

## **Система аналітичних обчислень МАХІМА та її використання у наукових дослідженнях**

Вступ.....	8
1. Виникнення та розвиток систем комп'ютерної математики.....	10
2. Основи Махіма.....	22
3. Завдання вищої математики з Махіма.....	62
4. Чисельні методи та програмування з Махіма.....	166
5. Обрамлення Махіма.....	189
6. Моделювання з Махіма.....	207
7. Вирішення фізичних та математичних завдань з Махіма.....	247
8. Реалізація деяких чисельних методів.....	259
9. Довідковий матеріал.....	293
Література.....	307

# Зміст

<b>Вступ .....</b>	<b>8</b>
<b>1. Виникнення та розвиток систем комп'ютерної математики .....</b>	<b>10</b>
1.1 Визначення систем комп'ютерної алгебри .....	10
1.1.1 Недоліки чисельних розрахунків.....	11
1.1.2 Відмінності символічних обчислень від чисельних .....	12
1.2 Класифікація, структура та можливості систем комп'ютерної математики .....	13
1.2.1 Класифікація систем комп'ютерної математики .....	13
1.2.2 Завдання систем комп'ютерної алгебри .....	14
1.2.3 Місце комп'ютерної алгебри в інформатиці.....	15
1.2.4 Взаємозв'язок систем комп'ютерної алгебри та традиційних математичних дисциплін .....	15
1.2.5 Можливості підвищення ефективності вирішення математичних та обчислювальних завдань .....	16
1.3 Комерційні та вільно розповсюджені системи комп'ютерної математики .....	17
<b>2. Основи Maxima .....</b>	<b>22</b>
2.1 Структура Maxima .....	22
2.1.1 Області математики, що підтримуються в Maxima .....	22
2.2 Переваги програми .....	22
2.3 Встановлення та запуск програми.....	23
2.4 Інтерфейс wxMaxima .....	23
2.5 Введення найпростіших команд Maxima .....	24
2.5.1 Позначення команд та результатів обчислень .....	24
2.6 Числа, оператори та константи.....	25
2.6.1 Введення цифрової інформації .....	25
2.6.2 Арифметичні операції.....	25
2.6.3 Константи .....	26
2.7 Типи даних, змінні та функції .....	27
2.7.1 Списки .....	27
2.7.1.1 Функції для елементарних операцій зі списками.....	28
2.7.1.2 Функції, що оперують із елементами списків.....	30
2.7.2 Масиви .....	31
2.7.3 Матриці та найпростіші операції з ними .....	34
2.7.4 Математичні функції.....	39
2.7.5 Обчислення та перетворення аналітичних виразів.....	40
2.7.6 Перетворення раціональних виразів.....	44
2.7.7 Перетворення тригонометричних виразів .....	47
2.7.8 Перетворення статечних та логарифмічних виразів.....	48
2.7.9 Користувальницькі функції.....	49
2.8 Розв'язання задач елементарної математики.....	50
2.8.1 Знаходження коренів рівнянь та систем рівнянь алгебри.....	50

2.9 Побудова графіків та поверхонь .....	51
2.9.1 Побудова графіка явної функції $y = f(x)$ .....	52
2.9.2 Побудова графіків функцій, заданих параметрично.....	52
2.9.3 Побудова кривих у полярній системі координат .....	56
2.9.4 Побудова тривимірних графіків .....	58
<b>3. Завдання вищої математики з Maxima .....</b>	<b>62</b>
3.1 Операції з комплексними числами .....	62
3.1.1 Подання комплексних чисел .....	62
3.1.2 Функції до роботи з комплексними числами .....	63
3.2 Завдання лінійної алгебри.....	65
3.2.1 Найпростіші операції із матрицями.....	65
3.2.2 Звернення матриць та обчислення визначників.....	66
3.2.3 Характеристичний поліном, власні числа та власні вектори матриці. ....	67
3.2.4 Ортогоналізація .....	68
3.2.5 Перетворення матриці на трикутну форму.....	68
3.2.6 Обчислення рангу та мінорів матриці.....	69
3.2.7 Розв'язання матричних рівнянь.....	69
3.2.8 Спеціальні функції для вирішення систем лінійних та поліноміальних рівнянь .....	71
3.3 Класифікація та основні властивості функцій .....	74
3.3.1 Основні властивості функцій .....	75
3.3.2 Межа функції та її властивості .....	76
3.3.2.1 Межа функції у нескінченності .....	76
3.3.2.2 Межа функції у точці .....	76
3.3.2.3. Односторонні межі. ....	76
3.3.2.4 Теорема про межі .....	76
3.3.2.5 Обчислення меж різних класів функцій.....	77
3.3.2.6 Межа та безперервність функції.....	78
3.3.2.7 Межі раціональних дробів.....	78
3.3.2.8 Межі, що містять ірраціональні вирази .....	79
3.3.2.9 Межі тригонометричних виразів .....	79
3.3.2.10 Межі експоненційних виразів.....	80
3.3.2.11 Нескінченно малі та нескінченно великі функції .....	81
3.3.2.12 Еквівалентні нескінченно малі. Їх застосування до обчислення меж. .....	82
3.3.2.13 Нескінченно великі функції. Зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими величинами. ....	83
3.3.3 Безперервні функції.....	84
3.3.3.1 Безперервність функції у точці .....	84
3.3.3.2 Властивості безперервних функцій.....	86
3.3.3.3 Точки розриву функцій та їх класифікація.....	87
3.3.4 Диференціювання за допомогою пакета Maxima .....	88
3.3.4.1 Обчислення похідних та диференціалів.....	89
3.4 Екстремуми функцій.....	90

3.4.1 Знаходження максимумів та мінімумів.....	90
3.4.1.1 Теорема Ферма.....	91
3.4.1.2 Необхідна умова екстремуму.....	92
3.4.1.3 Перша достатня умова екстремуму.....	94
3.4.1.4 Друга достатня умова екстремуму.....	95
3.4.1.5 Схема дослідження функції $y = f(x)$ на екстремум.....	96
3.4.1.6 Знаходження найбільших та найменших значень функції.....	98
3.4.2 Випуклість функції.....	99
3.4.2.1 Необхідні та достатні умови опуклості (увігнутості) функції.....	99
3.4.2.2 Точки перегину.....	101
3.4.2.3 Дослідження функції на опуклість та наявність точок перегину....	101
3.4.2.4 Загальна схема дослідження функцій та побудови графіка.....	102
3.4.2.5 Асимптоти графіка функції.....	105
3.4.2.6 Властивості функцій, безперервних на відрізку. Теорема Вейерштраса.....	107
3.4.3 Диференціювання функцій кількох змінних.....	108
3.5 Аналітичне та чисельне інтегрування.....	111
3.5.1 Основні команди.....	111
3.5.2 Інтеграл, які залежать від параметра. Обмеження параметрів.....	112
3.5.3 Основні прийоми інтегрування.....	113
3.5.4 Перетворення Лапласа.....	115
3.6 Методи теорії наближення у чисельному аналізі.....	116
3.6.1 Наближене обчислення математичних функцій.....	117
3.6.2 Наближене обчислення певних інтегралів.....	124
3.7 Перетворення статечних рядів.....	126
3.8 Розв'язання диференціальних рівнянь у Maxima.....	129
3.8.1 Основні визначення.....	129
3.8.2 Функції для вирішення диференціальних рівнянь у Maxima.....	130
3.8.3 Вирішення основних типів диференціальних рівнянь.....	132
3.8.3.1 Рівняння з змінними, що розділяються.....	132
3.8.3.2 Однорідні рівняння.....	132
3.8.3.3 Лінійні рівняння першого порядку.....	133
3.8.3.4 Рівняння у повних диференціалах.....	134
3.8.3.5 Рівняння Бернуллі.....	135
3.8.3.6 Рівняння вищих порядків.....	135
3.8.3.7. Рівняння з постійними коефіцієнтами.....	136
3.8.3.8 Рівняння зі змінними коефіцієнтами.....	137
3.8.3.9 Рівняння Ейлера.....	138
3.8.3.10 Граничні завдання.....	138
3.8.4 Операторний метод розв'язання.....	138
3.8.5 Додаткові можливості рішення ОДУ.....	142
3.8.5.1 Пакет contrib_ode.....	142
3.8.5.2 Рівняння Клеро та Лагранжа.....	143
3.8.5.3 Інші завдання з використанням contrib_ode.....	144

3.8.5.4	Вирішення однорідних лінійних рівнянь.....	145
3.8.6	Чисельні методи рішення ОДУ .....	146
3.9	Ряди Фур'є по ортогональних системах .....	147
3.9.1	Поняття ряду Фур'є .....	147
3.9.2	Обчислення коефіцієнтів тригонометричних рядів Фур'є .....	149
3.9.3	Ряди Фур'є для парних та непарних функцій .....	152
3.9.4	Розкладання функцій у ряд Фур'є на відрізьку $[0,\pi]$ .....	155
3.9.5	Ряд Фур'є для функцій з періодом $2l$ .....	158
3.9.6	Комплексна форма ряду Фур'є.....	160
3.9.7	Додаткові можливості: пакет fourie.....	162
3.9.8	Додаткові можливості: узагальнені ряди Фур'є .....	164
<b>4.</b>	<b>Чисельні методи та програмування з Maxima .....</b>	<b>166</b>
4.1	Програмування на вбудованій макромові .....	166
4.1.1	Умовні оператори .....	166
4.1.2	Оператори циклу .....	166
4.1.3	Блоки.....	168
4.1.4	Функції.....	170
4.1.5	Транслятор і компілятор Maxima .....	172
4.1.5.1	Функція translate .....	173
4.1.5.2	Функція compile.....	173
4.2	Введення-виведення у пакеті Maxima .....	175
4.2.1	Введення-виведення даних у консолі .....	175
4.2.2	Файлові операції введення-виводу .....	177
4.2.2.1	Введення-виведення текстових даних.....	177
4.2.2.2	Введення-виведення командних файлів .....	179
4.3	Вбудовані чисельні методи.....	180
4.3.1	Чисельні методи розв'язання рівнянь.....	180
4.3.1.1	Вирішення рівнянь з одним невідомим .....	180
4.3.2	Вирішення рівнянь методом Ньютона: пакет newton1.....	180
4.3.2.1	Вирішення рівнянь з кількома невідомими: пакет mnewton .....	181
4.3.3	Інтерполяція .....	181
4.3.3.1	Лінійна інтерполяція .....	181
4.3.3.2	Інтерполяція поліномами Лагранжа .....	182
4.3.3.3	Інтерполяція сплайнами.....	183
4.3.4	Оптимізація з використанням пакету lbfgs.....	184
4.3.4.1	Оптимізація з обмеженнями методом невизначених множників Лагранжа.....	186
4.3.5	Чисельне інтегрування: пакет romberg.....	187
<b>5.</b>	<b>Обрамлення Maxima .....</b>	<b>189</b>
5.1	Класичні графічні інтерфейси Maxima .....	189
5.1.1	Графічний інтерфейс wxMaxima .....	189
5.1.1.1	Робоче вікно wxMaxima.....	189
5.1.2	Графічний інтерфейс xMaxima .....	194
5.1.3	Використання редактора TeXmacs як інтерфейс Maxima.....	194

5.1.4	Робота з Maxima з Emacs .....	196
5.2	Робота з Maxima у KDE: інтерфейс Cantor .....	199
5.2.1	Документ Cantor .....	199
5.2.2	Налаштування .....	200
5.2.3	Інші можливості Cantor.....	200
5.3	Інтегроване середовище Sage .....	200
5.4	Побудова графічних ілюстрацій: пакет draw .....	201
<b>6.</b>	<b>Моделювання з Maxima .....</b>	<b>207</b>
6.1	Загальні питання моделювання .....	207
6.1.1	Аналітичні моделі.....	208
6.1.2	Ідентифіковані моделі .....	209
6.2	Статистичні методи аналізу даних.....	211
6.2.1	Введення-виведення матричних даних .....	211
6.2.2	Функції Maxima для розрахунку описової статистики.....	212
6.2.3	Перевірка статистичних гіпотез.....	221
6.2.4	Розрахунок коефіцієнтів лінійної регресії .....	228
6.2.5	Використання методу найменших квадратів.....	230
6.3	Моделювання динамічних систем .....	233
6.3.1	Моделювання системи хімічних реакцій.....	233
6.3.1.1	Приклад командного файлу для вирішення жорсткої системи .....	234
6.3.2	Фазові портрети динамічних систем .....	237
6.3.3	Модель динаміки популяцій .....	238
6.3.4	Рух твердого тіла .....	242
6.3.5	Атрактор Лоренца .....	243
6.3.6	Модель автоколивальної системи: рівняння Ван дер Поля.....	244
<b>7.</b>	<b>Вирішення фізичних та математичних завдань з Maxima .....</b>	<b>247</b>
7.1	Операції з поліномами та раціональними функціями.....	247
7.1.1	Спрощення алгебраїчних виразів .....	247
7.1.2	Розкладання поліномів та раціональних виразів на множники.....	248
7.1.2.1	Розв'язання рівнянь алгебри .....	248
7.2	Деякі фізичні завдання .....	250
7.2.1	Обчислення середньої квадратичної швидкості молекул .....	251
7.2.2	Розподіл Максвелла.....	251
7.2.3	Броунівський рух.....	253
7.3	Приклад побудови статистичної моделі.....	254
<b>8.</b>	<b>Реалізація деяких чисельних методів.....</b>	<b>259</b>
8.1	Програмування методів розв'язання нелінійних рівнянь у Maxima.....	259
8.1.1	Метод половинного поділу.....	260
8.1.2	Метод простих ітерацій .....	261
8.1.3	Метод Ньютона (метод дотичних).....	262
8.1.4	Модифікований метод Ньютона (метод січучих) .....	264
8.1.5	Метод хорд.....	264
8.2	Чисельне інтегрування .....	265
8.2.1	Огляд методів інтегрування .....	265

8.2.2	Метод прямокутників.....	266
8.2.3	Метод середніх прямокутників.....	266
8.2.4	Метод трапецій.....	267
8.2.5	Метод Сімпсона.....	268
8.3	Методи розв'язання систем лінійних рівнянь.....	269
8.3.1	Загальна характеристика та класифікація методів вирішення.....	269
8.3.2	Метод Гауса.....	269
8.3.3	Метод квадратного кореня.....	272
8.3.4	Коректність постановки задачі та поняття обумовленості.....	275
8.3.5	Про обчислювальні витрати.....	278
8.4	Ітераційні методи.....	278
8.4.1	Матричне формулювання ітераційних методів розв'язання систем лінійних рівнянь.....	279
8.4.2	Метод простої ітерації.....	281
8.4.3	Метод Зейделя.....	283
8.5	Вирішення звичайних диференціальних рівнянь.....	285
8.5.1	Методи вирішення задачі Коші.....	285
8.5.2	Метод рядів, що не вимагає обчислення похідних правої частини рівняння.....	287
8.5.2.1	Метод Ейлера.....	288
8.5.2.2	Метод Рунге-Кутта.....	289
<b>9.</b>	<b>Довідковий матеріал.....</b>	<b>293</b>
9.1	Скорочений список основних функцій Maxima.....	293
9.2	Перелік основних пакетів розширення Maxima.....	303
9.3	Список основних математичних констант, доступних Maxima.....	305
9.4	Список основних математичних функцій, доступних Maxima.....	306
	<b>Література.....</b>	<b>307</b>