

## 12 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

### Теоретичні питання:

1. Поняття прямої на площині. Геометричний зміст рівняння прямої.
2. Загальне рівняння прямої на площині та його параметри.
3. Канонічне та параметричне рівняння прямої на площині.
4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
5. Нормальне рівняння прямої на площині.
6. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих на площині.
7. Взаємне розташування двох прямих на площині.
8. Відстань від точки до прямої на площині.
9. Кут між двома прямими на площині.
10. Поняття прямої у тривимірному просторі.
11. Векторний і параметричний способи задання прямої у просторі.
12. Канонічні рівняння прямої у просторі.
13. Взаємне розташування двох прямих у просторі (паралельні, перетинні, мимобіжні).
14. Умови паралельності та перпендикулярності прямих у просторі.
15. Кут між двома прямими у просторі.
16. Відстань між двома мимобіжними прямими.
17. Поняття площини в просторі. Способи задання площини.
18. Загальне рівняння площини та його геометричний зміст.
19. Нормальне рівняння площини.
20. Рівняння площини, заданої трьома точками.
21. Рівняння площини, що проходить через точку і паралельна (перпендикулярна) заданій прямій або площині.
22. Умови паралельності та перпендикулярності площин.
23. Кут між двома площинами.
24. Кут між прямою і площиною.
25. Відстань від точки до площини.
26. Умови належності прямої площині.
27. Умови паралельності прямої і площини.
28. Умови перетину прямої і площини.
29. Знаходження точки перетину прямої і площини.
30. Відстань від точки прямої до площини.
31. Застосування рівнянь прямої та площини в задачах аналітичної геометрії.
32. Використання рівнянь прямої та площини в комп'ютерній графіці та моделюванні.
33. Геометрична інтерпретація рівнянь у координатній та векторній формах.

### Практичні завдання:

1. а) Запишіть рівняння площини за трьома точками (детермінантне).  
б) Перетворіть отримане рівняння до загального вигляду.  
в) Визначте координати вектора нормалі площини.

г) Запишіть рівняння площини у відрізках на осях. Виконайте відповідний схематичний рисунок.

д) За допомогою координат даних точок запишіть координати векторів  $\vec{p}$  і  $\vec{q}$  – напрямного бівектора площини, та складіть параметричні та векторно-параметричне рівняння площини.

е) Побудуйте площину в GeoGebra online (<https://www.geogebra.org/3d>) за загальним рівнянням, укажіть вихідні точки; перевірте, чи проходить площина через задані точки, наведіть скріншот рисунка, вкажіть координати точок перетину площини з осями координат.

*Варіанти завдань:*

- |          |   |           |   |
|----------|---|-----------|---|
| <b>1</b> | $(-4; 1; -5), (5; 2; -1), (1; 1; -5);$  | <b>11</b> | $(-5; -3; 0), (3; 4; 2), (-5; -5; -3);$ |
| <b>2</b> | $(3; 3; 2), (0; -2; -1), (3; -4; -1);$  | <b>12</b> | $(4; -3; -2), (-5; 2; -5), (4; 0; 4);$  |
| <b>3</b> | $(-4; -4; -4), (2; -4; 1), (0; -1; 4);$ | <b>13</b> | $(5; -4; 2), (5; 0; -3), (0; -3; 2);$   |
| <b>4</b> | $(-3; -2; 4), (3; 4; 4), (-4; -5; 3);$  | <b>14</b> | $(-1; -2; 4), (-4; 1; -4), (0; -1; 3);$ |
| <b>5</b> | $(-2; 2; -1), (-4; 0; -5), (-3; 4; 3);$ | <b>15</b> | $(-3; -2; 3), (3; 0; -1), (5; -2; -5);$ |
| <b>6</b> | $(-1; -1; 2), (2; 0; 1), (-3; 4; -4);$  | <b>16</b> | $(-5; -1; 0), (5; 1; -5), (4; -2; 1);$  |
| <b>7</b> | $(-3; -3; 3), (2; -5; 4), (4; -5; -5);$ | <b>17</b> | $(3; -1; -2), (5; 4; -4), (2; 5; 1);$   |
| <b>8</b> | $(1; -4; 0), (5; -4; 0), (2; 5; -2);$   | <b>18</b> | $(0; 1; -4), (-4; 0; 2), (-2; 0; -2);$  |
| <b>9</b> | $(-4; -5; 4), (0; -1; -5), (3; 2; 0);$  | <b>19</b> | $(1; 2; 4), (-1; -5; 4), (-5; -3; -4);$ |
| <b>1</b> | $(4; 2; 5), (-4; 2; -4), (-2; 0; -5);$  | <b>20</b> | $(3; 4; -1), (-4; 1; -5), (1; 0; -3).$  |
| <b>0</b> |   |           |   |

2. Знайдіть кут між даними площинами. Напишіть векторно параметричне рівняння прямої, яку задано як перетин цих площин. В якості опорної точки можна взяти точку, що лежить в площині  $xOy$ .

*Варіанти завдань:*

- |            |  |            |  |
|------------|--|------------|--|
| <b>1.</b>  | $3x + y - z = 7,$<br>$2x + y = 5.$         | <b>2.</b>  | $y + 3z = 2,$<br>$x - y - 7z = 1.$       |
| <b>3.</b>  | $3x + y - 3z = 11,$<br>$2x + y - z = 8.$   | <b>4.</b>  | $x - y - 9z = 1,$<br>$2x - y - 4z = 3.$  |
| <b>5.</b>  | $2x + y - 2z = 11,$<br>$x + y + z = 7.$    | <b>6.</b>  | $x + 2y + 4z = 7,$<br>$x + y + z = 5.$   |
| <b>7.</b>  | $2x + y - 3z = 14,$<br>$x + y + z = 9.$    | <b>8.</b>  | $x + 2y + 5z = 10,$<br>$x + y + z = 7.$  |
| <b>9.</b>  | $3x + 2y = 13,$<br>$x + y + z = 3.$        | <b>10.</b> | $2x - y - 4z = 3,$<br>$3x - y - 5z = 5.$ |
| <b>11.</b> | $4x + y - 8z = 19,$<br>$3x + y - 5z = 15.$ | <b>12.</b> | $2x + 3y + 6z = 17,$<br>$x + y + z = 7.$ |

- |     |  |     |  |
|-----|--|-----|--|
| 13. | $4x + 3y + 2z = 11,$<br>$x + y + z = 3.$     | 14. | $5x - 2y - 30z = 17,$<br>$2x - y - 13z = 6.$ |
| 15. | $5x + 2y - 7z = 26,$<br>$2x + y - 2z = 11.$  | 16. | $5x + 2y - 10z = 33,$<br>$2x + y - 3z = 14.$ |
| 17. | $5x + 2y - 10z = 33,$<br>$2x + y - 3z = 14.$ | 18. | $x - y - 3z = 1,$<br>$2x - y - 4z = 3.$      |
| 19. | $y + 2z = 1,$<br>$x + y + z = 3.$            | 20. | $x - y - 3z = 1,$<br>$2x - y - 4z = 3.$      |

3. Напишіть рівняння площини, що проходить через першу пряму паралельно другій.

*Варіанти завдань:*

1.  $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}, \frac{x-3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}.$
2.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}, \frac{x+3}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}.$
3.  $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{0}, \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}.$
4.  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}, \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}.$
5.  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-3}, \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}.$
6.  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-3}{-2}, \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-2}.$
7.  $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}, \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-2}.$
8.  $\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{2}, \frac{x+3}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-2}.$
9.  $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}, \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$
10.  $\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}, \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}.$
11.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-1}, \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+2}{-2}.$
12.  $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-2}, \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}.$

13.  $\frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-3}, \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}.$
14.  $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}, \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-1}.$
15.  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{3}, \frac{x+3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}.$
16.  $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{2}, \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{0}.$
17.  $\frac{x}{3} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+3}{-1}, \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{-1}.$
18.  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}, \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{3}.$
19.  $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+2}{2}, \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{1}.$
20.  $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}, \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{2}.$

4. Дано площину  $\alpha$  та три прямі  $l_1, l_2, l_3$ .

- а) Для кожної з прямих з'ясуйте, чи перетинає вона площину, чи паралельна їй, чи лежить в цій площині.
- б) У випадку перетину знайдіть координати спільної точки площини і прямої та кут між прямою і площиною.
- в) У випадку, якщо пряма паралельна площині, то запишіть рівняння площини, яка проходить через цю пряму і паралельна площині  $\alpha$ .
- г) У випадку, якщо пряма належить площині, то запишіть рівняння площини, яка проходить через цю пряму і перпендикулярна площині  $\alpha$ .
- д) Побудуйте площину  $\alpha$  та три прямі  $l_1, l_2, l_3$  в GeoGebra для ілюстрації отриманих результатів.

*Варіанти завдань:*

1.  $\alpha: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, l_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -17 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, l_3: \vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$
2.  $\alpha: \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 35 \\ 9 \\ -29 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$

3.  $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 43 \\ 21 \\ -19 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 34 \\ 11 \\ -25 \end{pmatrix}.$   
 $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} -11 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$
4.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 38 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 34 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$
5.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 40 \\ -15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ 46 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -19 \\ 5 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$
6.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} -16 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -19 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$
7.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$
8.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$
9.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$

10.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 19 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$
11.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ -10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 29 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ -9 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$
12.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$
13.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$
14.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} -25 \\ 31 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} -23 \\ 31 \\ 22 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 29 \\ -25 \\ -11 \end{pmatrix}.$
15.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 33 \\ 35 \\ -20 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 31 \\ 29 \\ -25 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 31 \\ 25 \\ -30 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}.$
16.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$
17.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$

18.  $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$   
 $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ 22 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 12 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix}.$
19.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$
20.  $\alpha: \bar{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, l_1: \bar{r} = \begin{pmatrix} -30 \\ 23 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix},$   
 $l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, l_3: \bar{r} = \begin{pmatrix} -26 \\ 35 \\ 10 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 14 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5. Дано прямі  $l_1, l_2, l_3, l_4$ . Для кожної пари прямих з'ясуйте, чи є вони мимобіжними, паралельними, такими, що перетинаються чи співпадають. Для прямих, що перетинаються, знайдіть координати спільної точки та площини, що проходить через ці дві прямі. Для паралельних прямих знайдіть рівняння площини, що містить ці прямі.

*Варіанти завдань:*

1.  $\begin{cases} x = 7 - 2s, \\ y = 6, \\ z = -2 - 2s; \end{cases} \begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = 6, \\ z = -4 - 2t; \end{cases} \begin{cases} x = -1 + 4u, \\ y = 0, \\ z = -2 + 4u; \end{cases} \begin{cases} x = -3v, \\ y = 2 + 2v, \\ z = 2. \end{cases}$
2.  $\begin{cases} x = -3, \\ y = -2 - 2s, \\ z = s; \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ y = -3 + 4t, \\ z = 3 - 2t; \end{cases} \begin{cases} x = -2 - u, \\ y = 1, \\ z = 2 + u; \end{cases} \begin{cases} x = -3, \\ y = -2v, \\ z = -1 + v. \end{cases}$
3.  $\begin{cases} x = 8 - 6s, \\ y = 8 - 6s, \\ z = -6 + 4s; \end{cases} \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 3 + t, \\ z = -4 - 2t; \end{cases} \begin{cases} x = -2 + 3u, \\ y = 10 + 3u, \\ z = 4 - 2u; \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 3v, \\ y = 13 + 3v, \\ z = 2 - 2v. \end{cases}$
4.  $\begin{cases} x = 5 + 2s, \\ y = -4 - 2s, \\ z = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 7 - 2t, \\ y = 2, \\ z = 5 + 2; \end{cases} \begin{cases} x = 5 - 2u, \\ y = 2, \\ z = 7 + 2u; \end{cases} \begin{cases} x = -1 + 4v, \\ y = -2, \\ z = 5 - 4v. \end{cases}$

5.  $\begin{cases} x = -4 - 3s, \\ y = 3 + s, \\ z = -5 - 2s; \end{cases} \begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 2t, \\ z = -5 + 2t; \end{cases} \begin{cases} x = 2 - u, \\ y = 3 - u, \\ z = -7 - u; \end{cases} \begin{cases} x = 1 - v, \\ y = 2 - v, \\ z = -8 - v. \end{cases}$
6.  $\begin{cases} x = 2s, \\ y = -2, \\ z = -6 + 4s; \end{cases} \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 3, \\ z = -4 - 2t; \end{cases} \begin{cases} x = -1 - 3u, \\ y = -2, \\ z = -3 - u; \end{cases} \begin{cases} x = 2 - v, \\ y = 3, \\ z = -2 - 2v. \end{cases}$
7.  $\begin{cases} x = -12 - 2s, \\ y = 10 - 3s, \\ z = 8 + 2s; \end{cases} \begin{cases} x = -10 - 2t, \\ y = 13 - 3t, \\ z = 6 + 2t; \end{cases} \begin{cases} x = 5 + 3u, \\ y = 6 + 3u, \\ z = 5 + 2u; \end{cases} \begin{cases} x = -2 + 4v, \\ y = -3 + 6v, \\ z = 7 - 4v. \end{cases}$
8.  $\begin{cases} x = 10 - 2s, \\ y = 10 + 2s, \\ z = -3 + 2s; \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -5 - 3t, \\ z = 3t; \end{cases} \begin{cases} x = -6 + 4u, \\ y = 2 - 4u, \\ z = 1 - 4u; \end{cases} \begin{cases} x = 8 - 2v, \\ y = 12 + 2v, \\ z = -1 + 2v. \end{cases}$
9.  $\begin{cases} x = 1 + s, \\ y = 5 - s, \\ z = -4 - s; \end{cases} \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 4 - t, \\ z = -5 - t; \end{cases} \begin{cases} x = 2 - 2u, \\ y = 2u, \\ z = -4 + 2u; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = -2v, \\ z = -5 - v. \end{cases}$
10.  $\begin{cases} x = -9 - s, \\ y = -1 - 3s, \\ z = -2 - 3s; \end{cases} \begin{cases} x = -4 + 2t, \\ y = -7 + 6t, \\ z = -4 + 6t; \end{cases} \begin{cases} x = -3 - u, \\ y = -3 - 2u, \\ z = 2; \end{cases} \begin{cases} x = -8 - v, \\ y = 2 - 3v, \\ z = 1 - 3v. \end{cases}$
11.  $\begin{cases} x = -4 + 2s, \\ y = -2 + 4s, \\ z = 2 - 2s; \end{cases} \begin{cases} x = -5 - 3t, \\ y = -2t, \\ z = 3 + 3t; \end{cases} \begin{cases} x = -6 - u, \\ y = 2 - 2u, \\ z = -4 + u; \end{cases} \begin{cases} x = -7 - v, \\ y = -2v, \\ z = -3 + v. \end{cases}$
12.  $\begin{cases} x = -4 - s, \\ y = -3 - 2s, \\ z = -4 - s; \end{cases} \begin{cases} x = -6 - 2t, \\ y = -3t, \\ z = -2 - 3t; \end{cases} \begin{cases} x = -8 - 2u, \\ y = -3 - 3u, \\ z = -5 - 3u; \end{cases} \begin{cases} x = -7 + 4v, \\ y = -7 + 6v, \\ z = -9 + 6v. \end{cases}$
13.  $\begin{cases} x = -3 - 3s, \\ y = 0, \\ z = -4 - 3s; \end{cases} \begin{cases} x = 2 - 2t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = -7 + 6t; \end{cases} \begin{cases} x = 3 + u, \\ y = 12 - u, \\ z = -4 - 3u; \end{cases} \begin{cases} x = 4 + v, \\ y = 11 - v, \\ z = -7 - 3v. \end{cases}$
14.  $\begin{cases} x = -3 + 2s, \\ y = -7 + 6s, \\ z = -3 + 4s; \end{cases} \begin{cases} x = -4 - t, \\ y = -3t, \\ z = -6 - 2t; \end{cases} \begin{cases} x = -2 - u, \\ y = 1 + 2u, \\ z = 3 + 2u; \end{cases} \begin{cases} x = -3 - v, \\ y = 3 - 3v, \\ z = -4 - 2v. \end{cases}$
15.  $\begin{cases} x = -19 - s, \\ y = 2 + 3s, \\ z = 4 + 3s; \end{cases} \begin{cases} x = -18 - t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 1 + 3t; \end{cases} \begin{cases} x = -3, \\ y = 4 + 2u, \\ z = -3u; \end{cases} \begin{cases} x = -5 + 2v, \\ y = 8 - 6v, \\ z = 9 - 6v. \end{cases}$
16.  $\begin{cases} x = 3s, \\ y = -2 - 2s, \\ z = 3 - 2s; \end{cases} \begin{cases} x = -4 - 2t, \\ y = 3 + 3t, \\ z = 2t; \end{cases} \begin{cases} x = 4 - 6u, \\ y = -4 + 4u, \\ z = -6 + 4u; \end{cases} \begin{cases} x = 3 + 3v, \\ y = -4 - 2v, \\ z = 1 - 2v. \end{cases}$
17.  $\begin{cases} x = 8 + s, \\ y = -1 + 3s, \\ z = 4 - 2s; \end{cases} \begin{cases} x = 9 + t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 2 - 2t; \end{cases} \begin{cases} x = 5 - 2u, \\ y = 6 - 6u, \\ z = -1 + 4u; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 1 + v, \\ z = 4 + v. \end{cases}$

18.  $\begin{cases} x = -5, \\ y = -7 - 3s, \\ z = 1 + 3s; \end{cases} \begin{cases} x = -2, \\ y = -7 + 6t, \\ z = 7 - 6t; \end{cases} \begin{cases} x = -3 - u, \\ y = -1, \\ z = 2 + u; \end{cases} \begin{cases} x = -5, \\ y = -4 - 3v, \\ z = -2 + 3v. \end{cases}$
19.  $\begin{cases} x = -5 + 2s, \\ y = -2s, \\ z = 2 - 4s; \end{cases} \begin{cases} x = 3t, \\ y = -5 - 3t, \\ z = -1 + t; \end{cases} \begin{cases} x = 4 - u, \\ y = 5 + u, \\ z = -2 + 2u; \end{cases} \begin{cases} x = 3 - v, \\ y = 6 + v, \\ z = 2v. \end{cases}$
20.  $\begin{cases} x = -3 + 3s, \\ y = -1 + 2s, \\ z = 2 + s; \end{cases} \begin{cases} x = 8 - 2t, \\ y = -10 + 2t, \\ z = -9 - 3t; \end{cases} \begin{cases} x = 6 - 2u, \\ y = -8 + 2u, \\ z = -12 - 3u; \end{cases} \begin{cases} x = -4 + 4v, \\ y = 1 - 4v, \\ z = -5 + 6v. \end{cases}$

6. Дано площину  $\alpha$  і пряму  $l$ . Знайдіть точку їх перетину. Складіть векторно параметричне рівняння ортогональної проєкції  $m$  прямої  $l$  на площину  $\alpha$ , взявши в якості опорної точки точку перетину.

1.  $\alpha: 9x + 348y - 253z + 2422 = 0;$   
 $l: x = 7 + 2t, y = -7 - 5t, z = 12 + 15t.$
2.  $\alpha: 16x - 37y + 5z - 181 = 0;$   
 $l: x = 6 + 3t, y = -10 - 6t, z = -2 + t.$
3.  $\alpha: 73x - 53y + 352z - 2345 = 0;$   
 $l: x = 1 - t, y = 6 + t, z = 1 - 6t.$
4.  $\alpha: 20x - 2y + 31z - 140 = 0;$   
 $l: x = -4 - t, y = -6 + t, z = 13 + 7t.$
5.  $\alpha: 13x + 234y - 195z + 1404 = 0;$   
 $l: x = 2 - t, y = -4 + 3t, z = -7 - 6t.$
6.  $\alpha: 41x - 54y + 131z - 296 = 0;$   
 $l: x = -3 + 2t, y = -5 - 3t, z = 5 + 2t.$
7.  $\alpha: 21x - 59y - 4z + 254 = 0;$   
 $l: x = -2 + 3t, y = 10 + 7t, z = -5 + 2t.$
8.  $\alpha: 2x - 3y - z + 2 = 0;$   
 $l: x = 9 + 5t, y = 9 + 6t, z = -t.$
9.  $\alpha: 215x - 214y + 337z + 554 = 0;$   
 $l: x = -1 + 2t, y = -4 - 2t, z = 2 + 3t.$
10.  $\alpha: 15x - 78y - 79z - 945 = 0;$   
 $l: x = -6 - t, y = -6 + t, z = -4 + 2t.$
11.  $\alpha: 10x - 16y + 17z - 111 = 0;$   
 $l: x = 1 - 2t, y = -2 + 2t, z = -1 - 2t.$
12.  $\alpha: 19x - y + 2z - 73 = 0;$

13.  $l: x = 11 + 7t, y = 3t, z = -7 - 4t.$   
 $\alpha: 69x - 27y + 76z + 172 = 0;$   
 $l: x = 11 + 5t, y = 1 - t, z = -5 + 2t.$
14.  $\alpha: 251x - 211y + 79z + 172 = 0;$   
 $l: x = -12 - 7t, y = -1 + 4t, z = -7 - 4t.$
15.  $\alpha: 8x - 5y - 31z - 81 = 0;$   
 $l: x = 8 + 7t, y = 10 + 6t, z = 1 + 4t.$
16.  $\alpha: 171x - 35y - 434z - 741 = 0;$   
 $l: x = -4 - 6t, y = 3 + 2t, z = 4 + 5t.$
17.  $\alpha: 73x + 166y - 88z - 1112 = 0;$   
 $l: x = 3 - 3t, y = -2 - 5t, z = 2 + 4t.$
18.  $\alpha: 117x + 12y + 125z + 528 = 0;$   
 $l: x = -1 + 6t, y = -6 + t, z = 8 + 5t.$
19.  $\alpha: 37x - 35y + 16z - 370 = 0;$   
 $l: x = 3 - 4t, y = -2 + 3t, z = -6 - 3t.$
20.  $\alpha: 57x + 45y + 41z + 94 = 0;$   
 $l: x = 2 + 4t, y = 10 + 5t, z = -3 + 2t.$

7. Складіть канонічне рівняння спільного перпендикуляра до двох даних мимобіжних прямих. Визначте координати точок перетину знайденої прямої з даними прямими.

*Варіанти завдань:*

1.  $\frac{x-6}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-14}{1}, \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}.$
2.  $\frac{x-7}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-11}{1}, \frac{x-6}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-12}{-1}.$
3.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1}, \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{0}.$
4.  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}, \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}.$
5.  $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}, \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}.$
6.  $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}, \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{1}.$
7.  $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}, \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}.$

8.  $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}, \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}.$
9.  $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}, \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}.$
10.  $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}, \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}.$
11.  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+3}{1}, \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}.$
12.  $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+6}{1}, \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1}.$
13.  $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-6}{1}, \frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}.$
14.  $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-6}{1}, \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1}.$
15.  $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-6}{1}, \frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}.$
16.  $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{1}, \frac{x+4}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}.$
17.  $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{1}, \frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}.$
18.  $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{1}, \frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}.$
19.  $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{1}, \frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}.$
20.  $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1}, \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-6}{1}.$

8. Пряма  $l$  є бісектрисою гострого (у варіантах з непарними номерами) або тупого (у варіантах з парними номерами) кута, утвореного прямими  $l_1$  і  $l_2$ . Запишіть рівняння прямої  $l$  в загальному вигляді. Визначте відстань від початку координат до прямої  $l$ . Обчисліть кут між прямою  $l$  і кожною з прямих  $l_1$  і  $l_2$ .

*Варіанти завдань:*

1.  $l_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{4}, l_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$

2.  $l_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{4}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}.$
3.  $l_1: \frac{x+5}{3} = \frac{y+1}{4}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$
4.  $l_1: \frac{x+5}{3} = \frac{y+1}{4}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}.$
5.  $l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-7}{4}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$
6.  $l_1: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-7}{7}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$
7.  $l_1: \frac{x-1}{-5} = \frac{y+4}{12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
8.  $l_1: \frac{x-6}{5} = \frac{y+16}{-12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
9.  $l_1: \frac{x-1}{-5} = \frac{y+4}{12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
10.  $l_1: \frac{x-6}{-5} = \frac{y+16}{12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
11.  $l_1: \frac{x+4}{-5} = \frac{y-8}{12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
12.  $l_1: \frac{x+4}{-5} = \frac{y-8}{-12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
13.  $l_1: \frac{x+5}{5} = \frac{y-3}{-12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
14.  $l_1: \frac{x+5}{-5} = \frac{y-3}{12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
15.  $l_1: \frac{x}{5} = \frac{y+9}{-12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
16.  $l_1: \frac{x+10}{-5} = \frac{y-15}{12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
17.  $l_1: \frac{x+4}{12} = \frac{y-1}{5}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$
18.  $l_1: \frac{x+16}{12} = \frac{y+4}{5}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$
19.  $l_1: \frac{x-8}{12} = \frac{y-6}{5}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

20.

$$l_1: \frac{x-1}{-5} = \frac{y+4}{12}, l_2: \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$