

## 13 ПОНЯТТЯ КРИВОЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ЕЛІПС, ГІПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА.

### Теоретичні питання:

1. Означення кривої другого порядку (коніки).
2. Канонічні рівняння кривих другого порядку.
3. Означення та канонічне рівняння еліпса.
4. Основні елементи еліпса (півосі, фокуси, ексцентриситет).
5. Геометричний зміст параметрів канонічного рівняння еліпса.
6. Дотична до еліпса в заданій точці.
7. Оптична властивість еліпса.
8. Означення та канонічне рівняння гіперболи.
9. Основні елементи гіперболи (півосі, фокуси, асимптоти).
10. Геометричний зміст параметрів канонічного рівняння гіперболи.
11. Дотична до гіперболи.
12. Оптична властивість гіперболи.
13. Означення та канонічне рівняння параболи.
14. Основні елементи параболи (фокус, директриса).
15. Геометричний зміст параметрів канонічного рівняння параболи.
16. Дотична до параболи.
17. Оптична властивість параболи.
18. Побудова еліпса, гіперболи та параболи в декартовій системі координат.
19. Порівняльний аналіз канонічних рівнянь еліпса, гіперболи та параболи.
20. Застосування канонічних рівнянь кривих другого порядку.

### Практичні завдання:

1. Запишіть канонічне рівняння еліпса за відомими даними. Позначення:  $C$  – відстань між фокусами,  $D$  – відстань між директрисами,  $K$  – відстань між фокусом та відповідною йому директрисою,  $\varepsilon$  – ексцентриситет.

### Варіанти завдань:

- |                                  |   |   |
|----------------------------------|---|---|
| 1. $C = 4, \varepsilon = 1/2.$   | 2. $C = 4, D = 10.$                     | 3. $D = 28, \varepsilon = 1/\sqrt{2}.$  |
| 4. $C = 4, D = 6.$               | 5. $D = 32, \varepsilon = 1/4.$         | 6. $K = 5, \varepsilon = 1/\sqrt{2}.$   |
| 7. $D = 16, \varepsilon = 1/2.$  | 8. $K = 4, \varepsilon = 1/2.$          | 9. $C = 6, \varepsilon = 1/3.$          |
| 10. $K = 3, \varepsilon = 1/2.$  | 11. $C = 8, \varepsilon = 2/3.$         | 12. $C = 2, D = 6.$                     |
| 13. $C = 4, \varepsilon = 1/3.$  | 14. $C = 6, D = 8.$                     | 15. $D = 18, \varepsilon = 1/\sqrt{3}.$ |
| 16. $C = 4, D = 8.$              | 17. $D = 30, \varepsilon = 1/\sqrt{2}.$ | 18. $K = 5, \varepsilon = 1/\sqrt{3}.$  |
| 19. $D = 27, \varepsilon = 1/3.$ | 20. $K = 8, \varepsilon = 1/2.$         |   |

2. Пряма  $l$  дотикається еліпса, фокуси якого розташовані в точках  $F_1$  і  $F_2$ . Запишіть канонічне рівняння цього еліпса, рівняння його директрис та знайдіть координати точки дотику та ексцентриситет еліпса.

*Варіанти завдань:*

1.  $l: x + 2y + 4 = 0, F_1 = (-1; 0), F_2 = (1; 0).$
2.  $l: x - 2y - 6 = 0, F_1 = (-1; 0), F_2 = (1; 0).$
3.  $l: -x + 2y + 9 = 0, F_1 = (-1; 0), F_2 = (1; 0).$
4.  $l: x + 2y - 11 = 0, F_1 = (-1; 0), F_2 = (1; 0).$
5.  $l: x - 2y + 14 = 0, F_1 = (-1; 0), F_2 = (1; 0).$
6.  $l: -x + 2y + 3 = 0, F_1 = (-2; 0), F_2 = (2; 0).$
7.  $l: x + 2y - 7 = 0, F_1 = (-2; 0), F_2 = (2; 0).$
8.  $l: -x + 2y + 8 = 0, F_1 = (-2; 0), F_2 = (2; 0).$
9.  $l: x - 2y - 12 = 0, F_1 = (-2; 0), F_2 = (2; 0).$
10.  $l: x + 2y + 13 = 0, F_1 = (-2; 0), F_2 = (2; 0).$
11.  $l: -x + 2y - 7 = 0, F_1 = (-3; 0), F_2 = (3; 0).$
12.  $l: x - 2y + 8 = 0, F_1 = (-3; 0), F_2 = (3; 0).$
13.  $l: x + 2y - 12 = 0, F_1 = (-3; 0), F_2 = (3; 0).$
14.  $l: x - 2y + 13 = 0, F_1 = (-3; 0), F_2 = (3; 0).$
15.  $l: -x + 2y - 6 = 0, F_1 = (-4; 0), F_2 = (4; 0).$
16.  $l: x - 2y + 14 = 0, F_1 = (-4; 0), F_2 = (4; 0).$
17.  $l: x + 2y + 10 = 0, F_1 = (-5; 0), F_2 = (5; 0).$
18.  $l: -x + 2y - 15 = 0, F_1 = (-5; 0), F_2 = (5; 0).$
19.  $l: x + 2y + 9 = 0, F_1 = (-6; 0), F_2 = (6; 0).$
20.  $l: x + 2y - 11 = 0, F_1 = (-6; 0), F_2 = (6; 0).$

3. Запишіть рівняння дотичних, проведених до даного еліпса з даної точки, та знайдіть координати точок дотику. Знайдіть кут між дотичними.

*Варіанти завдань:*

1.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, M(20; -15).$
2.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1, M(30; -15).$
3.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1, M(25; -10).$
4.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1, M(30; -20).$
5.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, M(25; -15).$
6.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, M\left(\frac{20}{7}; -\frac{15}{7}\right).$
7.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1, M(30; -10).$
8.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1, M\left(\frac{25}{7}; -\frac{10}{7}\right).$
9.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, M\left(\frac{25}{7}; -\frac{15}{7}\right).$
10.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1, M(-30; 20).$

$$11. \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1, M\left(\frac{30}{7}; -\frac{10}{7}\right).$$

$$13. \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, M(-20; 15).$$

$$15. \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1, M(-25; 10).$$

$$17. \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, M(-25; 15).$$

$$19. \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1, M(-30; 10).$$

$$12. \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, M\left(\frac{20}{7}; -\frac{15}{7}\right).$$

$$14. \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1, M\left(\frac{25}{7}; -\frac{10}{7}\right).$$

$$16. \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, M\left(\frac{25}{7}; -\frac{15}{7}\right).$$

$$18. \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1, M\left(\frac{30}{7}; -\frac{10}{7}\right).$$

$$20. \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1, M\left(\frac{30}{7}; -\frac{15}{7}\right).$$

4. Запишіть рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет, фокус і рівняння відповідної директриси. Представте рівняння у вигляді  $F(x; y)$ , де  $F(x; y)$  – многочлен другого степеня від  $x$  та  $y$ .

*Варіанти завдань:*

$$1. \quad \frac{1}{2}, (-4; 1), x + y + 1 = 0;$$

$$3. \quad \frac{1}{2}, (-3; 1), -x + y + 1 = 0;$$

$$5. \quad \frac{1}{2}, (-3; 1), -x + y - 3 = 0;$$

$$7. \quad \frac{1}{3}, (-3; 2), -x + y - 3 = 0;$$

$$9. \quad \frac{1}{3}, (-1; 2), x + y + 3 = 0;$$

$$11. \quad \frac{1}{3}, (-1; 1), x + y + 3 = 0;$$

$$13. \quad \frac{1}{3}, (-2; 1), x - y + 2 = 0;$$

$$15. \quad \frac{1}{5}, (-2; 1), x - y + 2 = 0;$$

$$17. \quad \frac{1}{5}, (-2; 2), x + y + 3 = 0;$$

$$2. \quad \frac{1}{5}, (-2; 3), -x + y + 4 = 0;$$

$$4. \quad \frac{2}{3}, (-3; 1), x + y + 1 = 0;$$

$$6. \quad \frac{2}{3}, (3; -1), x + y - 1 = 0;$$

$$8. \quad \frac{2}{3}, (3; -3), x - y - 1 = 0;$$

$$10. \quad \frac{3}{4}, (3; -2), x - y + 2 = 0;$$

$$12. \quad \frac{3}{4}, (1; -2), x - y + 3 = 0;$$

$$14. \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, (1; -2), x - y + 3 = 0;$$

$$16. \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, (1; -2), x + y - 3 = 0;$$

$$18. \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, (3; -2), x - y + 3 = 0;$$

19.  $\frac{1}{\sqrt{5}}, (1; -1), x + y + 2 = 0;$

20.  $\frac{1}{\sqrt{5}}, (2; -1), x - y + 2 = 0.$

5. Складіть канонічне рівняння гіперболи, яка має спільні фокальні хорди з даним еліпсом. Визначте ексцентриситет гіперболи.

*Варіанти завдань:*

1  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1;$

8  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1;$

15  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{6} = 1;$

2  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1;$

9  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1;$

16  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1;$

3  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1;$

10  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{1} = 1;$

17  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1;$

4  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1;$

11  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{1} = 1;$

18  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{3} = 1;$

5  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1;$

12  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1;$

19  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1;$

6  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1;$

13  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{2} = 1;$

20  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1.$

7  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1;$

14  $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1;$

6. З правого фокуса гіперболи під кутом  $\alpha$  до осі  $Ox$  спрямовано промінь світла. Відомий  $tga$ . Дійшовши до гіперболи, промінь від неї відбився. Запишіть рівняння прямих, на яких лежать відбиті промені.

*Варіанти завдань:*

1  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1, tga = 2;$

11  $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{135} = 1, tga = 3;$

2  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1, tga = -2;$

12  $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{135} = 1, tga = -3;$

3  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1, tga = 2;$

13  $\frac{x^2}{17} - \frac{y^2}{8} = 1, tga = 4;$

4  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1, tga = -2;$

14  $\frac{x^2}{17} - \frac{y^2}{8} = 1, tga = -4;$

5  $\frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{4} = 1, tga = -2;$

15  $\frac{x^2}{17} - \frac{y^2}{32} = 1, tga = 4;$

6  $\frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{36} = 1, tga = 2;$

16  $\frac{x^2}{17} - \frac{y^2}{32} = 1, tga = -4;$

$$7 \quad \frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{36} = 1, \operatorname{tg} \alpha = -2;$$

$$8 \quad \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1, \operatorname{tg} \alpha = 3;$$

$$9 \quad \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1, \operatorname{tg} \alpha = -3;$$

$$10 \quad \frac{x^2}{40} - \frac{y^2}{24} = 1, \operatorname{tg} \alpha = 3;$$

$$17 \quad \frac{x^2}{17} - \frac{y^2}{32} = 1, \operatorname{tg} \alpha = 4;$$

$$18 \quad \frac{x^2}{17} - \frac{y^2}{208} = 1, \operatorname{tg} \alpha = 4;$$

$$19 \quad \frac{x^2}{17} - \frac{y^2}{208} = 1, \operatorname{tg} \alpha = -4;$$

$$20 \quad \frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{54} = 1, \operatorname{tg} \alpha = 3;$$

7. Запишіть рівняння параболи, якщо відомий її фокус і директриса. Визначте параметр параболи та запишіть рівняння її осі симетрії.

*Варіанти завдань:*

1.  $(-2; 3), -x + y + 4 = 0;$

3.  $(-3; 1), x + y + 1 = 0;$

5.  $(3; -1), x + y - 1 = 0;$

7.  $(3; -3), x - y - 1 = 0;$

9.  $(3; -2), x - y + 2 = 0;$

11.  $(1; -2), x - y + 3 = 0;$

13.  $(1; -2), x + y + 3 = 0;$

15.  $(1; -2), x + y - 3 = 0;$

17.  $(3; -2), x - y + 3 = 0;$

19.  $(2; -1), x - y + 2 = 0;$

2.  $(-4; 1), x + y + 1 = 0;$

4.  $(-3; 1), -x + y + 1 = 0;$

6.  $(-3; 1), -x + y - 3 = 0;$

8.  $(-3; 2), -x + y - 3 = 0;$

10.  $(-1; 2), x + y + 3 = 0;$

12.  $(-1; 1), x + y + 3 = 0;$

14.  $(-2; 1), x - y + 2 = 0;$

16.  $(-2; 1), x - y + 2 = 0;$

18.  $(-2; 2), x + y + 3 = 0;$

20.  $(1; -1), x + y + 2 = 0.$