3. Завдання вищої математики з Maxima

3.1 Операції з комплексними числами

3.1.1 Подання комплексних чисел

Значення цілого позитивного ступеня комплексного аргументу найпростіше обчислювати в тригонометричній формі. Якщо $z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$) (тут $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа, $\varphi = arctg\dfrac{y}{x}$ — його аргумент), то для будь-якого цілого позитивного числа n має місце формула: $w = f(z) = z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

Коренем n -й ступеня з комплексного числа z називається число $w = \sqrt[n]{z}$ таке, що $w^n = z$. Для будь-якого комплексного числа z існує n комплексних чисел w таких, що $w^n = z$. Значення кореня, тобто. значення функції $f(z) = \sqrt[n]{z}$ також зручно обчислювати у тригонометричній формі. Якщо $z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, то для будь-якого цілого позитивного числа n має місце формула: $f(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$,

тобто. функція $f(z) = \sqrt[n]{z}$ є багатозначною функцією - кожному значенню аргументу відповідає n різних значень кореня.

Якщо $z = x + iy = r(\cos(j) + i\sin(j))$, то значення функції $f(z) = exp(z)$ обчислюються за формулою $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

Логарифмом комплексного числа z називається таке число w, що $e^w = z$. Значення логарифмічної функції $f(z) = Ln(z)$ обчислюються за формулою $Ln(z) = ln(|z|) + iArgz = ln(|z|) + iargz + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$ Величину $ln(|z|) + iargz$ називають головним значенням логарифму. Функція $f(z) = Ln(z)$ є багатозначною функцією — кожному значенню аргументу відповідає безліч різних значень логарифму.

Комплексний вираз визначено в Maxima за допомогою складання дійсної частини виразу та твору i (уявної одиниці) та уявної частини (тобто в алгебраїчній формі). Наприклад, коріння з рівняння $x^2 - 4 * x + 13 = 0$ рівні $2 + 3 * i$ і $2 - 3 * i$.

Рішення в Maxima:

```
(%i1) eq:x^2-4*x+13=0;
```

$$(\%o1) \quad x^2 - 4x + 13 = 0$$

```
(%i2) solve (eq, x);
```

$$(\%o2) \quad [x = 2 - 3i, x = 3i + 2]$$

```
(%i3) x1: % o2 [1] $ x2: % o2 [2];
```

$$(\%o3) \quad x = 3i + 2$$

```
(% i4)     print(x1, x2);
```

$$(\%o4) \quad x = 2 - 3i, x = 3i + 2$$

Більш складний приклад обчислення коренів рівняння алгебри n -й ступеня:

```
(%i1) solve(x^3=1,x);
```

$$(\%o1) \quad [x = \frac{\sqrt{3}\,i - 1}{2}, x = -\frac{\sqrt{3}\,i + 1}{2}, x = 1]$$

```
(%i2) solve(x^5=1,x);
```

$$(\%o2) \quad [x = e^{\frac{2i\pi}{5}}, x = e^{\frac{4i\pi}{5}}, x = e^{-\frac{4i\pi}{5}}, x = e^{-\frac{2i\pi}{5}}, x = 1]$$

Кількість коренів, що повертається Maxima, відповідає основній теоремі алгебри (рівняння третього ступеня має три корені, п'ятий - п'ять і т.д.).

Перетворення комплексних виразів може здійснюватися функціями для роботи з виразами алгебри ($radcan, expand$ та ін), але передбачено і ряд специфічних функцій, розрахованих на операції саме з комплексними числами.

3.1.2 Функції до роботи з комплексними числами

Спрощення приватних, коренів та інших функцій комплексних виразів може зазвичай досягатися при використанні функцій $realpart, imagpart, rectform, polarform, abs, carg$.

Обчислення модуля комплексного числа здійснюється функцією $cabs$. Аргумент комплексного виразу обчислюється за допомогою функції $carg$. Комплексний аргумент -θ в межах $[-\pi, \pi]$ таким чином, що $r\,exp(\theta i) = z$, де r - модуль комплексного числа z. Слід враховувати, що $carg$ - Обчислювальна функція, не призначена для спрощення комплексних виразів. (у деяких випадках зручно використовувати опцію $numer$, установка якої змушує представляти результати у форматі з плаваючою точкою - див.

Приклад:

```
(%i1) carg (1);
```

$$(\%o1) \quad 0$$

```
(%i2) carg (1 + %i);
```

$$(\%o2) \quad \frac{\pi}{4}$$

```
(%i3) carg (exp (% i)), номер;
```

$$(\%o3) \quad 1.0$$

```
(% i4)     carg (exp(%pi*%i));
```

$$(\%o4) \quad \pi$$

```
(% i5)     carg (exp (3/2 * % pi * % i));
```

$$(\%o5) \qquad -\frac{\pi}{2}$$

Для перетворення комплексних виразів використовують також функцію $demoivre$. Управління її роботою здійснюється прапором $demoivre$.

Коли змінна $demoivre$ встановлена ($demoivre = true$), комплексні показові функції перетворені на еквівалентні вирази в термінах тригонометричних функцій: $e^{a+i \cdot b}$ спрощує до вигляду $e^a \cdot (\cos(b) + i \cdot \sin(b))$, якщо вираз b не містить i. Значення за замовчуванням $demoivre—false$.

Крім того, перетворення різних форм комплексних чисел здійснюється функцією $exponentialize$ яка перетворює тригонометричні та гіперболічні функції в експоненційну форму. Прапори $demoivre$ і $exponentialize$ не можуть обидва бути встановлені в $true$ одночасно.

Приклад:

```
(%i1) demoivre:true;
```

$$(\%o1) \qquad true$$

```
(%i2) demoivre (exp (3+3/2 * %pi * %i));
```

$$(\%o2) \qquad -e^3\, i$$

```
(%i3) demoivre (exp (%pi+3/2 * %pi * %i));
```

$$(\%o3) \qquad -e^{\pi}\, i$$

Комплексно-пов'язані вирази обчислюються за допомогою функції $conjugate(x)$.

Приклад:

```
(%i1) declare ([aa, bb], real, cc, complex, ii,
imaginary);
```

$$(\%o1) \qquad done$$

```
(%i2) conjugate (aa + bb * % i);
```

$$(\%o2) \qquad aa - i\, bb$$

```
(%i3) conjugate (ii);
```

$$(\%o3) \qquad -ii$$

Як видно з прикладу, функція $declare$ дозволяє оголосити тип виразів: дійсні, комплексні та чисто уявні ($imaginary$).

Функція $plog(x)$ представляє основну галузь комплексного логарифму, відповідну $-\pi < carg(x) <= +\pi$, наприклад:

```
(%i1) a:1+%i;
```

$$(\%o1) \qquad i+1$$

```
(%i2) plog(a);
```

$$(\%o2) \qquad \frac{log\,(2)}{2} + \frac{i\,\pi}{4}$$

Функція $polarform(expr)$ повертає вираз $r\,e^{i\theta}$ еквівалентне $expr$ (параметри r і θ дійсні).

Перетворення комплексного виразу до форми алгебри здійснюється функцією $rectform(x)$.

Приклад:

```
(%i1) a:1+%i;
```

$(\%o1)$ $i+1$

```
(%i2) polarform(a);
```

$(\%o2)$ $\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$

```
(%i3) rectform(%);
```

$(\%o3)$ $i+1$

Функція $residue(expr, z, z_0)$) обчислює залишок у комплексній площині для вираження $expr$, коли змінна z набуває значення z_0. Залишок - коефіцієнт при $(z-z_0)^{-1}$ ряду Лорана для $expr$.

Приклад:

```
(%i1) residue (s/(s**2+a**2), s, a*%i);
```

$(\%o1)$ $\frac{1}{2}$

```
(%i2) residue (sin(a*x)/x**4, x, 0);
```

$(\%o2)$ $-\frac{a^3}{6}$

3.2 Завдання лінійної алгебри

Пакет Maxima включає велику кількість функцій для вирішення різноманітних завдань лінійної алгебри.

Розглянемо основні функції, що дозволяють оперувати матрицями та вирішувати основні завдання лінійної алгебри.

3.2.1 Найпростіші операції із матрицями

У Maxima на матрицях визначені звичайні операції множення на число, додавання та матричного множення. Останнє реалізується за допомогою бінарної операції "." (Точка). Розмірності матрицьмножників повинні бути узгоджені.

Розглянемо кілька прикладів.

Створення двох прямокутних матриць:

```
(%i1) a: matrix ([1,2,3], [4,5,6]);
```

$(\%o1)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

```
(% i2) b: matrix ([2,2], [3,3], [4,4]);
```

$$(\%o2)\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Функція $transpose$ транспонує матрицю:

```
(%i1) a:matrix([1,2,3]);transpose(a);
```

$$(\%o1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (\%o2)\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Розмноження матриці на число:

```
(%i2) c:b*2;
```

$$(\%o2)\quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 6 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Додавання матриць (природно, матриці повинні бути однакової форми, інакше виникає помилка):

```
(% i4)      b+c;
```

$$(\%o4)\quad \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 9 & 9 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$$

```
(% i5)     a+b;

fullmap: arguments must have same formal structure.
- an error. Для debug this try: debugmode(true);
```

Множення матриць (у цьому випадку вихідні матриці a і b узгоджені за розмірами):

```
(%i6) f:ab;
```

$$(\%o6)\quad \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 47 & 47 \end{pmatrix}$$

Якщо матриця - лівий співмножник, то правим співмножником може бути не тільки вектор-стовпець, а й вектор-рядок і навіть список.

Maximaдозволяє також зводити матриці на ступінь, але фактично ця операція застосовується до кожного елемента.

3.2.2 Звернення матриць та обчислення визначників

Для обігу матриць використовується функція $invert$. Приклад:

```
(%i1) a: matrix ([1,2], [3,4]);
      b:invert(a);
      ba;
```

$$(\%o1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (\%o2)\quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\%o3)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Визначник обчислюється функцією $determinant$:

```
(% i4)     determinant(a);
```

$$(\%o4) \quad -2$$

3.2.3 Характеристичний поліном, власні числа та власні вектори матриці

Характеристичний поліном матриці обчислюється функцією $charpoly(M, x)$ (M - матриця, x - Змінна, щодо якої будується поліном).

Приклад:

```
(%i6) charpoly(a,x);
```

$$(\%o6) \qquad (1-x)\,(4-x)-6$$

```
(%i7) ratsimp(%);
```

$$(\%o7) \qquad x^2-5\,x-2$$

Коріння характеристичного полінома є власними числами матриці.

Однак для обчислення власних чисел та власних векторів матриці зазвичай використовують спеціальні функції: $eigenvalues$ і $eigenvectors$.

Функція $eigenvectors$ аналітично обчислює власні значення та власні вектори матриці, якщо це можливо. Вона повертає список, перший елемент якого – список власних чисел (аналогічно $eigenvalues$), а далі йдуть власні вектори, кожен із яких представлений як список своїх проекцій.

Пример :

```
(%i1) a:matrix([1,1,1],[2,2,2],[3,3,3]);
```

$$(\%o1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

```
(%i2) eigenvalues(a);
```

$$(\%o2) \quad [[0,6],[2,1]]$$

```
(%i3) eigenvectors(a);
```

$$(\%o3) \quad [[[0,6],[2,1]],[[[1,0,-1],[0,1,-1]],[[1,2,3]]]]$$

Функція $uniteigenvectors$ відрізняється від функції $eigenvectors$ тим, що повертає нормовані на одиницю власні вектори.

3.2.4 Ортогоналізація

Maxima включає спеціальну функцію для обчислення ортонормованого набору векторів із заданого. Використовується стандартний алгоритм Грама-Шмідта.

Синтаксис виклику: $gramschmidt(x)$ або $gschmidt(x)$.

Аргумент функції – матриця або список. Як компонент системи векторів, на базі якої будується ортонормована система, розглядаються рядки матриці x або підписки списку x . Для використання цієї функції необхідно завантажити пакет eigen.

Приклад:

```
(%i1) load("eigen");
```

$(\%o1)$ $/usr/share/maxima/5.13.0/share/matrix/eigen.mac$

```
(%i2) x: matrix ([1,2,3], [4,5,6]);
```

$$(\%o2)\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

```
(%i3) y:gramschmidt(x);
```

$$(\%o3)\quad [[1,2,3],[\frac{2^2\,3}{7},\frac{3}{7},-\frac{2\,3}{7}]]$$

```
(% i4)     ratsimp(%[1].%[2]);
```

$$(\%o4)\quad 0$$

3.2.5 Перетворення матриці на трикутну форму

Перетворення матриці до трикутної форми здійснюється методом виключення Гауса за допомогою функції $echelon(M)$(аналогічний результат дає функція $triangularize(M)$):

```
(%i1) a:matrix([1,2,3],[4,5,x],[6,7,y]);
```

$$(\%o1)\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & x\\ 6 & 7 & y\end{pmatrix}$$

```
(%i2) b: Echelon (a);
```

$$(\%o2)\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -\frac{x-12}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Відмінності функцій, що розглядаються в тому, що $echelon$ нормує діагональний елемент на 1 а $triangularize$- Ні. Обидві функції використовують алгоритм виключення Гауса.

3.2.6 Обчислення рангу та мінорів матриці

Для розрахунку рангу матриці (порядку найбільшого невиродженого мінору матриці) використовується функція $rank$.

Приклад:

```
(%i1) a:matrix([1,2,3,4],[2,5,6,9]);
```

Матриця a - Невироджена (два рядки, ранг дорівнює 2). Обчислимо ранг виродженої матриці, що містить лінійно-залежні рядки.

```
(%i1) a:matrix([1,2,3,4],[2,5,6,9]);
```

$$(\%o1)\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

```
(%i2) rank(a);
```

(%o2) 2

```
(%i3) b:matrix([1,1],[2,2],[3,3],[4,5]);
```

(%o3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

```
(% i4)      rank(b);
```

(%o4) 2

Мінор матриці обчислюється за допомогою функції $minor(M,i,j)$, де M - матриця, i,j - Індекси елемента, для якого обчислюється мінор.

3.2.7 Розв'язання матричних рівнянь

Нехай дано матричне рівняння $AX=B$, де A - Квадратна матриця розмірності n; B - матриця розмірності $n\times k$; X - Невідома матриця розмірності $n\times k$. Нехай A - Невироджена матриця (тобто. $det(A)\neq 0$ тоді існує єдине рішення цього рівняння. Рішення можна знайти за формулою $X=A^{-1}B$

Приклад:Знайти рішення матричного рівняння $AX=B$, де

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Спочатку поставимо матриці A і B :

```
(%i1) A:matrix ([1, 2, 2], [-1, -1, 3], [2, 5, 0]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

```
(%i2) B: matrix ([10, 0], [-2, 5], [1, 4]);
```

(%o2) $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Перевіримо існування та єдиність рішення:

```
(%i3) determinant(A);
```

(%o3) -9

Матриця A невироджене, значить, рішення існує і єдине. Знайдемо його:

```
(% i4)      A1: invert (A); x:A1.B;
```

(%o4) $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{10}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$ (%o5) $\begin{pmatrix} 18 & -\frac{82}{9} \\ -7 & \frac{40}{9} \\ 3 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

Виконаємо перевірку:

```
(%i6) Ax-B;
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Аналогічно вирішується матричне рівняння $XA = B$, де A - Квадратна матриця розмірності n, B - матриця розмірності $k \times n$, X - Невідома матриця розмірності $k \times n$. Якщо A — невироджена матриця, існує єдине рішення $X = BA^{-1}$.

Приклад:Знайти рішення X матичного рівнянь $XA = C$ де матриця A з попереднього завдання, C - Задана матриця. Аналогічно попередньому прикладу обчислюємо рішення:

```
(%i10)      C:matrix([10,0,-2],[5,1,4]); x:C.A1;xA-C;
```

(%o10) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(%o11) $\begin{pmatrix} 16 & -\frac{34}{3} & -\frac{26}{3} \\ 9 & -\frac{14}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$ (%o12) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

У загальному випадку (коли A - Вироджена матриця, або A - не квадратна матриця) матричне рівняння $AX = B$ можна вирішити за допомогою функції $solve$.

Синтаксис виклику: $solve([eq_1, eq_2..., eq_n], [x_1, x_2, ..., x_m])$, де $[eq_1, eq_2..., eq_n]$- Список рівнянь, $[x_1, x_2, ..., x_m]$- список невідомих, щодо яких здійснюється рішення.

3.2.8 Спеціальні функції для вирішення систем лінійних та поліноміальних рівнянь

Функція $linsolve([expr_1, expr_2, ..., expr_m], [x_1, x_2, ..., x_n])$ вирішує список одночасних лінійних рівнянь $[expr_1, expr_2, ..., expr_m]$ щодо списку змінних $[x_1, ..., x_n]$.

Вирази $[expr_1, ..., expr_n]$ можуть бути поліномами зазначених змінних і представлятися як рівнянь.

Приклад:Розв'язати системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z + t = 6, \\ 2x - 2y + z + 3t = 2, \\ 3x - y + 2z - t = 8. \end{cases}$$

Рішення в Maxima:

```
(%i1) ex1:x+y+z+t=6;
      ex2: 2*x-2*y+z+3*t=2;
      ex3:3*x-y+2*zt=8;
```

```
linsolve([ex1,ex2,ex3],[x,y,z,t]);
```

$$(\%o1)\quad z+y+x+t=6$$
$$(\%o2)\quad z-2y+2x+3t=2$$
$$(\%o3)\quad 2z-y+3x-t=8$$
$$(\%o4)\quad [x=-\frac{3\%r1-14}{4},y=-\frac{\%r1-10}{4},z=\%r1,t=0]$$

Таким чином, загальне рішення має вигляд:

$x=(14-3c)/4,y=(10-c)/4,z=c,t=0$,

де c - Довільна постійна. Їй можна задавати довільні дійсні значення. При кожному значенні с виходить окреме рішення. Наприклад, при $c=1$ виходить приватне рішення

```
(% i5)     ev(%), %r1=1;
```

$$(\%o5)\qquad [x=\frac{11}{4},y=\frac{9}{4},z=1,t=0]$$

Спосіб подання рішення залежить від прапора $linsolve_params$ (за замовчуванням $true$). Якщо вказаний прапор встановлений у $true$, Рішення недовизначених систем включає параметри і т.д. Якщо прапор $linsolve_params$ встановлений у $false$, Пов'язані змінні виражаються через вільні.

Багато в чому аналогічний результат дозволяє отримати функцію $algsys$ (фактично, це надбудова над $solve$).

Функція $algsys([expr_1,expr_2,...,expr_m],[x_1,x_2,...,x_n])$ вирішує систему $[expr_1=0,expr_2=0,...,expr_m=0]$ поліноміальних рівнянь щодо списку змінних $[x_1,...,x_n]$.

Вирази $[expr_1,...,expr_n]$ можуть бути представлені у вигляді рівнянь. Кількість рівнянь може перевищувати кількість невідомих та навпаки.

Приклад:

```
(%i6) e1: 2 * x * (1 - a1) - 2 * (x - 1) * a2; e2: a2 - a1;
    e3: a1*(-y - x^2 + 1); e4: a2 * (y - (x - 1) ^ 2);
```

$$(\%o6)\qquad 2\,(1-a1)\,x-2\,a2\,(x-1)$$
$$(\%o7)\qquad a2-a1$$
$$(\%o8)\qquad a1\,\left(-y-x^2+1\right)$$
$$(\%o9)\qquad a2\,\left(y-(x-1)^2\right)$$

```
(%i10)     algsys ([e1, e2, e3, e4], [x, y, a1, a2]);
```

$$(\%o10)$$
$$[[x=0,y=\%r2,a1=0,a2=0],[x=1,y=0,a1=1,a2=1]]$$

Для обчислення коренів одиничних поліноміальних рівнянь використовується функція $realroots$.

Варіанти синтаксису:

- $realroots(expr, bound)$;
- $eralroots(eqn, bound)$;
- $realroots(expr)$;
  - $realroots(eqn)$.

Функція знаходить все коріння виразу $expr = 0$ або рівняння eqn. Функція будує послідовність Штурму для ізоляції кожного кореня та використовує алгоритм розподілу навпіл для уточнення кореня з точністю $bound$ або з точністю, заданою за умовчанням.

Приклад:

```
(%i11)     realroots (2 - x + x^5, 5e-6);
```

$$(\%o11) \qquad [x = -\frac{664361}{524288}]$$

```
(%i12)     float(%);
```

$$(\%o12) \qquad [x = -1.267168045043945]$$

```
(%i13)     ev(2-x+x^5,%[1]);
```

$$(\%o13) \qquad 3.0858501665065319\,10^{-6}$$

Всі корені полінома (дійсні та комплексні) можна знайти за допомогою функції $allroots$. Спосіб подання рішення визначається змінною $polyfactor$ (за замовчуванням $false$; якщо встановити в $true$, то функція повертає результат факторизації). Алгоритм пошуку коренів напівчисельний.

Приклад:

```
(%i1) eqn:x^4+1;soln:allroots (eqn);
```

$$(\%o1) \quad x^4 + 1$$

$$(\%o2) \quad [x = 0.70710678118655\%i + 0.70710678118655,$$
$$x = 0.70710678118655 - 0.70710678118655\%i,$$
$$x = 0.70710678118655\%i - 0.70710678118655,$$
$$x = -0.70710678118655\%i - 0.70710678118655]$$

Кількість дійсних коренів рівняння у певному інтервалі повертає функція $nroots$ (синтаксис $nroots(p, low, high)$).

Приклад:(Знаходимо число коренів рівняння на відрізку [-6, 9]):

```
(%i1) p: x^10 - 2*x^4 + 1/2$nroots (p, -6, 9);
```

$$(\%o2) \qquad 4$$

Для перетворення рівнянь використовуються функції lhs і rhs, що дозволяють виділити ліву та праву частину рівняння відповідно.

Приклад:

```
(%i1) eqn:x^2+x+1=(x-1)^3;
```

$$(\%o1) \qquad x^2+x+1=(x-1)^3$$

```
(%i2) lhs(eqn);
```

$$(\%o2) \qquad x^2+x+1$$

```
(%i3) rhs(eqn);
```

$$(\%o3) \qquad (x-1)^3$$

Спрощення систем рівнянь досягається функцією $eliminate$ що дозволяє виключити ті чи інші змінні.

Виклик $eliminate([eqn_1, ..., eqn_n], [x_1, ..., x_k])$ виключає змінні $[x_1, ..., x_k]$ із зазначених виразів.

Приклад:

```
(%i1) expr1: 2*x^2 + y*x + z;
      expr2: 3 * x + 5 * y - z - 1;
      expr3: z 2 + x - y 2 + 5;
```

$$(\%o1) \qquad z+x\,y+2\,x^2$$

$$(\%o2) \qquad -z+5y+3x-1$$

$$(\%o3) \qquad z^2-y^2+x+5$$

```
(% i4)    eliminate ([expr3, expr2, expr1], [y, z]);
```

$$(\%o4)\,[7425x^8-1170x^7+1299x^6+12076x^5+22887x^4-5154x^3-1291x^2+7688x+15376]$$

3.3 Класифікація та основні властивості функцій

Функція називається явною (або заданою у явному вигляді), якщо вона задана формулою, в якій права частина не містить залежної змінної; наприклад, функція $y=x^3+7x+5$.

Функція y аргументу x називається неявною (або заданою у неявному вигляді), якщо вона задана рівнянням $F(x,y)=0$, не дозволеним щодо залежної змінної. Наприклад, функція $y\ (y\geq 0)$, задана рівнянням $x^3+y^2-x=0$. Зазначимо, що останнє рівняння задає дві функції, $y=\sqrt{x-x^3}$ при $y\geq 0$, і $y=-\sqrt{x-x^3}$ при $y<0$.

Зворотній функції.

Нехай $y=f(x)$ є функція від незалежної змінної x, визначеної на проміжку X з областю значень Y. Поставимо у відповідність кожному $y\in Y$ єдине значення $x\in X$, при якому $f(x)=y$. Тоді отримана функція

$x = g(y)$, визначена на проміжку Y з областю значень X називається зворотною по відношенню до функції $y = f(x)$.

Наприклад, для функції $y = a^x$ зворотною буде функція $x = \log_a x$.

Складна функція.

Нехай функція $y = f(u)$ є функція від змінної u , визначеної на безлічі U з областю значень Y а змінна u у свою чергу є функцією $u = \phi(x)$ від змінної x , визначеної на безлічі X з областю значень U . Тоді задана на безлічі X функція y= $f[\phi(x)]$ називається складною функцією.

Наприклад, $y = \sin(x^5)$— складна функція, оскільки її можна подати у вигляді $y = \sin(u)$, де $u = x^5$.

Концепція елементарної функції. Основними елементарними функціями є:

1. статечна функція $y = x^r,\ r \in R$;
2. показова функція $y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$
3. логарифмічна функція $y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$;
4. тригонометричні функції
   $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$;
5. зворотні тригонометричні функції
6. $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x$

.

З основних елементарних функцій нові елементарні функції можуть бути отримані за допомогою:

1. алгебраїчних процесів;
2. операцій освіти складних функцій

Визначення. Функції, побудовані з основних елементарних функцій за допомогою кінцевого числа дій алгебри і кінцевого числа операцій освіти складної функції, називаються елементарними.

Наприклад, функція

$$y = \frac{\sqrt{x} + \arcsin x^5}{\ln^3 x + x^3 + x^7}$$

є елементарною.

Прикладом неелементарної функції є функція $y = signx$.

3.3.1 Основні властивості функцій

- **Парність та непарність.** Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо $f(-x) = f(x)$ і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$. Інакше функція називається загального вигляду. Наприклад, функція $y = x^2$ є парною, а функція $y = x^3$- Непарною. Функція $y = x^2 + x^3$ є функцією загального виду. Графік парної функції симетричний щодо осі ординат, а графік непарної функції симетричний щодо початку координат.

- **Монотонність.** Функція $y = f(x)$ називається монотонно зростаючою (зменшується) на проміжку X, якщо для будь-яких x_1, $x_2 (x_1, x_2 \in X)$ і $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$. А якщо виконується нерівність $f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$, то функція називається неубутньою (незростаючою).
- **Обмеженість.** Функція $y = f(x)$ називається обмеженою на проміжку X якщо існує таке позитивне число $M > 0$, що $|f(x)| \leq M$ для будь-кого $x \in X$. Наприклад, функція $y = \sin x$ обмежена по всій числовій осі, оскільки $|\sin x| \leq 1$ для будь-кого $x \in \mathbb{R}$.
- **Періодичність.** Функція $y = f(x)$ називається періодичною з періодом $T \neq 0$ на проміжку X для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $f(x+T) = f(x)$.

3.3.2 Межа функції та її властивості

3.3.2.1 Межа функції у нескінченності

Визначення. Число А називається межею функції $f(x)$ **при** x, що прагне до нескінченності, якщо для будь-якого скільки завгодно малого позитивного числа $\epsilon > 0$, знайдеться таке позитивне число $\delta > 0$, що для всіх x що задовольняють умові $|x| > \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \epsilon$.

Ця межа функції позначається так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

або $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

3.3.2.2 Межа функції у точці

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякій околиці точки a крім, можливо, самої точки a.

Визначення. Число A називається межею функції $f(x)$ при x, що прагне a (або в точці a), якщо для будь-якого скільки завгодно малого позитивного числа $\epsilon > 0$, знайдеться таке позитивне число $\delta > 0$, що для всіх x, що задовольняють умові $0 < |x - a| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \epsilon$. Умова $0 < |x - a|$ означає, що $x \neq a$.

Межа функції позначається так:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

або $f(x) \to A$ при $x \to a$.

3.3.2.3. Односторонні межі.

Якщо $x > a$ і $x \to a$, то використовують запис $x \to a + 0$. Якщо $x < a$ і $x \to a$, то використовують запис $x \to a - 0$.

Вирази $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ називаються відповідно межами функції $f(x)$ у точці a праворуч та ліворуч.

Якщо існує межа $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, то існують і односторонні межі $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ і

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x).$$

Ця рівність виконується також, якщо межі зліва та справа рівні1.

3.3.2.4 Теореми про межі

1. Межа суми двох функцій дорівнює сумі меж цих функцій, якщо ті існують, тобто

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + \psi(x)] = A + B,$$

де $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x), \; B = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)$.

2. Межа добутку двох функцій дорівнює добутку меж цих функцій.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot \psi(x)] = A \cdot B.$$

3. Межа частки двох функцій дорівнює приватній межі цих функцій.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{A}{B},$$

причому $B \neq 0$.

4. Якщо,

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = A;$$

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = u_0,$$

то межа складної функції

$$\lim_{x \to x_0} f[\psi(x)] = A.$$

.

3.3.2.5 Обчислення меж різних класів функцій

Межа виразу $f(x)$ при $x \to a$ обчислюється за допомогою функції $limit(f(x), x, a)$;

Розглянемо приклад: обчислити межу $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Рішення: виконаємо команду

```
(%i1) limit(sin(x)/x, x, 0);
```

Результат на екрані:

$(\%o1)$ 1

Більш складні варіанти обчислення меж ілюструє такі кілька прикладів, що включають межі зліва, праворуч, при прагненні до нескінченності і т.п. Розглянемо межі: $\lim_{x \to +\infty} e^x, \lim_{x \to -\infty} e^x, \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x}, \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x}$.

Межа необмеженої функції на нескінченності:

```
(%i2) limit (exp(x), x, inf);
```

$(\%o2)$ ∞

```
(%i3) limit (exp(x), x, minf);
```

$(\%o3)$ 0

Межі при x _ 0 зліва та справа:

```
(%i3) limit(1/x, x, 0, minus);
```

$(\%o3)$ $-\infty$

```
(% i4)      limit(1/x, x, 0, plus);
```

$(\%o4)$ ∞

3.3.2.6 Межа та безперервність функції

Обчислити межі $\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x}$ і $\lim_{x \to -8} \sqrt[3]{x}$.

```
(% i8)      limit(x^(1/3), x, 8);
```

$(\%o8)$ 2

```
(% i9)      limit(x^(1/3), x, -8);
```

$(\%o9)$ -2

3.3.2.7 Межі раціональних дробів

Обчислити межу $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$.

```
(%i10)      y(x):=(x^3-3*x-2)/(x^2-x-2)^2;limit(y(x), x,-1);
```

(%o10) $$y\left(x\right):=\frac{x^3-3\,x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

(%o11) $$-\frac{1}{3}$$

При операціях з раціональними дробами та виділення носіїв нуля2доцільно використовувати факторизацію виразів, наприклад: обчислення межі безпосередньо

```
(%i16)      limit((x^2-4)/(x^2-3*x+2), x, 2);
```

(%o16) $$4$$

Обчислення межі після факторизації раціонального виразу:

```
(%i17)      factor((x^2-4)/(x^2-3*x+2));
```

У чисельнику та знаменнику дробу скорочується носій нуля при $x\to 2$, тобто. вираз $x-2$.

(%o17) $$\frac{x+2}{x-1}$$

```
(%i18)      limit (%, x, 2);
```

(%o18) $$4$$

3.3.2.8 Межі, що містять ірраціональні вирази

Обчислення меж даного класу багато чому аналогічно обчисленню меж раціональних дробів, т.к. зводиться до скорочення носіїв нуля в чисельнику та знаменнику аналізованих виразів, наприклад: обчислити межу виразу $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ при $x\to 1$. При обчисленні межі безпосередньо маємо:

```
(%i1) limit((sqrt(x)-1)/(x-1), x, 1);
```

(%o1) $$\frac{1}{2}$$

Для спрощення та скорочення носіїв нуля використовується функція $radcan$:

```
(%i2) factor((sqrt(x)-1)/(x-1));
```

(%o2) $$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

```
(%i3) radcan(%);
```

(%o3) $$\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

```
(% i4)      limit(%, x, 1);
```

$$(\%o4) \qquad \frac{1}{2}$$

3.3.2.9 Межі тригонометричних виразів

Першою чудовою межею називається межа

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Розглянемо приклади знаходження деяких меж з використанням першої чудової межі.

приклад.Знайти межу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}5\frac{\sin 5x}{5x}=5\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=5,$$

де $t=5x$.

Розрахунок з використанням Maxima:

```
(%i1) limit(sin(5*x)/x, x, 0);
```

$$(\%o1) \qquad 5$$

приклад.Знайти межу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x^2}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{t}=2,$$

де $t=x^2$.

Розрахунок з використанням Maxima:

```
(% i4)     limit((1-cos(2*x))/x^2, x, 0);
```

$$(\%o4) \qquad 2$$

3.3.2.10 Межі експоненційних виразів

Другою чудовою межею називається межа

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=2.718281828\cdots$$

Можна показати, що функція

$$y(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$ також має межу, рівну e.

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Замінюючи x на $x=1/t$ отримаємо ще один запис числа e

$$e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}.$$

Число e (число Ейлера або неперове число) відіграє важливу роль у математичному аналізі.

Функція $y = e^x$ зветься експоненти. Якщо показник експоненти громіздкий, її прийнято записувати як: $\exp(x)$.

Логарифм на основі е називається натуральним. Його позначають символом $\ln$, тобто $\log_e x = \ln x$.

Важливу роль математичному аналізі грають також гіперболічні функції (гіперболічний синус, гіперболічний косинус, гіперболічний тангенс), зумовлені формулами:

$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

Розглянемо приклади знаходження деяких меж з використанням другої чудової межі.

приклад.Знайти межу $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \ln e = 1.$$

Отже $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

приклад.Знайти межу $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$.

Нехай $a^x - 1 = u$. Тоді

$$a^x = 1 + u; \;\; x = \frac{\ln(1+u)}{\ln a}$$

.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u \ln a}{\ln(1+u)} = \ln a \cdot \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \ln a \cdot 1 = \ln a.$$

Отже $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Обчислення за допомогою Maxima:

```
(% i5)      limit(log(1+x)/x, x, 0);
```

$(\%o5) \quad 1$

```
(%i6) limit((a^x-1)/x, x, 0);
```

$(\%o6) \quad log\left(a\right)$

Знайдемо межу $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}$. Аналітичний розрахунок дає наступний результат:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x} = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}-1\right)3x\right] = e^{-6}.$$

Використовуючи Maxima, отримуємо:

```
(%i7) limit((x/(2+x))^(3*x), x, inf);
```

$(\%o7)\qquad e^{-6}$

3.3.2.11 Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Порівняння нескінченно малих функцій.

Розглянемо межу приватного від поділу двох нескінченно малих $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to a$.

Межа відносин двох нескінченно малих величин $A = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ може дорівнювати нулю, кінцевому числу або ∞.

1. Якщо A звичайно, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають нескінченно малими одного порядку та пишуть $\alpha(x) = O[\beta(x)]$ при $x \to a$. Якщо $A = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними та пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.
2. Якщо $A = 0$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$ та пишуть $\alpha(x) = o[\beta(x)]$ при $x \to a$. Якщо існує дійсне число $r > 0$ таке, що
3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^r} \neq 0$ то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою порядку r щодо $\beta(x)$ при $x \to a$.
4. Якщо $A \to \infty$ при $x \to a$, то в цьому випадку $\beta(x)$ називають нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha(x)$ та пишуть $\beta(x) = o[\alpha(x)]$.

Звичайно, може статися, що відношення двох нескінченно малих не прагне ні до якої межі, наприклад, якщо взяти $\alpha = x$ і $\beta = x\sin\frac{1}{x}$, то їхнє ставлення, рівне $\sin\frac{1}{x}$, при $x \to 0$ межі немає. У такому разі кажуть, що дві нескінченно малі не можна порівняти між собою.

прикладобчислень з Maxima:

Розглянемо дві нескінченно малі функції при $x \to 0$

```
(%i26)      f(x):=sin(3*x)*sin(5*x)$ g(x):=(xx^3)^2$
```

Обчислимо межу відношення $f(x)/g(x)$ при $x \to 0$

```
(%i28)      limit(f(x)/g(x), x, 0);
```

$(\%o28) \qquad 15$

Результат, рівний постійному числу, свідчить у тому, що аналізовані нескінченно малі одного порядку.

3.3.2.12 Еквівалентні нескінченно малі. Їх застосування до обчислення меж.

При обчисленні меж корисно мати на увазі еквівалентність наступних нескінченно малих величин: $\sin x \sim x; \operatorname{tg} x \sim x; \arcsin x \sim x; \operatorname{arctg} x \sim x; \ln(1+x) \sim$, при $x \to 0$.

Їх легко отримати, використовуючи правило Лопіталя (див. нижче).

Приклад: Порівняти нескінченно малі $\alpha(x) = x^2 \sin^2 x$ і $\beta(x) = x \operatorname{tg} x$ при $x \to 0$.

Замінимо $\sin^2 x$ і $\operatorname{tg} x$ на їх еквівалентні нескінченно малі $\sin^2 x \sim x^2$ і $\operatorname{tg} x \sim x$. Отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 x}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Таким чином, \a$lpha(t) = o[\beta(t)]$ при $t \to 0$. Крім того, $\alpha(x)$ є нескінченно малою порядку 2 щодо $\beta(x)$.

Приклад: Визначити порядок малості $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x+1}-1)$ щодо $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

Оскільки

$$\sqrt{x+1}-1 = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)}$$

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

При обчисленнях з використанням Maxima більш природно використовувати при обчисленні складних меж і порівнянні нескінченно малих розкладання чисельника та знаменника в ряд Тейлора (докладне обговорення статечних рядів – див. нижче) При обчисленні з використанням меню у вкладці меню Аналіз⟶Знайти межу, встановити пункт "Використовувати ряд Тейлора". Для обчислень використовується функція tlimit, робота якої ґрунтується на заміні досліджуваних функцій поруч Тейлора (де це можливо). За промовчанням прапор заміни встановлено в $false$ Тому для використання tlimit прапор заміни встановлюється в $true$:

```
(%i1) tlimswitch = true;
```

$$(\%o1) \qquad false = true$$

приклад обчислення з використанням tlimit:

```
(%i1) f(x):=(tan(x)-sin(x))/(x-sin(x));
```

$$(\%o1) \qquad f(x) := \frac{tan(x) - sin(x)}{x - sin(x)}$$

```
(%i2) tlimit(f(x),x,0);
```

$$(\%o2) \qquad 3$$

3.3.2.13 Нескінченно великі функції. Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими величинами.

Функція $f(x)$ називається нескінченно великою величиною при $x \to a$, якщо для будь-кого $\epsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх x, що задовольняють умові $0 < |x - a| < \delta$, буде виконано нерівність $|f(x)| > \epsilon$.

Запис того, що функція $f(x)$ нескінченно велика при $x \to a$ означає наступне: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ або $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

приклад: $y = \operatorname{tg} x$ нескінченно велика при $x \to \pi/2$.

Примітка: Функція може бути необмеженою, але не дуже великою. Наприклад, функція $y = x \sin x$ - Не обмежена на $(-\infty, \infty)$, але не нескінченно велика при $x \to \infty$.

Якщо функція $\alpha(x)$ є нескінченно мала величина при $x \to a$ $(x \to \infty)$, то функція $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великий при $x \to a$ $(x \to \infty)$.

І назад, якщо функція $f(x$) нескінченно велика при $x \to a$ $(x \to \infty)$, то функція $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ є величина нескінченно мала при $x \to a$ $(x \to \infty)$.

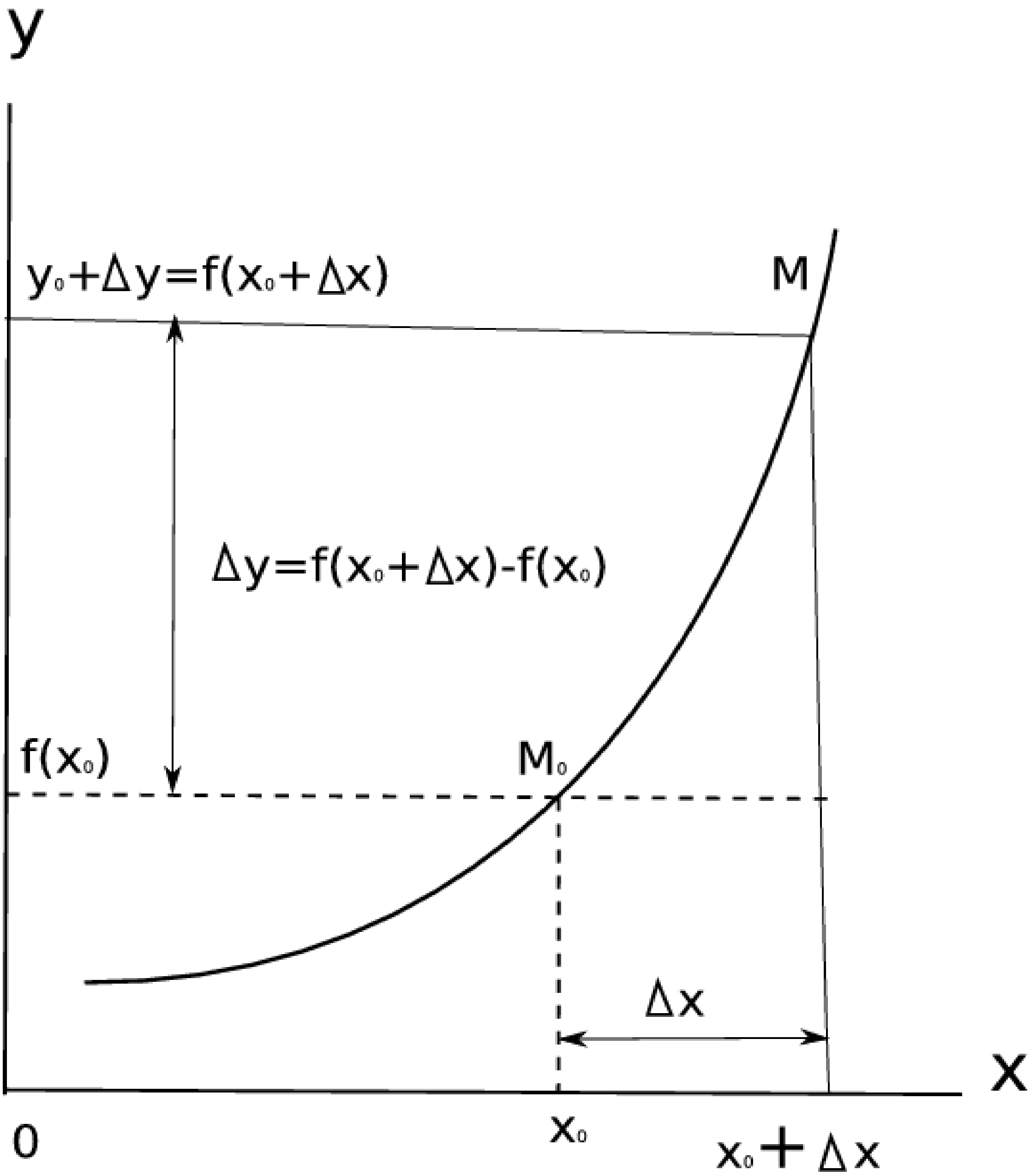
Наприклад, функція $y = \cos x$ - нескінченно мала при $x \to \pi/2$ тоді функція $\dfrac{1}{\cos x}$ - Безмежно велика. Функція $y = \dfrac{1}{2x - 7}$ - нескінченно мала при $x \to \infty$ тоді функція $y = 2x - 7$ — нескінченно велика при $x \to \infty$.

3.3.3 Безперервні функції

Поняття безперервності функції, як і і поняття межі, одна із основних понять математичного аналізу.

3.3.3.1 Безперервність функції у точці

Дамо два визначення поняття безперервності функції у точці.



Мал. 3.1.Визначення безперервної функції

Визначення 1. Функція $f(x)$ називається безперервною в точці a, якщо вона задовольняє трьома умовами: 1) $f(x)$ визначена в деякій околиці точки $x = a$, 2) існує кінцева межа 1 $\lim_{x \to a} f(x)$ ця межа дорівнює значенню функції $f(x)$ у точці a, тобто. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Вочевидь, що безперервність функції у цій точці виявляється безперервністю її графіка під час проходження цієї точки.

Розглянемо друге визначення безперервності функції у точці.

Надамо аргументу a приріст $\Delta x \neq 0$. Тоді функція $y = f(x)$ отримає приріст Δy, що визначається як різниця нарощеного та вихідного значення функції: $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ (Див. рис. 3.1).

Визначення 2. Функція $y = f(x)$ називається безперервною в точці a, якщо вона визначена в околиці точки $x = a$, і приріст її Δy у цій точці, що відповідає прирощенню Δx прагне до нуля при прагненні Δx до нуля: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

У посібниках з математичного аналізу доводиться, що обоє визначення рівносильні.

прикладдослідження безперервності функції з Maxima:

Функція

$$f(x) := \frac{1}{1 + exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

має можливу точку розриву при $x = 1$. Порівняємо межі цієї функції при прагненні x до 1 зліва та справа:

```
(%i16)  f(x):=1/(1+exp(1/(1-x)));
```

$$(\%o16) \qquad f(x) := \frac{1}{1 + exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

```
(%i17)      limit(f(x),x,1,plus);
```

$$(\%o17) \qquad 1$$

```
(%i18)      limit(f(x),x,1,minus);
```

$$(\%o18) \qquad 0$$

Межі не збігаються, тому робимо висновок, що функція, що досліджується, розривна.

3.3.3.2 Властивості безперервних функцій

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ безперервні в точці a, то їхня сума $f(x) + g(x)$, твір $f(x)g(x)$, та приватне $\frac{f(x)}{g(x)}$ (за умови, що $g(a) \neq 0$) є функціями, безперервними в точці a.
2. Якщо функція $y = f(x)$ безперервна в точці a і $f(a) > 0$, то існує така околиця точки а, в якій $f(x) > 0$.
3. Якщо функція $y = f(u)$ безперервна в точці u_0, а функція $u = \psi(x)$ безперервна в точці $u_0 = \psi(x_0)$, то складна функція $y = f[\psi(x)]$ безперервна в точці x_0.

Властивість 3 може бути записано у вигляді:

$$\lim_{x \to x_0} f[\psi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \psi(x)\right],$$

тобто. під знаком безперервної функції можна переходити до краю.

Функція $y = f(x)$ називається безперервною на проміжку X якщо вона безперервна в кожній точці цього проміжку. Можна довести, що це елементарні функції безперервні у сфері визначення.

3.3.3.3 Точки розриву функцій та їх класифікація

Крапка a , що належить області визначення функції або є граничною для цієї області, називається точкою розриву функції $f(x)$ якщо в цій точці порушується умова безперервності функції.

Якщо існують кінцеві межі $f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x)$ и $f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x),$ причому не всі три числа $f(a), f(a-0), f(a+0)$ рівні між собою, то точка a називається точкою розриву 1 роду (існують кінцеві односторонні межі функції ліворуч та праворуч, не рівні один одному).

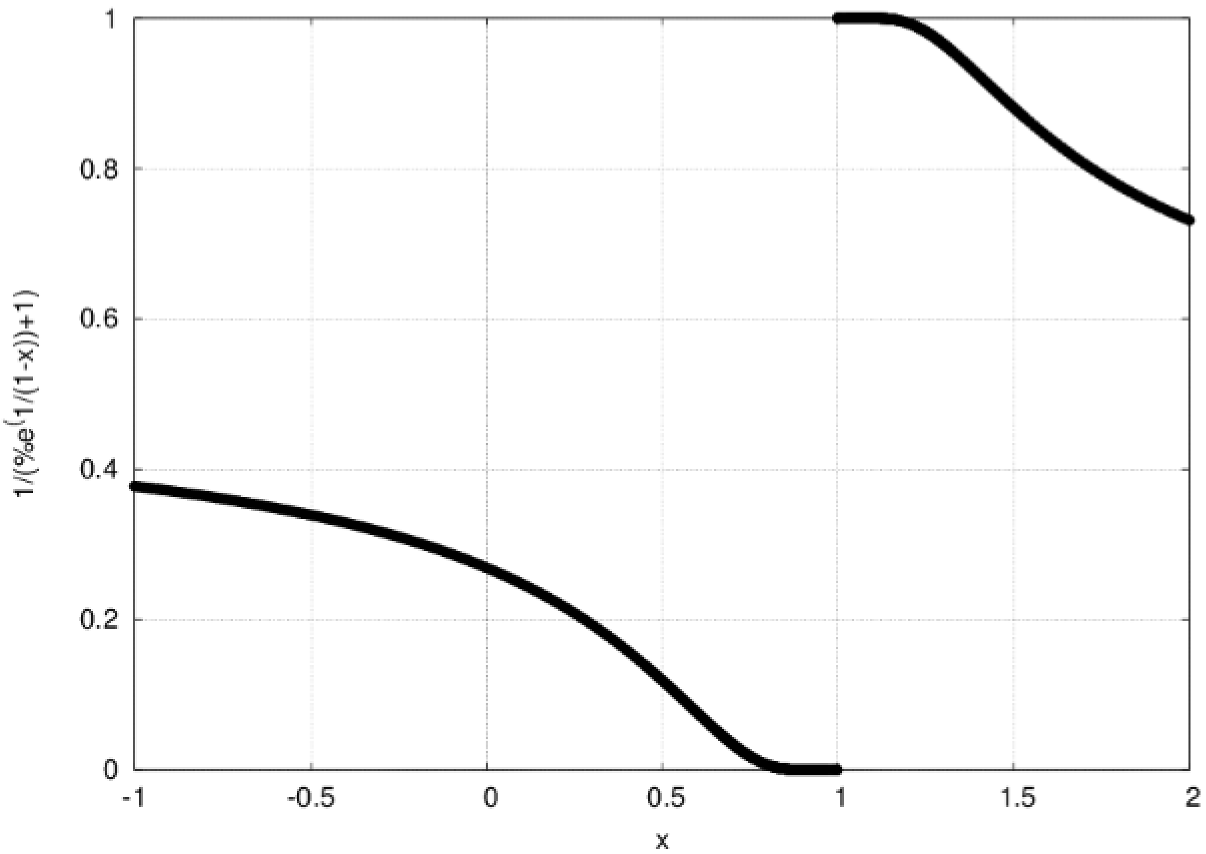
Точки розриву 1 роду поділяються, своєю чергою, на точки усуненого розриву (коли $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, тобто. коли лівий та правий межі функції $f(x)$ у точці а рівні між собою, але не рівні значення функції $f(x)$ у цій точці) і на точки стрибка (коли $f(a-0) \neq f(a+0)$, тобто. коли лівий і правий межі функції у точці a різні); в останньому випадку різниця $f(a+0) - f(a-0)$ називається стрибком функції $f(x)$ у точці a .

Точки розриву, які є точками розриву 1 роду, називаються точками розриву 2 роду. У точках розриву 2 роду немає хоча б одне з односторонніх меж.

Розглянемо попередній приклад. Функція

$$f(x) := \frac{1}{1 + exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

має точку розриву при $x = 1$.



Мал. 3.2.Розрив досліджуваної функції

Оскільки межі$\lim_{x\to 0-0} f\left(x\right)$і$\lim_{x\to 0+0} f\left(x\right)$не збігаються, але обидва кінцеві, робимо висновок про наявність точки розриву першого роду при$x = 1$.

Графічну ілюстрацію одержуємо за допомогою wxMaxima (див. рис. 3.2).

3.3.4 Диференціювання за допомогою пакета Maxima

Пакет Maxima надає потужні засоби для диференціювання функцій та обчислення диференціалів. Для обчислення найпростішої похідної слід у командному вікні після запрошення Maxima ввести команду наступного виду: diff(<функція>, <змінна>); де <функція> - вираз, що задає функцію (не обов'язково однієї змінної), наприклад x^2+2*x+1; <змінна> — ім'я змінної, за якою вестиметься диференціювання, наприкладx.

Прикладом обчислення похідної може бути така команда: diff(x^2+2*x+1,x);.

За допомогою команди$diff$можна обчислювати похідні найвищих порядків. При цьому команда має такий формат:

$diff$ **(<функція>,<змінна>,<порядок>);**

де <порядок> - порядок обчислюваної похідної.

У рішеннях деяких прикладів цього розділу за допомогою Maxima будуть використані додаткові команди Maxima:

- $ratsim$ (<вираз>),$radcan$ (<вираз>) - Спрощення алгебраїчного виразу.
- $trigsim$ (<вираз>),$trigexpand$ (<вираз>) - спрощення або підстановка тригонометричного виразу.
- $factor$ (<вираз>); - Розкласти <вираз> на множники.
- at (<вираз>,<old>=<new>); - підставити вираз <new> на місце <old> у <виразі>.
- <змінна>:$solve$ (<вир1>=<значення>,<вир2>); - присвоїти <змінної> значення виразу <вир2>, отримане дозволом рівняння <вир1>(<вир2>)=<значення>.
- $taylor(f(x), x, x0, n);$- Розкласти функцію $f(x)$за формулою Тейлора з центром у точці$x0$до порядку n включно.

3.3.4.1 Обчислення похідних та диференціалів

Для обчислення похідної функції використовується функція$diff$, для обчислення похідних різного порядку зручно створити функцію користувача (у прикладі нижче —$f(x)$):

```
(%i3) f(x):=sin(9*x^2);
```

$$(\%o3) \qquad f(x) := sin\left(9\,x^2\right)$$

```
(% i4)     d1: diff (f (x), x, 1);
```

$$(\%o4) \qquad 18\,x\,cos\left(9\,x^2\right)$$

```
(% i5)     d2: diff (f (x), x, 2);
```

$$(\%o5) \qquad 18\,cos\left(9\,x^2\right) - 324\,x^2\,sin\left(9\,x^2\right)$$

```
(%i6) d3: diff (f (x), x, 3);
```

$$(\%o6) \qquad -972\,x\,sin\left(9\,x^2\right) - 5832\,x^3\,cos\left(9\,x^2\right)$$

Приклад обчислення диференціалу ($del(x)$рівноцінноdx , не вказана явно змінна диференціювання):

```
(% i8)     diff(log(x));
```

$$(\%o8) \qquad \frac{del\,(x)}{x}$$

Аналогічний підхід можна застосувати і для функції кількох змінних. Функція$diff$з єдиним аргументом — функцією, що диференціюється, повертає повний диференціал.

Приклад:

```
(% i9)     diff (exp (x * y));
```

$$(\%o9) \qquad x\,e^{x\,y}\,del\,(y) + y\,e^{x\,y}\,del\,(x)$$

```
   Приклад:
(%i10)     diff (exp (x * y * z));
```

$$(\%o10)$$

$$x\,y\,e^{x\,y\,z}\,del\,(z) + x\,z\,e^{x\,y\,z}\,del\,(y) + y\,z\,e^{x\,y\,z}\,del\,(x)$$

Якщо вказати апостроф перед символом $diff$**, то похідна не обчислюється**та спрощення, зазвичай передбачене за умовчанням, не здійснюється.

Приклад:

Створюємо функцію $f(x, z)$:

```
(%i18)     f(x,z):=x^2*z+z^2*x;
```

$$(\%o18) \qquad f\left(x,z\right):=x^2\,z+z^2\,x$$

Обчислюємо диференціальний вираз:

```
(%i19)     diff (f (x, z), x, 2) + diff (f (x, z), z, 3)
+
     diff (f (x, z), x) * x ^ 2;
```

$$(\%o19) \qquad x^2\,\left(z^2+2\,x\,z\right)+2\,z$$

Проводимо формальне диференціювання, не обчислюючи безпосередньо результат:

```
(% i20)    'diff (f (x, z), x, 2) + 'diff (f (x, z), z,
3) +
     'diff (f (x, z), x) * x ^ 2;
```

$$(\%o20)$$

$$\frac{d^3}{d\,z^3}\,\left(x\,z^2+x^2\,z\right)+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\left(x\,z^2+x^2\,z\right)+x^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\left(x\,z^2+x^2\,z\right)\right)$$

3.4 Екстремуми функцій

3.4.1 Знаходження максимумів та мінімумів

Точки, де досягається найбільше чи найменше значення функції, називаються відповідно точками максимуму або мінімуму функції.

Визначення 1.Крапка x_0 називається точкою максимуму функції $f(x)$, якщо в деякій околиці точки x_0 виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$(Див. рис. 3.3).

Визначення 2.Крапка x_1 називається точкою мінімуму функції $f(x)$, якщо в деякій околиці точки x_1 виконується нерівність $f(x) \leq f(x_1)$(Див. рис. 3.3).

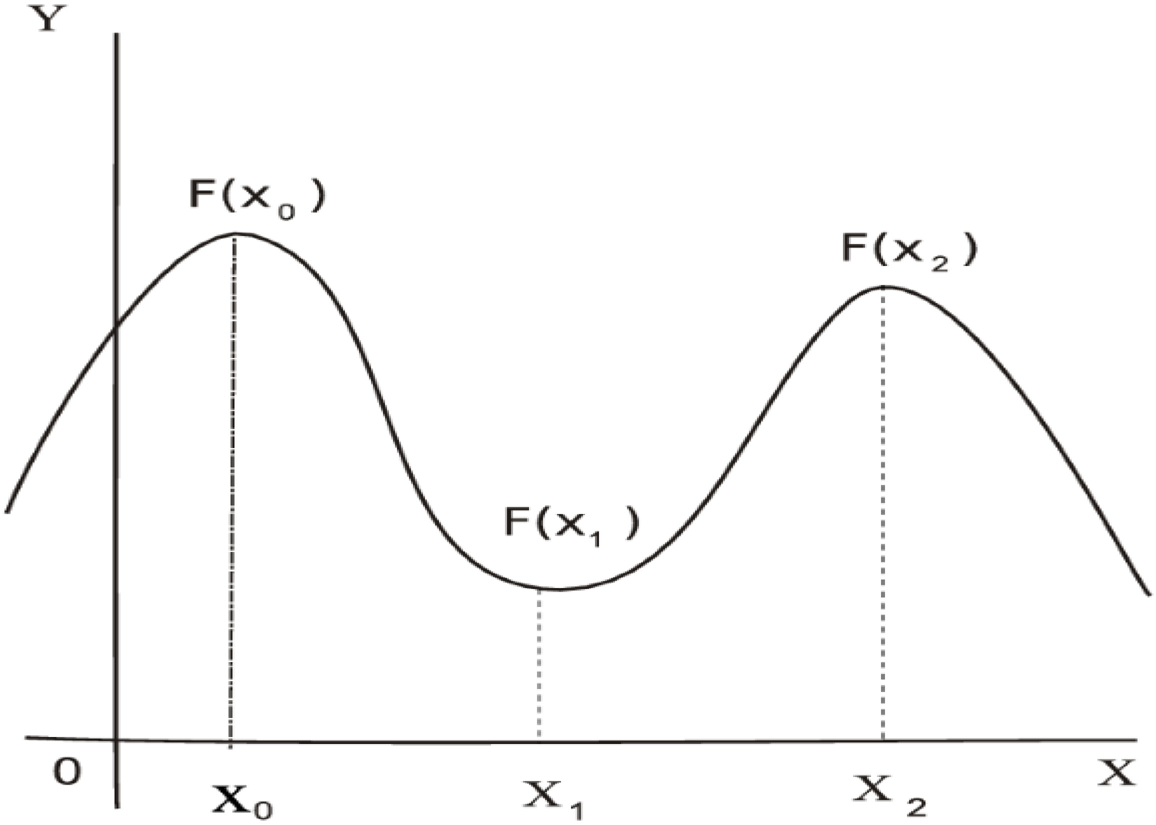
Значення функції у точках x_0 і x_1 називаються відповідно максимумом та мінімумом функції. Максимум та мінімум функції об'єднуються загальною назвою екстремуму функції.

Екстремум функції часто називають локальним екстремумом, підкреслюючи тим самим, що поняття екстремуму пов'язане лише з досить малою околицею точки x_0. Так що на одному проміжку функція може мати кілька екстремумів, причому може статися так, що мінімум в одній точці більше максимуму в іншій.

Наявність максимуму (або мінімуму) в окремій точці проміжку X зовсім не означає, що в цій точці функція $f(x)$ приймає найбільше (найменше) значення цьому проміжку (чи, як кажуть має глобальний максимум (мінімум)).

3.4.1.1 Теорема Ферма

Теорема Ферма. Якщо диференційована на проміжку X функція $y = f(x)$ досягає найбільшого чи найменшого значення у внутрішній точці x_0, тоді похідна функції у цій точці дорівнює нулю, тобто. $f'(x_0) = 0$.



Мал. 3.3. Екстремуми функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на проміжку X і в точці $x_0 \in X$ набуває найменшого значення (див. рис. 3.4).

Тоді

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$$

якщо $x_0 + \Delta x \in X$ і, отже

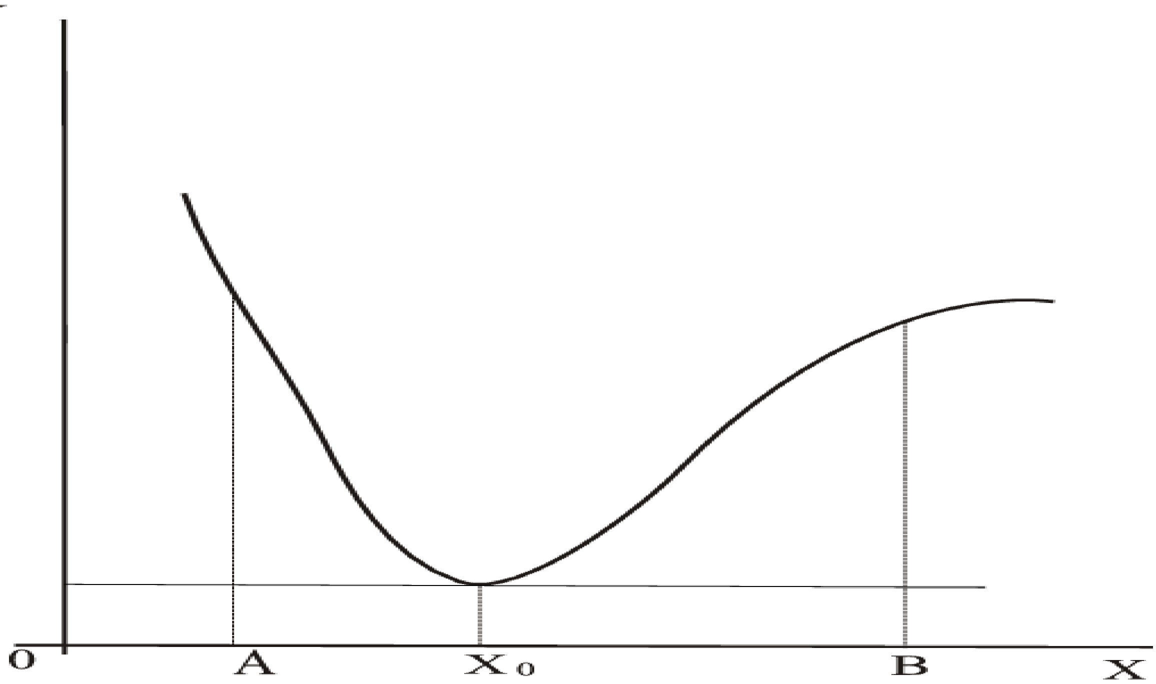
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$$

при досить малих Δx і незалежно від знаку Δx .

Тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \text{ при } \Delta x > 0 \text{ (справа от } x_0);$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ при $\Delta x < 0$ (слева от x_0).



Мал. 3.4. Ілюстрація теореми Ферма

Переходячи до межі праворуч і зліва отримаємо

$\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0.$

Оскільки функція диференційована на проміжку X, то межі праворуч і зліва рівні

$\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$

Звідси $f'(x_0) = 0$.

Аналогічну послідовність міркувань можна збудувати і для максимуму.

Теорему Ферма часто називають необхідною умовою екстремуму функції, що диференціюється.

Геометричний сенс теореми Ферма: у точці екстремуму, що досягається всередині проміжку X, що стосується графіку функції паралельна осі абсцис.

3.4.1.2 Необхідна умова екстремуму

Якщо у точці x_0 диференційована функція $f(x)$ має екстремум, то деякій околиці цієї точки виконуються умови теореми Ферма, отже, похідна функції у цій точці дорівнює нулю, тобто. $f'(x_0) = 0$. Але функція може мати екстремум і в точках, де вона не диференційована. Так, наприклад, функція $y = |x|$ має екстремум (мінімум) у точці $x = 0$ але не диференційована в ній. Функція y=$\sqrt[3]{x^2}$

також має в точці $x = 0$ мінімум, а її похідна в цій точці нескінченна: $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}},\ y'(0) = \infty$.

Тому необхідна умова екстремуму може бути сформульована в такий спосіб.

Для того, щоб функція $y = f(x)$ мала екстремум у точці x_0, необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю ($f'(x_0) = 0$) чи не існувала.

Крапки, у яких виконано необхідну умову екстремуму, називаються критичними (або стаціонарними). Але критична точка не обов'язково є точкою екстремуму.

приклад.Знайти критичні точки функції та переконатися у наявності чи відсутності екстремуму у цих точках: 1. $y = x^2 + 1$; 2. $y = x^3 - 1$.

1. $y' = 2x.\ y'(x) = 0$ при $x = 0$. У точці $x = 0$ функція $y = x^2 + 1$ має мінімум.
2. $y' = 3x^2.\ y'(x) = 0$ при $x = 0$. У точці $x = 0$ функція $y = x^3 - 1$ не має екстремуму. Функція $y = x^3 - 1$ зростає по всій числовій осі.

Отже, знаходження екстремумів функції потрібно додаткове дослідження критичних точок.

приклад: Дослідити на наявність екстремуму наступну функцію

$y(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

Задаємо досліджувану функцію

```
(%i1)    f(x):=x^3-3*x^2+3*x+2;
```

$(\%o1)\qquad f(x) := x^3 - 3\,x^2 + 3\,x + 2$

Похідну у формі функції визначаємо явно, використовуючи функцію $define$

```
(%i2) define(df(x),diff(f(x),x));
```

$(\%o2)\qquad df(x) := 3\,x^2 - 6\,x + 3$

Вирішуючи рівняння $df(x) = 0$ (Тобто. $f'(x) = 0$, знаходимо критичні точки

```
(%i3) solve(df(x)=0,x);
```

$(\%o3)\qquad [x = 1]$

В даному випадку критична точка одна - $x = 1$.

3.4.1.3 Перша достатня умова екстремуму

Теорема. Якщо під час переходу через точку x_0 похідна функції, що диференціюється $y = f(x)$ змінює свій знак з плюсу на мінус, то точка x_0 є точка максимуму функції $y = f(x)$, а якщо з мінусу на плюс, то точка мінімуму.

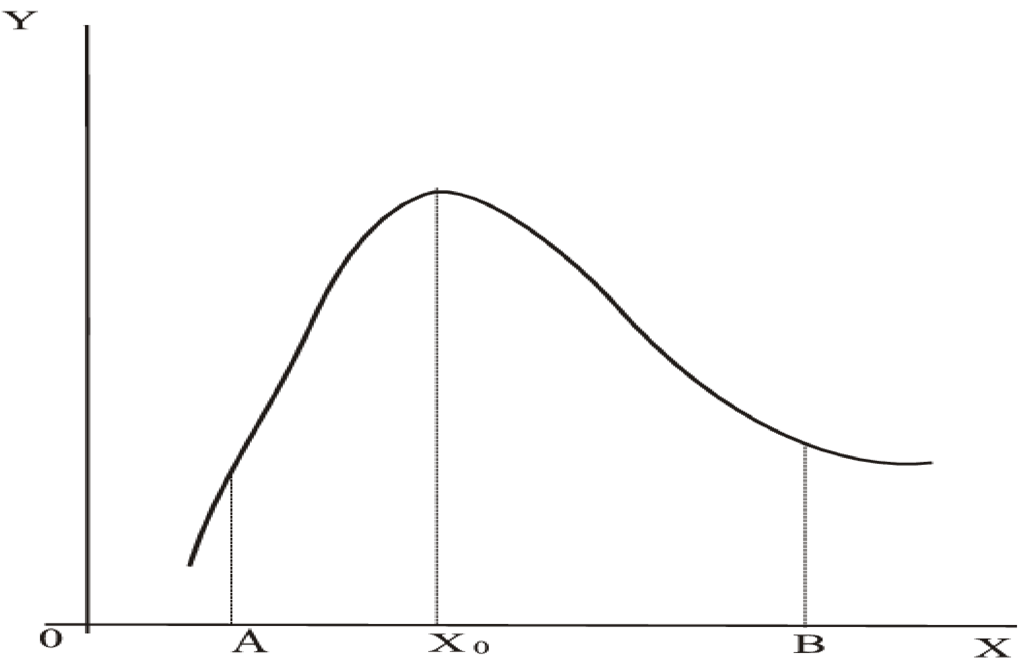
Нехай похідна змінює знак із плюсу на мінус, тобто. у деякому інтервалі (a, x_0) похідна позитивна ($f'(x) > 0$), а в деякому інтервалі (x_0, b) - негативна ($f'(x) < 0$) (див. рис. 3.5). Тоді відповідно до достатньої умови монотонності функція $f(x)$ зростає на інтервалі (a, x_0) і зменшується на інтервалі (x_0, b).

За визначенням зростаючої функції $f(x_0) \geq f(x)$ при всіх $x \in (a, x_0)$, а за визначенням спадної функції $f(x) \leq f(x_0)$ при всіх $x \in (x_0, b)$, тобто. $f(x_0) \geq f(x)$ при всіх $x \in (a, b)$, отже, x_0 - точка максимуму функції $y = f(x)$.

Аналогічно розглядається випадок, коли похідна змінює знак із мінуса на плюс.

Зазначимо, що диференційність функції у самій точці x_0 не використовувалася за підтвердження теореми. Насправді вона й не потрібна – достатньо, щоб функція була безперервною у точці x_0.

Якщо зміна знака похідної немає, то екстремуму немає. Однак при роботі з системами комп'ютерної математики зручніша друга достатня умова екстремуму.



Мал. 3.5. Необхідна умова екстремуму

3.4.1.4 Друга достатня умова екстремуму

Теорема. Якщо перша похідна $f'(x)$ двічі диференційованої функції $y = f(x)$ дорівнює нулю в деякій точці x_0, а друга похідна у цій точці $f''(x_0)$ позитивна, то x_0 є точка максимуму функції $y = f(x)$; якщо $f''(x_0)$ негативна, то x_0 - Точка максимуму.

Нехай $f'(x_0) = 0$, а f $f''(x_0) > 0$. Це означає, що

$$f''(x) = (f'(x))' > 0$$

також і в деякій околиці точки x_0, тобто. $f'(x)$ зростає на деякому інтервалі (a, b), Що містить точку x_0.

Але $f'(x_0) = 0$, отже, на інтервалі (a, x_0) $f'(x) < 0$, а на інтервалі (x_0, b) $f'(x) > 0$, тобто. $f'(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з мінусу плюс, тобто. x_0 - Точка мінімуму.

Аналогічно розглядається випадок $f'(x_0) = 0$ і $f''(x_0) < 0$.

Продовжимо дослідження функції

$$y(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$$

Як встановлено вище, є одна критична точка: $x = 1$.

Задаємося функцією $d2f(x)$

```
(% i4)      define(d2f(x),diff(df(x),x));
```

$$(\%o4) \qquad d2f(x) := 6x - 6$$

Обчислюємо значення другої похідної у критичній точці:

```
(% i5)      map(d2f, % o3);
```

$$(\%o5) \qquad [6x - 6 = 0]$$

У цьому прикладі неможливо визначити, чи є точка $x = 1$ екстремумом досліджуваної функції, т.к. друга похідна в ній дорівнювала 0. Слід звернути увагу на спосіб обчислення - функція $d2f(x)$ застосовується до всіх елементів списку, отриманого при вирішенні рівняння $f'(x) = 0$ (використовується вбудована функція Maxima map).

Скористаємося першою достатньою ознакою наявності екстремуму

```
(%i6) df(0);
```

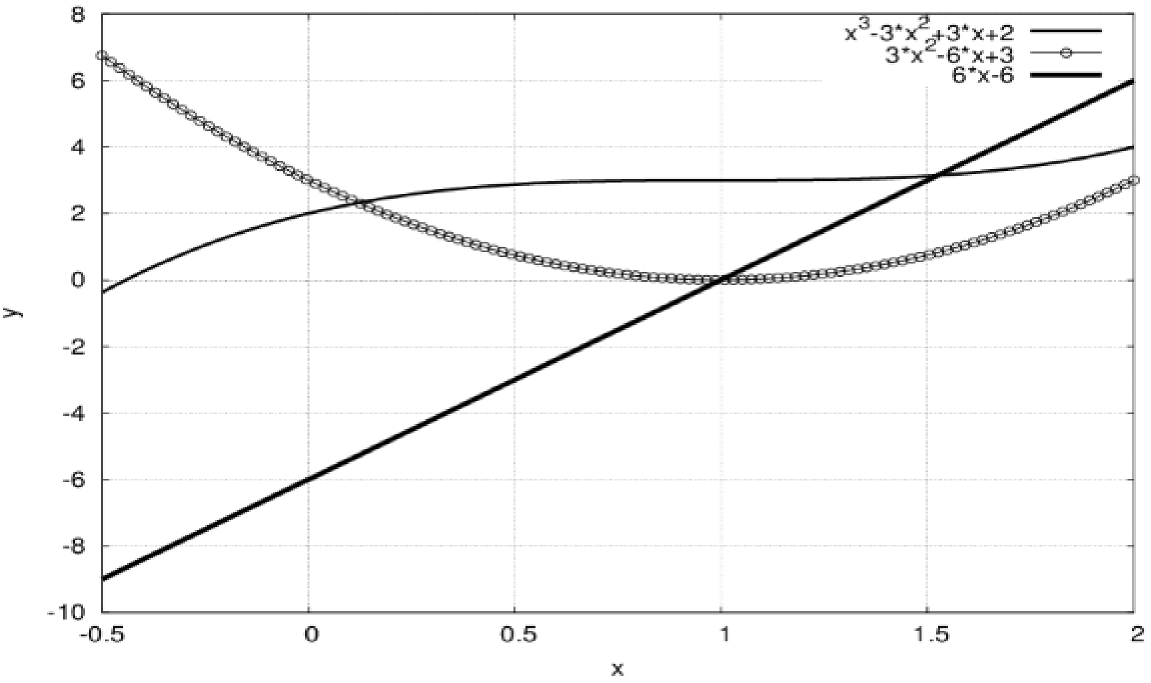
$$(\%o6) \qquad 3$$

```
(%i7) df(2);
```

$$(\%o7) \qquad 3$$

Як видно з наведеного результату, перша похідна не змінює знак критичної точки, що свідчить про відсутність екстремуму в ній.

Отриманий результат ілюструється графіком досліджуваної функції та її похідних (див. рис. 3.6).



Мал. 3.6.Приклад дослідження функції

3.4.1.5 Схема дослідження функції y = f(x) на екстремум

1. Знайти похідну $y' = f'(x)$.

2. Знайти критичні точки функції, у яких похідна $f'(x) = 0$ чи не існує.

3.1. Дослідити знак похідної ліворуч та праворуч від кожної критичної точки та зробити висновок про наявність екстремумів функції.

Або

3.2. Знайти другу похідну $f''(x)$ та визначити її знак у кожній критичній точці.

4. Знайти екстремуми (екстремальні значення) функції.

приклад.Дослідити на екстремум функцію $y = x(x-1)^3$.

1. y' = (x - 1) ^ 3 + 3x (x - 1) ^ 2 = (x - 1) ^ 2 (4x - 1).

2. Критичні точки $x_1 = 1$ і $x_2 = \frac{1}{4}$.

3. Зміна знака похідної під час переходу через точку x_1 не відбувається, тому в цій точці немає екстремуму.

$$y'' = 2(x-1)(4x-1) + 4(x-1)^2 = 2[(x-1)(6x-3)].$$

$y''(x_2) > 0$ тому в цій точці спостерігається мінімум функції $y = x(x-1)^3$.

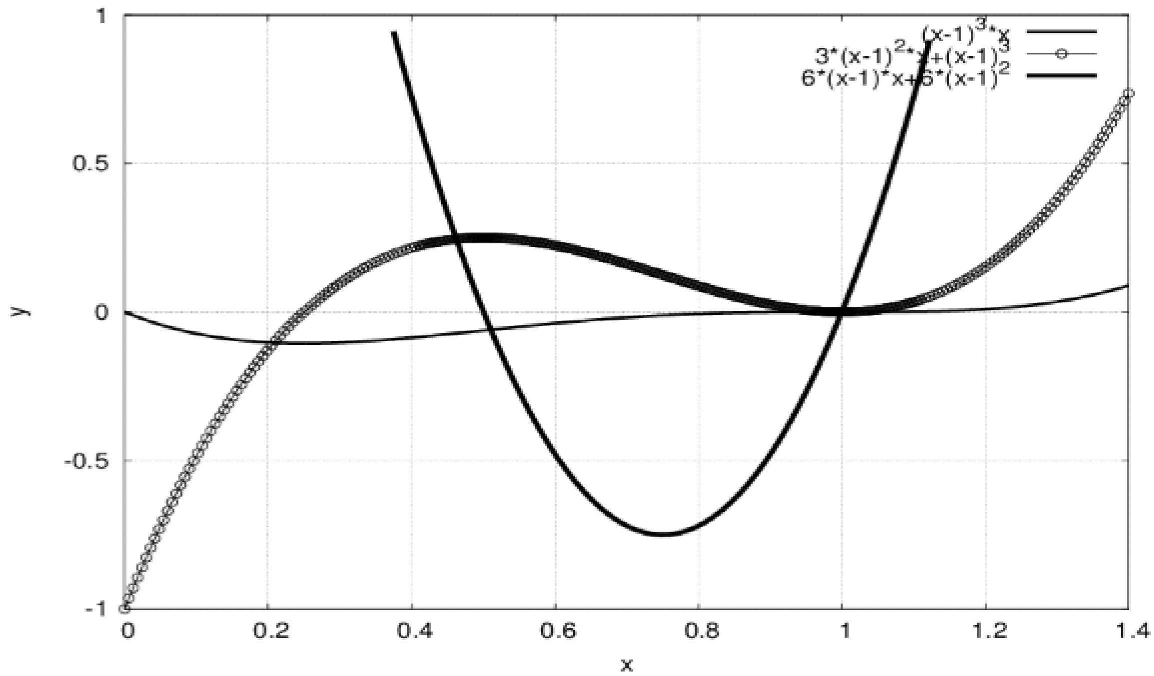
4. $y_{min} = y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$.

Виконаємо той же розрахунок за допомогою Maxima

```
(%i13)      f(x):=x*(x-1)^3;
```
(%o13) $$f(x) := x(x-1)^3$$
```
(%i14)      define(df(x),diff(f(x),x));
```
(%o14) $$df(x) := 3(x-1)^2 x + (x-1)^3$$
```
(%i15)      solve(df(x)=0,x);
```
(%o15) $$\left[x = \frac{1}{4}, x = 1\right]$$
```
(%i16)      define(d2f(x),diff(df(x),x));
```
(%o16) $$d2f(x) := 6\ (x-1)\ x + 6(x-1)^2$$
```
(%i17)      map(d2f, % o15);
```
(%o17)
$$\left[6\ (x-1)\ x+6(x-1)^2 = \frac{9}{4}, 6\ (x-1)\ x+6(x-1)^2 = 0\right]$$

У точці $x = 1$ друга похідна дорівнює 0, тому обчислюємо значення першої похідної ліворуч і праворуч $x = 1$:
```
(%i18)  df(2);
```
(%o18) $$7$$
```
(%i19)  df(1/3);
```
(%o19) $$\frac{4}{27}$$

Похідна на околиці точки $x = 1$ не змінює знак, тому екстремум у досліджуваної функції один - точка $x = \frac{1}{4}$. Оскільки $d2f(\frac{1}{4}) > 0,\ x = \frac{1}{4}$- Точка мінімуму. Ілюстрація отриманого результату – на рис. 3.7.



Мал. 3.7.Приклад дослідження функції на екстремум

3.4.1.6 Знаходження найбільших та найменших значень функції

Найбільше або найменше значення функції на деякому відрізку може досягатися як у точках екстремуму, так і в точках кінцях відрізка.

Нехай функція $y = f(x)$ визначено на деякому відрізку $[a, b]$.

Знаходження найбільших та найменших значень функцій відбувається за наступною схемою.

1. Знайти похідну $f'(x)$.

2. Знайти критичні точки функції, у яких $f'(x_0) = 0$ чи не існує.

3. Знайти значення функції в критичних точках і кінцях відрізка і вибрати їх найбільше f_{MAX} і найменше f_{MIN} значення. Це і буде найбільше і найменше значення функції на досліджуваному відрізку.

приклад.Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 3x^2 - 6x$ на відрізку [0, 3].

Аналітичний розрахунок:

1. $y' = 6x - 6; y'' = 6$.

2. $x_0 = 1$.

3. $y(1) = -3; y(0) = 0; y(3) = 9$.

У точці $x = 1$ найменше значення функції, а точці $x = 3$ - Найбільше.

Розрахунок з використанням Maxima:

Знаходимо критичні точки досліджуваної функції

```
(%i29)      f(x):=3*x^2-6*x;
```

$$(\%o29) \qquad f(x) := 3\,x^2 - 6\,x$$

```
(% i30)     define(df(x),diff(f(x),x));
```

$$(\%o30) \qquad df(x) := 6\,x - 6$$

```
(%i31)      solve(df(x)=0,x);
```

$$(\%o31) \qquad [x = 1]$$

Результат розрахунку - список, що включає один елемент ($[x = 1]$).

Створюємо новий список, що включає граничні значень та критичні точки:

```
(%i32)      L: [% o31 [1], x = 0, x = 3];
```

$$(\%o32) \qquad [x = 1, x = 0, x = 3]$$

Застосовуємо функцію $f(x)$ до кожного елемента списку L :

```
(%i33)      map(f, L);
```

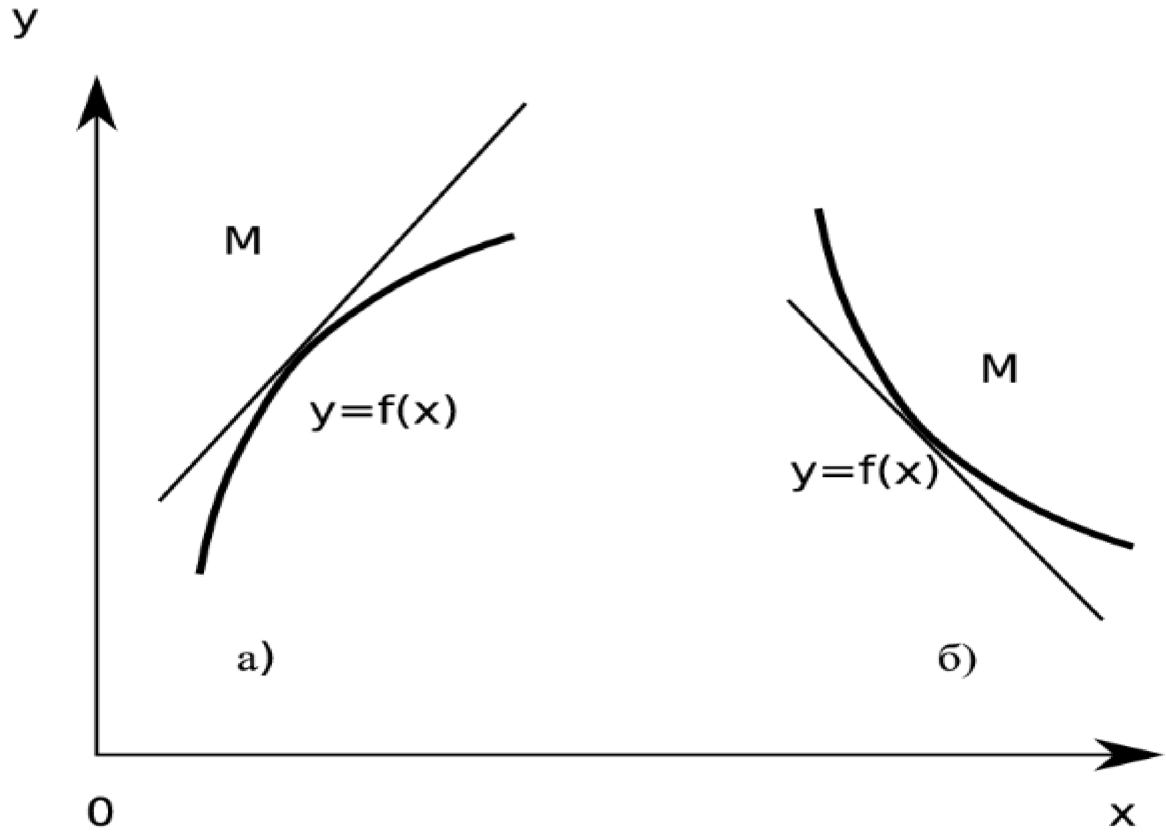
$$(\%o33) \quad [3\,x^2 - 6\,x = -3, 3\,x^2 - 6\,x = 0, 3\,x^2 - 6\,x = 9]$$

Результат – найбільші та найменші значення – знаходимо у списку отриманих значень.

3.4.2 Випуклість функції

Визначення.Графік функції $y = f(x)$ називається опуклим в інтервалі (a, b), якщо він розташований нижче за дотичну, проведену в будь-якій точці цього інтервалу (див. рис. 3.8а).

Графік функції $y = f(x)$ називається увігнутим в інтервалі (a, b), якщо він розташований вище за дотичну, проведену в будь-якій точці цього інтервалу (див. рис. 3.8б).



Мал. 3.8.Випуклі та увігнуті функції.

3.4.2.1 Необхідні та достатні умови опуклості (увігнутості) функції

Для визначення опуклості (увігнутості) функції певному інтервалі можна використовувати такі теореми.

Теорема 1.Нехай функція $f(x)$ визначена та безперервна на інтервалі X і має кінцеву похідну $f'(x)$. Для того, щоб функція $f(x)$ була опуклою (увігнутою) в X, необхідно і достатньо, щоб її похідна $f'(x)$ убувала (зростала) у цьому інтервалі.

Теорема 2.Нехай функція $f(x)$ визначена та безперервна разом зі своєю похідною $f'(x)$ на X і має всередині X безперервну другу похідну $f''(x)$. Для опуклості (увігнутості) функції $f(x)$ в X необхідно і достатньо, щоб усередині X

$f''(x) \le 0; f''(x) \ge 0.$

Доведемо теорему 2 для випадку опуклості функції $f(x)$.

Необхідність. Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$. Розкладемо функцію $f(x)$ біля крапки x_0 у ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x),$$
$$r_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1).$$

Рівняння дотичної до кривої $f(x)$ у точці, що має абсцису x_0:

$$Y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тоді перевищення кривої $f(x)$ над дотичною до неї в точці x_0 одно

$$f(x) - Y(x) = r_1(x).$$

Таким чином, залишок $r_1(x)$ дорівнює величині перевищення кривої $f(x)$ над дотичною до неї в точці x_0. Через безперервність $f''(x)$, якщо $f''(x_0) > 0$, то й $f''(x_0 + \theta(x - x_0)) > 0$ для x , Що належать досить малої околиці точки x_0, а тому, очевидно, і $r_1(x) > 0$ для будь-якого відмінного від x_0 значення x , що належить до вказаної околиці.

Значить графік функції $f(x)$ лежить вище за дотичну $Y(x)$ і крива $f(x)$ випукла у довільній точці $x_0 \in X$.

Достатність. Нехай крива $f(x)$ опукла на проміжку X . Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$.

Аналогічно попередньому розкладемо функцію $f(x)$ біля крапки x_0 у ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x),$$
$$r_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1).$$

Перевищення кривої $f(x)$ над дотичною до неї в точці, що має абсцису x_0, що визначається виразом $Y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ одно

$$f(x) - Y(x) = r_1(x).$$

Так як перевищення позитивно для досить малої околиці точки x_0, то позитивна та друга похідна $f''(x_0 + \theta(x - x_0))$. При прагненні $x \to x_0$ отримуємо, що для довільної точки x_0 $f''(x_0) > 0$.

приклад.Дослідити на опуклість (увігнутість) функцію $y = x^2 - 16x + 32$.

Її похідна $y' = 2x - 16$ зростає по всій числовій осі, отже по теоремі 1 функція увігнута на $(-\infty, \infty)$.

Її друга похідна $y'' = 2 > 0$ тому по теоремі 2 функція увігнута на $(-\infty, \infty)$.

3.4.2.2 Точки перегину

Визначення. Точкою перегину графіка безперервної функції називається точка, що розділяє інтервали, в яких функція опукла та увігнута.

З цього визначення випливає, що точки перегину - це точки точки екстремуму першої похідної. Звідси випливають такі твердження для необхідного та достатнього умов перегину.

Теорема (необхідна умова перегину). Для того, щоб крапка x_0 була точкою перегину двічі диференційованої функції $y = f(x)$ необхідно, щоб її друга похідна в цій точці дорівнювала нулю ($f''(x_0) = 0$) чи не існувала.

Теорема (достатня умова перегину). Якщо друга похідна $f''(x)$ двічі диференційованої функції $y = f(x)$ при переході через деяку точку x_0 змінює знак, то x_0 є точка перегину.

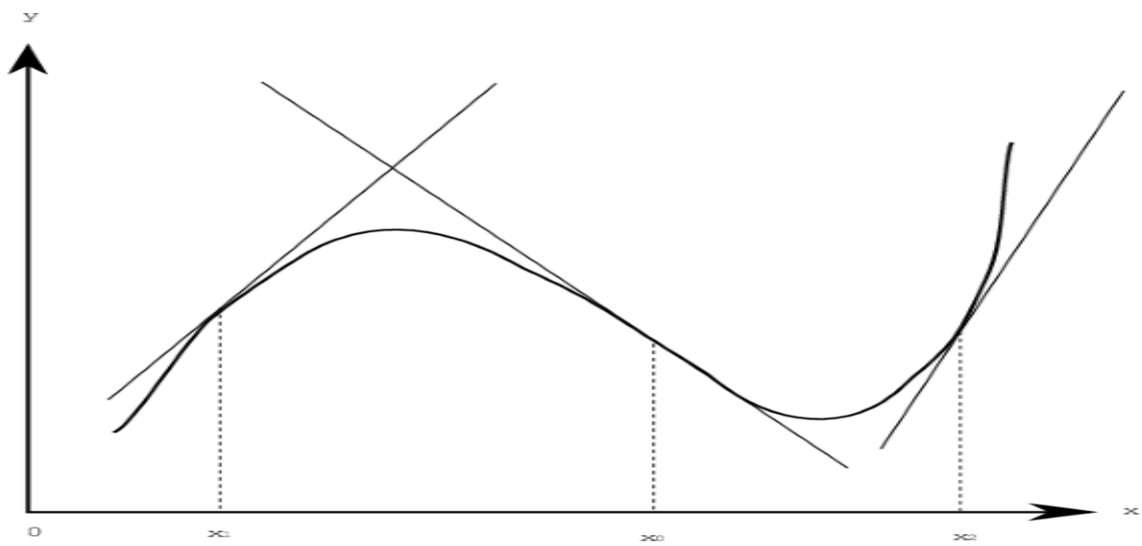
Зазначимо, що у самій точці друга похідна $f''(x_0)$ може не існувати.

Геометрична інтерпретація точок перегину ілюструється рис. 3.9

На околиці точки x_1 функція опукла і графік її лежить нижче за дотичну, проведену в цій точці. На околиці точки x_2 функція увігнута і графік її лежить вище за дотичну, проведену в цій точці. У точці перегину x_0 Дотична розділяє графік функції на області опуклості та увігнутості.

3.4.2.3 Дослідження функції на опуклість та наявність точок перегину

1. Знайти другу похідну $f''(x)$.
2. Знайти точки, у яких друга похідна $f''(x) = 0$ чи не існує.



Мал. 3.9.Точки перегину.

3. Дослідити знак другої похідної ліворуч і праворуч від знайдених точок та зробити висновок про інтервали опуклості або увігнутості та наявність точок перегину.

приклад. Дослідити функцію $y(x) = 2x^3 - 6x^2 + 15$ на опуклість та наявність точок перегину.

1. $y' = 6x^2 - 12x; y'' = 12x - 12$.

2. Друга похідна дорівнює нулю при $x_0 = 1$.

3. Друга похідна $y''(x)$ змінює знак при $x_0 = 1$, значить точка $x_0 = 1$ - Точка перегину.

На інтервалі $(-\infty, 1)$ $y''(x) < 0$, отже функція $y(x)$ випукла на цьому інтервалі.

На інтервалі $(1, \infty)$ $y''(x) > 0$, отже функція $y(x)$ увігнута на цьому інтервалі.

3.4.2.4 Загальна схема дослідження функцій та побудови графіка

При дослідженні функції та побудові її графіка рекомендується використовувати таку схему:

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність – непарність. Нагадаємо, що графік парної функції симетричний щодо осі ординат, а графік непарної функції симетричний щодо початку координат.
3. Знайти вертикальні асимптоти.
4. Дослідити поведінку функції у нескінченності, знайти горизонтальні чи похилі асимптоти.
5. Знайти екстремуми та інтервали монотонності функції.
6. Знайти інтервали опуклості функції та точки перегину.
7. Знайти точки перетину з осями координат.

Дослідження функції проводиться одночасно із побудовою її графіка.

приклад. Дослідити функцію $y(x) = f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ та побудувати її графік.

1. Область визначення функції - $(-\infty, -1)\bigcup(-1,1)\bigcup(1,\infty)$.

2. Досліджувана функція – парна $y(x) = y(-x)$ тому її графік симетричний щодо осі ординат.

3. Знаменник функції звертається в нуль при $x = \pm 1$ тому графік функції має вертикальні асимптоти. $x = -1$ і $x = 1$.

Крапки $x = \pm 1$ є точками розриву другого роду, оскільки межі ліворуч і праворуч у цих точках прагнуть до ∞ .

$$\lim_{x\to 1-0} y(x) = \lim_{x\to -1+0} y(x) = \infty; \lim_{x\to 1+0} y(x) = \lim_{x\to -1-0} y(x) = -\infty.$$

4. Поведінка функції у нескінченності.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = -1,$$

тому графік функції має горизонтальну асимптоту $y = -1$.

5. Екстремуми та інтервали монотонності. Знаходимо першу похідну

$$y'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)}.$$

$y'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, -1)\bigcup(-1,0)$ тому в цих інтервалах функція $y(x)$ зменшується.

$y'(x) > 0$ при $x \in (0,1)\bigcup(1,\infty)$ тому в цих інтервалах функція $y(x)$ зростає.

$y'(x) = 0$ при $x = 0$ тому точка $\mathrm{x}_0 = 0$ є критичною точкою.

Знаходимо другу похідну

$$y''(x) = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Оскільки $y''(0) > 0$, то крапка $\mathrm{x}_0 = 0$ є точкою мінімуму функції $y(x)$.

6. Інтервали опуклості та точки перегину.

Функція $y''(x) > 0$ при $x \in (-1,1)$, означає на цьому інтервалі функція $y(x)$ увігнута.

Функція $y''(x) < 0$ при $x \in (-\infty, -1)\bigcup(1,\infty)$, отже, на цих інтервалах функція $y(x)$ випукла.

Функція $y''(x)$ ніде не звертається в нуль, отже, точок перегину немає.

7. Точки перетину з осями координат.

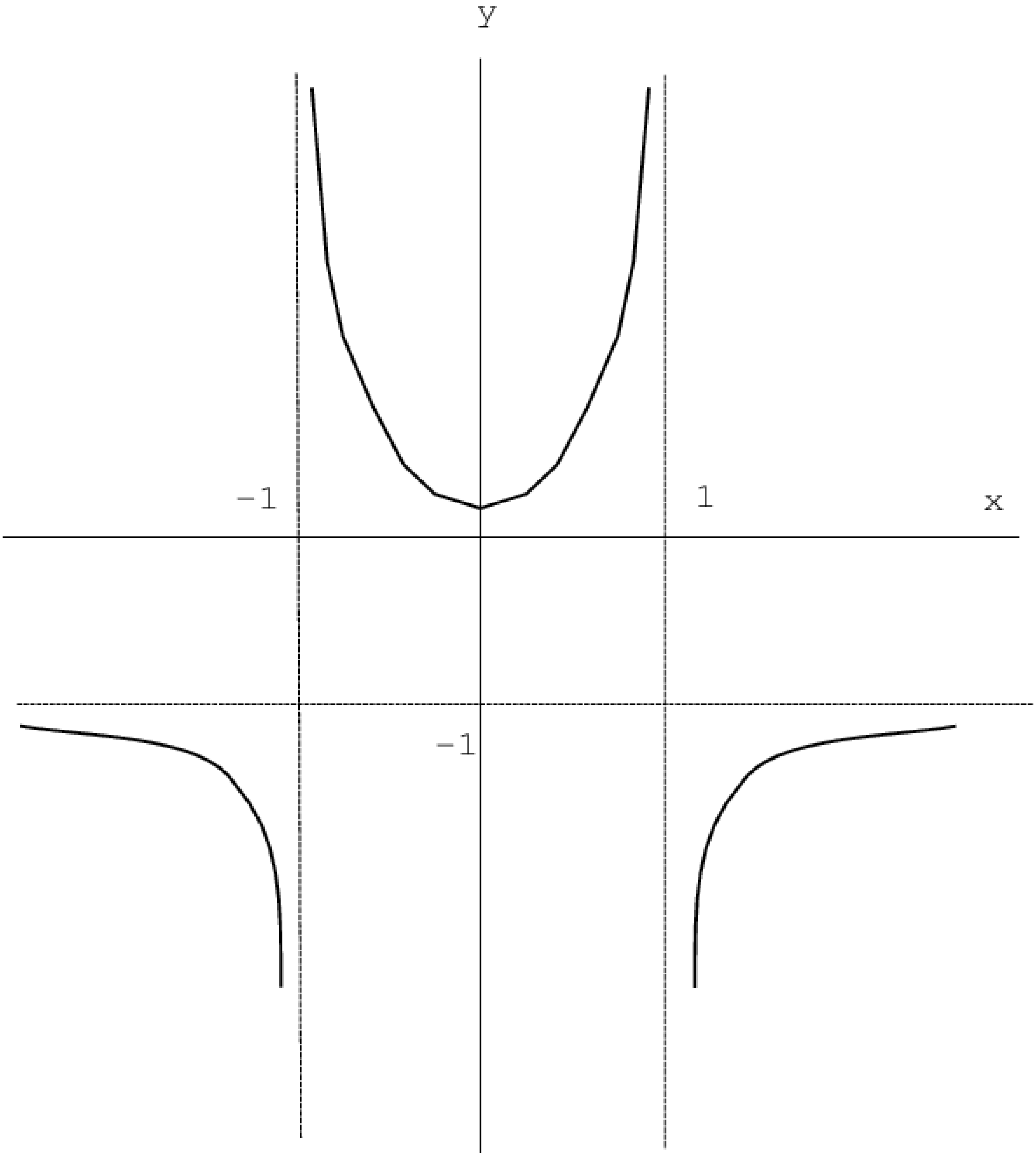
Рівняння $f(0) = y$, має рішення $y = 1$, означає точка перетину графіка функції $y(x)$ з віссю ординат (0, 1).

Рівняння $f(x) = 0$ немає рішення, отже точок перетину з віссю абсцис немає.

З урахуванням проведеного дослідження можна будувати графік функції

$$y(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

Схематично графік функції $y(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ зображено на рис. 3.10.



Мал. 3.10. Графік функції

3.4.2.5 Асимптоти графіка функції

Визначення. Асимптотоюграфіка функції y = f(x) називається пряма, що володіє тією властивістю, що відстань від точки ($x, f(x)$) до цієї прямої прагне 0 при необмеженому видаленні точки графіка від початку координат.

Асимптоти бувають 3 видів: вертикальні (див. рис. 3.11а), горизонтальні (див. рис. 3.11б) та похилі (див. рис. 3.11в).

Асимптоти знаходять, використовуючи такі теореми:

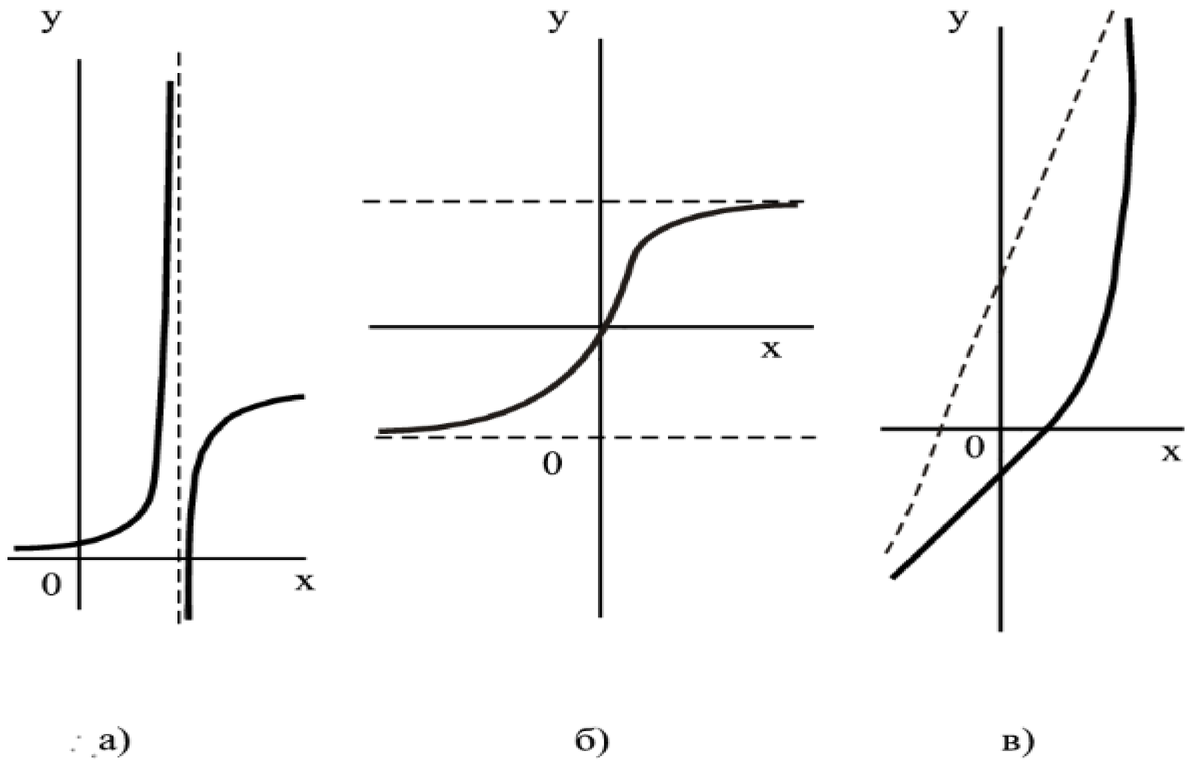
Теорема 1.Нехай функція $y = f(x)$визначена в деякій околиці точкиx_0 (виключаючи, можливо, саму цю точку) і хоча б одну з меж функції при $x \to x_0 \to 0$(ліворуч) або$x \to x_0 + 0$(праворуч) дорівнює нескінченності. Тоді пряма є$x = x_0$вертикальною асимптотою графіка функції$y = f(x)$.

Вертикальні асимптоти$x = x_0$слід шукати в точках розриву функції $y = f(x)$.

Теорема 2.Нехай функція$y = f(x)$визначена за досить великихx і існує кінцева межа функції

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = b.$$

Тоді пряма $y = b$ є горизонтальна асимптота графіка функції$y = f(x)$.



Мал. 3.11. Асимптоти

Теорема 3.Нехай функція$y = f(x)$визначена за досить великихx і існують кінцеві межі

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$
і
$$\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-kx]=b.$$

Тоді пряма $y=kx+b$ є похилою асимптотою графіка функції $y=f(x)$.

приклад.Знайти асимптоти графіка дробово-раціональної функції

$$y(x)=\frac{ax+b}{cx+d};c\neq 0;ad-bc\neq 0.$$

Якщо $c=0$, то дробово-раціональна функція стає лінійною

$$y(x)=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}.$$

Особлива точка $x=-d/c$. Знайдемо межу $\lim\limits_{x\to -d/c}f(x)$.

Перепишемо дробово-раціональну функцію у вигляді:

$$y(x)=\frac{ax+b}{c(x+d/c)}$$

Оскільки $ad-bc\neq 0$ то при $x\to d/c$ чисельник дробово-раціональної функції не прагне нуля. Тому пряма $x=-d/c$ - Асимптота графіка дробово-раціональної функції.

Знайдемо межу $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a+b/x}{c+d/c}=\frac{a}{c}$$

$y=a/c$ — є горизонтальною асимптотою дрібно-раціональної функції.

приклад.Знайти асимптоти кривої $y(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1.$$

Тому $k=1$.

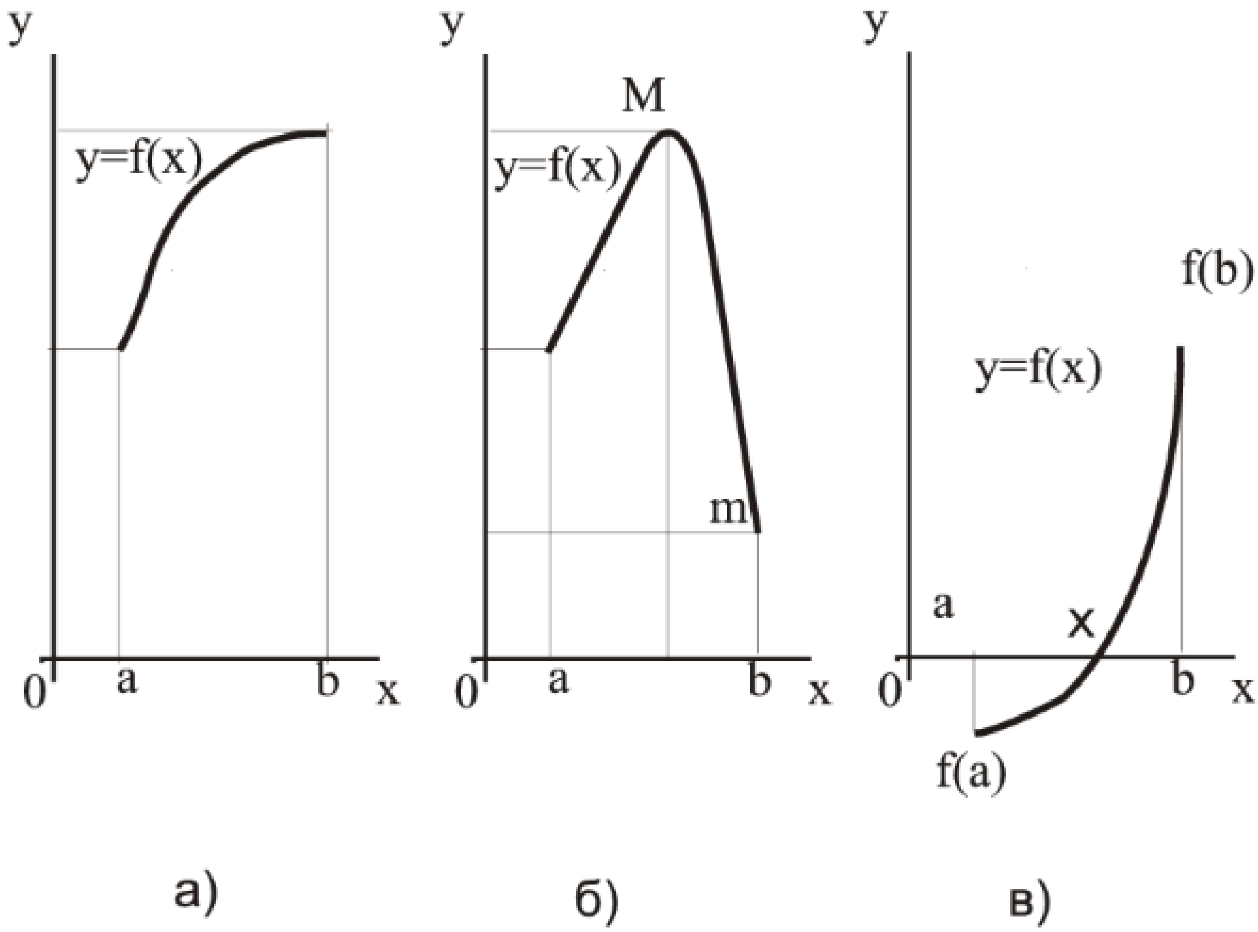
Тепер шукаємо b.

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{x^2+1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)$$

Функція $y(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ має похилий асимптоту $y=x$.

3.4.2.6 Властивості функцій, безперервних на відрізку. Теореми Вейєрштраса

1. Якщо функція $y = f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$, вона обмежена у цьому відрізку, тобто. існують такі постійні та кінцеві числа m і M, що
   $m \le f(x) \le M \quad$ при $\quad a \le x \le b$
   (Див. рис. 3.12а).
2. Якщо функція $y = f(x)$ безперервна на відрізку [a, b], то вона досягає на цьому відрізку найбільшого значення M та найменшого значення m (див. рис. 3.12б).
3. Якщо функція $y = f(x)$ безперервна на відрізку [a, b], та значення її на кінцях відрізка $f(a)$ і $f(b)$ мають протилежні знаки, то всередині відрізка знайдеться крапка $\xi \in (a, b)$, така, що $f(\xi) = 0$ (Див. рис. 3.12в).



Мал. 3.12. Ілюстрації до теорем Вейєрштраса

3.4.3 Диференціювання функцій кількох змінних

Для визначення набору приватних похідних функції кількох змінних (компонентів градієнта) використовується функція $gradef$ у форматі $gradef(f(x_1,...,x_n),g_1,...,g_m)$ або $gradef(a,x,expr)$

Вираз $gradef(f(x_1,...,x_n),g_1,...,g_m)$ визначає $g_1,g_2,\cdots g_n$ як приватні похідні функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$ за змінними $x_1,x_2,...,x_n$ відповідно.

Залежно між змінними можна явно вказати за допомогою функції $depends$, яка дозволяє декларувати, що змінна залежить від однієї чи кількох інших змінних. Наприклад, якщо залежність f і x відсутня, вираз $diff(f,x)$ повертає 0. Якщо декларувати її за допомогою $depends(f,x)$, вираз $diff(f,x)$ повертає символьну похідну.

Приклад:

```
(%i1) depends(y,x);
```
$$(\%o1) \qquad [y(x)]$$
```
(%i2) gradef(f(x,y),x^2,g(x,y));
```
$$(\%o2) \qquad f(x,y)$$
```
(%i3) diff (f (x, y), x);
```
$$(\%o3) \qquad g(x,y)\left(\frac{d}{d\,x}y\right)+x^2$$
```
(% i4)     diff (f (x, y), y);
```
$$(\%o4) \qquad g(x,y)$$

Друга форма звернення до $gradef$ фактично встановлює залежність a від x . За допомогою $gradef$ можна визначити похідні деякої функції, навіть якщо вона сама невідома, за допомогою $diff$ визначити похідні найвищих порядків.

Для прямих обчислень, пов'язаних із операціями векторного аналізу, необхідно завантажити пакет vect. Крім того, застосування операторів $div,curl,grad,laplasian$ до деякого виразу використовується функція $express$.

Приклад: Обчислення градієнта функції трьох змінних

```
(%i2) grad (x^2 + 2*y^2 + 3*z^2);
```
$$(\%o2) \qquad grad\left(3\,z^2+2\,y^2+x^2\right)$$
```
(%i3) express(%);
```
$$(\%o3)$$
$$\left[\frac{d}{d\,x}\left(3\,z^2+2\,y^2+x^2\right),\frac{d}{d\,y}\left(3\,z^2+2\,y^2+x^2\right),\frac{d}{d\,z}\left(3\,z^2+2\,y^2+x^2\right)\right]$$
```
(% i4)     ev(%, diff);
```
$$(\%o4) \qquad [2\,x,4\,y,6\,z]$$

Обчислення дивергенції

```
(% i5)     div([x^2,2*y^2,3*z^2]);
```

$$(\%o5)\qquad div\left([x^2,2\,y^2,3\,z^2]\right)$$

```
(%i6) express(%);
```

$$(\%o6)\qquad \frac{d}{d\,z}\,\left(3\,z^2\right)+\frac{d}{d\,y}\,\left(2\,y^2\right)+\frac{d}{d\,x}\,x^2$$

```
(%i7) ev(%, diff);
```

$$(\%o7)\qquad 6\,z+4\,y+2\,x$$

Обчислення вихору:

```
(% i8)   curl([x^2,2*y^2,3*z^2]);
```

$$(\%o8)\qquad curl\left([x^2,2\,y^2,3\,z^2]\right)$$

```
(% i9)   express(%);
```

$$(\%o9)$$

$$[\frac{d}{d\,y}\,\left(3\,z^2\right)-\frac{d}{d\,z}\,\left(2\,y^2\right),\frac{d}{d\,z}\,x^2-\frac{d}{d\,x}\,\left(3\,z^2\right),\frac{d}{d\,x}\,\left(2\,y^2\right)-\frac{d}{d\,y}\,x^2]$$

```
(%i10)   ev(%, diff);
```

$$(\%o10)\qquad [0,0,0]$$

Обчислення оператора Лапласа:

```
(%i13)     laplacian(x^2+2*y^2+3*z^2);
```

$$(\%o13)\qquad laplacian\left(3\,z^2+2\,y^2+x^2\right)$$

```
(%i14)     express(%);
```

$$(\%o14)$$

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\left(3\,z^2+2\,y^2+x^2\right)+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\left(3\,z^2+2\,y^2+x^2\right)+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\left(3\,z^2+2\,y^2+x^2\right)$$

```
(%i15)     ev(%, diff);
```

$$(\%o15)\qquad 12$$

Розглянемо приклад дослідження функції кількох змінних: дослідити на екстремум функцію $f(x,y)=y^2-4\,y+x^3-\frac{9\,x^2}{2}+6\,x-12$

Завантажуємо пакет vect

```
(%i1) load("vect")$
```

Визначаємо досліджуване вираз і обчислюємо його градієнт:

```
(%i2) f:x^3-9/2*x^2+6*x+y^2-4*y-12;
```

$$(\%o2)\qquad y^2-4\,y+x^3-\frac{9\,x^2}{2}+6\,x-12$$

```
(%i3) grad(f);
```

$$(\%o3)\qquad grad\left(y^2-4\,y+x^3-\frac{9\,x^2}{2}+6\,x-12\right)$$

```
(% i4)     express(%);
```

$$(\%o4)\qquad [\frac{d}{dx}\left(y^2-4y+x^3-\frac{9x^2}{2}+6x-12\right),$$

$$\frac{d}{d\,y}\left(y^2-4y+x^3-\frac{9x^2}{2}+6x-12\right),$$
$$\frac{d}{dz}\left(y^2-4y+x^3-\frac{9x^2}{2}+6x-12\right)]$$

```
(% i5)     ev(%, diff);
```

$(\%o5)\qquad [3\,x^2-9\,x+6, 2\,y-4, 0]$

Виділяємо з отриманого списку приватні похідні та вирішуємо систему $f_x(x,y)=0;\ f_y(x,y)=0$

```
(%i6) dfdx: % o5 [1];
```

$(\%o6)\qquad 3\,x^2-9\,x+6$

```
(%i7) dfdy: % o5 [2];
```

$(\%o7)\qquad 2\,y-4$

```
(% i8)     solve ([dfdx = 0, dfdy = 0], [x, y]);
```

$(\%o8)\qquad [[x=1, y=2], [x=2, y=2]]$

В результаті рішення знаходимо дві критичні точки $M_1(1,2)$ і $M_2(2,2)$ Для перевірки, чи досягається в критичних точках екстремум, використовуємо достатню умову екстремуму:

```
(% i9)     A: diff (dfdx, x);
```

$(\%o9)\qquad 6\,x-9$

```
(%i10)     C: diff (dfdy, y);
```

$(\%o10)\qquad 2$

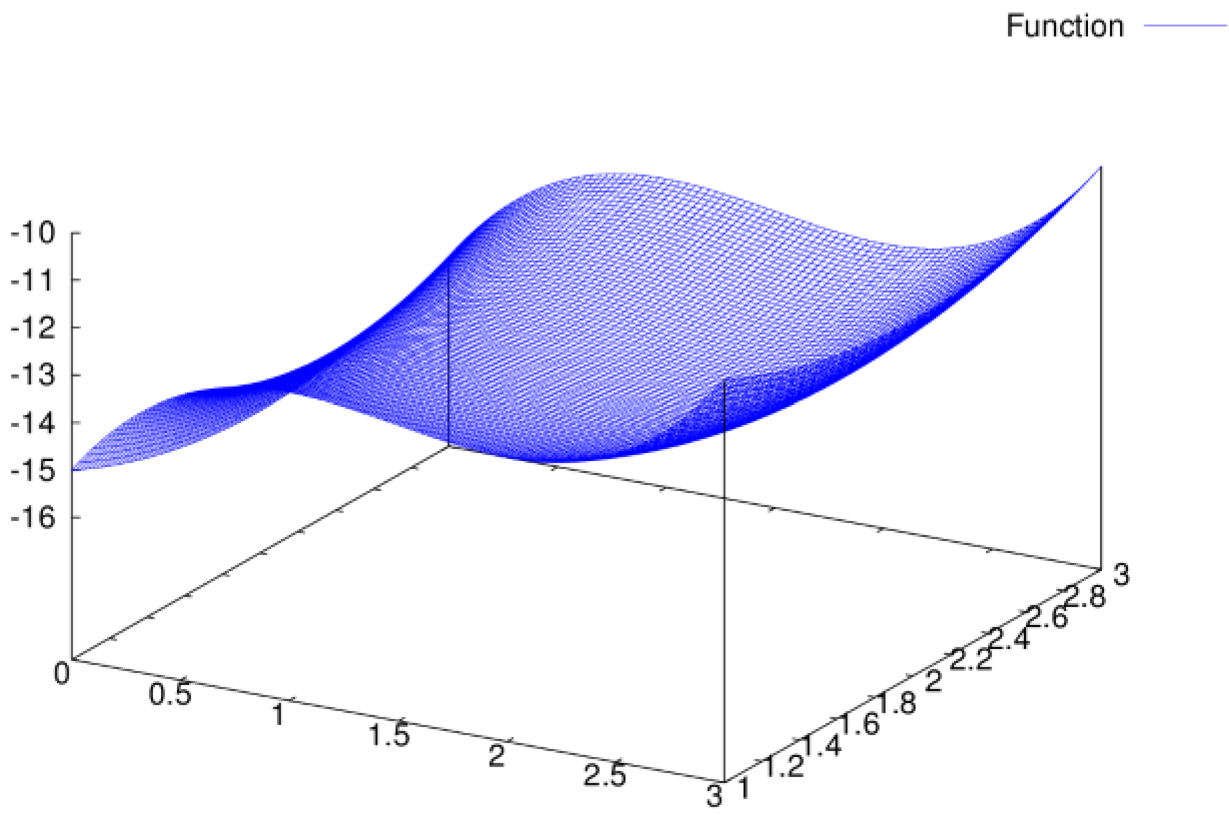
```
(%i11)     B: diff (dfdx, y);
```

$(\%o11)\qquad 0$

```
(%i12)     A*CB^2;
```

$(\%o12)\qquad 2\,(6\,x-9)$

Оскільки $A*C-B^2>0$ тільки в точці $M_2(2,2)$, Досліджувана функція має єдиний екстремум. Враховуючи, що у точці $M_2(2,2)\,A>0$, точка M_2- Точка мінімуму. Результат ілюструємо графічно рис. 3.13).



Мал. 3.13.Пошук екстремуму функції кількох змінних

3.5 Аналітичне та чисельне інтегрування

3.5.1 Основні команди

Невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ обчислюється за допомогою команди $integrate(f,x)$, де f - Підінтегральна функція, x - Змінна інтегрування.

Для обчислення певного інтегралу $\int_a^b f(x)dx$ у команді $integrate$ додаються межі інтегрування, наприклад, $integrate((1+cos(x))^2,x,0,$

$$\int_0^\pi (1+\cos(x))^2 dx = \frac{3}{2}\pi$$

Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування обчислюються, якщо параметри команди $integrate$ вказувати, наприклад, $x,0,inf$.

Чисельне інтегрування виконується функцією $romberg$ або за допомогою функцій пакету quadpack.

3.5.2 Інтеграли, які залежать від параметра. Обмеження параметрів

Якщо потрібно обчислити інтеграл, що залежить від параметра, його значення може залежати від знака цього параметра або будь-яких інших обмежень. Розглянемо як приклад інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$, Який, як відомо з математичного аналізу, сходиться при $a > 0$ і розходиться при $a < 0$. Якщо вирахувати його відразу, то вийде:

```
(%i1) integrate(exp(-a*x),x,0,inf);
Чи є позитивним, negative, or zero? p;
```

$$(\%o1)\ \frac{1}{a}$$

Результат аналітичного інтегрування

$$\int_0^{+\infty} e^{(-ax)}dx = \lim_{x\to\infty} -\frac{e^{(-ax)}-1}{a}.$$

Для отримання явного аналітичного результату обчислень слід зробити будь-які припущення значення параметрів, тобто накласти ними обмеження. Це можна зробити за допомогою команди $assume(expr1)$, де $expr1$ - Нерівність.

Опис обмежених параметрів а можна викликати командою $properties(a)$.

```
(%i1) assume (a > 1)$ integrate (x**a/(x+1)**(5/2), x, 0, inf);
Is (2a+2)/5 an integer? no;
Чи є 2a-3 позитивний, negative, або zero? neg;
```

$$(\%o2)\ \beta\left(a+1, \frac{3}{2}-a\right)$$

```
(%i3) properties(a);
```

$$(\%o3)\ [\text{database info},\ a > 1]$$

Повернімося до обчислення інтеграла з параметром $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$, яке слід виробляти у такому порядку:

```
(%i1) assume(a>0); integrate(exp(-a*x),x,0,inf);
```

$$(\%o1)\ [a > 0] \quad (\%o2)\ \frac{1}{a}$$

Скасувати прийняті обмеження на значення параметрів можна за допомогою функції $forget$.

Приклад:

```
(%i1) assume(n+1>0); integrate((a+b)*x^(n+1),x);
```

$$(\%o1)\ [n > -1] \quad (\%o2)\ \frac{(b+a)\ x^{n+2}}{n+2}$$

Скасування обмеження тягне за собою питання про значення параметрів підінтегральної функції:

```
(%i3) forget(n+1>0); integrate((a+b)*x^(n+1),x);
```

$$(\%o3) \quad [n > -1]$$

```
Чи є n + 2 zero or nonzero? zero;
```

$$(\%o4) \quad (b+a)\ log\,(x)$$

Результат, який отриманий, зовсім інший!

3.5.3 Основні прийоми інтегрування

Maxima є функція, призначених для виконання розрахунків крок за кроком, що здійснює заміну змінної $changevar$.

Формулу інтегрування частинами:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

доведеться застосовувати вручну. У Maxima (на відміну від, наприклад, Maple), функція інтегрування частинами не виділена явно, хоча в окремих випадках цей спосіб використовується $integrate$.

Для обчислення первинних диференціальних виразів використовується пакет antid (основні функції пакету $antidiff$ і $antid$). Функція $antidiff$ виконує інтегрування виразів з довільними функціями (у тому числі невизначеними), перед першим викликом слід завантажити пакет ($antid$ відрізняється від неї форматом результату, що виводиться).

Приклад:

```
(%i1) load("antid");
(%i2) expr: exp(z(x))*diff(z(x),x)*sin(x);
```

$$(\%o2)\ e^{z(x)}\, sin\,(x)\ \left(\frac{d}{d\,x}\, z\,(x)\right)$$

```
(%i3) a1:antid (expr, x, z (x));
```

$$(\%o3)\ [e^{z(x)}\, sin\,(x)\,, -e^{z(x)}\, cos\,(x)]$$

За допомогою пакету antid можна виконати формальне інтегрування частинами:

```
(%i1) expr:u(x)*diff(v(x),x);
```

$$(\%o1)\ \mathrm{u}\,(x)\ \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\,(x)\right)$$

```
(%i2) a:antid(expr,x,v(x));
```

$$(\%o2)\ \mathrm{antid}\left(\mathrm{u}\,(x)\ \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\,(x)\right), x, \mathrm{v}\,(x)\right)$$

```
(%i3) b: antidiff (expr, x, v (x));
```

$$(\%o3)\ \mathrm{antidiff}\left(\mathrm{u}\,(x)\ \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\,(x)\right), x, \mathrm{v}\,(x)\right)$$

Якщо в інтегралі потрібно зробити заміну змінних, використовується функція $changevar$.

Синтаксис виклику цієї функції: $changevar(expr, f(x,y), y, x)$.

Функція здійснює заміну змінної відповідно до рівняння $f(x,y)=0$ у всіх інтегралах, що зустрічаються у виразі expr (передбачається, що y - Нова змінна,

x - Вихідна). При використанні спільно з $changevar$ часто використовується відкладене обчислення інтеграла (одинарна лапка перед функцією $integrate$).

Приклад:

```
(% i5)     assume(a > 0)$ 'integrate (%e**sqrt(a*y), y,
0, 4);
```

$$(\%o6) \quad \int_{0}^{4} e^{\sqrt{a}\,\sqrt{y}}dy$$

Цей інтеграл не обчислюється аналітично безпосередньо, тому виконуємо заміну:

```
(%i7) змінавар (%, yz^2/a, z, y);
```

$$(\%o7) \quad -\frac{2\int_{-2\sqrt{a}}^{0} z\, e^{|z|}dz}{a}$$

Вихідний інтеграл був записаний з ознакою відкладеного обчислення, тому наводимо результат у "завершену" форму (виконуємо ev з ключем $nouns$).

```
(% i8)     ev(%, nouns);
```

$$(\%o8) \quad -\frac{2\left(-2\sqrt{a}\,e^{2\sqrt{a}}+e^{2\sqrt{a}}-1\right)}{a}$$

Не завжди можна обчислювати інтеграл (як певний, і невизначений) остаточно лише рахунок використання функції $integrate$. У цьому випадку функція повертає вираз із відстроченим обчисленням вкладеного (можливо, простішого за формою) інтеграла.

Приклад:

```
(%i10)     expand ((x-4) * (x^3+2*x+1));
```

$$(\%o10) \quad x^4-4\,x^3+2\,x^2-7\,x-4$$

```
(%i11)     integrate (1/%, x);
```

Не знаючи коренів знаменника, неможливо повністю обчислювати інтеграл від раціонального виразу, тому один із компонентів результату – невизначений інтеграл, для остаточного обчислення якого необхідно знайти коріння знаменника (наприклад, використовуючи $allroots$).

$$(\%o11) \quad \frac{log\,(x-4)}{73}-\frac{\int \frac{x^2+4\,x+18}{x^3+2\,x+1}dx}{73}$$

Можливим рішенням є спрощення інтеграла, що супроводжується зниженням рівня раціонального вираження у знаменнику. При цьому необхідно встановити $true$ значення змінної $integrate_use_rootsof$. Однак при цьому результат може бути досить важко.

Розглянемо попередній приклад, виконавши заздалегідь факторизацію знаменника:

```
(%i1) f:expand ((x-4) * (x^3+2*x+1));
```

$$(\%o1) \quad x^4-4\,x^3+2\,x^2-7\,x-4$$

```
(%i2) polyfactor:true$ ffact:allroots(f);
```

$(\%o3)\ 1.0(x-3.999999999999997)(x+0.4533976515164)$
$(x^2-0.45339765151641\,x+2.205569430400593)$

```
(% i4)     float(integrate(1/ffact,x));
```

Отриманий результат однаково важко назвати однозначно прийнятним, т.к. він включає одночасно дуже великі та дуже малі величини. Причина в тому, що коріння знаменника представлялося раціональними числами. Для того щоб отримати компактний результат, бажано для коефіцієнтів виду $r=\frac{m}{n}$ зменшити m і n.

Інтеграли від тригонометричних та логарифмічних функцій Maxima обчислює досить успішно. Розглянемо кілька прикладів.

```
(%i1) integrate(sin(x)*sin(2*x)*sin(3*x),x);
```

$$(\%o1)\qquad \frac{cos\left(6\,x\right)}{24}-\frac{cos\left(4\,x\right)}{16}-\frac{cos\left(2\,x\right)}{8}$$

```
(%i2) integrate(1/cos(x)^3,x);
```

$$(\%o2)$$
$$\frac{log\left(sin\left(x\right)+1\right)}{4}-\frac{log\left(sin\left(x\right)-1\right)}{4}-\frac{sin\left(x\right)}{2\,sin\left(x\right)^2-2}$$

```
(%i3) integrate(x^3*log(x),x);
```

$$(\%o3)\qquad \frac{x^4\,log\left(x\right)}{4}-\frac{x^4}{16}$$

3.5.4 Перетворення Лапласа

Пряме та зворотне перетворення Лапласа обчислюються за допомогою функцій $laplace$ і ilt відповідно.

Синтаксис звернення до функції $laplace : laplace(expr, t, s)$.

Функція обчислює перетворення Лапласа виразу $expr$ по відношенню до змінної t. Образ виразу $expr$ буде включати змінну s.

Функція $laplace$ розпізнає у виразі expr функції $delta, exp, log, sin, cos, sinh, cosh$, і erf, а також похідні, інтеграли, суми та зворотне перетворення Лапласа (ilt). За наявності інших функцій обчислення перетворення може не вдатися.

Крім того, обчислення перетворення Лапласа можливе і для диференціальних рівнянь та інтегралів типу згортки.

```
(%i1) laplace(c,t,s);
```

$$(\%o1)\qquad \frac{c}{s}$$

```
(%i2) laplace(erf(t),t,s);
```

$$(\%o2)\qquad \frac{e^{\frac{s^2}{4}}\,\left(1-erf\left(\frac{s}{2}\right)\right)}{s}$$

```
(%i3) laplace(sin(t)*exp(-a*t),t,s);
```

(%o3) $$\frac{1}{s^2+2\,a\,s+a^2+1}$$

Функція $ilt(expr, t, s)$ обчислює зворотне перетворення Лапласа щодо змінної t з параметром s .

Приклад:

```
(%i1)    laplace(c,t,s);
```

(%o1) $$\frac{c}{s}$$

```
(%i2)    ilt(%,s,t);
```

(%o2) $$c$$

```
(%i3)    laplace(sin(2*t)*exp(-4*t),t,s);
```

(%o3) $$\frac{2}{s^2+8\,s+20}$$

```
(% i4)   ilt(%,s,t);
```

(%o4) $$e^{-4\,t}\,sin\,(2\,t)$$

3.6 Методи теорії наближення у чисельному аналізі

Курс вищої математики для студентів технічних вузів містить первинні засади чисельних методів як свою складову частину. Для фахівців інженерного профілю вкрай важливим є одночасне знаходження рішення у замкнутій аналітичній формі та отримання чисельних значень результату. Подання функції у вигляді статечного ряду дозволяє звести вивчення властивостей функції, що наближається, до більш простого завдання вивчення цих властивостей у відповідного апроксимуючого поліноміального розкладання.

Цим пояснюється важливість різноманітних аналітичних та чисельних додатків поліноміальних наближень для апроксимації та обчислення функції. Заміна функцій на їх статечні розкладання та поліноміальні наближення допомагає вивченню меж, аналізу збіжності та розбіжності рядів та інтегралів, наближеному обчисленню інтегралів та вирішенню диференціальних рівнянь. Ступінні ряди та розкладання по многочленам Чебишева широко використовуються при обчисленні значень функції із заданим ступенем точності. Вони є ефективним обчислювальним засобом під час вирішення широкого кола науково-технічних завдань.

3.6.1 Наближене обчислення математичних функцій

Нехай функція $f(x)$ задана на інтервалі (x_0-R, x_0+R) і нам потрібно обчислити значення функції $f(x)$ при $x=x_1\in(x_0-R, x_0+R)$ із заданою точністю $\epsilon>0$.

Припустивши, що функція $f(x)$ в інтервалі $x\in(x_0-R, x_0+R)$ розкладається в статечний ряд

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x-x_0)^i=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+\dots,$$

ми отримаємо, що точне значення $f(x_1)$ одно сумі цього ряду при $x=x_1$

$$f(x_1)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x_1-x_0)^i=a_0+a_1(x_1-x_0)+a_2(x_1-x_0)^2+\dots+a_n(x_1-x_0)^n+\dots,$$

а наближене - частковій сумі $S_n(x_1)$

$$f(x_1)\approx S_n(x_1)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x_1-x_0)^i=a_0+a_1(x_1-x_0)+a_2(x_1-x_0)^2+\dots+a_n(x_1-x_0)^n.$$

Для похибки наближення маємо вираз у вигляді залишку ряду

$$f(x_1)-S_n(x_1)=r_n(x_1),$$

де

$$r_n(x_1)=\sum_{i=1}^{\infty}x_1^{n+i}=a_{n+1}x_1^{n+1}+a_{n+2}x_1^{n+2}+\dots$$

Для знакозмінних рядів із послідовно спадаючими членами

$$|r_n(x)|=|\sum_{i=1}^{\infty}u_{n+i}(x_1)|<|u_{n+1}(x_1)|.$$

Точність апроксимації, як правило, зростає зі зростанням ступеня наближення статечного розкладання і тим вище, ніж точка x ближче до точки x_0. Для рівномірної апроксимації на інтервалі найбільш зручними виявляються розкладання багаточлена Чебишева.

Для наближеного знаходження значень функції у вигляді статечних рядів, зазвичай, використовуються її розкладання як рядів Тейлора.

Ряд Тейлора для функції $f(x)$ - це статечний ряд виду

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

де числова функція f передбачається визначеної в деякій околиці точки x_0 і що має у цій точці похідні всіх порядків.

Багаточленами Тейлора для функції $f(x)$, порядку n відповідно, називаються приватні суми ряду Тейлора

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Якщо ми розпишемо цю формулу, то отримаємо такий вираз

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Формула Тейлора для функції $f(x)$— це уявлення функції як суми її многочлена Тейлора ступеня $n(n=0,1,2,...)$ та залишкового члена. Тобто це називають розкладанням функції $f(x)$ за формулою Тейлора на околиці точки x_0. Якщо дійсна функція f одного змінного має n похідних у точці x_0, то її формула Тейлора має вигляд

$f(x) = P_n(x) + r_n(x),$

де

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

- багаточлен Тейлора ступеня n а залишковий член може бути записаний у формі Пеано

$r_n(x) = o((x-x_0)^n), x \to x_0.$

Отримуємо, що

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Якщо функція f диференційована $n+1$ раз в деякій околиці точки $x_0, (x_0-\delta, x_0+\delta), \delta > 0$, то залишковий член цієї околиці може бути записаний у формі Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)},$$

$0 < \theta < 1, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$

Зауважимо, що при $n=1$ вираз для $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ збігається з формулою Лагранжа кінцевих прирощень для функції $f(x)$.

Формула Тейлора для багаточленів. Нехай є довільний багаточлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$.. Тоді за будь-яких x і h має місце така формула:

$$f(x+h) = a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \cdots + a_n =$$
$$= f(x) + f'(x)h + \tfrac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \tfrac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n.$$

Поруч Маклорена для функції $f(x)$ називається її ряд Тейлора в точці 0 початку координат, тобто таким чином це статечний ряд виду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Таким чином формула Маклорена є окремим випадком формули Тейлора. Припустимо, що функція $f(x)$ має n похідних у точці $x=0$. Тоді в околиці цієї точки $(-\delta, \delta), \delta > 0$, функцію $f(x)$ можна уявити у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x),$$
$$x \in (-\delta, \delta),$$

де $r_n(x)$ - залишковий член n -ого порядку у формі Пеано

Наведемо розкладання за формулою Маклорена для основних елементарних математичних функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$
$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$
$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n),$$
$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

У Maxima існує спеціальна команда, що дозволяє обчислювати ряди та багаточлени Тейлора: $taylor(expr, x, a, n)$. Тут $expr$ — виклад, що розкладається в ряд, a - Значення x, в околиці якого виконується розкладання (за ступенями $x - a$), n - Параметр, що вказує на порядок розкладання і представлений цілим позитивним числом. Якщо a вказується просто як ім'я змінної, то проводиться обчислення ряду і многочлена Маклорена.

Приклад:Знайти багаточлен Тейлора 9-го ступеня експоненційної функції e^x на початку координат.

```
(%i29)     taylor(exp(x),x,0,9);
```

(%o29)

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}+\ldots$$

Багаточлени Тейлора дають найбільш точну апроксимацію функції, що наближається, поблизу точки x_0. У міру віддалення від точки x_0 похибка зростає. Для наближення доводиться використовувати багаточлени Тейлора більш високого ступеня, але іноді вони не допомагають у зв'язку з накопиченням обчислювальної похибки.

Цікаво простежити цей процес графічно. Пакет Maxima надає таку можливість за допомогою команди $plot$.

Приклад:Знайти число e із точністю до 0.001. Покладемо $x = 1$. Тоді щоб обчислити значення e , необхідно виконати серію команд:

Будуємо розкладання функції e^x у ряд Тейлора (до 8 порядку включно)

```
(%i1) t:taylor(exp(x),x,0,8);
```

$$(\%o1)\ 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\ldots$$

Обчислюємо часткову суму ряду при $x = 1$:

```
(%i2) ev(t,x=1);
```

$$(\%o2)\qquad \frac{109601}{40320}$$

Значення e у формі з плаваючою точкою знаходимо, використовуючи функцію $float$:

```
(%i3) float(%);
```

$$(\%o3)\qquad 2.71827876984127$$

Цікаво провести обчислення та порівняти результати, що виходять для числа e при різних ступенях багаточлена Тейлора, що використовується. Виходять такі результати:

$k=1, e_1=1, k=2, e_2=2, k=3, e_3=2.5, k=4, e_4=$
$2.666666667, k=5, e_5=2.708333333, k=6, e_6=2.716666667, e_7=$

$2.718055556, k=8, e_8=2.718253968, k=9, e_9=2.718281526, e_{10}=$

$2.718281801.$

Звідси видно, що значення е з точністю 0.001 обчислюється при використанні багаточлена Тейлора ступеня не нижче 7-го. Також слід, що число ес точністю 0.000001 або що те саме 10^{-6} обчислюється допомоги з багаточлена Тейлора 9-го чи вищого ступеня.

Оцінку залишку ряду зробимо за формулою залишкового члена ряду Маклорена

$$|f(x_1)-S_n(x_1)|=|r_n(x_1)|=|\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}|,$$

де c знаходиться між 0 і x_1. Слід $r_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}, 0<c<1$.. Так як $e^c<e<3,$ то $r_n(1)<\frac{3}{(n+1)!}$.. При $n=7$ маємо $r_7<\frac{3}{7!}<0.001, e\approx 2.718$.

Поряд із командою $taylor$ для розкладання функцій та виразів у ряди використовується команда $powerseries$ (вираз, x, a) (будується розкладання для заданого виразу по змінній x на околиці a). Результатом виконання команди $powerseries$ може бути побудова її ряду Тейлора у загальній формі, наприклад:

```
(%i1) powerseries(sin(x),x,0);
```

$$(\%o1)\qquad \sum_{i2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i2}\,x^{2\,i2+1}}{(2\,i2+1)!}$$

```
(%i2) powerseries(sin(x^2),x,0);
```

$$(\%o2)\qquad \sum_{i3=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i3}\,x^{2\,(2\,i3+1)}}{(2\,i3+1)!}$$

Для розкладання ряду Тейлора функції кількох змінних використовується функція $taylor$ із зазначенням списку змінних у формі: $taylor(expr,[x_1,x_2,...],[a_1,a_2,...],[n_1,n_2,...])$

Приклад:Знайти багаточлен Тейлора 6-го ступеня від функції $\frac{x}{1+x}$.

```
(%i1) f(x):=x/(1+x);
```

$$(\%o1)\qquad f(x):=\frac{x}{1+x}$$

```
(%i2) powerseries(f(x),x,0);
```

$$(\%o2)\qquad x\sum_{i1=0}^{\infty}(-1)^{i1}x^{i1}$$

```
(%i3) taylor(f(x),x,0,6);
```

$$(\%o3)\qquad x-x^2+x^3-x^4+x^5-x^6+\ldots$$

Приклад:Знайти розкладання функції $\arccos(x)$ до ряду Маклорена.

```
(%i6) taylor(acos(x),x,0,12);
```

$$(\%o6)\quad \frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3\,x^5}{40}-\frac{5\,x^7}{112}-\frac{35\,x^9}{1152}-\frac{63\,x^{11}}{2816}+\ldots$$

Приклад:Знайти розкладання функції $\exp(x)+1$ за формулою Тейлора 5-го ступеня в околиці точки $x=2$.

```
(%i7) taylor(exp(x)+1,x,2,5);
```

$$(\%o7)$$

$$1+e^2+e^2\,(x-2)+\frac{e^2\,(x-2)^2}{2}+\frac{e^2\,(x-2)^3}{6}+\frac{e^2\,(x-2)^4}{24}+\frac{e^2\,(x-2)^5}{120}+\ldots$$

Приклад:Знайти розкладання гіперболічного косинуса в ряд Маклорена 8-го ступеня.

```
taylor(cosh(x),x,10);
```

Отримуємо

$$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8+O(x^{10}).$$

Зауважимо, що з аналітичних функцій їх розкладання до ряду Тейлора існують завжди. Наведемо приклад функції, що не має розкладання до ряду Тейлора і для якої команда $taylor$ не дає результату: $f(x)=1/x^2+x$.

```
(% i8)      taylor(1/x^{2}+x,x,0,7);
```

$$(\%o8)\qquad \frac{1}{x^2}+x+\ldots$$

В результаті виконання команди $taylor$ або $powerseries$ отримуємо вихідний вираз $x^{-2}+x$. У той же час в околиці інших точок, наприклад, точки $x=2$, формула Тейлора обчислюється

```
(%i13)      taylor(1/x^{2}+x,x,2,2);
```

(%o13)

$$\frac{2\,2^2+1}{2^2}-\frac{\left(2-2\,2^2\right)\,\left(x-2\right)}{2\,2^2}+\frac{\left(2^2+2\right)\,\left(x-2\right)^2}{8\,2^2}+\ldots$$

```
(%i14)      ratsimp(%);
```

(%o14)

$$2^{-2-3}\,\left(\left(2^2+2\right)\,x^2+\left(2^{2+3}-4\,2^2-8\,2\right)\,x+4\,2^2+12\,2+8\right)$$

Пакет Maxima дає можливість як знаходження розкладів математичних функцій до Тейлора, так і графічної інтерпретації точності цих розкладів. Подібна графічна візуалізація допомагає розумінню збіжності багаточленів Тейлора до функції, що наближається.

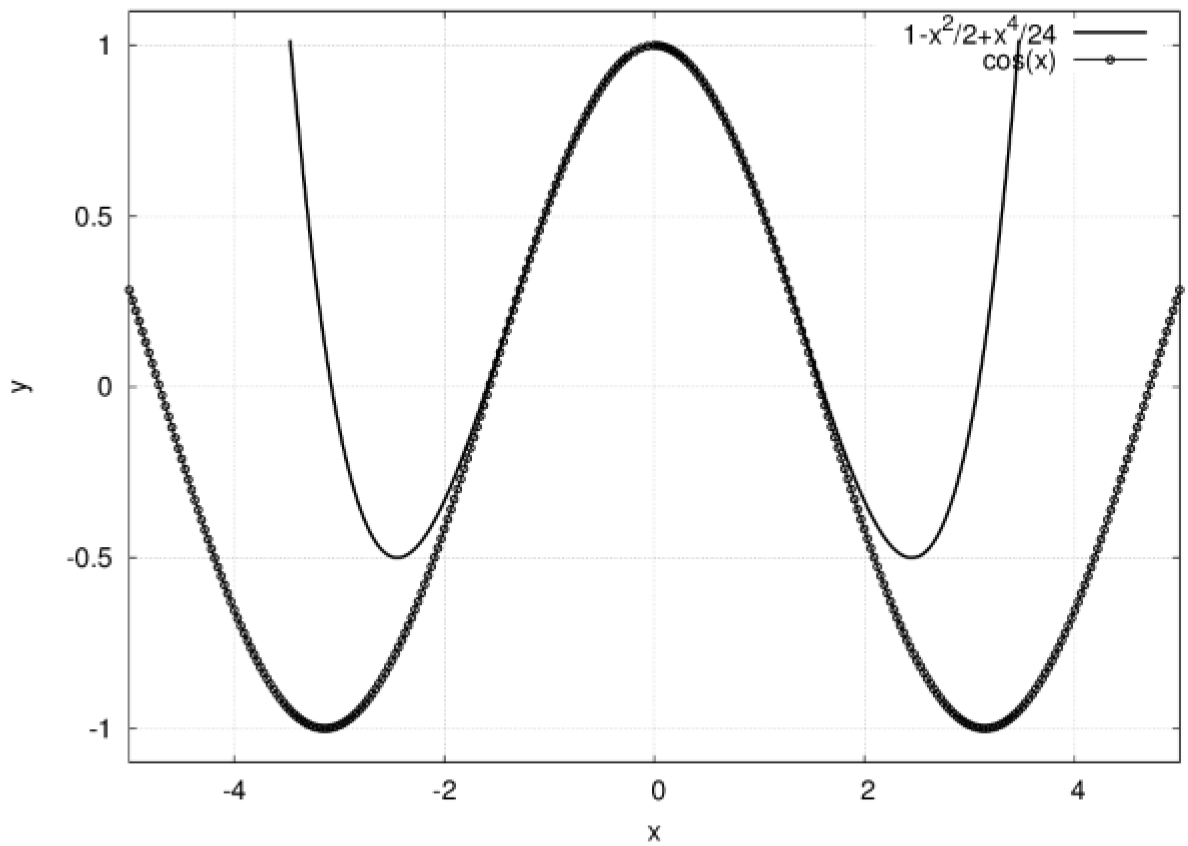
Розглянемо приклади такої графічної візуалізації для функції $\cos(x)$. Порівняємо графіки самої функції $\cos(x)$ з графіками її розкладів Тейлора різних ступенів.

Приклад: Порівняємо функцію $\cos(x)$ з її розкладанням Маклорена 4-го ступеня на інтервалі [-5, 5].

Побудуємо розкладання

```
(%i15)      appr:taylor(cos(x),x,0,5);
```

(%o15) $$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\ldots$$



Мал. 3.14.Зіставлення розкладання до ряду Маклорена та функції y=cos(x)

Побудуємо графік (екранна форма, у форматі wxMaxima)

```
(%i16)     wxplot2d([appr,cos(x)], [x,-5,5], [y,-
1.1,1.1],
[nticks, 100]);
```

Виведемо графік у файл:

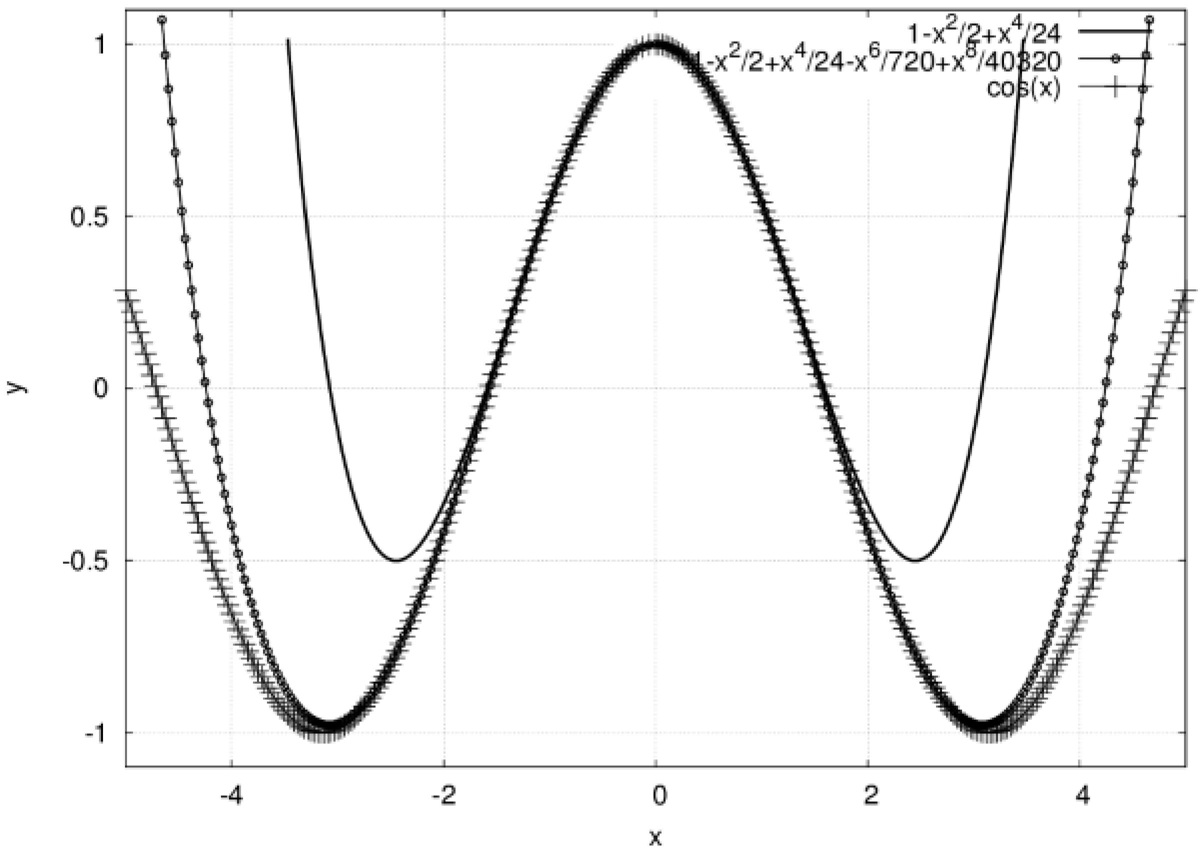
```
(%i17)     plot2d([appr,cos(x)], [x,-5,5], [y,-1.1,1.1],
[gnuplot_preamble, "set grid;"], [gnuplot_term, ps],
[gnuplot_out_file, "appr.eps"])$
```

Легко помітити, що за невеликих значень x графіки самої функції та наближення її розкладання практично збігаються, проте при зростанні x починають відрізнятись.

Приклад: Порівняємо функцію $\cos(x)$ з її розкладанням Маклорена 8-го ступеня інтервалі [-5, 5]. Порівняємо результат із попереднім прикладом.

Побудуємо розкладання вищого ступеня:

```
(%i18)     appr1:taylor(cos(x),x,0, 9);
```



Мал. 3.15.Зіставлення двох розкладів у ряд Маклорена та функції y=cos(x)

$$(\%o18)\qquad 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}+\ldots$$

Приклад показує, що при використанні розкладання Тейлора вищого ступеня точність наближення зростає і вдається досягти задовільного наближення на ширшому інтервалі. Однак зауважимо, що ступінь розкладання

Тейлора не можна підвищувати необмежено через накопичення обчислювальної похибки.

Розкладання в ряд Тейлора може використовуватись і для обчислення меж (функція $tlimit$, за синтаксисом аналогічна $limit$).

3.6.2 Наближене обчислення певних інтегралів

Ступінні ряди ефективні та зручні при наближеному обчисленні певних інтегралів, що не виражаються в кінцевому вигляді через елементарні функції. Для обчислення $\int_0^x f(t)dt$ підінтегральна функція $f(t)$ розкладається в статечний ряд. Якщо

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \ldots, \ |x| < R,$$

то при $|x| < R$ степеневий ряд можна інтегрувати почленно. Отримуємо метод обчислення інтегралу $\int_0^x f(t)dt$ з будь-якою наперед заданою точністю

$$\int_0^x f(t)dt = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots.$$

Приклад:Наближене обчислення інтегралу ймовірностей

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^x e^{-t^2/2}dt = \frac{2}{\sqrt{2}\pi}\int_0^x e^{-t^2/2}dt.$$

Оскільки

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \ |x| < \infty,$$

то

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^22!} - \frac{x^6}{2^33!} + \ldots$$

Підставивши цей ряд під знак інтеграла і здійснивши почленное інтегрування отримуємо

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[x - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^5}{5\cdot 2^2\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!} + \ldots\right]$$

Так як це знакозмінний ряд з послідовно спадаючими доданками, то похибка обчислення інтеграла послідовно зменшується і не перевищує останнього доданку.

Розглянемо приклад наближеного уявлення інтеграла як полінома певною мірою у разі, що він обчислюється в замкнутої аналітичної формі.

Приклад: Обчислити $\int_0^1 e^{-x^2/2}dx$ оцінити досягнуту точність

Використовуємо розкладання підінтегральної функції до ряду. Підставляючи в отриманий вираз $x = 1$, обчислюємо шуканий інтеграл Так як досліджуваний ряд знакозмінний, похибка заміни нескінченної суми кінцевим виразом абсолютної величини не перевищує першого відкинутого члена.

```
(%i1) f(x):=exp(-x^2/2);
```

(%o1) $$f\left(x\right) := exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

```
(%i2) taylor(f(x),x,0,8);
```

(%o2) $$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\frac{x^8}{384}+\ldots$$

Інтегруючи в межах від 0 до 1, отримуємо числовий результат:

```
(%i3) integrate(%,x,0,1);
```

(%o3) $$\frac{103499}{120960}$$

```
(% i4)      float(%);
```

(%o4) $$0.85564649470899$$

Точність розрахунку оцінюємо, інтегруючи в межах від 0 до a :

```
(% i5)      integrate(%o2,x,0,a);
```

(%o5) $$\frac{35\,a^9-360\,a^7+3024\,a^5-20160\,a^3+120960\,a}{120960}$$

При $a=1$ знаходимо:

```
(%i6) expand(%);
```

(%o6) $$\frac{a^9}{3456}-\frac{a^7}{336}+\frac{a^5}{40}-\frac{a^3}{6}+a$$

```
(%i7) float(1/3456);
```

(%o7) $$2.893518518518518 4\,10^{-4}$$

Таким чином, точність розрахунку значення інтегралу $\int_0^1 e^{-x^2/2}dx$, Не гірше 0,0003. Остаточно

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}dx = 2.8935 \pm 0.0003$$

3.7 Перетворення статечних рядів

Пакет Maxima дозволяє не тільки будувати розкладання різних функцій у статечні ряди, а й уявлення їх у вигляді дробораціональної функції (апроксимація Паде) або ланцюгового дробу.

Апроксимацією Паде для функції $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, заданою статечним рядом, називається така дробно-раціональна функція $R(x)=\frac{\sum_{k=0}^{L} p_k x^k}{1+\sum_{k=1}^{M} q_k x^k}$, чиє розкладання в статечний ряд збігається зі статечним рядом $f(x)$ з точністю до коефіцієнта при x^{L+M}.

Паде-апроксиммант задається значенням функції в заданій точці і $M + L$ значеннями її похідних у цій точці. Ця ж інформація може послужити основою для статечного ряду, то в чому ж відмінність? Головна відмінність у тому, що задавши $M + L + 1$ член статечного ряду, ми відкидаємо решту членів ряду, прирівнюючи їх до нуля. Паде-апроксимант не є поліномом, тому задав $M + L + 1$ членів розкладання Паде-апроксиманта в статечний ряд, ми в неявній формі задаємо й інші члени.

Чому ці додаткові члени будуть рівними? Це питання, на яке немає однозначної відповіді. В одних випадках вони дозволять нам побудувати більш точну апроксимацію, в інших — навпаки, можуть погіршити становище. Немає способу, який дозволив би сказати, наскільки точна виявиться Паде-апроксимація і в якому околиці і з якою точністю можна отримати результати.

Ще одним недоліком цього є те, що він вимагає інформації не про значення функції, а про її похідних вищих порядків, які можуть бути значно більшими за абсолютною величиною, ніж самі значення функції.

Паде-аппрокімація найбільш ефективна для функцій, що мають полюси на комплексній площині на околицях точки розкладання. Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$ безперервна на дійсній осі, але має полюси на комплексній площині. Тому вона неефективно апроксимується статечним рядом (до шостого ступеня включно), але добре апроксимується по Паді зі ступенями чисельника та знаменника рівними 4 і 2.

Функція $pade$, представлена в пакеті Maxima, апроксимує відрізок ряду Тейлора, що містить доданки до n-го порядку включно, дробової раціональної функцією. Її аргументи - ряд Тейлора, порядок чисельника n, порядок знаменника m. Зрозуміло, кількість відомих коефіцієнтів ряду Тейлора має збігатися із загальною кількістю коефіцієнтів у дробно-раціональній функції мінус один, оскільки чисельник та знаменник визначені з точністю до загального множника.

Синтаксис виклику функції $pade$:

pade (ряд Тейлора, ступінь чисельника, ступінь знаменника)

Замість ряду Тейлора можна використовувати ряд Лорана. І тут ступеня чисельника і знаменника може бути і нескінченними (inf). У цьому випадку розглядаються всі раціональні функції, сумарний ступінь яких менший або дорівнює довжині статечного ряду.

Приклад:

```
(%i1) t:taylor(exp(x),x,0,3);
```

$$(\%o1) \qquad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

```
(%i2) pade(t,1,2);
```

$$(\%o2) \qquad [\frac{2\,x+6}{x^2-4\,x+6}]$$

```
(%i3) taylor(sin(x)/x,x,0,7);
```

$$(\%o3) \qquad 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+\ldots$$

```
(% i4)     pade(%,2,4);
```

$$(\%o4) \qquad [-\frac{620\,x^2-5880}{11\,x^4+360\,x^2+5880}]$$

```
(% i5)     taylor (1/(cos(x) - sec(x))^3, x, 0, 5);
```

$$(\%o5)$$

$$-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{2\,x^4}+\frac{11}{120\,x^2}-\frac{347}{15120}-\frac{6767\,x^2}{604800}-\frac{15377\,x^4}{7983360}+\ldots$$

```
(%i6) pade(%,3,inf);
```

$$(\%o6)$$

$$[-\frac{120}{41\,x^{10}+60\,x^8+120\,x^6},\frac{8806092\,x^2-16847160}{1353067\,x^{10}-382512\,x^8+16847160\,x^6}]$$

Більш специфічною є функція cf яка розраховує коефіцієнти ланцюгового дробу, що апроксимує заданий вираз. Синтаксис виклику $cf(expr)$. Вираз $expr$ має складатися з цілих чисел, квадратних коренів цілих чисел та знаків арифметичних операцій. Функція повертає список коефіцієнтів (безперервний дріб $a+1/(b+1/(c+...))$ представляється списком [$a,b,c,...$]). Прапор $cflength$ визначає кількість періодів ланцюгового дробу. Спочатку встановлено значення 1. Функція $cfdisrep$ перетворює список (зазвичай видачу функції $''cf$) у власне ланцюговий дріб виду $a+1/(b+1/(c+...)$).

Прикладивикористання функцій cf і $cfdisrep$:

```
(%i1) cf ([1, 2, -3] + [1, -2, 1]);
```

$$(\%o1) \qquad [1,1,1,2]$$

```
(%i2) cfdisrep (%);
```

$$(\%o2) \qquad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

```
(%i3) cflength: 3;
```

$$(\%o3) \qquad 3$$

```
(% i4)     cf (sqrt (3));
```

$$(\%o4) \qquad [1,1,2,1,2,1,2]$$

```
(% i5)     cfdisrep(%);
```

(%o5) $$1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}$$

```
(%i6) ev (%, numer);
```

(%o6) $$1.731707317073171$$

3.8 Розв'язання диференціальних рівнянь у Maxima

3.8.1 Основні визначення

Диференціальним рівнянням називається рівняння виду $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$, де $F(t_0,t_1,...,t_{n+1})$ - Функція, визначена в деякій області D простору R^{n+2}, x - незалежна змінна, y - функція від x, $y',...,y^{(n)}$ - її похідні.

Порядком рівняння n називається найвищий з похідних порядків y, що входять до рівняння. Функція $f(x)$ називається рішенням диференціального рівняння на проміжку $(a;b)$ якщо для всіх x з $(a;b)$ виконується рівність: $F(x,f(x),f'(x),...,f^n(x))=0$.

Диференціальному рівнянню задовольняє безліч функцій, але за деяких умов рішення такого рівняння єдине. Інтегральна крива - це графік розв'язання диференціального рівняння, тобто графік функції, що задовольняє цього рівняння.

Якщо диференціальне рівняння має одну незалежну змінну, воно називається звичайним диференціальним рівнянням, якщо ж незалежних змінних дві чи більше, то таке диференціальне рівняння називається диференціальним рівнянням у приватних похідних.

Приклад:вирішити рівняння $y'=0$.

Очевидно, що його рішення $f(x)=const$ визначено на $(-\infty,\infty)$. Зазначимо, що ця постійна - довільна і рішення - не єдине, а є безліч рішень.

Приклад:Розв'язати рівняння $y'=\frac{y}{x}$, або $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$.

Перетворюючи рівняння, отримаємо: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$. Інтегруючи обидві частини рівняння, отримаємо: $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow ln\,y=ln\,x+ln\,C$, або $y=Cx$. Загальне рішення є серією лінійних інтегральних кривих, що проходять через точку (0,0). При цьому через будь-яку точку, що не належить (0, 0), проходить лише одна інтегральна крива (рішення).

Загальне рішення - безліч рішень диференціального рівняння $y'=f(x,y)$ є сукупність функцій $F(x,y,C)=0,\ C=const$. Приватне рішення отримують під час встановлення конкретного значення константи в загальне рішення. Особливі рішення не входять до загальних рішень, і через кожну точку особливого рішення проходить більше однієї інтегральної кривої. Особливі рішення не можна отримати із загального рішення за жодних значень постійної C. Якщо побудувати сімейство інтегральних кривих диференціального рівняння, то особливе рішення зображуватиметься лінією, яка в кожній своїй точці стосується принаймні однієї інтегральної кривої.

Приклад:Розглянемо рівняння $y' = \frac{-x}{y}$. Перетворюючи його, знайдемо: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow 2ydy + 2xdx = 0 \Leftrightarrow d(x^2 + y^2) = 0$. Інтегруючи, отримуємо $x^2 + y^2 = C$.

Приклад:Диференціальне рівняння $y' = 2\sqrt{y}$ має спільне рішення $y = (x - C)^2$ та особливе рішення $y = 0$. За конкретного значення C (наприклад, $C = 1$) отримуємо приватне рішення: $y = (x - 1)^2$.

Геометрично безліч розв'язків диференціального рівняння представляється як поля напрямів. У кожній точці області, в якій визначено поле напрямків, задається пряма з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює похідній розв'язання. Дотична до всіх подібних прямих і дає інтегральну криву.

Можливість однозначного розв'язання диференціального рівняння визначається теоремою єдиності:

Нехай $f(x, y)$- Безперервна функція в області $D = (x, y; a < x < b; c < y < d)$, причому приватна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ також безперервна в D. Тоді існує єдине рішення $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0, (x_0, y_0) \in D$. Отже, через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходить лише одна інтегральна крива.

3.8.2 Функції для вирішення диференціальних рівнянь у Maxima

У Maxima передбачені спеціальні засоби вирішення задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, заданих як у явній формі $\frac{dx}{dt} = F(t, x)$, так і в неявній $M\frac{dy}{dt} = F(t, x)$, де M - матриця, - т.зв. вирішувач ОДУ ($solverODE$), що забезпечує користувачеві можливість вибору методу, завдання початкових умов та ін.

Функція $ode2$ дозволяє вирішити прості диференціальні рівняння першого та другого порядків.

Синтаксис виклику $ode2(eqn, dvar, ivar)$, де eqn - Вираз, що визначає само диференціальне рівняння, залежна змінна - $dvar$, незалежна змінна $ivar$.

Диференціальне рівняння подається у формі із "замороженою" похідною (тобто з похідною, обчислення якої заборонено за допомогою одиночної лапки: $'diff(y, x)$). Інший варіант явно вказати залежність $y = y(x)$-

Використовувати функцію $depends$ (у цьому випадку можна не використовувати початковий апостроф див. приклад). Якщо ode2 не може отримати рішення, вона повертає значення $false$.

За допомогою функції $ode2$ можуть бути вирішені такі типи ОДУ першого порядку: лінійні, ОДУ з змінними, що розділяються, однорідні ОДУ, рівняння в повних диференціалах, рівняння Бернуллі, узагальнені однорідні рівняння.

Крім того, за допомогою функції $ode2$ можуть бути розв'язані такі типи рівнянь другого порядку: з постійними коефіцієнтами; у повних диференціалах; лінійні однорідні із змінними коефіцієнтами, які можуть бути зведені до рівнянь із постійними коефіцієнтами; рівняння Ейлера; рівняння, які можна розв'язати методом варіації постійних; рівняння, вільні від незалежної змінної, що допускають зниження порядку.

Тип використовуваного методу зберігається у змінній $method$. При використанні інтегруючого множника він зберігається у змінній $intfactor$. Приватне рішення неоднорідного рівняння зберігається у змінній yp .

Для пошуку приватних рішень задач Коші з початковими умовами використовуються функції $ic1$ (для рівнянь першого порядку) та $ic2$ (Для рівнянь другого порядку). Приватні розв'язання граничних завдань для рівнянь другого порядку використовують функцію $bc2$.

Розглянемо приклади використання функції $ode2$.

Варіант використання відкладеного диференціювання($'diff$):

```
(%i1) ode2('diff (y, x) = 2 * y + exp (x), y, x);
```

$$(\%o1)\qquad y=\left(\%c-e^{-x}\right)\,e^{2\,x}$$

Варіант із явною вказівкою залежності $y=y(x)$:

```
(%i1) depends(y,x);
```

$$(\%o1)\qquad [y\left(x\right)]$$

```
(%i2) ode2(diff (y, x) = 2 * y + exp (x), y, x);
```

$$(\%o2)\qquad y=\left(\%c-e^{-x}\right)\,e^{2\,x}$$

Параметр $\%c$ - Постійна інтегрування для рівняння першого порядку.

Рішення рівняння другого порядку:

```
(% i4)      ode2('diff(y,x,2)-3*'diff(y,x)+2*y=0,y,x);
```

$$(\%o4)\qquad y=\%k1\,e^{2\,x}+\%k2\,e^{x}$$

Параметри $\%k1$ і $\%k2$ - Постійні інтегрування для рівнянь другого порядку.

Розглянемо варіанти обчислення приватних рішень: рівняння першого порядку

```
(% i5)      ic1(%o1,x=1,y=1);
```

$$(\%o5)\qquad y=e^{-2}\,\left(\left(e+1\right)\,e^{2\,x}-e^{x+2}\right)$$

для рівняння другого порядку

```
(%i6) ic2(%o4,x=0,y=1,diff(y, x) = 1);
```

$$(\%o6)\qquad y=e^{x}$$

3.8.3 Вирішення основних типів диференціальних рівнянь

3.8.3.1 Рівняння з змінними, що розділяються

Рівняннями з змінними, що розділяються, називаються рівняння виду $y' = f(x) \cdot g(y)$, де $f(x)$- Функція, безперервна на деякому інтервалі (a, b), а функція $g(y)$ - Функція, безперервна на інтервалі (c, d), причому $g(y) \neq 0$ на (c, d)).

Перетворюючи рівняння, отримуємо: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

Інтегруючи обидві частини, отримуємо $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. Позначаючи $G(y)$ будь-яку первісну для $\frac{1}{g(y)}$, а $F(x)$- будь-яку первісну для $f(x)$, Отримуємо загальне рішення диференціального рівняння, у вигляді неявно вираженої функції $G(y) = F(x) + C$.

прикладрішення в Maxima:

Шукаємо загальне рішення:

```
(%i1) difur1:'diff(y,x)=sqrt(1-y^2)/sqrt(1-x^2);
```

$$(\%o1) \qquad \frac{d}{d\,x}\,y = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
(% i2) rez:ode2(difur1,y,x);
```

$$(\%o2) \qquad asin\,(y) = asin\,(x) + \%c$$

Шукаємо різні варіанти приватних рішень:

```
(% i3) ic1 (rez, x = 0, y = 0);
```

$$(\%o3) \qquad asin\,(y) = asin\,(x)$$

```
(% i4) ic1 (rez, x = 0, y = 1);
```

$$(\%o4) \qquad asin\,(y) = \frac{2\,asin\,(x) + \pi}{2}$$

3.8.3.2 Однорідні рівняння

Під однорідними рівняннями розуміються рівняння виду $y' = f(\frac{y}{x})$. Для їх вирішення використовується заміна виду $y = u \cdot x$, після підстановки, якою виходить рівняння з змінними, що розділяються: $y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = f(u)$. Розділяючи змінні та інтегруючи, отримуємо: $x\frac{du}{dx} = f(u) - u \Rightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$

прикладрішення в Maxima:

Знаходимо загальне рішення:

```
(%i1) homode:'diff(y,x) = (y/x)^2 + 2*(y/x);
```

$$(\%o1) \quad \frac{d}{d\,x}\,y=\frac{y^2}{x^2}+\frac{2\,y}{x}$$

```
(%i2) ode2(homode,y,x);
```

$$(\%o2) \quad -\frac{x\,y+x^2}{y}=\%c$$

Знаходимо приватне рішення:

```
(%i3) ic1(%,x=2,y=1);
```

$$(\%o3) \quad -\frac{x\,y+x^2}{y}=-6$$

Більше загальний варіант диференціальних рівнянь, рівняння виду: $y'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$- Зводимо їх до однорідних. Maxima не здатна вирішувати такі рівняння за допомогою$ode2$безпосередньо, лише після необхідного перетворення.

3.8.3.3 Лінійні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння називається лінійним щодо невідомої функції та її похідною, якщо воно може бути записане у вигляді:

$$y'=P(x)\cdot y=Q(x)$$

при цьому, якщо права частина$Q(x)$дорівнює нулю, таке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням, якщо права частина$Q(x)$не дорівнює нулю, таке рівняння називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням. При цьому$P(x)$і$Q(x)$- Безперервні функції на деякому проміжку$x\in(a,b)$.

Розглянемо рішення лінійного диференціального рівняння Maxima:

```
(%i1) lineq1:'diff(y,x)-y/x=x;
```

$$(\%o1) \quad \frac{d}{d\,x}\,y-\frac{y}{x}=x$$

```
(%i2) ode2(lineq1,y,x);
```

$$(\%o2) \quad y=x\,(x+\%c)$$

При роботі з Maxima не потрібно наводити диференціальне рівняння до стандартної форми виду

$$y'=P(x)\cdot y=Q(x)$$

```
(%i3) lineq2:y^2-(2*x*y+3)*'diff (y, x) = 0;
```

$$(\%o3) \quad y^2-(2\,x\,y+3)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=0$$

```
(% i4)      ode2(lineq2,y,x);
```

$$(\%o4) \quad \frac{x\,y+1}{y^3}=\%c$$

3.8.3.4 Рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння першого порядку виду:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

називається рівнянням у повних диференціалах, якщо ліва частина цього рівняння є повним диференціалом деякої функції $u=F(x,y)$. Дане диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах, якщо виконується умова:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Загальний інтеграл рівняння має вигляд $U(x,y)=0$.

Якщо рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ не є рівнянням у повних диференціалах, але виконуються умови теореми єдиності, то існує функція $\mu=\mu(x,y)$ (інтегруючий множник) така, що

$$\mu(Pdx+Qdy)=dU$$

Функція μ задовольняє умові:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

Приклади рішення в Maxima:

Для вирішення Maxima диференціальне рівняння подається у формі

$$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

Рівняння, що приводиться до рівняння у повних диференціалах

```
(%i1) deq:(2*x*y+x^2*y+y^3/3)+(x^2+y^2)*'diff(y,x)=0;
```

$$(\%o1)\qquad \left(y^2+x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+\frac{y^3}{3}+x^2\,y+2\,x\,y=0$$

```
(%i2) ode2(deq,y,x);
```

$$(\%o2)\qquad \frac{e^x\,y^3+3\,x^2\,e^x\,y}{3}=\%c$$

Вказівка на інтегруючий множник

```
(%i3) intfactor;
```

$$(\%o3)\qquad e^x$$

Вказівка на використаний метод

```
(% i4)     метод;
```

$$(\%o4)\qquad exact$$

Рівняння у повних диференціалах

```
(% i5)     deq1:(3*x^2+6*x*y^2)+(6*x^2*y+4*y^3)*'diff (y,
x) = 0;
```

$$(\%o5)\qquad \left(4\,y^3+6\,x^2\,y\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+6\,x\,y^2+3\,x^2=0$$

```
(%i6) ode2(deq1,y,x);
```

$$(\%o6) \qquad y^4+3\,x^2\,y^2+x^3=\%c$$

Вказівка на використаний метод

```
(%i7)    метод;
```

$$(\%o7) \qquad exact$$

3.8.3.5 Рівняння Бернуллі

Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^{\alpha}$$

де P і Q - функції від x або постійні числа, а α - Постійне число, не дорівнює 0 і 13.

Для вирішення рівняння Бернуллі застосовують підстановку $z=\frac{1}{y^{\alpha-1}}$, за допомогою якої рівняння Бернуллі наводиться до лінійного.

прикладрішення рівняння Бернуллі за допомогою Maxima:

```
(%i1) deq:'diff(y,x)=4/x*y+x*sqrt(y);
```

$$(\%o1) \qquad \frac{d}{d\,x}\,y=\frac{4\,y}{x}+x\,\sqrt{y}$$

```
(%i2) ode2(deq,y,x);
```

$$(\%o2) \qquad y=x^4\left(\frac{log\,(x)}{2}+\%c\right)^2$$

```
(%i3) метод;
```

$$(\%o3) \qquad bernoulli$$

```
(% i4)      de1:'diff(y,x)+y/x=-x*y^2;
```

$$(\%o4) \qquad \frac{d}{d\,x}\,y+\frac{y}{x}=-x\,y^2$$

```
(% i5)      ode2(de1,y,x);
```

$$(\%o5) \qquad y=\frac{1}{x\,(x+\%c)}$$

3.8.3.6 Рівняння вищих порядків

Maxima за допомогою функції $ode2$ можливе пряме рішення лише лінійних диференціальних рівнянь другого порядку При рішенні виконується перевірка, чи задане рівняння є лінійним, тобто. чи можливе його перетворення до форми $y''+p(x)y+q(x)y=r(x)$.

Спочатку знаходиться рішення однорідного рівняння виду $y''+p(x)y+q(x)y=0$ у формі $y=k_1y_1+k_2y_2$ (k_1,k_2 - Довільні постійні). Якщо $r(x)\neq 0$, Знаходиться окреме рішення неоднорідного рівняння шляхом варіації постійних.

3.8.3.7. Рівняння з постійними коефіцієнтами

Вирішення однорідних рівнянь виду $y'' + a*y' + b*y = 0$ знаходяться за результатами розв'язання характеристичного рівняння $r^2 + ar + b = 0$. Можливі наступні варіанти комбінацій його коріння r_1, r_2:

1. r_1, r_2 - Речові та різні. Рішення подається у формі $y = k_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + k_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}$.
2. $r_1, = r_2$ - Коріння речові однакові. Рішення подається у формі $y = (k_1 + k_2 \cdot x)e^{r_1 \cdot x}$.
3. r_1, r_2 - Комплексні (сполучені). Якщо $r_1 = \alpha + \beta i,\ r_2 = \alpha - \beta i$, то рішення подається у вигляді $y = e^{\alpha x}(k_1 \cos \beta x + k_2 \sin \beta x)$

Загальне рішення неоднорідного рівняння з постійними коефіцієнтами представляється як суми загального рішення відповідного однорідного рівняння і будь-якого окремого рішення неоднорідного.

Приклади рішення ОДУ другого порядку із постійними коефіцієнтами:

Неоднорідне рівняння загального виду:

```
(%i1) de1:2*'diff(y,x,2)-'diff(y,x)-y=4*x*exp(2*x);
```

$$(\%o1) \qquad 2\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right) - \frac{d}{d\,x}\,y - y = 4\,x\,e^{2\,x}$$

```
(%i2) ode2(de1,y,x);
```

$$(\%o2) \qquad y = \frac{(20\,x-28)\;e^{2\,x}}{25} + \%k1\,e^{x} + \%k2\,e^{-\frac{x}{2}}$$

Приватне рішення неоднорідного рівняння зберігається у змінній yp :

```
(%i3) yp;
```

$$(\%o3) \qquad \frac{(20\,x-28)\;e^{2\,x}}{25}$$

Неоднорідне рівняння з кратним корінням характеристичного рівняння:

```
(%i1) de2:'diff(y,x,2)-2*'diff (y, x) + y = x * exp (x);
```

$$(\%o1) \qquad \frac{d^2}{d\,x^2}\,y - 2\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + y = x\,e^{x}$$

```
(%i2) ode2(de2,y,x);
```

$$(\%o2) \qquad y = \frac{x^3\,e^{x}}{6} + (\%k2\,x + \%k1)\;e^{x}$$

```
(%i3) yp;
```

$$(\%o3) \qquad \frac{x^3\,e^{x}}{6}$$

Неоднорідне рівняння з комплексним корінням:

```
(% i4)     de3:'diff(y,x,2)+y=x*sin(x);
```

$$(\%o4) \qquad \frac{d^2}{d\,x^2}\,y + y = x\,sin\,(x)$$

```
(% i5)      ode2(de3,y,x);
```

(%o5)

$$y=\frac{2\,x\,sin\,(x)+\left(1-2\,x^2\right)\,cos\,(x)}{8}+\%k1\,sin\,(x)+\%k2\,cos\,(x)$$

```
(%i6) yp;
```

(%o6) $$\frac{2\,x\,sin\,(x)+\left(1-2\,x^2\right)\,cos\,(x)}{8}$$

3.8.3.8 Рівняння зі змінними коефіцієнтами

Аналогічно до рівняння з постійними коефіцієнтами, загальне рішення однорідного рівняння $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ має вигляд $y=C_1y_1+C_2y_2$, де y_1,y_2- Лінійно незалежні рішення однорідного ОДУ (фундаментальна система рішень).

Загальне рішення неоднорідного рівняння $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ з безперервними коефіцієнтами та правою частиною має вигляд у $=y_0+Y$, де y_0- загальне рішення відповідного однорідного рівняння, Y - Приватне рішення неоднорідного.

Якщо відома фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння, загальне рішення неоднорідного може бути представлене у формі:

$$y=C_1(x)\cdot y_1+C_2(x)\cdot y_2,$$

де $C_1(x),C_2(x)$ визначаються шляхом варіації довільних постійних.

Приклад:

```
(%i3) difur:x^2*'diff(y,x,2)-x*'diff(y,x)=3*x^3;
```

(%o3) $$x^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)-x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=3\,x^3$$

```
(% i4)      ode2(difur,y,x);
```

(%o4) $$y=x^3+\%k2\,x^2-\frac{\%k1}{2}$$

Приклад:

```
(%i3) difur1:x*'diff(y,x,2)+'diff(y,x)=x^2;
```

(%o3) $$x\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+\frac{d}{d\,x}\,y=x^2$$

```
(% i4)      ode2(difur1,y,x);
```

(%o4) $$y=\%k1\,log\,(x)+\frac{x^3}{9}+\%k2$$

3.8.3.9 Рівняння Ейлера

Однорідне рівняння $x^2y'' + axy' + by = 0$ називається рівнянням Ейлера. Його загальне рішення має вигляд $y = k_1x^{r_1} + k_2x^{r_2}$, де r_1 і r_2 - Розв'язання рівняння r(r _ 1) + ar + b = 0.

У разі коли рівняння $r(r-1) + ar + b = 0$ має дворазовий корінь r, рішення подається у формі $y = k_1x^r + k_2ln(x)x^r$.

Неоднорідне рівняння типу Ейлера зводиться до однорідного з постійними коефіцієнтами шляхом відповідної заміни.

Приклад:

```
(%i1) du:x^2*'diff(y,x,2)+x*'diff(y,x)+y=1;
```

$$(\%o1) \qquad x^2\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right) + x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + y = 1$$

```
(%i2) ode2(du, y, x);
```

$$(\%o2)$$
$$y = \sin(\log(x))^2 + \%k1\sin(\log(x)) + \cos(\log(x))^2 + \%k2\cos(\log(x))$$

3.8.3.10 Граничні завдання

Для завдання граничних умов при інтегруванні ОДУ другого порядку використовується функція $bc2$.

Синтаксис виклику: $bc2(solution, xval1, yval1, xval2, yval2)$, де $xval1$ - Значення x у першій граничній точці, $yval1$ - Значення рішення y у тій же точці (обидві величини задаються у формі $x = a, y = b$).

Приклад використання $ode2$ і $bc2$:

```
(%i1) 'diff(y,x,2) + y*'diff(y,x)^3 = 0;
```

$$(\%o1) \qquad \frac{d^2}{d\,x^2}\,y + y\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^3 = 0$$

```
(%i2) ode2(%,y, x);
```

$$(\%o2) \qquad \frac{y^3 + 6\,\%k1\,y}{6} = x + \%k2$$

```
(%i3) bc2(%, x=0, y=1, x=1, y=3);
```

$$(\%o3) \qquad \frac{y^3 - 10\,y}{6} = x - \frac{3}{2}$$

3.8.4 Операторний метод розв'язання

Для вирішення систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь Maxima є функція $desolve$. Робота функції $desolve$ заснована на перетворенні Лапласа заданих диференціальних рівнянь.

Нехай задана функція дійсного змінного $f(t)$, яка задовольняє наступним умовам:

1. однозначна та безперервна разом зі своїми похідними n-го порядку для всіх $t > 0$ Крім тих, де вона та її похідні мають розриви 1-го роду. При цьому в кожному кінцевому інтервалі зміни є кінцева кількість точок розриву;
2. $f(t) = 0$ для всіх $t > 0$;
3. зростає повільніше деякої експоненційної функції $M \cdot e^{at}$, де M і a - Деякі позитивні величини, тобто. завжди можна вказати такі M і a, щоб за будь-якого $t > 0$ дотримувалася нерівність $|f(t)| < M \cdot e^{at}$.

Розглянутої функції $f(t)$ ставиться у відповідність нова функція, яка визначається рівністю

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{8722;st} f(t) dt,$$

де s - Позитивне дійсне число або комплексне число з позитивною дійсною частиною.

Функція $f(t)$ при цьому називається оригіналом, а $F(s)$ - Зображенням функції $f(t)$ за Лапласом. Перехід від оригіналу до зображення називається перетворенням Лапласа. Відповідно зворотний перехід від зображення до оригіналу називається зворотним перетворенням Лапласа.

Для перетворення Лапласа виконується теорема єдиності: якщо дві безперервні функції $f(x)$ і $g(x)$ мають те саме зображення по Лапласу $F(p)$, то вони тотожно рівні.

З допомогою операційного обчислення можна порівняно легко розв'язувати різні завдання, які зводяться до інтегрування лінійних диференціальних рівнянь. Перехід від вихідних функцій до їх зображень дозволяє замінити рішення системи диференціальних рівнянь рішенням системи рівнянь алгебри (але при цьому зворотне перетворення Лапласа може бути досить складним завданням).

При обчисленні перетворення Лапласа похідні замінюються виразами алгебри наступного виду:

$$pF(p) - f(0) = f'(t)$$
$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) = f''(t)$$

і т.д., тому використання перетворення Лапласа на вирішення систем ОДУ вимагає завдання початкових умов.

Використання $desolve$ обмежується однією з властивостей перетворення Лапласа: якщо $Lf(t) = F(s)$, то $Ltf(t) = -F(s)$. Тому $desolve$ передбачає, що вирішується система ОДУ із постійними коефіцієнтами.

Синтаксис виклику $desolve : desolve(delist, fnlist)$, де $delist$ - список розв'язуваних диференціальних рівнянь, $fnlist$ - список функцій, що шукаються. При використанні $desolve$ необхідно явно ставити функціональні залежності (замість $'diff(y,x)$ використовувати запис $diff(y(x),x)$).

Приклади використання $desolve$:

Система ОДУ першого порядку:

```
(%i1) de1: diff (f (x), x) =diff(g(x),x)+sin(x);
```

$$(\%o1) \qquad \frac{d}{d\,x}f\left(x\right)=\frac{d}{d\,x}g\left(x\right)+sin\left(x\right)$$

```
(%i2) de2: diff (g (x), x, 2) =diff (f (x), x) - cos (x);
```

$$(\%o2) \qquad \frac{d^2}{d\,x^2}g\left(x\right)=\frac{d}{d\,x}f\left(x\right)-cos\left(x\right)$$

```
(%i3) desolve([de1,de2],[f(x),g(x)]);
```

$$(\%o3) \quad [f\left(x\right)=e^x\left(\left.\frac{d}{dx}g\left(x\right)\right|_{x=0}\right)-\left.\frac{d}{dx}g\left(x\right)\right|_{x=0}+f\left(0\right),$$

$$g\left(x\right)=e^x\left(\left.\frac{d}{dx}g\left(x\right)\right|_{x=0}\right)-\left.\frac{d}{dx}g\left(x\right)\right|_{x=0}+cos\left(x\right)+g\left(0\right)-1]$$

Поодиноке диференціальне рівняння другого порядку:

```
(%i1) de3: diff (f (x), x, 2) + f (x) = 2 * x;
```

$$(\%o1) \qquad \frac{d^2}{d\,x^2}f\left(x\right)+f\left(x\right)=2\,x$$

```
(%i2) desolve(de3,f(x));
```

$$(\%o2)$$

$$f\left(x\right)=sin\left(x\right)\left(\left.\frac{d}{d\,x}f\left(x\right)\right|_{x=0}-2\right)+f\left(0\right)\,cos\left(x\right)+2\,x$$

Для вказівки початкових умов використовується функція $atvalue$.

Синтаксис виклику:

$$tvalue(expr,[x_1=a_1,...,x_m=a_m],c)atvalue(expr,x_1=a_1,c)$$

Функція $atvalue$ надає значення з виразом $expr$ у точці $x=a$. Вираз $expr$ - Функція $f(x_1,...,x_m)$ або похідною $diff(f(x_1,...,x_m),x_1,n_1,...,x_n,n_m)$ Тут n_i - Порядок диференціювання по змінній x_i.

Приклад використання $desolve$ і $atvalue$:

```
(%i1) de1: diff (f (x), x) =diff(g(x),x)+sin(x);
```

$$(\%o1) \qquad \frac{d}{d\,x}f\left(x\right)=\frac{d}{d\,x}g\left(x\right)+sin\left(x\right)$$

```
(%i2) de2: diff (g (x), x, 2) =diff (f (x), x) - cos (x);
```

$$(\%o2) \qquad \frac{d^2}{d\,x^2}g\left(x\right)=\frac{d}{d\,x}f\left(x\right)-cos\left(x\right)$$

```
(%i3) atvalue(f(x),x=0,1);
```

$(\%o3)\quad 1$

```
(% i4)     atvalue(g(x),x=0,2);
```

$(\%o4)\quad 2$

```
(% i5)     atvalue(diff(g(x),x),x=0,3);
```

$(\%o5)\quad 3$

```
(%i6) desolve([de1,de2],[f(x),g(x)]);
```

$$(\%o6)\quad [f(x)=3e^{x}-2, g(x)=cos(x)+3e^{x}-2]$$

Управління початковими умовамиздійснюється за допомогою функцій $properties$ і $prontprops$. Функція$properties$ (синтаксис виклику $properties(a)$) друкує властивості змінної (атома)a), а функція $printprops$ друкує інформацію про задану властивість змінної. Крім того, функціяat обчислює значення виразу у заданій точці з урахуванням властивості$atvalue$.

Синтаксис виклику$printprops$:

- $printprops(a,i)$
- $printprops([a1,...,an],i)$
- $printprops(all,i)$

Ця функція дозволяє переглянути властивості атомаa (або групи атомів Lisp, зазначених у списку), визначені індикаторомi.

Скасування установок, зроблених$atvalue$, здійснюється функцією $remove$ (Видалення властивостіp в атомів$a_1,...,a_n$здійснюється викликом remove (a1, p1, ..., an, pn); видалення списку властивостей - викликом $remove([a_1,...,a_m],[p_1,...,p_n],...)$).

Приклад синтаксису та використання розглянутих функцій:

```
(%i1) eq1:'diff(f(x),x)='diff(g(x),x)+sin(x);
```

$$(\%o1)\quad \frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}g(x)+sin(x)$$

```
(%i2) eq2:'diff(g(x),x,2)='diff(f(x),x)-cos(x);
```

$$(\%o2)\quad \frac{d^2}{dx^2}g(x)=\frac{d}{dx}f(x)-cos(x)$$

```
(%i3) atvalue('diff(g(x),x),x=0,a);
```

$(\%o3)\quad a$

```
(% i4)     atvalue(f(x),x=0,1);
```

$(\%o4)\quad 1$

```
(% i5)     properties(f);
```

$(\%o5)\quad [atvalue]$

```
(%i6) printprops(f,atvalue);
```

$f(0) = 1$

$(\%o6) \quad done$

```
(%i7) desolve([eq1,eq2],[f(x),g(x)]);
```

$(\%o7)$

$[f(x) = a\,e^x - a + 1, g(x) = cos(x) + a\,e^x - a + g(0) - 1]$

```
(% i8)     at (%, [x = 1]);
```

$(\%o8)$

$[f(1) = e\,a - a + 1, g(1) = e\,a - a + cos(1) + g(0) - 1]$

Ще один приклад аналізу властивостей:

```
(% i9)     atvalue (f(x,y), [x = 0, y = 1], a^2);
```

$(\%o9) \quad a^2$

```
(%i10)     atvalue ('diff(f(x, y), x), x = 0, 1 + y);
```

$(\%o10) \quad @2 + 1$

```
(%i11)     printprops (all, atvalue);
```

$\frac{d}{d\,@1} g(@1)\Big|_{[@1=0]} = a$

$\frac{d}{d\,@1} f(@1, @2)\Big|_{[@1=0]} = @2 + 1$

$f(0,1) = a^2$

$f(0) = 1$

$(\%o11) \quad done$

3.8.5 Додаткові можливості рішення ОДУ

3.8.5.1 Пакет contrib_ode

Як видно з опису можливостей Maxima вище, можливості основної функції для аналітичного рішення ОДУ функції odo2 дуже обмежені. Для розширення можливостей рішення ОДУ першого та другого порядку в останніх версіях Maxima існує пакет розширення contrib_ode. За допомогою $contrib_ode$ можливе вирішення рівнянь Клеро, Лагранжа, Ріккаті та ін. У загальному випадку результат - список рішень. Для деяких рівнянь (зокрема Ріккаті) рішення подається у формі іншого ОДУ – результату заміни змінних. Функція $contrib_ode$ реалізує методи факторизації ($factorization$), Клеро (Clairault), Лагранжа (Lagrange), Ріккаті (Riccati), Абеля (Abel) та метод симетрії Лі (Lie symmetry method).

Для використання пакет contrib_ode необхідно завантажити:

```
(%i1) load("contrib_ode")$
```

Приклад рішення ОДУ з використанням функції $contrib_ode$:

```
(%i2) eqn:x*'diff(y,x)^2-(1+x*y)*'diff(y,x)+y=0;
```

$$(\%o2) \qquad x\left(\frac{d}{d\,x}y\right)^2 - (x\,y+1)\left(\frac{d}{d\,x}y\right) + y = 0$$

```
(%i3) contrib_ode(eqn, y, x);
```

$$(\%t3)\qquad x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2-(x\,y+1)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+y=0$$

first order equation не є linear in y'

$$(\%o3)\qquad [y=log\,(x)+\%c, y=\%c\,e^x]$$

(% i4)   метод;

$$(\%o4)\qquad factor$$

Гідність $contrib_ode$ - Можливість вирішення нелінійних ОДУ першого порядку, т.к. вони можуть мати у випадку кілька рішень, результат представляється як списку.

Синтаксис виклику $contrib_ode$ не відрізняється від синтаксису виклику $ode2$.

Розглянемо приклади розв'язання інших типів рівнянь.

3.8.5.2 Рівняння Клеро та Лагранжа

Рівняння Клеро

```
(%i1) load("contrib_ode")$
(%i2) eqn:'diff(y,x)^2+x*'diff(y,x)-y=0;
```

$$(\%o2)\qquad \left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-y=0$$

```
(%i3) contrib_ode(eqn, y, x);
```

$$(\%t3)\qquad \left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-y=0$$

first order equation не є linear in y'

$$(\%o3)\qquad [y=\%c\,x+\%c^2, y=-\frac{x^2}{4}]$$

(% i4)   метод;

$$(\%o4)\qquad clairault$$

Рівняння Лагранжа

```
(% i5)     leq:y=(1+'diff(y,x))*x+('diff(y,x))^2;
```

$$(\%o5)\qquad y=\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y+1\right)$$

```
(%i6) contrib_ode(leq, y, x);
```

$$(\%t6)\qquad y=\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y+1\right)$$

first order equation не є linear in y'

(%o6)

$$[[x=e^{-\%t}\,\left(\%c-2\,(\%t-1)\,e^{\%t}\right), y=(\%t+1)\,x+\%t^2]]$$

```
(%i7) метод;
```

$(\%o7)\quad lagrange$

У деяких випадках можливе лише рішення у параметричній формі. приклад ($\%t$ - Параметр):

```
(% i8  eqn:'diff(y,x)=(x+y)^2;
```

$$(\%o8)\quad \frac{d}{d\,x}\,y=(y+x)^2$$

```
(% i9)       contrib_ode(eqn, y, x);
```

$$(\%o9)\quad [[x=\%c-atan\left(\sqrt{\%t}\right),y=-x-\sqrt{\%t}],$$
$$[x=atan\left(\sqrt{\%t}\right)+\%c,y=\sqrt{\%t}-x]]$$

```
(%i10)       метод;
```

$(\%o10)\quad lagrange$

3.8.5.3 Інші завдання з використанням contrib_ode

Пакет $contrib_ode$ дозволяє вирішувати диференціальні рівняння, не розв'язувані за допомогою $ode2$ безпосередньо. Приклад – узагальнені однорідні рівняння (див. вище). Подані завдання використовують методи Абеля та симетрії Лі.

```
(%i11)       eqn:(2*x-y+4)*'diff(y,x)+(x-2*y+5)=0;
```

$$(\%o11)\quad (-y+2\,x+4)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-2\,y+x+5=0$$

```
(%i12)       contrib_ode(eqn, y, x);
```

$$(\%o12)\quad [\frac{log\left(3-\frac{2(2x+4)-x-5}{-y+2x+4}\right)-3log\left(1-\frac{2(2x+4)-x-5}{-y+2x+4}\right)+2log\left(-\frac{2(2x+4)-x-5}{4(-y+2x+4)}\right)}{2}=$$
$$log(x+1)+\%c]$$

```
(%i13)       метод;
```

$(\%o13)\quad abel2$

```
(%i14)       eqn1:'diff(y,x)=(1-3*x-3*y)/(1+x+y);
```

$$(\%o14)\quad \frac{d}{d\,x}\,y=\frac{-3\,y-3\,x+1}{y+x+1}$$

```
(%i15)       contrib_ode(eqn1,y,x);
```

$$(\%o15)\quad [\frac{2\,log\left(y+x-1\right)+y+3\,x}{2}=\%c]$$

```
(%i16)       метод;
```

$(\%o16)\quad lie$

3.8.5.4 Вирішення однорідних лінійних рівнянь

Інші корисні функції пакету contrib_ode: $odelin$ і ode_check .

Функція $odelin$ вирішує однорідні лінійні рівняння першого та другого порядку, та повертає фундаментальне рішення ОДУ.

Приклад:

```
(% i4)
      odelin(x*(x+1)*'diff(y,x,2)+(x+5)*'diff(y,x,1)+(-
4)*y,y,x);

...trying factor method...
solving 7 equations in 4 variables...
trying the Bessel solver...solving 1 equations in 2
variables...
trying the F01...
solving 1 equations in 3 variables...
trying the spherodial wave solver...
solving 1 equations in 4 variables...
trying the square root Bessel solver...
solving 1 equations in 2 variables...
trying the 2F1 solver...
solving 9 equations in 5 variables
```

(%o4)

$$\frac{gauss\_a\left(-6,-2,-3,-x\right)}{x^4},\frac{gauss\_b\left(-6,-2,-3,-x\right)}{x^4}$$

Примітка: функції $gauss_a$ і $gauss_b$ - Спеціальні функції, що являють собою рішення гіпергеометричного рівняння.

Функція ode_check дозволяє підставити в ОДУ знайдене рішення.

Приклад:

```
(%i1) load("contrib_ode")$
(%i2) eqn:(1+x^2)*'diff(y,x,2)-2*x*'diff(y,x);
```

(%o2) $$\left(x^2+1\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)-2\,x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)$$

```
(%i3) odelin(eqn,y,x);
...trying factor method...solving 7 equations in 4
variables
```

(%o3) $$1,x\,\left(x^2+3\right)$$

```
(% i4)     ode_check(eqn,y=x*(x^2+3));
```

(%o4) $$0$$

```
(% i5)     ode_check(eqn, y=1);
```

(%o5) $$0$$

3.8.6 Чисельні методи рішення ОДУ

Однак часом відшукати символьне рішення ОДУ в досить компактному вигляді неможливо. І тут доцільно використовувати чисельні методи. Maxima включає пакет розширення dynamics, що дозволяє проінтегрувати систему ОДУ методом Рунге-Кутта.

Починаючи з версії 5.12 Maxima включає пакет dynamics (його необхідно завантажувати перед використанням). Крім методу Рунге-Кутта, пакет dynamics включає ряд функцій для побудови різних фракталів.

Метод Рунге-Кутта реалізує функцію rk. Синтаксис виклику: $rk([eq],[vars],[init],[t_{range}])$, де eq - список правих частин рівнянь; $vars$ - Список залежних змінних; $init$ - Список початкових значень; t_{range} - Список $[t,t_0,t_{end},ht]$, що містить символьне позначення незалежної змінної (t), її початкове значення (t_0), кінцеве значення (t_{end}), крок інтегрування (ht).

Приклад:

Вирішити ОДУ

$$\frac{dx}{dt}=4x^2-4y^2;\qquad \frac{dy}{dt}=y^2-x^2+1;$$

при $t=[0\ldots4],\ x(0)=-1,25,\ y(0)=0,75$.

Використовуємо пакет dynamics.

```
(%i1) load(''dynamics'')$
```

Вибираємо крок інтегрування 0,02.

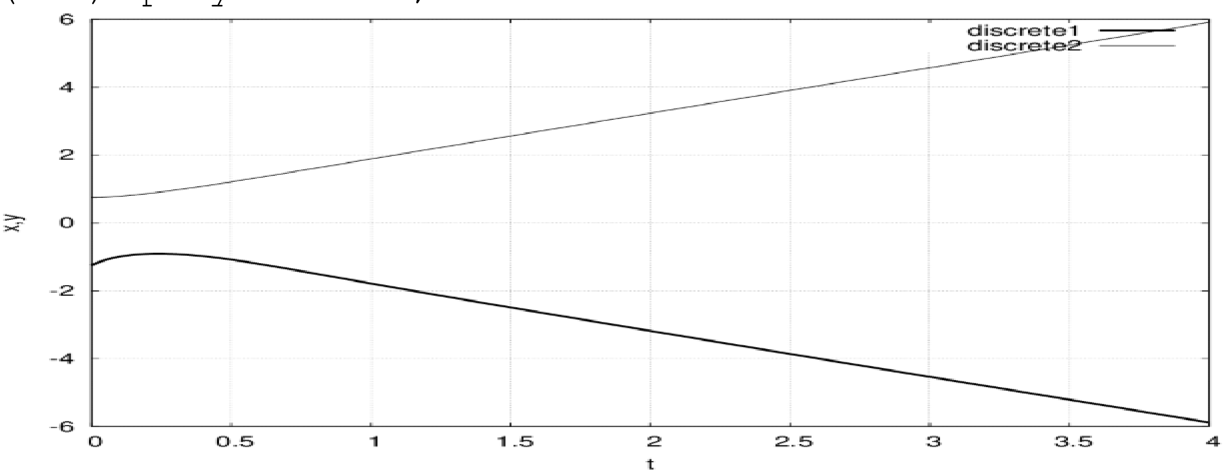
```
(%i2) sol:rk([4*x^2-4*y^2,y^2-x^2+1],[x,y],
      [-1.25,0.75], [t,0,4,0.02]);
```

В результаті рішення отримуємо список значень у форматі t,x,y]].

```
(%i1) load("dynamics")$
(%i2) rp1:4*x^2-4*y^2;
```

$$(\%o2)\qquad 4\,x^2-4\,y^2$$

```
(%i3) rp2:y^2-x^2+1;
```



Мал. 3.16.Приклад графічного рішення системи ОДУ чисельним методом

$$(\%o3)\qquad y^2-x^2+1$$

```
(% i4)     sol:rk([rp1,rp2],[x,y],[-
1.25,0.75],[t,0,4,0.02])$
```

Список sol не виводимо на екран (досить довгий, тому завершуємо введення команди символом $).

Для побудови графіка рішення перетворимо отриманий список, збудувавши окремо список значень t (список xg у прикладі), x (список $yg1$), y (список $yg2$). При побудові графіка використовуємо опцію $discrete$.

```
(% i5)     len:length(sol);
```

$$(\%o5) \qquad 201$$

```
(%i6) xg:makelist(sol[k][1],k,1,len)$
(%i7) yg1:makelist(sol[k][2],k,1,len)$
(% i8)     yg2:makelist(sol[k][3],k,1,len)$
(% i9)     plot2d([[discrete,xg,yg1],[discrete,xg,yg2]]);
```

Результат рішення подано на рис. 3.16

Аналогічний, хоч і дещо складніший приклад — моделювання атрактора Лоренца.

3.9 Ряди Фур'є по ортогональних системах

Пакет Maxima включає досить широкі можливості для роботи як з класичними тригонометричними рядами Фур'є, так і з рядами Фур'є по інших ортогональних системах. Розглянемо короткий вступ, необхідне розуміння прикладів.

3.9.1 Поняття ряду Фур'є

Нехай дані дві функції $f(x)$ і $g(x)$, добуток яких інтегрується на відрізку [a, b]. Функції $f(x)$ і $g(x)$, називаються ортогональними на [a, b], якщо виконується умова

$$\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx = 0,$$

де $\rho(x)$ - Вагова функція.

Функціональна послідовність

$\{\varphi_n(x)\} = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots \varphi_n(x), \dots\}$ називається ортогональною на [a, b], якщо виконується умова:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,\rho(x)\,dx = 0, \forall n \neq m.$$

.

Функціональна послідовність $\{\varphi_n(x)\}$ називається ортонормованою на [a, b], якщо

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,\rho(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \\ 0, & \text{если } n \neq m \end{cases}$$

Часто використовувана послідовність із тригонометричних функцій $1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), ..., \cos(nx), \sin(nx), ..$. ортогональна на відрізку $[-\pi, \pi]$ з ваговою функцією $\rho(x) = 1$.

Перевіримо якість ортогональності, обчислюючи відповідні інтеграли. При $m \neq n$ отримуємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)dx = -\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)dx = -\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = \left.\frac{1}{n}\sin(nx)\right|_{-\pi}^{\pi} = 0, \forall n \in N;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x))dx =$$

$$\frac{1}{2}\left.\left(\frac{\sin((m-n)x)}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Якщо ж $m = n$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2mx))\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\left.\left(x + \frac{\sin(2mx)}{2m}\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

Отже, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n. \end{cases}$.. Аналогічним чином встановлюємо, що $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n. \end{cases}$..

Залишається обчислити інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx$..

Оскільки підінтегральна функція є непарною, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0,$$

Як випливає з наведених рівностей, будь-які дві різні функції тригонометричної послідовності ортогональні на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Інший широко використовуваної послідовністю ортогональних функцій є послідовність поліном Лежандра. Поліном Лежандра ступеня n можна подати через формулу Родріга у вигляді:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$$

Вони також можуть бути обчислені за рекурентною формулою:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x).$$

Поліноми Лежандра ортогональні на відрізку [-1, 1] з вагою $\rho(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)\,dx = \begin{cases} \frac{2}{2k+1}, & \text{если } k = l \\ 0, & \text{если } k \neq l \end{cases}.$$

Ще однією важливою послідовністю ортогональних функцій є послідовність поліномів Чебишева. Поліноми Чебишева першого роду $T_n(x)$ ступеня n можна визначити за допомогою рівності:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta),$$

або, що майже еквівалентно,

$$T_n(z) = \cos(n \arccos(z)).$$

Вони також можуть бути обчислені за рекурентною формулою:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Поліноми Чебишева ортогональні на відрізку [-1, 1] з вагою $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)T_l(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } k = l \neq 0 \\ \pi, & \text{если } k = l = 0 \\ 0, & \text{если } k \neq l \end{cases}$$

3.9.2 Обчислення коефіцієнтів тригонометричних рядів Фур'є

Члени тригонометричного ряду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

є періодичними функціями із загальним періодом 2π тому сума цього ряду $S(x)$ також буде періодичною функцією з періодом 2π.

Припустимо, що 2π-періодичну функцію $f(x)$ можна розкласти в тригонометричний ряд, що рівномірно сходить на відрізку $[-\pi, \pi]$.

$$(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \text{ (3.1)}$$

Розглянемо питання визначення коефіцієнтів a_0, a_n і $b_n (n = 1, 2, ...)$. І тому застосуємо теорему про почленном інтегруванні функціонального ряду. Проінтегруємо обидві частини рівності в межах від $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right).$$

З результатів обчислення інтегралів, наведених вище, випливає, що всі доданки, що зустрічаються у правій частині під знаком суми дорівнюють нулю, тому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0.$$

Отже,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx. \text{ (3.2)}$$

Для того, щоб знайти $a_n (n = 1, 2, ...)$ обидві частини цієї рівності помножимо на cos(mx) і проінтегруємо на відрізку $[-\pi, \pi]$. Оскільки система тригонометричних функцій ортогональна, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0$$

для $\forall m, n \in \mathbb{N}$, якщо $m \neq n$.

Це означає, що всі з інтеграли, що зустрічаються в правій частині, дорівнюватимуть нулю, виняток становить інтеграл, який виходить при $m = n$. Цей інтеграл дорівнює π. Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi a_n,$$

звідки $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \; n = 1, 2, \ldots$$

Аналогічно, помноживши обидві частини рівності на $\sin(mx)$ та проінтегрувавши на відрізку $[-\pi; \pi]$, отримуємо, що

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Отже, якщо функцію $f(x)$ можна уявити як тригонометричного ряду, то коефіцієнти a_0, a_n, b_n обчислюються за наведеними формулами і називаються коефіцієнтами Фур'є для функції $f(x)$ (а ряд - відповідно поруч Фур'є для $f(x)$).

Проміжок інтегрування $[-\pi, \pi]$ для періодичної з періодом 2π функції можна замінити будь-яким проміжком $[a, a+2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$, довжина якого дорівнює 2π .

Функція $f(x)$ називається шматково-гладкою на відрізку [a, b] якщо функція $f(x)$ та її похідна на [a, b] мають кінцеве число точок розриву першого роду.

Достатні умови розкладання функції в ряд Фур'є дає теорема Діріхле: якщо $f(x)$ - Періодична з періодом 2π шматковогладка на $[-\pi; \pi]$ функція, то її ряд Фур'є сходиться у будь-якій точці цього відрізку та його сума дорівнює:

1. значення функції $f(x)$, коли x - Точка безперервності функції $f(x)$;
2. $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, коли x - точка розриву функції $f(x)$, при цьому

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Зазначимо, що на практиці найчастіше зустрічаються функції, які задовольняють умови теореми Діріхле.

Приклад: періодичну з періодом 2π функцію $f(x) = x, \ -\pi < x < \pi$ розкласти до ряду Фур'є.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є (використовуємо Maxima):

```
(%i1) n:5;
```

$$(\%o1) \qquad 5$$

```
(%i2) f(x):=x;
```

$$(\%o2) \qquad f(x) := x$$

```
(%i3) a0:1/%pi*integrate(f(x),x,-%pi,%pi);
```

$$(\%o3) \qquad 0$$

```
(% i4)
for k:1 thru n do a[k]:1/%pi*integrate(f(x)*cos(k*x),x,-
%pi,%pi);
```

$$(\%o4) \qquad done$$

```
(% i5)
for k: 1 thru n do b [k]: 1/% pi * integrate (f (x) * sin
(k * x), x, -% pi, % pi);
```

$$(\%o5) \qquad done$$

```
(%i6) for k:1 thru n do display(a[k],b[k]);
```

$a_1 = 0\, b_1 = 2\, a_2 = 0\, b_2 = -1\, a_3 = 0\, b_3 = \frac{2}{3}\, a_4 = 0\, b_4 = -\frac{1}{2}\, a_5 = 0\, b_5 = \frac{2}{5}$

$(\%o6) \qquad done$

```
(%i7)
fun(x):=a0/2+sum(a[k]*cos(k*x),k,1,n)+sum(b[k]*sin(k*x),k
,1,n );
```

$(\%o7)$

$$fun(x) := \frac{a_0}{2} + sum(a_k\, cos(k\, x), k, 1, n) + sum(b_k\, sin(k\, x), k, 1, n)$$

```
(% i8)    wxplot2d([f(x),fun(x)], [x,-5,5],
[nticks,20]);
```

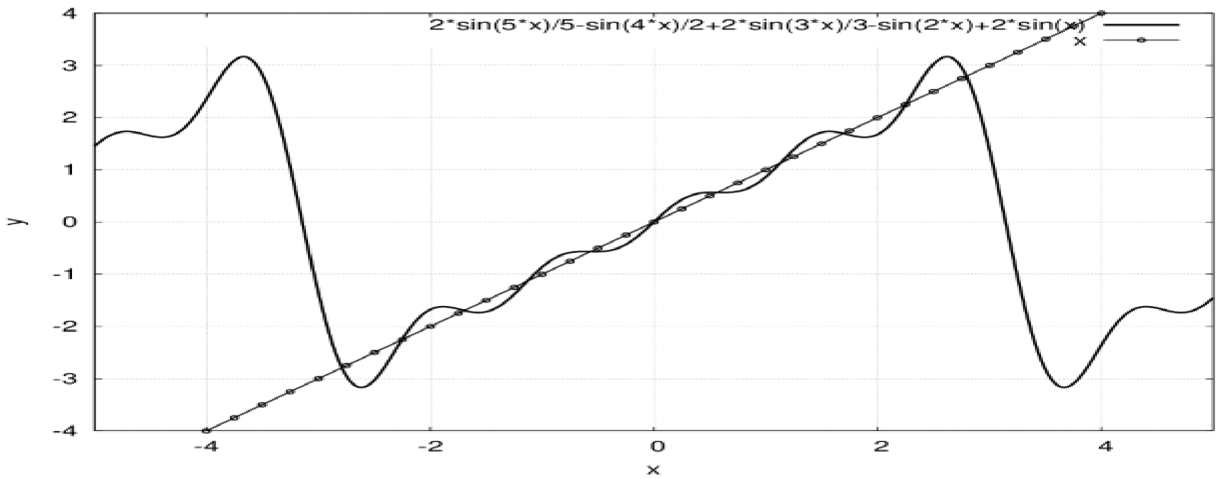
Ця функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Діріхле, її графік у порівнянні з графіком часткової суми ряду Фур'є $fun(x)$ зображений на рис. 3.17.

3.9.3 Ряди Фур'є для парних та непарних функцій

Припустимо, що $f(x)$ - непарна 2π-періодична функція. У цьому випадку $f(x)\cos(nx)$ - парна функція, оскільки вірна рівність $f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos(nx)$, а $f(x)\sin(nx)$ - непарна функція, оскільки $(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin(nx)$ Тому коефіцієнт ряду Фур'є a_n, b_n рівні:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \ (n = 0, 1, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0 \ (n = 1, 2, \ldots).$$



Мал. 3.17.Графік функції y = f(x) та суми перших п'яти членів ряду Фур'є

Отже, ряд Фур'є парної функції містить лише косинуси, тобто. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$.. Аналогічно, якщо $f(x)$- непарна функція, то $f(x)\cos(nx)$- непарна, а $f(x)\sin(nx)$- парна функція.

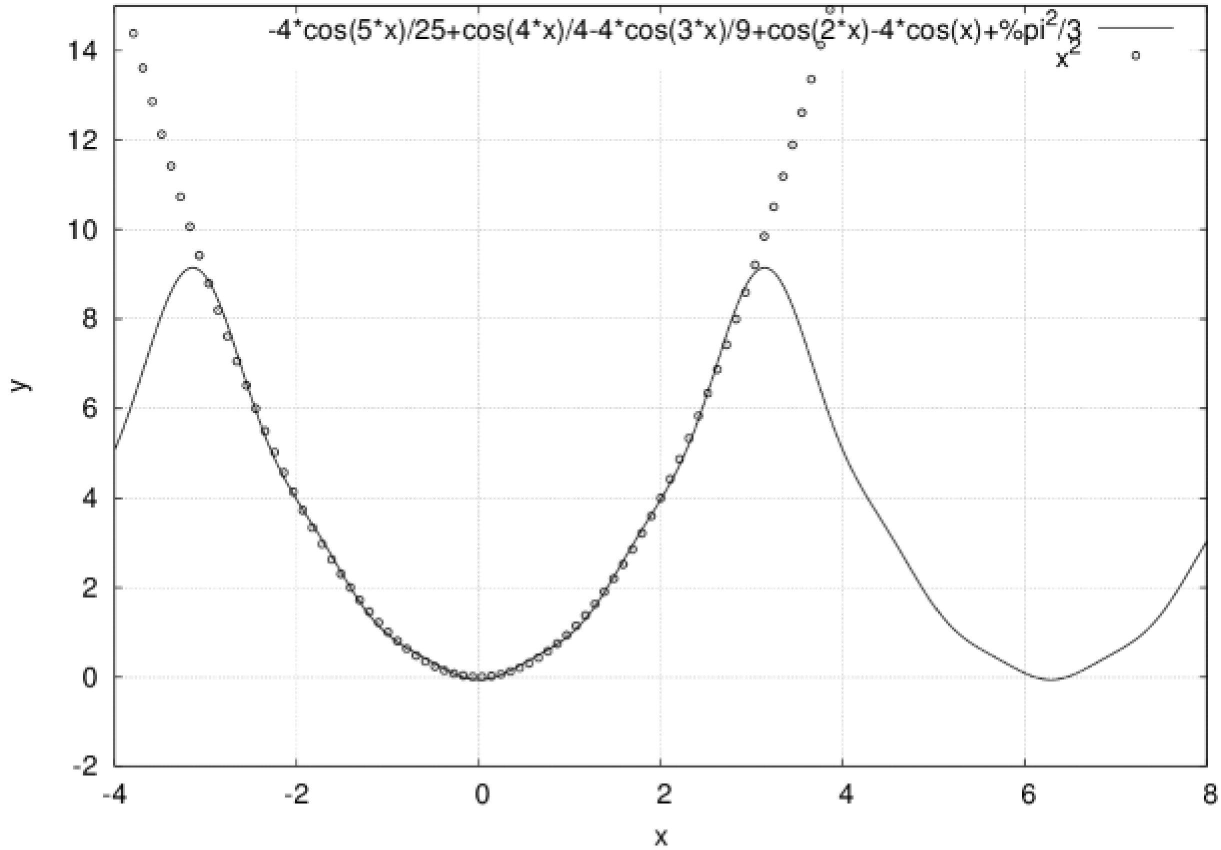
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) = 0 \ (n = 0, 1, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \ (n =$$

Тому$1, 2, \dots)$

Отже, ряд Фур'є непарної функції містить лише синуси, тобто. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$.

Приклад: Розкласти ряд Фур'є періодичну з періодом2πфункцію, задану на відрізку$[-\pi, \pi]$рівністю$f(x) = x^2$.



Мал. 3.18.Графік функції (точки) та суми перших п'яти членів ряду Фур'є (суцільна лінія)

Ця функція$y = x^2$є парною (рис. 3.18), тому її ряд Фур'є містить лише косинуси. Обчислюємо коефіцієнти цього ряду:$b_n = 0, n = 1, 2, \dots$

Для обчислення коефіцієнтів a_n ряду Фур'є створюємо функцію fun, вхідними параметрами якої є ім'я незалежної змінної (у прикладі це x), число сумованих членів ряду (n, надалі функція викликається при $n = 5$) і символьне вираз, що визначає функцію, на яку будується розкладання (f, функція fun викликається з $f = x^2$).

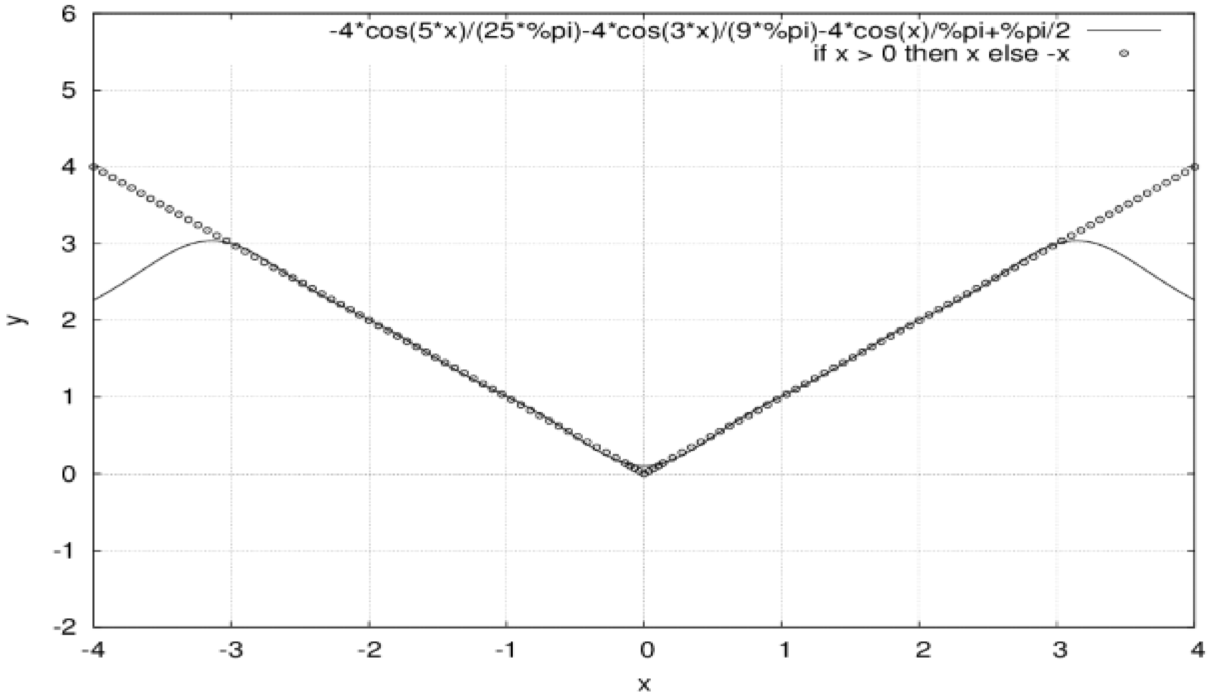
Приклад:

```
(%i1) fun(x,n,f):=(for k:0 thru n do
        a[k]:1/%pi*integrate(f*cos(k*x),x,-%pi,%pi),
        a[0]/2 +sum(a[k]*cos(k*x),k,1,n))$
(%i2) fun(x,5,x^2);
```

$$(\%o2)-\frac{4\cos(5x)}{25}+\frac{\cos(4x)}{4}-\frac{4\cos(3x)}{9}+\cos(2x)-4\cos(x)+\frac{\pi^2}{3}$$

Для аналітичного обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є функції $y = |x|$ функцію fun необхідно трохи змінити, передбачивши різні вирази для підінтегрального виразу на напівінтервалах $[-\pi, 0)$и$(0, \pi]$(вирази f_1 і f_2 у списку параметрів функції). Текст програми на макромові Maxima:

```
fun12(x,n,f1,f2):=(for k:0 thru n do
a[k]:1/%pi*(integrate(f1*cos(k*x),x,-%pi,0)+
            integrate(f2*cos(k*x),x,0,%pi)),
a[0]/2+sum(a[k]*cos(k*x),k,1,n))$
```



Мал. 3.19.Графік функції y = | x | (точки) та суми перших п'яти членів ряду Фур'є (суцільна лінія)

Функція є $y = |x|$ також є парною (рис. 3.19), тому її ряд Фур'є містить лише косинуси.

Результати обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є для цієї функції:

```
(%i1) fun12(x,5,-x,x);
```

$$(\%o1) \qquad -\frac{4\cos(5x)}{25\pi}-\frac{4\cos(3x)}{9\pi}-\frac{4\cos(x)}{\pi}+\frac{\pi}{2}$$

Для побудови графіка функції $y=|x|$ створюємо функцію $fg(x)$, яка використана для побудови графіка на рис. 3.19.

```
(%i3) fg(x):=if x>0 then x else -x$
```

3.9.4 Розкладання функцій у ряд Фур'є на відрізку [0,π]

Нехай $f(x)$ визначено на відрізку $[0,\pi]$. Для того, щоб функцію $f(x)$ розкласти в ряд Фур'є на цьому відрізку, довизначимо цю функцію довільним чином на інтервалі $[-\pi,0]$. Розглянемо два випадки:

функцію $f(x)$, задану на $[0,\pi]$, продовжимо на інтервал $[-\pi,0]$ так, що знову отримана функція $f_1(x)$, була парною:

$$f_1=\begin{cases} f(-x), & \text{если } x\in[-\pi,0] \\ f(x), & \text{если } x\in[0,\pi] \end{cases}.$$

У такому разі кажуть, що $f(x)$ продовжена на $[-\pi,0]$ парним чином. Оскільки $f_1(x)$ - парна на $[-\pi,\pi]$ функція, то її ряд Фур'є містить лише косинуси:

$$f_1(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx).$$

Оскільки на відрізку $[0,\pi]$ має місце рівність $f_1(x)=f(x)$, то ряд Фур'є для функції $f_1(x)$ буде і поруч Фур'є для $f(x)$ на $[0,\pi]$

функцію $f(x)$, задану на $[0,\pi]$, продовжимо на інтервал $[-\pi,0]$ непарним чином:

$$f_2=\begin{cases} -f(-x), & \text{если } x\in[-\pi,0[\\ f(x), & \text{если } x\in[0,\pi] \end{cases}.$$

Оскільки $f_2(x)$ - непарна на $[-\pi,\pi]$ функція, то її ряд Фур'є містить лише синуси:

$$f_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx).$$

Оскільки $f_2(x)=f(x)$ при $\forall x\in[0,\pi]$, то отриманий ряд Фур'є для $f_2(x)$ і буде поруч Фур'є для $f(x)$ на $[0,\pi]$.

Приклад: Функцію $f(x)=2x+1$, визначену на відрізку $[0,\pi]$, Розкласти в ряд Фур'є: 1) по косинус; 2) за синусами.

1) Функцію $f(x)$ продовжимо на $[-\pi, 0]$ парним чином, тобто. складемо нову функцію $f_1(x)$ за формулою:

$$f_1(x) = \begin{cases} -2x+1, & \text{если } x \in [-\pi, 0[\\ 2x+1, & \text{если } x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Обчислюємо коефіцієнти Фур'є для цієї функції за допомогою функції $fun12$:

```
(%i1) fleft:-2*x+1;
```

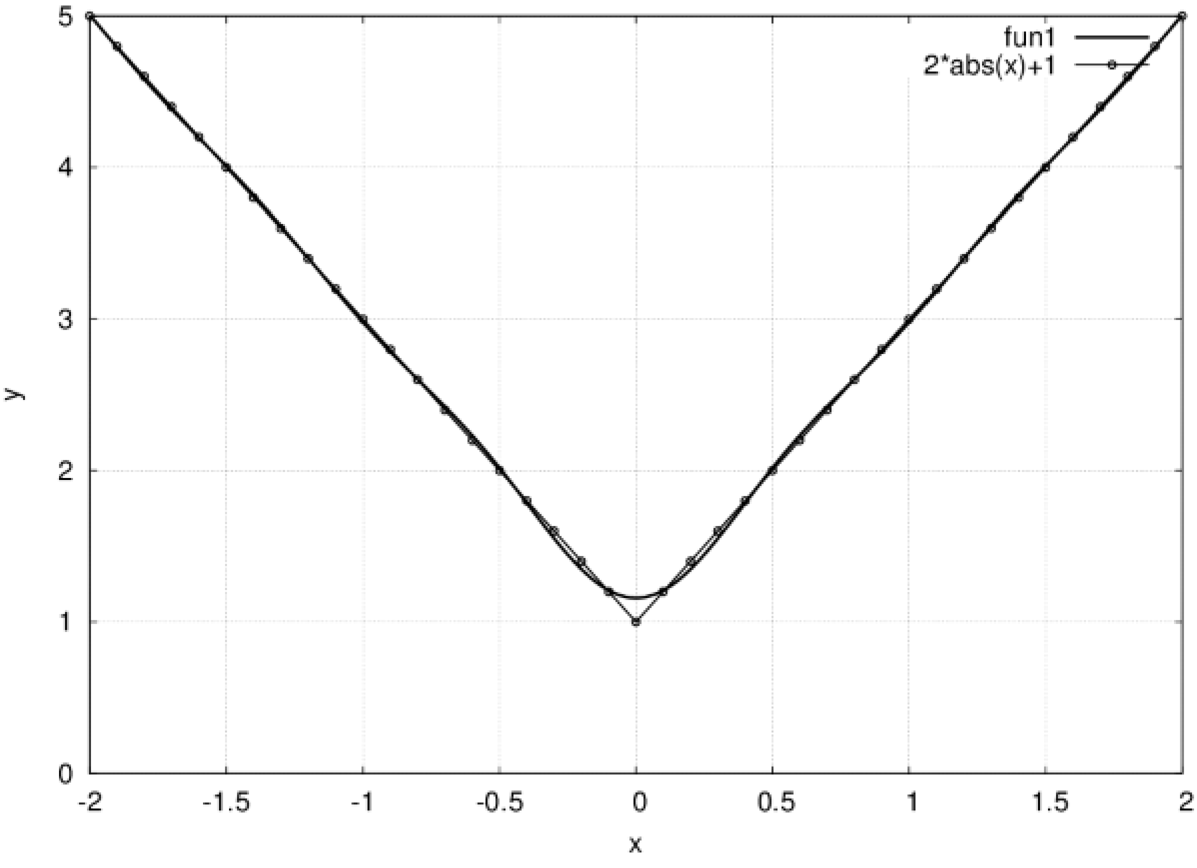
$(\%o1)\quad 1-2\,x$

```
(%i2  fright:2*x+1;
```

$(\%o2)\quad 2\,x+1$

```
(%i3) funcos(x,7,fleft,fright);
```

$$(\%o3)\ -\frac{8\,cos\,(7\,x)}{49\,\pi}-\frac{8\,cos\,(5\,x)}{25\,\pi}-\frac{8\,cos\,(3\,x)}{9\,\pi}-\frac{8\,cos\,(x)}{\pi}+\frac{2\,\pi^2+2\,\pi}{2\,\pi}$$



Мал. 3.20.Графік функції y = 2x+1, продовженої парним чином, та суми семи членів відповідного ряду

Графічне зіставлення результатів підсумовування низки Фур'є та аналітичного вираження заданої функції представлені на рис. 3.20

2) Функцію $f(x)$ продовжимо на $[-\pi, 0]$ непарним чином. Складемо нову функцію $f_2(x)$ за формулою $f_2(x) = \begin{cases} 2x-1, & x\in[-\pi,0[\\ 2x+1, & x\in[0,\pi] \end{cases}$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є цієї функції, використовуючи функцію $fun12sin$, аналогічну до наведеної вище.

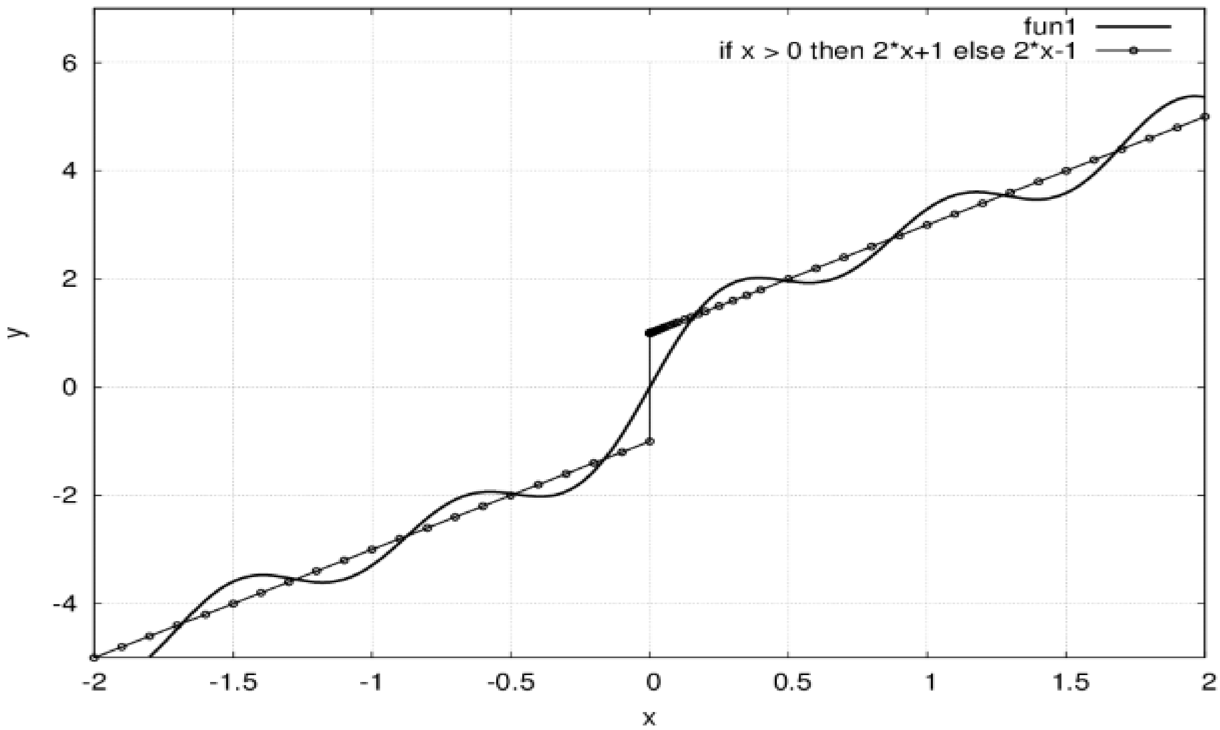
Приклад:

```
(%i1) fleft:2*x-1$
(%i2) fright:2*x+1$
(%i3) f(x):=(if x>0 then fright else fleft)$
(% i4)     fun12sin(x,n,f1,f2):=(for k:1 thru n do
      b[k]:1/%pi*(integrate(f1*sin(k*x),x,-%pi,0)
      +integrate(f2*sin(k*x),x,0,%pi)),
      sum(b[k]*sin(k*x),k,1,n))$
(% i5)     fun12sin(x,7,fleft,fright);
```

$$(\%o5)\ \frac{\left(\frac{2\,(2\,\pi+1)}{7}+\frac{2}{7}\right)sin(7\,x)}{\pi}+\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{2\,\pi+1}{3}\right)sin(6\,x)}{\pi}+\frac{\left(\frac{2\,(2\,\pi+1)}{5}+\frac{2}{5}\right)sin(5\,x)}{\pi}+$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{2\,\pi+1}{2}\right)sin(4\,x)}{\pi}+\frac{\left(\frac{2\,(2\,\pi+1)}{3}+\frac{2}{3}\right)sin(3\,x)}{\pi}-2\,sin\,(2\,x)+\frac{(4\,\pi+4)\,sin(x)}{\pi}$$

Графічне зіставлення результатів підсумовування низки Фур'є та аналітичного вираження заданої функції представлені на рис. 3.21



Мал. 3.21.Порівняння графіка функції y = 2x + 1 при непарному продовженні та суми семи членів відповідного ряду Фур'є

3.9.5 Ряд Фур'є для функцій з періодом 2l

Нехай $f(x)$- Періодична з періодом $2\ell\ \ (\ell \neq \pi)$ функція, що на відрізку $[-\ell,\ell]$ задовольняє умовам теореми Діріхле. Розкладемо її на цьому відрізку до ряду Фур'є. Позначимо

$$x = \frac{\ell t}{\pi}. \qquad (3.3)$$

Тоді

$$f(x) = f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) = \varphi(t)$$

Функція $\varphi(t)$- Вже 2π -періодична функція, так як

$$\varphi(t+2\pi) = f\left(\frac{\ell}{\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{\ell t}{\pi} + 2\ell\right) = f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) = \varphi(t).$$

функцію $\varphi(t)$ розкладемо в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi, \pi]$

$$\varphi(t) = f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)\dots \qquad (3.4)$$

Коефіцієнти цього ряду обчислюються за формулами:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\cos(nt)dt, n = 0, 1, \dots, \qquad (3.5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\sin(nt)dt, n = 1, 2, \dots \qquad (3.6)$$

Повертаючись до колишньої змінної x, з рівності (3.3) маємо $t = \frac{\pi x}{\ell}$. Тоді ряд (3.4) можна подати у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{\ell}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{\ell})\right). \qquad (3.7)$$

В інтегралах (3.5) та (3.6) зробимо заміну змінної:

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\cos(nt)dt = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{\ell})dx, n = 0, 1, \dots$

$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\sin(t)dt = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{\ell})dx, n = 1, 2, \dots.$

Якщо $f(x)$- парна на $[-\ell, \ell]$ функція, то $b_n = 0 (n = 1, 2, ...)$, а $a_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{\ell})dx,\ (n = 0, 1, \dots),$, ряд Фур'є такої функції має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{\ell}).$$

Якщо $f(x)$- непарна на $[-\ell, \ell]$ функція, то $a_n = 0 (n = 0, 1, 2, ...)$,

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{\ell})dx,\ \ (n = 1, 2, \dots)$$

, ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{\ell})dx.$$

Приклад:Розкласти до ряду Фур'є періодичну з періодом $T = 2$ функцію $f(x)$, задану формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{если } -1 < x \le 0 \end{cases}.$$

Ця функція на відрізку [-1, 1] відповідає умовам теореми Дирихле. Ряд Фур'є для цієї функції:

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(k\pi x)$$

Сума цього ряду у точках $x = \pm 1, \pm 3, \dots$ дорівнює $\frac{1}{2}$.

Розглянемо видозміну функції Maxima, яка потрібна на обчислення коефіцієнтів низки Фур'є на функції з періодом $[-\ell, \ell]$. Розглянемо текст функції $fun12l$:

```
fun12l(x,n,l,f1,f2):=(for k:0 thru n do
    a[k]:1/l*(integrate(f1*cos(%pi*k*x/l),x,-l,0)
    +integrate(f2*cos(%pi*k*x/l),x,0,l)),
for k:1 thru n do
b[k]:1/l*(integrate(f1*sin(%pi*k*x/l),x,-l,0)+
    integrate(f2*sin(%pi*k*x/l),x,0,l)),
    a[0]/2+sum(a[k]*cos(%pi*k*x/l),k,1,n)+
    sum(b[k]*sin(%pi*k*x/l),k,1,n))$
```

Основна зміна в порівнянні з варіантами, наведеними вище - використання тригонометричних функцій $\sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right)$ і $\sin\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right)$

Висновок Maxima для перших семи членів ряду Фур'є:

```
(%i6) fun12l(x,7,1,0,x);
```

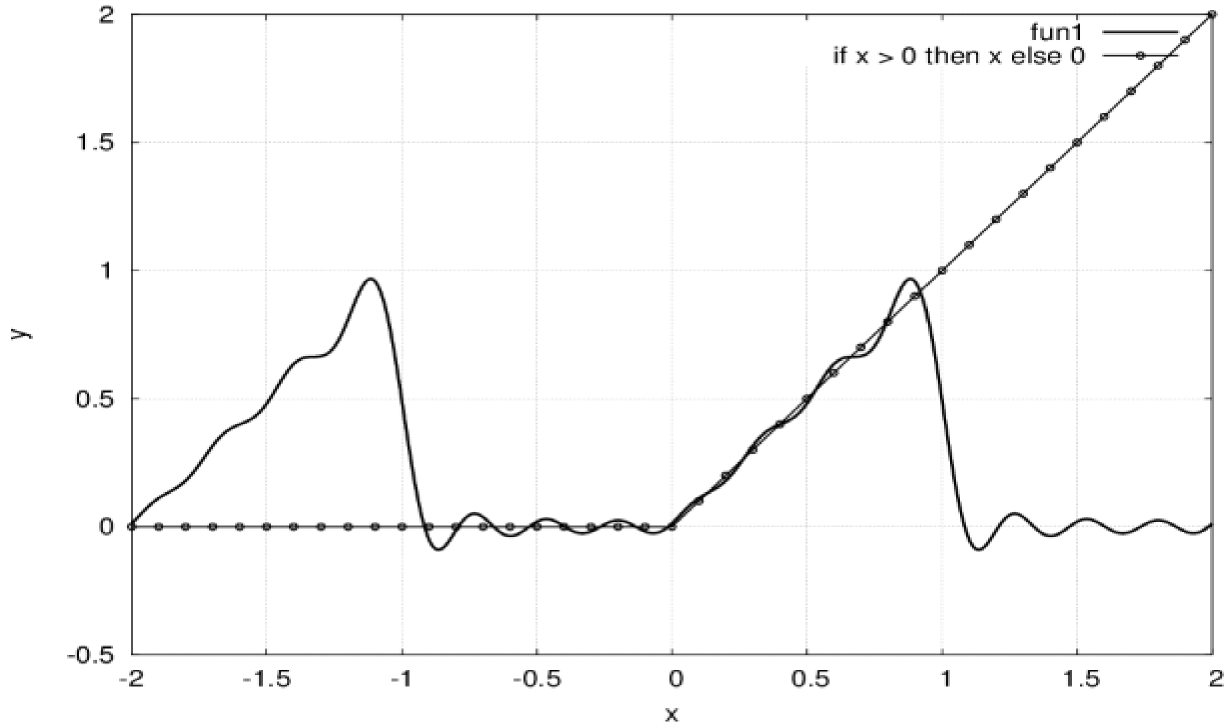
$$(\%o6)\ \frac{\sin(7\pi x)}{7\pi} - \frac{2\cos(7\pi x)}{49\pi^2} - \frac{\sin(6\pi x)}{6\pi} + \frac{\sin(5\pi x)}{5\pi} - \frac{2\cos(5\pi x)}{25\pi^2} - \frac{\sin(4\pi x)}{4\pi} + \frac{\sin(3\pi x)}{3\pi} - \frac{2\cos(3\pi x)}{9\pi^2} - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} - \frac{2\cos(\pi x)}{\pi^2} + \frac{1}{4}$$

Для побудови графіка власне аналізованої функції (її представляє шматково-безперервна функція $f(x)$) та часткової суми її ряду Фур'є з результатів розкладання формуємо нову функцію $g(x)$, після чого стандартною командою будуємо графік:

```
(%i7) g(x):=''%$
```

```
(% i8)      f(x):=(if x<0 then 0 else x)$
(% i9)      wxplot2d([g(x), f(x)], [x,-2.2,1.6]);
```

Графічна ілюстрація, що показує зіставлення функції і ряду Фур'є на заданому відрізку — на рис. 3.22.



Мал. 3.22. Графік функції f(x) та суми перших семи членів ряду Фур'є

3.9.6 Комплексна форма ряду Фур'є

Нехай функція $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ розкладена в ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(x) + b_n \sin(x)\right). \tag{3.8}$$

Скористаємося формулами Ейлера:

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \ \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Підставимо ці висловлювання до ряду (3.8), маємо:

$$f(x) = \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \tfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n \tfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right) =$$
$$= \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \tfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} - ib_n \tfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right) =$$
$$= \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{a_n - ib_n}{2} \cdot e^{inx} + \tfrac{a_n + ib_n}{2} \cdot e^{-inx}\right).$$

Позначимо:

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \ \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \ \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}. \tag{3.9}$$

Тоді

$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cdot e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right) =$
$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} =$
$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$

Отже

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (3.10)$$

Вираз (3.10) називається комплексною формою ряду Фур'є функції $f(x)$ з комплексними коефіцієнтами Фур'є c_n. Коефіцієнти Фур'є c_n обчислюються за формулами $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$:

$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\cos(nx) - i \sin(nx) \right] dx =$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\cos(-nx) + i \sin(-nx) \right] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$

Якщо $f(x)$ - Періодична з періодом 2ℓ функція, то її комплексний ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}},$$

а коефіцієнти Фур'є визначаються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{\frac{-in\pi x}{\ell}} dx.$$

Приклад: Розкласти в ряд Фур'є з комплексними періодичними коефіцієнтами з періодом $l = 2$ функцію, задану на відрізку [-1, 1] рівністю $f(x) = x^2$.

```
(%i1) n:5$ f:x^2$ l:1$ c(k):=
      1/2/l*integrate(f*exp(-%i*%pi*k*x/l),x,-l,l)$
      z:makelist(k-6, k, 1, 2*n+1)$
      cr:makelist(c(z[k]),k,1,2*n+1)$
      fk:makelist(cr[k]*exp(%i*%pi*z[k]*x/l),k,1,2*n+1)$
      g:sum(fk[k],k,1,2*n+1)$
      gend:trigreduce(ratsimp(rectform(g)));
```

$(\%o9)$

$$\frac{-144\cos(5\pi x)+225\cos(4\pi x)-400\cos(3\pi x)+900\cos(2\pi x)-3600\cos(\pi x)+300\pi^2}{900\pi^2}$$

У цьому прикладі члени часткової суми низки Фур'є є списком. У поданому обчисленні $z = -5, -4, \dots, 4, 5$. Список cr містить коефіцієнти ряду в комплексній формі (при підсумовуванні від $-n$ до n індекс елемента ряду міститься в $z[k]$). Власне члени ряду Фур'є скомпоновані до списку. fk , після підсумовування якого отримуємо суму ряду (вираз g). Для побудови графіка $g(x)$ необхідно спростити вираз g (Див. приклад, результат спрощення - вираз $gend$). Вочевидь, що з перегляду проміжних результатів (вони досить об'ємні) термінальні символи $ можна замінити на ;.

3.9.7 Додаткові можливості: пакет fourie

Пакет розширення fourie призначений для розрахунку коефіцієнтів тригонометричних рядів Фур'є, а також інтеграла Фур'є. Функції, що входять до складу пакета, дозволяють знаходити точне аналітичне вираження всіх, а не перших кількох коефіцієнтів Фур'є ряду.

Функція $fourier$ дозволяє обчислити коефіцієнти ряду Фур'є (синтаксис виклику: $fourier(f, x, p)$), яка повертає список коефіцієнтів Фур'є $f(x)$, визначених на інтервалі $[-p, p]$. Власне ряд Фур'є дозволяє побудувати функцію $fourexpand$ (синтаксис виклику $fourexpand(l, x, p, limit)$), яка конструює та повертає ряд Фур'є, використовуючи список коефіцієнтів Фур'є l ($limit$ може бути і нескінченним, рівним inf).

Коефіцієнти рядів Фур'є за синусами і косинусами обчислюються функціями $fourcos(f, x, p) foursin(f, x, p)$ (синтаксис та аналогічні функції $fourier$).

Обчислення та підстановка $\cos n\pi$ і $\sin n\pi$ здійснюється спеціальною функцією $foursimp(l)$. Управління підстановкою здійснюється за допомогою прапорів $sinnpiflag$ і $cosnpiflag$ (якщо вони встановлені в $true$, обчислення та підстановка виконуються, це режим за замовчуванням).

Для управління процесом розкладання різних функцій до ряду Фур'є передбачені такі функції:

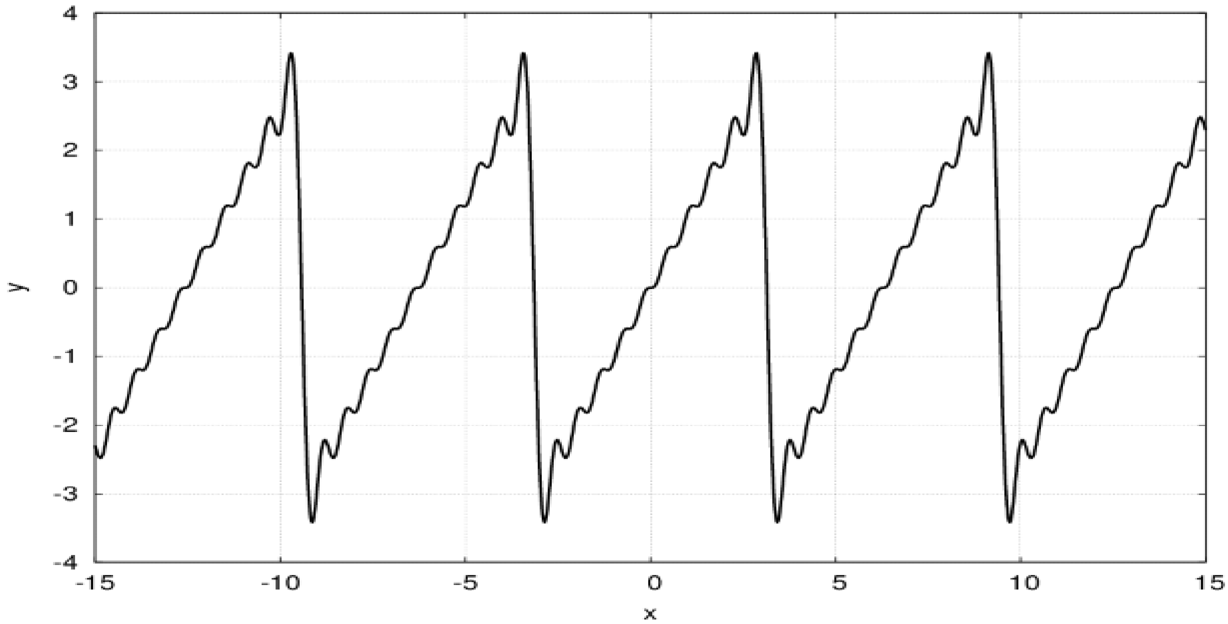
1. $remfun$. Синтаксис виклику $remfun(f, expr)$ або $remfun(f, expr, x)$. Ця функція дозволяє замінити всі входження функції $f(arg)$ у виразі $expr$ на arg (у формі $remfun(f, expr, x)$ заміна здійснюється тільки якщо arg містить x);
2. $funp$. Ця функція (синтаксис виклику $funp(f, expr)$ або $funp(f, expr, x)$) повертає $true$, якщо вираз $expr$ містить функцію f чи конкретно $f(x)$;
3. $absint$. Ця функція дозволяє обчислити невизначений або певний інтеграл абсолютних значень функції f (її визначення може включати вирази $abs(x), abs(sin(x)), abs(a) * exp(-abs(b) * abs(x))$). Синтаксис виклику

$absint(f, x, halfplane)(halfplane = (pos, neg, both)$ - Частина числової осі), $absint(f, x)$(Невизначений інтеграл по позитивній півосі), $absint(f, x, a, b)$ (Певний інтеграл).

Загальну форму ряду Фур'є (після підстановки та спрощення) дозволяє побудувати функція $totalfourier(f, x, p)$.

Коефіцієнти інтеграла Фур'є на інтервалі (- inf, inf) дозволяє обчислити функцію $fourint(f, x)$, інтеграла за косинусами або синусами на інтервалі (0, inf) — функції $fourintcos(f, x)$ і $fourintsin(f, x)$ відповідно.

Для використання пакета fourie його необхідно завантажити командою load("fourie").



Мал. 3.23.Графік часткової суми ряду Фур'є для функції f(x) = x, побудованої за допомогою пакета fourie

Приклади використання пакета fourie (графік отриманої функції наведено на рис. 3.23):

```
(%i1) load("fourie")$ fourier(x,x,%pi);
```

$$(\%t2)\ a_0 = 0$$

$$(\%t3)\ a_n = 0$$

$$(\%t4)\ b_n = \frac{2\left(\frac{\sin(\pi n)}{n^2} - \frac{\pi\cos(\pi n)}{n}\right)}{\pi}$$

$$(\%o4)\ [\%t2, \%t3, \%t4]$$

```
(% i5)     чотирисиmp(%);
```

$$(\%t5)\ a_0 = 0$$

$$(\%t6)\ a_n = 0$$

$$(\%t7)\ b_n = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

$$(\%o7)\ [\%t5, \%t6, \%t7]$$

```
(% i8)     чотириexpand(%,x,%pi,10);
```

$$(\%o8)\ -\frac{\sin(10x)}{5}+\frac{2\sin(9x)}{9}-\frac{\sin(8x)}{4}+\frac{2\sin(7x)}{7}-\frac{\sin(6x)}{3}+\frac{2\sin(5x)}{5}-\frac{\sin(4x)}{2}+\frac{2\sin(3x)}{3}-\sin(2x)+2\sin(x)$$

3.9.8 Додаткові можливості: узагальнені ряди Фур'є

Як зазначалося вище, поряд із тригонометричною ортонормованою системою функцій досить широко використовуються й інші (зокрема, поліноми Лежандра, Чебишева, Ерміта та ін.). Розглянемо уявлення функції узагальненим рядом Фур'є з поліном Лежандра.

Обчислення значень ортогональних поліномів в Maxima здійснюється за допомогою пакету orthopoly, який дозволяє оперувати поліномами Чебишева, Лежандра, Ерміта, Якобі та ін, а також рядом сферичних функцій.

Інтегрована на інтервалі (-1, 1) шматково-безперервна функція може бути представлена узагальненим рядом Фур'є (в даному випадку - за поліномами Лежандра):

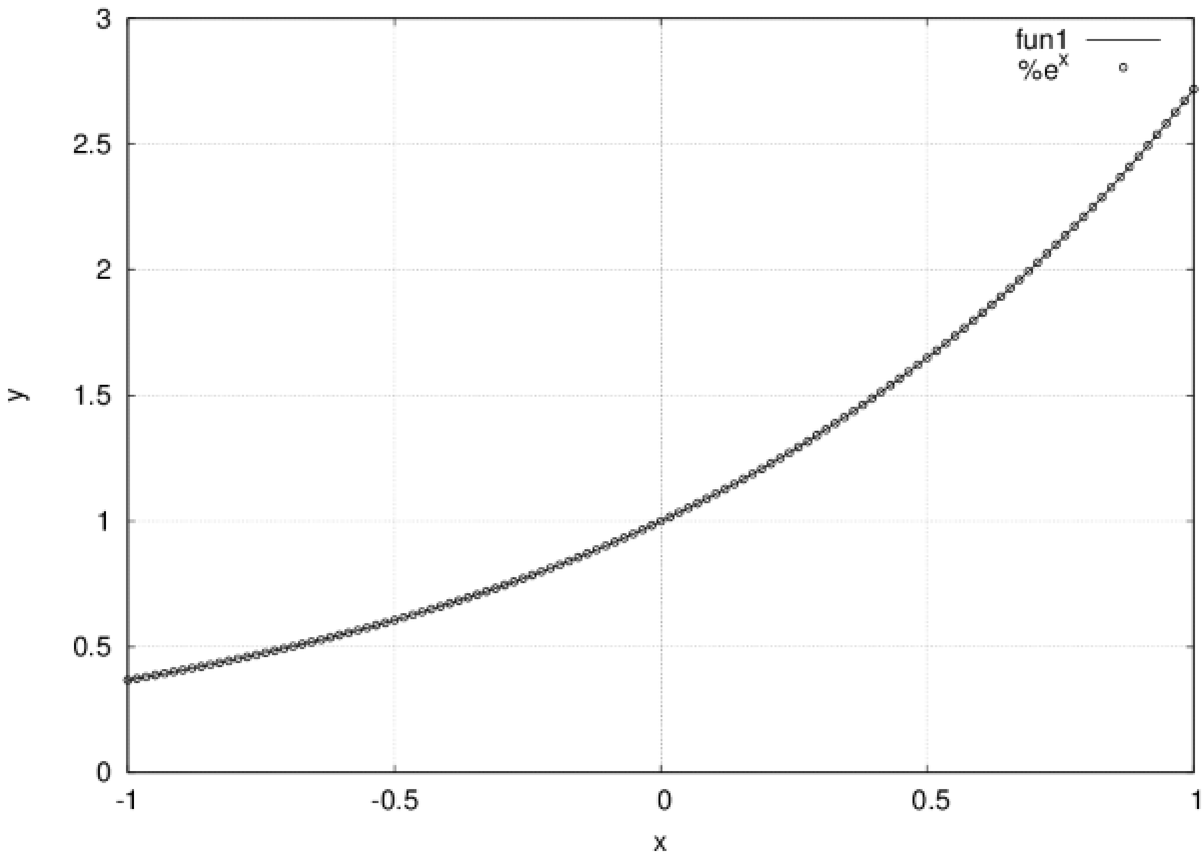
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

де $P_n(x)$ - Полін Лежандра ступеня n, c_n - Коефіцієнти Фур'є для розкладання по поліномах Лежандра. Значення c_n обчислюються за такою формулою:

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

Приклад обчислення розкладання функції $y=e^x$ на інтервалі (-1, 1) у ряд по поліномам Лежандра представлений такими командами:

```
(%i1) load(orthopoly)$ n:5$ f:exp(x)$ l:1$
c(m):=(2*m+1)/2*integrate(f*legendre*p (m, x),x,-l,l)$
z:makelist(k-1, k, 1, n+1)$
cr:makelist(c(z[k]),k,1,n+1)$
fk:makelist(cr[k]*legendre_p (z[k], x),k,1,n+1)$
g:sum(fk[k],k,1,n+1)$
```



Мал. 3.24.Графік часткової суми узагальненого ряду Фур'є для функції

Графік отриманого виразу g у порівнянні з функцією e^x показано на рис. 3.24.

Як видно з малюнка, графіки експоненти та отриманого розкладання збігаються. У збігу результатів можна переконатися, зіставивши вираз g (після спрощення) та розкладання експоненти до ряду Тейлора.