

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6

Розрахунок надійності системи з поелементним резервуванням.

Теоретичні відомості

При поелементному резервуванні резервуються окремо елементи системи (рис.6.1).

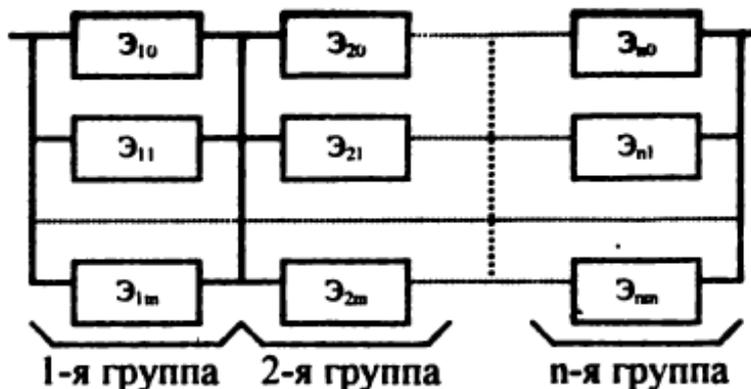


Рисунок 6.1

Імовірність відмови i -ої групи:

$$q_i(t) = \prod_{j=0}^m q_{ij}(t); \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.1)$$

де $q_{ij}(t)$ - можливість відмови елемента E_{ij} на інтервалі часу $(0, t)$.

Імовірність безвідмовної роботи j -ої групи

$$P_i(t) = 1 - q_i(t) = 1 - \prod_{j=0}^m [1 - p_{ij}(t)]; \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.2)$$

де $P_{ij}(t)$ - можливість безвідмовної роботи елемента E_{ij} на інтервалі часу $(0, t)$;
 m_i - кратність резервування елемента j -ої групи.

Імовірність безвідмовної роботи системи з поелементним резервуванням

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t)$$

или

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \prod_{j=0}^m [1 - p_{ij}(t)] \right\}. \quad (6.3)$$

Для рівнонадійних елементів системи та $m_i = m = \text{const}$ маємо

$$P_{ij}(t) = P(t); \quad (6.4)$$

$$P_c(t) = [1 - [1 - P(t)]^{m+1}]^n. \quad (6.5)$$

Якщо

$$P_{ij}(t)=P_i(t), \quad (6.6)$$

то формула (6.3) набуде вигляду

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - [1 - p_i(t)]^{m_i+1} \right\} \quad (6.7)$$

При експонентному законі надійності, коли $P_i(t)=e^{-\lambda_i t}$,

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - [1 - e^{-\lambda_i t}]^{m_i+1} \right\}. \quad (6.8)$$

У цьому випадку формула (6.5) набуде вигляду

$$P_c(t) = \left\{ 1 - [1 - e^{-\lambda t}]^{m+1} \right\}^n, \quad (6.9)$$

а середній час безвідмовної роботи системи визначається співвідношенням

$$m_{uc} = \int_0^{\infty} p_c(t) dt. \quad (6.10)$$

Підставляючи (6.9) в (6.10), отримаємо

$$m_{uc} = \frac{(n-1)!}{\lambda(m+1)} \sum_{j=0}^m \frac{1}{v_j(v_j+1) \dots (v_j+n-1)}, \quad (6.11)$$

$$v_j = (j+1)/(m+1).$$

Розв'язання типових завдань

Завдання 6.1. Для підвищення надійності підсилювача всі його елементи дубльовані. Передбачається, що справедливим є експоненційний закон надійності для елементів системи. Потрібно визначити можливість безвідмовної роботи підсилювача протягом $t = 5000$ год. Склад елементів нерезервованого підсилювача та дані щодо інтенсивності відмов елементів наведені у табл.6.1.

Таблиця 6.1.

Елементи	Кількість елементів	Інтенсивність відмов елементів λ , 10^{-5} 1/год
Транзистори	1	2,16
Резистори	5	0,23
Конденсатори	3	0,32

Діоди	1	0,78
Котушки індуктивності	1	0,09

Рішення. У цьому випадку має місце роздільне резервування з кратністю $m_i = m = 1$, число елементів нерезервованого підсилювача $n = 11$. Тоді, використовуючи дані табл.6.1., на підставі формули (6.8) отримаємо

$$P_c(5000) = \prod_{i=1}^{11} \left\{ 1 - \left[e^{-\lambda_i \cdot 5000} \right]^2 \right\}.$$

Так як $\lambda_i \ll 1$, то для наближеного обчислення показову функцію можна розкласти в ряд і обмежитися першими двома членами розкладання:

$$1 - \exp(-5000\lambda_i) \approx 5000\lambda_i.$$

Тоді

$$\begin{aligned} P_c(5000) &\approx \prod_{i=1}^{11} \left[1 - (5000\lambda_i)^2 \right] \approx 1 - \sum_{i=1}^{11} (5000\lambda_i)^2 = 1 - 5000^2 \cdot \sum_{i=1}^{11} \lambda_i^2 = \\ &= 1 - 25 \cdot 10^{-6} [2,16^2 + 5 \cdot 0,23^2 + 3 \cdot 0,32^2 + 0,78^2 + 0,09^2] \cdot 10^{-10} \approx 0,985. \end{aligned}$$

Завдання 6.2. Схему розрахунку надійності резервованого пристрою наведено на рис.6.2. Інтенсивності відмов елементів мають такі значення: $\lambda_1 = 0,23 \cdot 10^{-3}$ 1/час; $\lambda_2 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ 1/час; $\lambda_3 = 0,4 \cdot 10^{-3}$ 1/год.

Передбачається, що справедливим є експоненційний закон надійності для елементів системи. Необхідно знайти середній час безвідмовної роботи пристрою, можливість безвідмовної роботи пристрою, інтенсивність відмов пристрою.

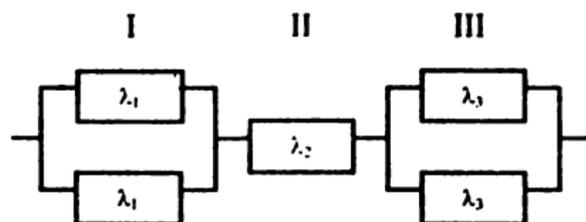


Рисунок 6.2

Рішення.

$$m_{\text{в}} = \int_0^{\infty} P_c(t) dt. \tag{6.12}$$

де $P_c(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи пристрою. Очевидно

$$P_c(t) = P_I(t) * P_{II}(t) * P_{III}(t), \quad (6.)$$

13)

де $P_I(t)$, $P_{II}(t)$, $P_{III}(t)$ - ймовірність безвідмовної роботи I, II та III групи елементів.

Маємо

$$P_I(t) = 1 - q_I(t); \quad q_I(t) = [1 - P_1(t)]^2;$$

$$P_I(t) = 1 - [1 - P_1(t)]^2 = 2P_1(t) - P_1^2(t);$$

$$P_{II}(t) = P_2(t);$$

$$P_{III}(t) = 1 - q_{III}(t); \quad q_{III}(t) = [1 - P_3(t)]^2;$$

$$P_{III}(t) = 1 - [1 - P_3(t)]^2 = 2P_3(t) - P_3^2(t).$$

Из (16.13) имеем

$$P_c(t) = [2P_1(t) - P_1^2(t)]P_2(t) [2P_3(t) - P_3^2(t)] =$$

$$= 4P_1(t)P_2(t)P_3(t) - 2P_1^2(t)P_2(t)P_3(t) - 2P_1(t)P_2(t)P_3^2(t) + P_1^2(t)P_2(t)P_3^2(t).$$

Так як

$$P_1(t) = e^{-\lambda_1 t}, \quad P_2(t) = e^{-\lambda_2 t}, \quad P_3(t) = e^{-\lambda_3 t}$$

$$P_c(t) =$$

$$= 4e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} - 2e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} - 2e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3)t} + e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)t}$$

Або

$$P_c(t) = 4e^{-0,68 * 0,001 * t} - 2e^{-0,91 * 0,001 * t} - 2e^{-1,08 * 0,001 * t} + e^{-1,31 * 0,001 * t}. \quad (6.14)$$

Підставляючи (6.14) у (6.12), отримаємо

$$m_k = \frac{4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} - \frac{2}{2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} - \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3} + \frac{1}{2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3}$$

Або

$$m_k = \frac{4}{10^{-3}(0,23 + 0,05 + 0,4)} - \frac{2}{10^{-3}(0,46 + 0,05 + 0,4)} - \frac{2}{10^{-3}(0,23 + 0,05 + 0,8)} + \frac{1}{10^{-3}(0,46 + 0,05 + 0,8)} \approx 2590 \text{ ч.}$$

Відомо, що

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P(t)}.$$

(6.15)

Визначимо

$$f_c(t) = -\frac{dp_c(t)}{dt} = 4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} - 2(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t} - 2(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)t} + (2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)t} \quad (6.16)$$

або

$$f_c(t) = 10^{-3}(2,72e^{-0,68 \cdot 10^{-3}t} - 1,82e^{-0,91 \cdot 10^{-3}t} - 2,16e^{-1,08 \cdot 10^{-3}t} + 1,31e^{-1,31 \cdot 10^{-3}t}).$$

Із (6.16) отримаємо

$$\lambda_c(t) = \frac{10^{-3}(2,72e^{-0,68 \cdot 10^{-3}t} - 1,82e^{-0,91 \cdot 10^{-3}t} - 2,16e^{-1,08 \cdot 10^{-3}t} + 1,31e^{-1,31 \cdot 10^{-3}t})}{4e^{-0,68 \cdot 10^{-3}t} - 2e^{-0,91 \cdot 10^{-3}t} - 2e^{-1,08 \cdot 10^{-3}t} + e^{-1,31 \cdot 10^{-3}t}}.$$

Завдання 6.3. Схему розрахунку надійності пристрою наведено на рис. 6.3. Передбачається, що справедливий експоненційний закон надійності для елементів пристрою і всі елементи пристрою рівнонадійні. Інтенсивність відмов елемента $\lambda = 1,33 \cdot 10^{-3}$ 1/год. Потрібно визначити $f_c(t)$, m_{tc} , $P_c(t)$, $\lambda_c(t)$ резервованого пристрою.

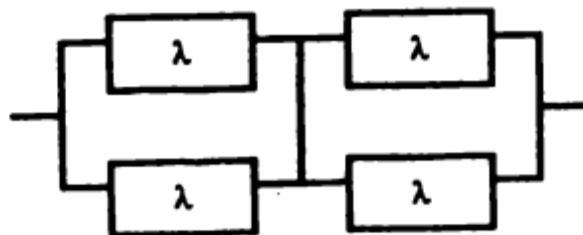


Рисунок 6.3

Рішення

$$m_{tc} = \int_0^{\infty} p_c(t) dt; \quad (6.17)$$

$$P_c(t) = P_I(t) * P_{II}(t) = P_I^2(t), \text{ т.к. } P_I(t) = P_{II}(t);$$

$$P_I(t) = 1 - q_I(t); \quad q_I(t) = q^2(t); \quad q(t) = 1 - P(t); \quad P(t) = e^{-\lambda t};$$

$$q(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad q_I(t) = (1 - e^{-\lambda t})^2; \quad P_I(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2;$$

$$P_c(t) = [1 - (1 - e^{-\lambda t})^2]^2$$

або

$$P_c(t) = (1 - 1 + 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t})^2 = 4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t}. \quad (6.18)$$

Підставляючи (6.18) у (6.17), отримаємо

$$m_{ic} = \int_0^{\infty} (4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t}) dt = \frac{2}{\lambda} - \frac{4}{3\lambda} + \frac{1}{4\lambda} = \frac{11}{12\lambda};$$

$$m_{ic} = \frac{11}{12 \cdot 1.33 \cdot 10^{-3}} = 690 \text{ ч.}$$

Визначимо $f_c(t)$,

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = 8\lambda e^{-2\lambda t} - 12\lambda e^{-3\lambda t} + 4\lambda e^{-4\lambda t} = 4\lambda e^{-2\lambda t} (2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}).$$

Имеет

$$\begin{aligned} \lambda_c(t) &= \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{4\lambda \cdot e^{-2\lambda t} (2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t})}{e^{-2\lambda t} (4 - 4e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t})} = \\ &= \frac{4\lambda \cdot (2 - 3e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t})}{(2 - e^{-\lambda t})^2} = \frac{4\lambda \cdot (1 - e^{-\lambda t}) \cdot (2 - e^{-\lambda t})}{(2 - e^{-\lambda t})^2} = \frac{4\lambda \cdot (1 - e^{-\lambda t})}{2 - e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

Завдання 6.4. Нерезервована система управління складається із $n=5000$ елементів. Для підвищення надійності системи передбачається провести роздільне дублювання елементів. Щоб приблизно оцінити можливість досягнення заданої ймовірності безвідмовної роботи системи $P_c(t) = 0,9$ при $t = 10$ год, необхідно розрахувати середню інтенсивність відмов одного елемента при припущенні відсутності післядії відмов.

Рішення. Ймовірність безвідмовної роботи системи при роздільному дублюванні та рівнонадійних елементах дорівнює:

$$P_c(t) = \left\{ 1 - [1 - p(t)]^2 \right\}^n$$

де $P(t)$ - можливість безвідмовної роботи одного елемента.

Так як має бути

$$\left\{ 1 - [1 - p(t)]^2 \right\}^n \geq 0,9,$$

то

$$p(t) \geq 1 - \sqrt{1 - \sqrt[n]{0,9}}$$

Розклавши $\sqrt[n]{0,9} = (1 - 0,1)^{1/n}$ за ступенем $1/n$ у ряд і нехтуючи членами ряду вищого порядку малості, отримаємо

$$(1 - 0,1)^{1/5000} \approx 1 - \frac{1}{5000} \cdot 0,1 = 1 - 2 \cdot 10^{-5}$$

Враховуючи, що $P(t) = \exp(-\lambda t) \approx 1 - \lambda t$, інтенсивність відмов елемента має бути

$$\lambda \leq \frac{1}{t} \sqrt{1 - \sqrt{0,9}} = \frac{1}{10} \sqrt{1 - 1 + 2 \cdot 10^{-5}} \approx 4,4 \cdot 10^{-4} \quad 1/\text{год}$$

Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 6.5. Схема розрахунку надійності пристрою показано на рис.б.4. Передбачається, що справедливим є експоненційний закон надійності для елементів пристрою. Інтенсивність відмов елементів має наступні значення $\lambda_1 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ 1/год, $\lambda_2 = 0,7 \cdot 10^{-3}$ 1/год.

Необхідно визначити можливість безвідмовної роботи пристрою протягом часу $t = 100$ год.

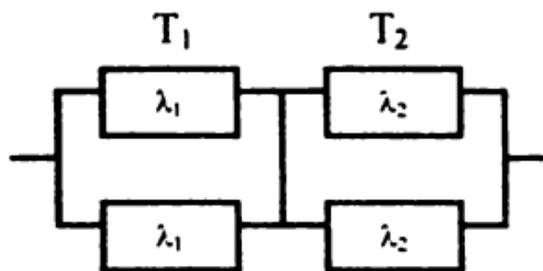


Рисунок 6.4

Завдання 6.6. Схема розрахунку надійності пристрою показано на рис.б.5. Передбачається, що справедливим є експоненційний закон надійності для елементів пристрою. Визначити інтенсивність відмов виробу, якщо інтенсивності відмов елементів має наступні значення $\lambda_1 = 0,23 \cdot 10^{-3}$ 1/год, $\lambda_2 = 0,17 \cdot 10^{-3}$ 1/год.

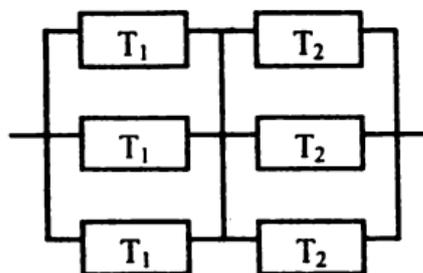


Рисунок 6.5

Завдання 6.7. У телевізійному каналі зв'язку, що складається з приймача та передавача, застосовано роздільне дублювання передавача та приймача. Передавач і приймач мають інтенсивність відмов $\lambda_{п} = 2 \cdot 10^{-3}$ 1/год та $\lambda_{пр} = 1 \cdot 10^{-3}$ 1/год відповідно. Схема каналу представлена на рис.6.6. Потрібно визначити можливість безвідмовної роботи каналу $P_c(t)$, середній час безвідмовної роботи $m_{тс}$, частоту відмов $f_c(t)$, інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$.

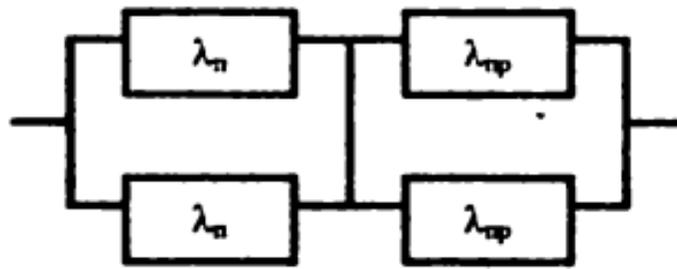


Рисунок 6.6

Завдання 6.8. Схема розрахунку надійності системи наведена на рис.6.7, де також наведені інтенсивності відмов елементів. Потрібно визначити можливість безвідмовної роботи системи $P_c(t)$ і частоту відмов $f_c(t)$.

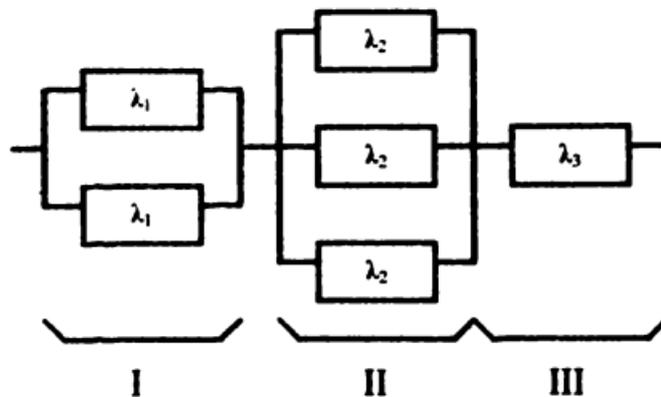


Рисунок 6.7

Завдання 6.9. Радіоелектронна апаратура складається з трьох блоків: I, II і III. Інтенсивності відмов для цих трьох блоків відповідно дорівнюють: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Потрібно визначити можливість безвідмовної роботи апаратури $P_c(t)$ для наступних випадків:

- резерв відсутній
- є дублювання кожного блоку.

Завдання 6.10. Нерезервована система управління складається з $n = 4000$ елементів. Відома необхідна можливість безвідмовної роботи системи $P_c(t) = 0,9$ при $t = 100$ год. Необхідно розрахувати допустиму середню інтенсивність відмов одного елемента, вважаючи елементи рівнонадійними, щоб приблизно оцінити досягнення заданої ймовірності безвідмовної роботи за відсутності профілактичних оглядів у випадках:

- резервування відсутнє;
- застосовано роздільне (поелементне) дублювання.

Завдання 6.11. У радіопередавачі, що складається з трьох рівнонадійних каскадів ($n=3$), застосовано роздільне дублювання кожного каскаду.

Інтенсивність відмов каскадів дорівнює $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ 1/год. Розрахувати можливість безвідмовної роботи $P_c(t)$ протягом часу $t = 100$ год і середній час безвідмовної роботи $m_{тс}$ радіопередавача.

Завдання 6.12. Обчислювач складається з двох блоків, з'єднаних послідовно і характеризується відповідно інтенсивностями відмов $\lambda_1 = 120,54 \cdot 10^{-6}$ 1/год, $\lambda_2 = 185,66 \cdot 10^{-6}$ 1/год.

Виконано пасивне поелементне резервування з постійним навантаженням блоку 2 (див. рис. 6.8). Потрібно визначити ймовірність безвідмовної роботи $P_c(t)$ обчислювача, середній час безвідмовної роботи $m_{тс}$, частоту відмов $f_c(t)$ та інтенсивність відмов $\lambda_c(t)$ обчислювача. Визначити $P_c(t)$ при $t = 20$ год.

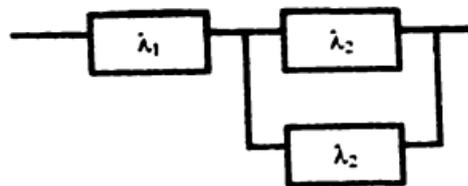


Рисунок 6.8

Завдання 6.13. Обчислювальний пристрій складається з $n = 3$ однакових блоків, до кожного з яких підключено блок у навантаженому резерві. Інтенсивність відмов кожного блоку дорівнює $\lambda = 10^{-4}$ 1/год. Потрібно визначити можливість безвідмовної роботи $P_c(t)$ пристрою і середній час безвідмовної роботи пристрою $m_{тс}$.