1. Виникнення та розвиток систем комп'ютерної математики

1.1 Визначення систем комп'ютерної алгебри

Історія математики налічує близько трьох тисячоліть і умовно можна розділити на кілька періодів. Перший - становлення та розвиток поняття числа, вирішення найпростіших геометричних завдань. Другий період пов'язані з появою " Початок " Евкліда і твердженням добре знайомого нам способу доказу математичних тверджень з допомогою ланцюжків логічних висновків.

Наступний етап бере свій початок із розвитку диференціального та інтегрального обчислення. Нарешті, останній період супроводжується появою та поширенням понять та методів теорії множин та математичної логіки, на міцному фундаменті яких випочить вся будівля сучасної математики.

Ми живемо під час початку нового періоду розвитку математики, який пов'язаний з винаходом та застосуванням комп'ютерів. Насамперед, комп'ютер надав можливість проводити найскладніші чисельні розрахунки на вирішення тих завдань, які неможливо (принаймні, на даний момент) вирішити аналітично. З'явилося так зване "комп'ютерне моделювання" - ціла галузь прикладної математики, в якій за допомогою найсучасніших обчислювальних засобів вивчається поведінка багатьох складних економічних, соціальних, екологічних та інших динамічних систем.

Вивчення математики дає у розпорядження майбутнього інженера, економіста, наукового працівника як певну суму знань, а й розвиває у ньому здатність ставити, досліджувати і вирішувати найрізноманітніші завдання. Іншими словами, математика розвиває мислення майбутнього спеціаліста та закладає міцний понятійний фундамент для освоєння багатьох спеціальних дисциплін. Крім того, саме з її допомогою найкраще розвиваються здібності логічного мислення, концентрації уваги, акуратності та посидючості.

Комп'ютерна алгебра - область математики, що лежить на стику алгебри та обчислювальних методів. Для неї, як і для будь-якої області, що лежить на стику різних наук, важко визначити точні межі. Часто кажуть, що до комп'ютерної алгебри ставляться питання занадто алгебри, щоб утримуватися в підручниках з обчислювальної математики, і занадто обчислювальні, щоб утримуватися в підручниках з алгебри. При цьому відповідь на питання про те, чи відноситься конкретне завдання до комп'ютерної алгебри, часто залежить від нахилів фахівця.

1.1.1 Недоліки чисельних розрахунків

Більшість перших систем комп'ютерної математики (Eureka, Mercury, Excel, Lotus-123, MathCad для MS-DOS, PC MatLab та інших.) призначалися для чисельних розрахунків. Вони як би перетворювали комп'ютер на великий програмований калькулятор, здатний швидко і автоматично (за введеною програмою) виконувати арифметичні та логічні операції над числами чи масивами чисел. Їх результат завжди конкретний - це чи число, чи набір чисел, що представляють таблиці, матриці чи точки графіків. Зрозуміло, комп'ютер дозволяє виконувати такі обчислення з немислимою швидкістю, педантичністю і навіть точністю, виводячи результати у вигляді добре оформлених таблиць або графіків.

Однак результати обчислень рідко бувають абсолютно точними в математичному сенсі: як правило, при операціях з речовими числами відбувається їхнє округлення, обумовлене принциповим обмеженням розрядної сітки комп'ютера при зберіганні чисел у пам'яті. Реалізація більшості чисельних методів (наприклад, розв'язання нелінійних чи диференціальних рівнянь) також базується на свідомо наближених алгоритмах. Часто через накопичення похибок ці методи втрачають обчислювальну стійкість і розходяться, даючи неправильні рішення і навіть ведучи до повного краху роботи обчислювальної системи — аж до злощасного "зависання".

Умови появи помилок і збоїв який завжди відомі — їх оцінка досить складна теоретично і трудомістка практично. Тому рядовий користувач, стикаючись з такою ситуацією, часто стає в глухий кут або, що набагато гірше, неправильно тлумачить явно помилкові результати обчислень, "любовне" надані йому комп'ютером. Важко підрахувати, скільки "відкриті" на комп'ютері було відкинуте через те, що коливання, викиди на графіках або асимптоти помилково обчислених функцій, що спостерігаються, неправильно тлумачилися як нові фізичні закономірності моделюваннях пристроїв і систем, тоді як насправді були лише грубими похибками чисельних методів рішення обчислювальних завдань.

Багато вчених справедливо критикували чисельні математичні системи та програми реалізації чисельних методів за приватний характер одержуваних з їх допомогою результатів. Вони не давали змоги отримати загальні формули, що описують вирішення завдань. Як правило, з результатів чисельних обчислень неможливо було зробити будь-які загальні теоретичні, а часом і практичні висновки. Тому, перш ніж використовувати такі системи для реалізації серйозних наукових проектів, доводилося вдаватися до дорогої та недостатньо оперативної допомоги математиків-аналітиків. Саме вони вирішували необхідні завдання в аналітичному вигляді і пропонували більш менш прийнятні методи їх чисельного рішення на комп'ютерах.

1.1.2 Відмінності символьних обчислень від чисельних

Термін "комп'ютерна алгебра" виник як синонім термінів "символьні обчислення", "аналітичні обчислення", "аналітичні перетворення" і т. д. Навіть у цей час цей термін французькою мовою дослівно означає "формальні обчислення".

У чому основні відмінності символьних обчислень від чисельних і чому виник термін комп'ютерна алгебра?

Коли ми говоримо про обчислювальні методи, то вважаємо, що всі обчислення виконуються в полі речових чи комплексних чисел. Насправді ж будь-яка програма для ЕОМ має справу тільки з кінцевим набором раціональних чисел, оскільки такі цифри представляються в комп'ютері. Для запису цілого числа зазвичай відводиться 16 або 32 двійкових символи (біта), для речовинного – 32 або 64 біти. Ця множина не замкнута щодо арифметичних операцій, що може виражатися в різних переповненнях (наприклад, при множенні досить великих чисел або при розподілі на невелике число). Ще більш істотною особливістю обчислювальної математики є те, що арифметичні операції над цими числами, які виконує комп'ютер, відрізняються від арифметичних операцій у полі раціональних чисел.

Особливістю комп'ютерних обчислень є неминуча наявність похибки чи кінцева точність обчислень. Кожне завдання потрібно вирішити з використанням наявних ресурсів ЕОМ за доступний для огляду час із заданою точністю, тому оцінка похибки — важливе завдання обчислювальної математики.

Вирішення проблеми точності обчислень та кінцівки одержуваних чисельних результатів певною мірою дається розвитком систем комп'ютерної алгебри. Системи комп'ютерної алгебри, здійснюють аналітичні обчислення, широко використовують безліч раціональних чисел. Комп'ютерні операції над раціональними числами збігаються з відповідними операціями у полі раціональних чисел. Крім того, обмеження на допустимі розміри числа (кількість знаків у його записі) дозволяє користуватися практично будь-якими раціональними числами, операції з яких виконуються за прийнятний час.

У комп'ютерній алгебрі речові та комплексні числа практично не застосовуються, проте широко використовується алгебраїчні числа. Алгебраїчне число задається своїм мінімальним многочленом, інколи ж для його завдання потрібно вказати інтервал на прямій або область в комплексній площині, де міститься єдиний корінь даного багаточлена. Багаточлени грають у символьних обчисленнях винятково важливу роль. На використанні поліноміальної арифметики ґрунтуються теоретичні методи аналітичної механіки, вони застосовуються у багатьох галузях математики, фізики та інших наук. Крім того, в комп'ютерній алгебрі розглядаються такі об'єкти, як диференціальні поля (функціональні поля), що допускають показові, логарифмічні, тригонометричні функції, матричні кільця (елементи матриці належать кільцям загального виду) та інші. Навіть при арифметичних операціях над такими об'єктами відбувається набухання інформації, і для запису проміжних результатів обчислень потрібен значний обсяг пам'яті ЕОМ.

У наукових дослідженнях і технічних розрахунках фахівцям доводиться набагато більше перетворювати формули, ніж власне чисельний рахунок. Тим не менш, з появою ЕОМ основна увага приділялася автоматизації чисельних обчислень, хоча ЕОМ почали застосовуватися для вирішення таких завдань символьних перетворень, як, наприклад, символьне диференціювання ще в 50-х роках минулого століття. Активна розробка систем комп'ютерної алгебри розпочалася наприкінці 60-х. З того часу створено значну кількість різних систем, що отримали різний ступінь поширення; деякі системи продовжують розвиватися, інші відмирають і постійно з'являються нові.

1.2 Класифікація, структура та можливості систем комп'ютерної математики

1.2.1 Класифікація систем комп'ютерної математики

Нині системи комп'ютерної математики (СКМ) можна розділити сім основних класів: системи для чисельних розрахунків, табличні процесори, матричні системи, системи для статистичних розрахунків, системи для спеціальних розрахунків, системи для аналітичних розрахунків (комп'ютерної алгебри), універсальні системи.

Кожна система комп'ютерної математики має нюанси у своїй архітектурі чи структурі. Проте можна дійти висновку, що сучасні універсальні СКМ мають наступну типову структуру:

Центральне місце займає ядро системи - коди безлічі заздалегідь відкомпільованих функцій та процедур, що забезпечують досить представницький набір вбудованих функцій та операторів системи.

Інтерфейс дає користувачеві можливість звертатися до ядра зі своїми запитами та отримувати результат рішення на екрані дисплея. Інтерфейс сучасних СКМ заснований на засобах популярних операційних систем Windows 95/98/NT та забезпечує притаманні їм зручності роботи.

Функції та процедури, включені до ядра, виконуються гранично швидко. Тому обсяг ядра обмежують, але до нього додають бібліотеки більш рідкісних процедур та функцій.

Кардинальне розширення можливостей систем та їх адаптація до вирішуваних конкретними користувачами завдань досягаються рахунок пакетів розширення систем. Ці пакети (нерідко й бібліотеки) пишуться власною мовою програмування тієї чи іншої СКМ, що уможливлює їх підготовку звичайними користувачами.

Ядро, бібліотеки, пакети розширення та довідкова система сучасних СКМ акумулюють знання з математики, накопичені за тисячоліття її розвитку.

Зростаючий інтерес до алгоритмів алгебри виник у результаті усвідомлення центральної ролі алгоритмів в інформатиці. Їх легко описати формальною і строгою мовою і з їх допомогою забезпечити вирішення завдань, які давно відомі і вивчалися протягом століть. У той час як традиційна алгебра має справу з конструктивними методами, комп'ютерна алгебра цікавиться ще й ефективністю, реалізацією, а також апаратними та програмними аспектами таких алгоритмів. Виявилося, що при прийнятті рішення про ефективність та визначення продуктивності методів алгебри потрібні багато інших засобів, наприклад, теорія рекурсивних функцій, математична логіка, аналіз і комбінаторика.

У початковий період застосування обчислювальних машин у символьній алгебрі швидко стало очевидним, що безпосередні методи підручників часто виявлялися дуже неефективними. Замість звернення до методів чисельної апроксимації комп'ютерна алгебра систематично вивчає джерела неефективності та веде пошук інших методів алгебри для поліпшення або навіть заміни таких алгоритмів.

1.2.2 Завдання систем комп'ютерної алгебри

Перші ЕОМ спочатку створювалися у тому, щоб проводити складні розрахунки, куди людина витрачала дуже багато часу. Наступним кроком розвитку ЕОМ стали ПК. Ці машини можуть проводити обчислення різної складності (від найпростіших до найскладніших). Така їхня особливість використовувалася в різних галузях знань. Розвиток комп'ютерних математичних систем спричинив появу окремого класу програм, що отримав назви Системи Комп'ютерної Алгебри (СКА).

Головне завдання СКА – це обробка математичних виразів у символьній формі. Символьні операції зазвичай включають: обчислення символьних або числових значень для виразів, перетворення, зміна форми виразів, знаходження похідної однієї або декількох змінних, рішення лінійних і нелінійних рівнянь, рішення диференціальних рівнянь, обчислення меж, обчислення певних і невизначених , обчислення та робота з матрицями. На додаток до перерахованого, більшість СКА підтримують різноманітні чисельні операції: розрахунок значень виразів при певних змінних значеннях, побудова графіків на площині і в просторі.

Більшість СКА включають високорівневу мову програмування, яка дозволяє реалізувати свої власні алгоритми. Наука, яка вивчає алгоритми, що застосовуються у СКА, називається комп'ютерною алгеброю.

1.2.3 Місце комп'ютерної алгебри в інформатиці

Комп'ютерна алгебра є та частина інформатики, яка займається розробкою, аналізом, реалізацією та застосуванням алгоритмів алгебри. Від інших алгоритмів алгоритми алгебри відрізняються наявністю простих формальних описів, існуванням доказів правильності і асимптотичних меж часу виконання, які можна отримати на основі добре розвиненої математичної теорії. Крім того, алгебраїчні об'єкти можна точно уявити в пам'яті обчислювальної машини, завдяки чому перетворення алгебри можуть бути виконані без втрати точності і значущості. Зазвичай алгоритми алгебри реалізуються в програмних системах, що допускають введення і виведення інформації в символьних алгебраїчних позначеннях.

Завдяки цьому фахівці, що працюють в інформатиці, математиці та в прикладних областях, виявляють все більший інтерес до комп'ютерної алгебри. Спираючись на протиставлення, можна сказати, що комп'ютерна алгебра розглядає такі об'єкти, які мають надто обчислювальний характер, щоб зустрічатися в книгах з алгебри, та надто алгебраїчний характер, щоб бути представленими у підручниках з інформатики. Багато алгоритмів комп'ютерної алгебри можна як напів чисельні (у сенсі Кнута).

1.2.4 Взаємозв'язок систем комп'ютерної алгебрі традиційних математичних дисциплін

Відокремити комп'ютерну алгебру від математичних дисциплін, як алгебра, аналіз чи чисельний аналіз, нелегко.

Системи комп'ютерної алгебри зазвичай включають алгоритми інтегрування, обчислення елементарних трансцендентних функцій, рішення диференціальних рівнянь тощо. Особливість згаданих алгоритмів полягає в наступному:

- вони оперують з термами та формулами та виробляють вихідну інформацію у символьній формі;
- рішення досягається за допомогою деякого виду алгебризації завдання (наприклад, похідну від полінома можна визначити суто комбінаторним чином);
- існують методи точного уявлення величин, що визначаються через межі та мають нескінченне чисельне уявлення.

Часто формули, одержувані в якості вихідної інформації при виконанні алгоритмів комп'ютерної алгебри, потім використовуються як вхідна інформація в чисельних процедурах. Наприклад, при інтегруванні раціональних функцій від кількох змінних перше і, можливо, друге інтегрування виконуються у символьному вигляді, інші — чисельне.

Численні процедури використовують арифметику кінцевої точності і ґрунтуються на теорії апроксимації. Наприклад, чисельна процедура знаходження коріння не завжди може відокремити всі коріння, тому що працює з числами кінцевої точності; вона відокремлює лише кластери коренів, діаметр яких залежить від заданої точності уявлення чисел та багатьох інших параметрів.

В принципі бажано і можливо описувати чисельні алгоритми з тією ж строгістю, як і алгебраїчні, проте необхідна при цьому деталізація набагато вища, а подібність до математичної постановки задачі менш прозора. З іншого боку, при використанні деякого алгоритму алгебри точність оплачується більшими — в загальному випадку істотно — часом виконання і необхідним обсягом пам'яті, ніж для його чисельного аналога.

Проте можна навести багато прикладів таких завдань, у яких апроксимація немає великого сенсу. Тому методи символьних обчислень і чисто чисельні алгоритми зазвичай доповнюють одне одного. Сучасні системи комп'ютерної алгебри обов'язково включають той чи інший набір стандартних чисельних алгоритмів. Сучасні системи, розраховані використання у першу чергу чисельних розрахунків (MatLab, його клони тощо.) завжди включають більш-менш повний набір функцій, здійснюють символьні перетворення.

1.2.5 Можливості підвищення ефективності вирішення математичних та обчислювальних завдань

Реалізація на ЕОМ символьної математики відкрила принципово нові можливості використання обчислювальних машин у природничих та прикладних дослідженнях. Нині вже важко вказати область природничих наук, де методи аналітичних обчислень на ЕОМ не знайшли б плідних застосувань. Характерною особливістю проблематики символьних перетворень є поєднання дуже тонких математичних та алгоритмічних методів із найсучаснішими методами програмування, що ефективно реалізують не чисельну математику в рамках програмних систем аналітичних обчислень. До останніх відносяться, наприклад, такі популярні системи, як Macsyma, Reduce, АНАЛІТИК та ін.

Добре відомо, що аналітичні перетворення є невід'ємною частиною наукових досліджень, і найчастіше з їхньої виконання витрачається більше праці, ніж решту досліджень, а реалізації спеціалізованих методів, наприклад, методів сучасного групового аналізу диференціальних рівнянь, особливе значення має точність аналітичних вражений. Однак ручні обчислення за будь-яким із подібних методів вимагають непомірно більших витрат часу. Саме тут і допомагають методи комп'ютерної алгебри (КА) та відповідні програмні системи, які є практично єдиним засобом вирішення таких завдань, що вимагають великих витрат ручних обчислень і дуже чутливі до втрати точності при чисельному рахунку на ПК.

Завдяки методам та алгоритмам аналітичних обчислень сучасний комп'ютер стає вже не стільки обчислювальною, скільки загально математичною машиною. ПК під силу реалізувати інтегрування та диференціювання символьних виразів, перестановки та перегрупування членів, підстановки у вирази з подальшим їх перетворенням, вирішувати диференціальні рівняння тощо. Аналітичні обчислення (АВ) є складовою теоретичної інформатики, яка займається розробкою, аналізом, реалізацією та застосуванням алгоритмів алгебри. Цілі АВ лежать у галузі штучного інтелекту, незважаючи на те, що методи все більше і більше віддаляються від неї. Крім того, використовувані алгоритми вводять у дію менш елементарні математичні засоби.

Таким чином, АВ як самостійна дисципліна, насправді, лежить на стику кількох областей: інформатики, штучного інтелекту, сучасної математики (що використовує нетрадиційні методи), що одночасно збагачує її та робить більш складною в дослідницькому плані. Найменування цієї наукової дисципліни тривалий час коливалося і, нарешті, стабілізувалося як "Calcul formel" у французькій мові, "Computer algebra" - в англійській мові та "аналітичні обчислення" або "комп'ютерна алгебра" - у російській.

Найбільш інтуїтивна мета АВ полягає у маніпуляції з формулами. Математична формула, описана однією із звичайних мов програмування (Фортран, Паскаль, З), призначена лише для чисельних розрахунків, коли змінним і параметрам присвоєно чисельні значення.

У мові, що допускає АВ, для цієї формули також можна отримати чисельне значення, але, крім того, вона може стати об'єктом формальних перетворень: диференціювання, розкладання в ряд, різних розкладів і навіть інтегрування.

Інтелектуальність розроблених на сьогоднішній день САВ визначається їх використанням для організації баз знань з математичних методів у навчанні та освіті.

Можна виділити три види навчання:

- підготовка фахівців у галузі АВ (студенти та аспіранти);
- навчання роботі з САВ широкого кола користувачів (знайомство із сучасним інструментом дослідження) та
- застосування САВ в освіті математичного та фізичного профілю.

1.3 Комерційні та вільно розповсюджувані системи комп'ютерної математики

СКМбули створені у 70-ті роки та розвивалися в рамках проектів, пов'язаних із штучним інтелектом. Тому сфера застосування їх досить велика та різноманітна. Першими найпопулярнішими системами були Reduce, Derive, Macsyma. Деякі з них досі у продажу. Вільно розповсюджувана версія Macsyma - Maxima. На даний момент лідерами продажів є Maple та Mathematica. Обидва ці пакети активно використовуються в математичних, інженерних та інших наукових дослідженнях. Існує безліч комерційних систем комп'ютерної алгебри: Maple, Mathematica, MathCad та інші. Вільні програми: Axiom, Eigenmath, Maxima, Yacas та ін.

Успіх у сучасному використанні САВ лежить в інтеграції всіх машинних можливостей (символьний та чисельний інтерфейс, вбудована графіка, мультиплікація, бази та банки даних тощо). Всі сучасні комерційні системи комп'ютерної математики (Mathematica, Maple, MatLab і Reduce) мають стандартний набір можливостей:

- є вхідна макро мова для спілкування користувача з системою, що включає спеціалізований набір функцій для вирішення математичних завдань;
- є основні символьні (математичні) об'єкти: поліноми, ряди, раціональні функції, вирази загального вигляду, вектори, матриці;
- системи використовують цілі, раціональні, речові, комплексні числа;
- є кілька доповнюють один одного режимів роботи: редагування, діагностика, діалог, протокол роботи;
- є зв'язок із засобами розробки програм: можливі підстановки, обчислення значень, генерація програм, використання стандартного математичного забезпечення (бібліотек);
- використовуються інтерфейси для зв'язку з офісними засобами, базами даних, графічними програмними засобами тощо;

Хоча між системами є відмінності, синтаксис асоційованих мов не є проблемою, що ускладнює використання комп'ютерної математики. Синтаксис мов систем значною мірою аналогічний синтаксису Паскаля. Обов'язково є оператори присвоєння, поняття зухвалої функції (команди), більш менш багатий вибір керуючих структур (if, do while, repeat і т. д.), можливості для визначення користувацьких процедур - загалом, весь арсенал класичних мов програмування, необхідний для запису алгоритмів.

Системи комп'ютерної алгебри можна умовно поділити на системи загального призначення та спеціалізовані. До систем загального призначення належать Macsyma, Reduce, Mathematica, Maple, Axiom та ін.

У 80-ті роки минулого століття стала вельми поширеною в колишньому СРСР набула система Reduce. Вона спочатку призначалася на вирішення фізичних завдань, розроблялася найбільш широко поширених комп'ютерах, технологія до певного часу не мала комерційного характеру (система остаточно 80-х поширювалася безплатно). Відкритий характер системи дозволив залучити до розробки величезну армію користувачів, збагатили систему численними пакетами на вирішення окремих завдань.

MacsymaТак само, як і Reduce, є "старою" системою. На відміну від системи Reduce, Macsyma розроблялася від початку як комерційний продукт. У ній більш ретельно опрацьовані алгоритмічні питання, її ефективність істотно вища, але найменше її поширення можна пояснити двома обставинами: тривалий час вона була реалізована лише на малому числі "екзотичних" комп'ютерів і поширювалася лише на комерційній основі.

Система Maple, створена в 80-х роках минулого століття в Канаді, від початку була задумана як система для персональних комп'ютерів, що враховує їх особливості. Вона розвивається "вшир і вглиб", навіть її ядро листувалося з однієї алгоритмічної мови на іншу. В даний час Maple широко застосовується в багатьох країнах (зокрема, у США та Канаді) у навчальному процесі, а також у різних галузях наукових та технічних досліджень.

Наприкінці минулого століття набула широкого поширення і зараз швидко розвивається система Mathematica. Її успіх значною мірою пояснюється її широкими графічними можливостями, а також електронною документацією, яку можна розглядати як електронну бібліотеку, присвячену різним розділам математики та інформатики.

Особливе місце серед систем комп'ютерної алгебри займає система Axiom. На відміну від інших систем, що являють собою пакети програм, спілкування з якими здійснюється деякою алголо-подібною мовою, система Axiom, що розвинулася із системи Scratchpad-II, має справу з більш звичними для математиків об'єктами. Зокрема, у ній ключовим поняттям є поняття категорії: тут можна розглядати, наприклад, категорії множин, напівгруп, диференціальних кілець, лівих модулів тощо. Тому використовується тільки в обмеженій кількості потужних університетських і наукових центрів.

Спеціалізовані системи відрізняються більш високою ефективністю, але сфера їх застосування обмежена.

До спеціалізованих систем належать такі системи, як

Caleyі GAP - спеціалізовані системи для обчислень у теорії груп,

Macauley, CoCoA, Singular- системи різного ступеня універсальності для обчислень у кільці багаточленів,

Schoonship - Спеціалізована система для обчислень у фізиці високих енергій,

muMath та її правоспадкоємиця Derive — системи, що широко використовуються в навчальному процесі (зокрема, в Австрії ліцензія на встановлення системи Derive придбана для всіх середніх шкіл), та багато інших.

Maple— це система для аналітичного та чисельного вирішення математичних завдань, що виникають як у математиці, так і у прикладних науках. Розвинена система команд, зручний інтерфейс та широкі можливості дозволяють ефективно застосовувати Maple для вирішення проблем математичного моделювання.

Mapl ескладається з ядра, процедур, написаних мовою С і дуже оптимізованих, бібліотеки, написаної Maple- мовою, і інтерфейсу. Ядро виконує більшість базових операцій. Бібліотека містить безліч команд та процедур, які виконуються в режимі інтерпретації. Програмуючи власні процедури, користувач може поповнювати стандартний набір і, таким чином, розширювати можливості Maple. Робота в Maple відбувається в режимі сесії (session). Користувач вводить пропозиції (команди, висловлювання, процедури та ін), які сприймаються Maple. За промовчанням результати сеансу зберігаються у файлі з розширенням 'ms'. Якщо встановлено режим збереження стану сеансу (session), то файлі з розширенням 'm' будуть записані поточні призначення.

Mathematica - це широко використовувана СКА спочатку розроблена Стівеном Вольфрандом, яка продається компанією Wolfram Research. Він почав працювати над Mathematica в 1986 році, а випустив у 1988 році. Mathematica не тількиСКА, але й потужна мова програмування. Ця мова програмування реалізована на основі об'єктно орієнтованого варіанта мови С, який розширюється за допомогою так званих бібліотек коду. Ці бібліотеки є текстовими файлами, написаними на мові Mathematica.

АрхітектураMathematica представлена ядром і інтерфейсом користувача. Ядро програми відповідає за інтерпретацію програм, написаних мовою Mathematica, і займається обчисленнями. Інтерфейси призначені для висновків результатів у формі, зрозумілій користувачеві. На думку компанії-розробника, більшість користувачів Mathematica - це технічні професіонали. Також Mathematica широко використовується в освіті. Зараз кілька тисяч курсів на основі цього продукту читаються у багатьох навчальних закладах, починаючи від середньої школи та закінчуючи аспірантурою. Mathematica використовується в найбільших університетах по всьому світу та в групі компаній Fortune 500, а також у всіх 15 основних міністерствах уряду США.

MathCad - цеСКА дуже схожа на Mathematica. Розповсюджується компанією Mathsoft. MathCad орієнтований підтримку концепцій робочого листа. Рівняння та вирази відображаються на робочому аркуші так, як вони виглядали б на якійсь презентації, а не так, як виглядають мовою програмування. Деякі завдання, які виконує програма: розв'язання диференціальних рівнянь, графіки на площині та у просторі, символьне обчислення, операції з векторами та матрицями, символьне розв'язання систем рівнянь, підбір графіків, набір статистичних функцій та ймовірнісних розподілів. На думку розробників MathCad, головним конкурентом цього пакету є електронні таблиці.

Багато користувачів використовують електронні таблиці або мови програмування для виконання обчислень. Але ті, ні інші не справляються із завданням, коли справа доходить до обробки отриманих даних. Електронні таблиці розроблені для бухгалтерських, а чи не для інженерних розрахунків! Для останніх вони не надто зручні: рівняння заховані в осередках, складно вставити коментарі. Це робить роботу досить скрутною, а усувати помилки і розбиратися в чиїхось обчисленнях взагалі складно. Електронні таблиці складні для розуміння та повторного використання іншими користувачами.

Yacas- Це Open SourceСКА загального призначення. Базується власною мовою програмування, головною метою розробки цієї мови була простота реалізації нових алгоритмів. Ця мова дуже схожа на LISP, підтримує введення та виведення у звичайному текстовому режимі як інтерактивно, так і в режимі пакетного виразу.

Maxima є нащадком DOE Macsyma, яка розпочала своє існування наприкінці 1960 року в MIT. Macsyma перша створила систему комп'ютерної алгебри, вона проклала шлях для таких програм як Maple та Mathematica. Головний варіант Maxima розроблявся Вільям Шелтер з 1982 по 2001 рік. 1998 року він отримав дозвіл на реалізацію відкритого коду на GPL. Завдяки його вмінню Maxima зуміла вижити та зберегти свій оригінальний код у робочому стані. Незабаром Вільям передав Maxima групі користувачів та розробників, які зберегли її у робочому стані. На сьогоднішній день пакет досить активно розвивається, і багато в чому не поступається таким розвиненим системам комп'ютерної математики, як Maple або Mathematica.