Лабораторна робота № 2

Мета роботи: навчитися будувати нелінійну двофакторну економетричну модель методом МНК та виконувати економічний аналіз характеристик взаємозв’язку.

Приклад виконання лабораторної роботи

Завдання. За допомогою табличного редактора Microsoft Excel на основі статистичних даних (табл. 2.1) побудувати та дослідити економетричну модель парної нелінійної регресії.

Необхідно:

1. Виконати ідентифікацію змінних та привести кожну нелінійну модель (табл. 3.1) до лінійного виду.
2. Оцінити параметри моделей.
3. Перевірити адекватність та точність економетричних моделей, обрати найкращу та визначити точковий прогноз для заданого значення незалежної змінної.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані

№	**X**	**Y**
1	31	64
2	75	100
3	89	103
4	26	50
5	35	63
6	73	95
7	91	109
8	21	43
9	56	93
10	21	37
Прогнозне значення	67	

Розв’язання.

1. Ідентифікація змінних та приведення нелінійної моделі до лінійного виду.

Ідентифікуємо змінні економетричної моделі:

X − факторна (незалежна, екзогенна) змінна;

Y − результативна (залежна, ендогенна) змінна;

u − вектор залишків (стохастична складова).

Загальний вигляд моделі:

$$Y = f\left(X, u\right).$$

Як і в лабораторній роботі 1, за допомогою функції СЧЕТ (значення 1; значення2; …) визначимо обсяг вихідної сукупності. Застосувавши команду ***Сортировка*** з меню ***Данные*** розташуємо вихідні дані у порядку зростання значень незалежної змінної X (рис. 2.1).

	A	B	C	D
1	№	X	Y	
2	1	21	43	
3	2	21	37	
4	3	26	50	
5	4	31	64	
6	5	35	63	
7	6	56	93	
8	7	73	95	
9	8	75	100	
10	9	89	103	
11	10	91	109	
12				
13	*прогноз*	67		
14				
15	*n*		10	

Рисунок 2.1 – Відсортовані вихідні дані

Розглянемо специфікації економетричної моделі $Y = f(X, u)$, використавши таблицю 3.1 (табл. 2.2).

Таблиця 2.2 – Специфікація економетричної моделі

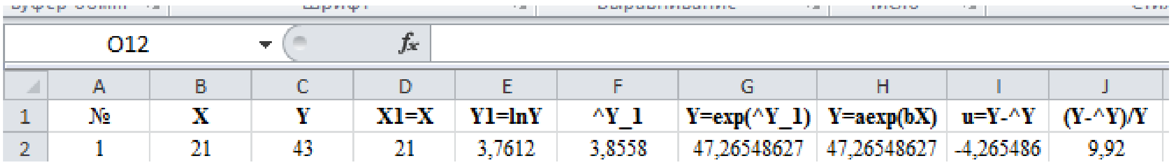
№	Вид моделі	Операція (якщо необхідно)	Заміна
1	$Y = ae^{bX}u$	логарифмування обох частин залежності за натуральною основою $\ln Y = \ln a + bX + \ln u$	$Y_1 = \ln Y$, $X_1 = X$, $a_0 = \ln a$, $a_1 = b$, $u_1 = \ln u$
2	$Y = aX^b u$	логарифмування обох частин залежності за натуральною основою $\ln Y = \ln a + b\ln X + \ln u$	$Y_1 = \ln Y$, $X_1 = \ln X$, $a_0 = \ln a$, $a_1 = b$, $u_1 = \ln u$
3	$\ln Y = a + \frac{b}{X} + u$	–	$Y_1 = \ln Y$, $X_1 = \frac{1}{X}$, $a_0 = a$, $a_1 = b$, $u_1 = u$
4	$Y = \frac{1}{a + bX + u}$	обертання залежності $\frac{1}{Y} = a + bX + u$	$Y_1 = \frac{1}{Y}$, $X_1 = X$, $a_0 = a$, $a_1 = b$,

			$u_1 = u$
5	$Y = \dfrac{X}{a + bX + uX}$	обертання залежності та почленне ділення $\dfrac{1}{Y} = \dfrac{a}{X} + b + u$	$Y_1 = \dfrac{1}{Y}$, $X_1 = \dfrac{1}{X}$, $a_0 = b$, $a_1 = a$, $u_1 = u$
6	$Y = \dfrac{1}{a + be^{-X} + u}$	обертання залежності $\dfrac{1}{Y} = a + be^{-X} + u$	$Y_1 = \dfrac{1}{Y}$, $X_1 = e^{-X}$, $a_0 = a$, $a_1 = b$, $u_1 = u$
7	$Y = a + bX^2 + u$	–	$Y_1 = Y$, $X_1 = X^2$, $a_0 = a$, $a_1 = b$, $u_1 = u$
8	$Y = a + b\ln X + u$	–	$Y_1 = Y$, $X_1 = \ln X$, $a_0 = a$, $a_1 = b$, $u_1 = u$
9	$Y = a + b\sqrt{X} + u$	–	$Y_1 = Y$, $X_1 = \sqrt{X}$, $a_0 = a$, $a_1 = b$, $u_1 = u$
10	$Y = a + b\sqrt[3]{X} + u$	–	$Y_1 = Y$, $X_1 = \sqrt[3]{X}$, $a_0 = a$, $a_1 = b$, $u_1 = u$

Відповідно, будемо мати $Y_1 = a_0 + a_1 X_1 + u_1$, $\widehat{Y}_1 = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 X_1$.

2. Оцінити параметри моделей.

Для оцінки параметрів моделей застосуємо функцію ЛИНЕЙН(Y;X;1;1) для кожного з випадків. Для цього в розрахункову таблицю треба додати відповідні стовпчики X_1, Y_1, $\widehat{Y}_1$, $u = Y - \widehat{Y}$, $\dfrac{|u|}{Y} \cdot 100\%$, а також значення залежних змінних моделі у вигляді оберненої заміни та за допомогою знайдених параметрів (рис. 2.2). Для зручності кожну модель треба розмістити в окремих книгах, за назви яких можна взяти їх номери з таблиці 2.2.



O12

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	№	X	Y	X1=X	Y1=lnY	^Y_1	Y=exp(^Y_1)	Y=aexp(bX)	u=Y-^Y	(Y-^Y)/Y
2	1	21	43	21	3,7612	3,8558	47,26548627	47,26548627	-4,265486	9,92

Рисунок 2.2 – Розрахункова таблиця зі значеннями замінених змінних на прикладі функції 1 з таблиці 2.2

Виділивши область розміром 5 рядків і 2 стовпці відповідно під кожною з десяти функцій (табл. 2.2), застосуємо до кожної з них функцію ЛИНЕЙН(Y;X;1;1) і заповнимо таблицю 2.3.

Таблиця 2.3 – Результати застосування функції ЛИНЕЙН

для функцій 1 і 4				
$\widehat{a}_1$	$\widehat{a}_0$		0,0131	3,5799
$S_{\widehat{a}_1}$	$S_{\widehat{a}_0}$		0,0018	0,1026
R^2	σ_u		0,8746	0,1493
F	$k = n - m$		55,7939	8
$SSR = \sum_{i=1}^{n} \left(\widehat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$	$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(\widehat{Y}_i - Y_i\right)^2$		1,2431	0,1782
для функції 2				
$\widehat{a}_1$	$\widehat{a}_0$		0,6536	1,7788
$S_{\widehat{a}_1}$	$S_{\widehat{a}_0}$		0,0519	0,1993
R^2	σ_u		0,9519	0,0924
F	$k = n - m$		158,4839	8
$SSR = \sum_{i=1}^{n} \left(\widehat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$	$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(\widehat{Y}_i - Y_i\right)^2$		1,3531	0,0683
для функції 3				
$\widehat{a}_1$	$\widehat{a}_0$		-26,7258	4,9597
$S_{\widehat{a}_1}$	$S_{\widehat{a}_0}$		1,2277	0,0364
R^2	σ_u		0,9834	0,0543
F	$k = n - m$		473,9131	8

$SSR=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-\overline{Y}\right)^2$	$SSE=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-Y_i\right)^2$	1,3978	0,0236
для функції 5			
$\widehat{a}_1$	$\widehat{a}_0$	0,4217	0,0042
$S_{\widehat{a}_1}$	$S_{\widehat{a}_0}$	0,0316	0,0009
R^2	σ_u	0,9570	0,0014
F	$k=n-m$	178,0092	8
$SSR=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-\overline{Y}\right)^2$	$SSE=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-Y_i\right)^2$	0,00035	0,000016
для функції 6			
$\widehat{a}_1$	$\widehat{a}_0$	16452229,3153	0,0126908
$S_{\widehat{a}_1}$	$S_{\widehat{a}_0}$	3956104,239	0,0013415
R^2	σ_u	0,683728721	0,0037912
F	$k=n-m$	17,29474073	8
$SSR=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-\overline{Y}\right)^2$	$SSE=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-Y_i\right)^2$	0,00025	0,00011
для функції 7			
$\widehat{a}_1$	$\widehat{a}_0$	0,0080	48,4250
$S_{\widehat{a}_1}$	$S_{\widehat{a}_0}$	0,0012	5,2383
R^2	σ_u	0,8568	10,9054
F	$k=n-m$	47,8495	8
$SSR=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-\overline{Y}\right)^2$	$SSE=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-Y_i\right)^2$	5690,6712	951,4288
для функції 8			
$\widehat{a}_1$	$\widehat{a}_0$	45,3563	-96,5146
$S_{\widehat{a}_1}$	$S_{\widehat{a}_0}$	2,2284	8,5536
R^2	σ_u	0,9811	3,9661
F	$k=n-m$	414,2668	8
$SSR=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-\overline{Y}\right)^2$	$SSE=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-Y_i\right)^2$	6516,2630	125,8370
для функції 9			
$\widehat{a}_1$	$\widehat{a}_0$	13,2865	-16,5200
$S_{\widehat{a}_1}$	$S_{\widehat{a}_0}$	0,9187	6,6124
R^2	σ_u	0,9632	5,5307
F	$k=n-m$	209,1391	8

$SSR=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2$	$SSE=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-Y_i\right)^2$	6397,3869	244,7131
для функції 10			
$\widehat{a}_1$	$\widehat{a}_0$	38,0146	-61,4486
$S_{\widehat{a}_1}$	$S_{\widehat{a}_0}$	2,3422	8,5939
R^2	σ_u	0,9705	4,9469
F	$k=n-m$	263,4135	8
$SSR=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2$	$SSE=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{Y}_i-Y_i\right)^2$	6446,3220	195,7780

3. Перевірити адекватність та точність економетричних моделей, обрати найкращу та визначити точковий прогноз для заданого значення незалежної змінної.

Перевірку точності та адекватності економетричної моделі визначимо відповідно за допомогою середньої відносної похибки апроксимації та критерію Фішера.

За допомогою знайдених значень параметрів заповнюємо розрахункову таблицю і обчислюємо середню відносну похибку апроксимації $\bar{\varepsilon}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i-\widehat{y}_i}{y_i}\right|\cdot 100\%$ (рис. 2.3).

O12 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	№	X	Y	X1=X	Y1=lnY	^Y_1	Y=exp(^Y_1)	Y=aexp(bX)	u=Y-^Y	(Y-^Y)/Y
2	1	21	43	21	3,7612	3,8558	47,26548627	47,26548627	-4,265486	9,92
3	2	21	37	21	3,6109	3,8558	47,26548627	47,26548627	-10,26549	27,74
4	3	26	50	26	3,9120	3,9215	50,47425724	50,47425724	-0,474257	0,95
5	4	31	64	31	4,1589	3,9871	53,90086606	53,90086606	10,09913	15,78
6	5	35	63	35	4,1431	4,0397	56,80890111	56,80890111	6,191099	9,83
7	6	56	93	56	4,5326	4,3156	74,85568275	74,85568275	18,14432	19,51
8	7	73	95	73	4,5539	4,5389	93,58635183	93,58635183	1,413648	1,49
9	8	75	100	75	4,6052	4,5652	96,07775368	96,07775368	3,922246	3,92
10	9	89	103	89	4,6347	4,7491	115,4768953	115,4768953	-12,4769	12,11
11	10	91	109	91	4,6913	4,7753	118,5510545	118,5510545	-9,551055	8,76
12										
13	*прогноз*	67		0,01314	3,57991					**110,02**
14	*сума*	518	757	0,00176	0,10260				відн похиб	11,00
15	*n*		10	0,87460	0,14927					
16				55,79391	8	a=exp(a_0)	35,87036063			
17				1,24313	0,17825	b=a_1	0,01314			

Рисунок 2.3 – Розрахункова таблиця зі значеннями замінених змінних на прикладі функції 1 з таблиці 2.2

Для обчислення середньої відносної похибки апроксимації для кожної моделі треба знайти суму значень $\frac{|u|}{Y} \cdot 100\%$ і помножити її на $\frac{1}{n}$ (рис. 2.3).

Використовуючи таблицю 2.3, а саме число, записане в четвертому рядку і першому стовпці, визначимо фактичне значення F–критерію. Табличне значення для заданого рівня значущості $\alpha = 0,05$ та числа ступенів свободи $k_1 = m - 1 = 1$ і $k_2 = n - 2 = 8$ знайдемо використавши функцію редактора Excel:

$$F_{\text{табл}} = \text{F.ОБР.ПХ}(\alpha; k_1; k_2) = 5,31766 .$$

Порівнюємо фактичне і табличне значення критерію і робимо висновок про адекватність моделі (рис. 2.4).

N14

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	№	X	Y	X1=X	Y1=lnY	^Y_1	Y=exp(^Y_1)	Y=aexp(bX)	u=Y-^Y	(Y-^Y)/Y		
2	1	21	43	21	3,7612	3,8558	47,26548627	47,26548627	-4,265486	9,92		
3	2	21	37	21	3,6109	3,8558	47,26548627	47,26548627	-10,26549	27,74		
4	3	26	50	26	3,9120	3,9215	50,47425724	50,47425724	-0,474257	0,95	*k_1*	1
5	4	31	64	31	4,1589	3,9871	53,90086606	53,90086606	10,09913	15,78	*k_2*	8
6	5	35	63	35	4,1431	4,0397	56,80890111	56,80890111	6,191099	9,83	*alfa*	0,05
7	6	56	93	56	4,5326	4,3156	74,85568275	74,85568275	18,14432	19,51		
8	7	73	95	73	4,5539	4,5389	93,58635183	93,58635183	1,413648	1,49	*F_факт*	55,79391
9	8	75	100	75	4,6052	4,5652	96,07775368	96,07775368	3,922246	3,92	*F_табл*	5,31766
10	9	89	103	89	4,6347	4,7491	115,4768953	115,4768953	-12,4769	12,11		
11	10	91	109	91	4,6913	4,7753	118,5510545	118,5510545	-9,551055	8,76		адекватна
12												
13	*прогноз*	67		0,01314	3,57991					**110,02**		
14	*сума*	518	757	0,00176	0,10260				відн похиб	11,00		
15	*n*		10	0,87460	0,14927							
16				55,79391	8	a=exp(a_0)	35,87036063					
17				1,24313	0,17825	b=a_1	0,01314					
18												

Рисунок 2.4 – Розрахункова таблиця зі значеннями замінених змінних на прикладі функції 1 з таблиці 2.2

Для вибору найкращої моделі занесемо в таблицю значення відносних похибок апроксимації всіх моделей (табл. 2.4) і порівняємо їх.

Таблиця 2.4 – Значення відносних похибок апроксимації всіх моделей

№ моделі	Значення відносної похибки апроксимації	рівень прогнозу	вибір
1	11,00	10-20%, досить добра якість	
2	6,16	менше як 10%, висока якість	
3	4,26	менше як 10%, висока якість	найкраща
4	15,45	10-20%, досить добра якість	
5	6,11	менше як 10%, висока якість	
6	22,45	21-50%, задовільна якість	

7	13,42	10-20%, досить добра якість	
8	4,46	менше як 10%, висока якість	
9	5,84	менше як 10%, висока якість	
10	4,93	менше як 10%, висока якість	

Оскільки, згідно табл. 2.4, найкращою моделлю є модель №3, то обчислимо прогнозне значення:

$$\ln Y = a + \frac{b}{X} \Rightarrow Y_{\text{прогн}} = e^{a+\frac{b}{X}} = e^{4,9597+\frac{-26,72579}{67}} = 95,6559534.$$