴ - , 2008. - 784 .
9. . . . / . . . ,  
 . . . , . . . . - ∴ , 2002. - 686 .
10. . . . / . . . , . . . . - ∴  
 , 1970. 703 .
11. . . . : -  
 / . . . . - ∴ , 1978. - 736 .
12. . . . .1 / . . .  
 - ∴ , 2003. - 288 .
13. *Ja* . / . . . , . . . . -  
 . - ∴ , 1964. - 168 .

14. . . . /  
 . . . , 1949. – 430 .
15. .1/ . . . . – ∴ , 1977. – 366 .
16. / . . . ; . . . . – ∴ ,  
 1973. – 321 .
17. / . . . ; . . . . –  
 . – ∴ , 1973. – 396 .
18. . . . / . . . . – ∴  
 - , 2002. – 235 .
19. . . . ( –  
 )/ . . . . – ∴ - , 2005. – 392 .
20. . . . / . . . –  
 , . . . . – ∴ , 2002. – 303 .
21. . . . / . . . –  
 , . . . . – ∴ , 2007. – 654 .
22. . . . / . . . . – ∴ –  
 , 1960. – 884 .
23. . . . : ,  
 . . . . , . . . . . – ∴ - .1 /  
 . . . . , 2004. – 654 .
24. . . . / . . . . – ∴  
 - , 1952. – 368 .
25. : .1 –  
 / . . . . .  
 – ∴ , 1986. – 367 .
26. . / . –  
 , . . . . – ∴ , 2001. – 616 .
27. . . . / . . . –  
 . – ∴ , 1977. – 560 .

*Навчальне видання*

**Олександр Костянтинівич  
Аблесімов**

**ТЕОРІЯ  
АВТОМАТИЧНОГО  
КЕРУВАННЯ**

Навчальний посібник

Підписано до друку 20.03.2019

Формат 60×84/16. Папір офсетний.

Тираж 100 екз.

**Видавництво «Освіта України»,  
04136, м. Київ, вул. Маршала Гречко, 13, оф. 808**

Свідоцтво про внесення в Державний реєстр  
видавців ДК №1957 від 27.09.2004 р.

Тел./факс (095) 699-25-20, (098) 366-48-27

E-mail: [osvita2005@gmail.com](mailto:osvita2005@gmail.com)