

## 15. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.

### Теоретичні питання:

1. Поняття поверхні другого порядку у тривимірному просторі.
2. Загальний вигляд рівняння поверхні другого порядку в декартовій системі координат.
3. Коефіцієнти загального рівняння та їх геометричний зміст.
4. Квадратична форма трьох змінних і її роль у дослідженні поверхонь другого порядку.
5. Інваріанти квадратичної форми та їх значення для класифікації поверхонь другого порядку.
6. Класифікація поверхонь другого порядку за знаком інваріантів.
7. Невироджені та вироджені поверхні другого порядку.
8. Геометричний зміст змішаних членів  $(xy)$ ,  $(xz)$ ,  $(yz)$  у загальному рівнянні.
9. Перетворення координат у просторі як засіб спрощення рівняння поверхні другого порядку.
10. Паралельне перенесення початку координат та його вплив на рівняння поверхні.
11. Поворот осей координат у просторі та усунення змішаних членів.
12. Алгоритм зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду.
13. Канонічне рівняння еліпсоїда та його геометричні характеристики.
14. Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда.
15. Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда.
16. Канонічне рівняння еліптичного параболоїда.
17. Канонічне рівняння гіперболічного параболоїда.
18. Конічні поверхні другого порядку.
19. Циліндричні поверхні другого порядку.
20. Канонічні рівняння вироджених поверхонь другого порядку.
21. Перерізи поверхонь другого порядку площинами та їх класифікація.
22. Побудова та аналіз поверхонь другого порядку за їх канонічними рівняннями.
23. Приклади застосування поверхонь другого порядку в математиці, фізиці та техніці.

### Практичні завдання:

1. Визначте вид поверхонь та побудуйте їх. Які криві утворюються при перетині поверхонь з площинами  $x = c$ ,  $y = c$ ,  $z = c$  ( $c = const$ )?

#### Варіанти завдань:

1. а)  $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$ ; б)  $x^2 + 4z^2 = 2y$ .
2. а)  $6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$ ; б)  $8y^2 + 2z^2 = x$ .
3. а)  $-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$ ; б)  $6x^2 + y^2 - z = 0$ .

- |     |    |                                 |    |                                |
|-----|----|---------------------------------|----|--------------------------------|
| 4.  | a) | $5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0;$  | б) | $x^2 = 4z.$                    |
| 5.  | a) | $6x^2 + y^2 + 3z^2 - 18 = 0;$   | б) | $3x^2 + y^2 - 6z = 0.$         |
| 6.  | a) | $-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0;$ | б) | $y^2 + 2z^2 = 6x^2.$           |
| 7.  | a) | $6x^2 - 3y^2 - z^2 - 18 = 0;$   | б) | $x^2 - 2y + z^2 = 0.$          |
| 8.  | a) | $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0;$       | б) | $4x^2 - y^2 - 3z = 12.$        |
| 9.  | a) | $x^2 + y^2 + z = 4;$            | б) | $3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48.$    |
| 10. | a) | $5x^2 - 10y^2 + 4z^2 = 60;$     | б) | $7y^2 + z^2 = 14x^2.$          |
| 11. | a) | $9x^2 - 6y^2 - 3z^2 + 1 = 0;$   | б) | $6x^2 + 10y^2 = 15z.$          |
| 12. | a) | $5x^2 + 5y^2 = z^2;$            | б) | $3x^2 + 2y^2 - z^2 = 36.$      |
| 13. | a) | $4x^2 + 3y^2 = 12z;$            | б) | $4x^2 - 3y^2 - 2z^2 + 12 = 0.$ |
| 14. | a) | $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0;$   | б) | $x - 4y^2 = 3x^2.$             |
| 15. | a) | $x^2 + y^2 - 6z^2 - 12 = 0;$    | б) | $z - 3y^2 = 9z^2.$             |
| 16. | a) | $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0;$  | б) | $2y^2 = -3z.$                  |
| 17. | a) | $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0;$  | б) | $2x^2 + 4y^2 = 5z.$            |
| 18. | a) | $12x^2 - 4y^2 - 3z^2 + 24 = 0;$ | б) | $2y^2 + 3z^2 = 6x.$            |
| 19. | a) | $3x^2 + y^2 - 9z^2 + 27 = 0;$   | б) | $x^2 - 2y + 4z^2 = 0.$         |
| 20. | a) | $27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0;$    | б) | $7x^2 - 3y^2 - 2z = 42.$       |

2. В GeoGebra online побудуйте тіло, обмежене заданими поверхнями. Наведіть скріншот рисунка.

*Варіанти завдань:*

1.  $z = 10x^2 + 10y^2 + 1, z = 1 - 20y.$
2.  $y = 16\sqrt{x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2.$
3.  $x = \sqrt{y}, z = 2x, z = 0.$
4.  $x^2 + y^2 = 4x, z = 0, z = x.$
5.  $x^2 + y^2 = 8y, z = 0, y + z = 6.$
6.  $x = 1, y = 3, x + 5y + 10z = 20, x = 0, y = 0, z \geq 0.$
7.  $x + 2y + 3z = 6, 2x = y, 2x + 3y = 6, y = 0, z = 0.$
8.  $4x^2 + 4y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 4, y \geq 0, z \geq 0.$
9.  $x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0.$
10.  $x^2 + z^2 = y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
11.  $4x^2 + 4y^2 = z^2, 4x^2 + 4y^2 = 1, y \geq 0, z \geq 0.$
12.  $z - 4 = 6x^2 + 6y^2, z = 4x + 1.$
13.  $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}, z = 5 - x^2 - y^2.$
14.  $z - 2 = 6x^2 + 6y^2, z = 1 - 4y.$

15.  $x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 12y, z = 0, x = 0.$   
 16.  $x^2 + y^2 = 6x, z = 0, z = 2x.$   
 17.  $x^2 + y^2 = 4y, z = 0, y + z = 6.$   
 18.  $x = 1, y = 3, x + 2y + 4z = 24, x = 0, y = 0, z \geq 0.$   
 19.  $x + y + z = 8, x + 2y = 4, x + 4y = 4, y = 0, z = 0.$   
 20.  $4x^2 + 4y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 4, y \geq 0, z \geq 0.$

3. Еліптичний параболоїд  $x^2 + 2y^2 = 2z$  перетинається з площиною  $\alpha$ .  
 Запишіть рівняння проєкції перерізу на площину  $Oxy$ . Доведіть, що проєкція  
 являє собою еліпс, знайдіть його центр, півосі, ексцентриситет. Запишіть  
 параметричні рівняння перерізу.

*Варіанти завдань:*

- | $\alpha:$ |                         | $\alpha:$ |                         |
|-----------|-------------------------|-----------|-------------------------|
| 1.        | $2x + 4y + z - 1 = 0;$  | 2.        | $-4x + 6y + z - 1 = 0;$ |
| 3.        | $2x - 4y + z - 1 = 0;$  | 4.        | $-4x - 6y + z - 1 = 0;$ |
| 5.        | $-2x + 4y + z - 1 = 0;$ | 6.        | $2x + 4y + z - 3 = 0;$  |
| 7.        | $-2x - 4y + z - 1 = 0;$ | 8.        | $2x - 4y + z - 3 = 0;$  |
| 9.        | $4x + 2y + z - 1 = 0;$  | 10.       | $-2x + 4y + z - 3 = 0;$ |
| 11.       | $4x - 2y + z - 1 = 0;$  | 12.       | $-2x - 4y + z - 3 = 0;$ |
| 13.       | $-4x + 2y + z - 1 = 0;$ | 14.       | $4x + 2y + z - 3 = 0;$  |
| 15.       | $-4x - 2y + z - 1 = 0;$ | 16.       | $-4x + 2y + z - 3 = 0;$ |
| 17.       | $4x + 6y + z - 1 = 0;$  | 18.       | $4x - 2y + z - 3 = 0;$  |
| 19.       | $4x - 6y + z - 1 = 0;$  | 20.       | $-4x + 2y + z - 3 = 0.$ |

4. Запишіть рівняння конуса, вершина якого знаходиться в початку координат,  
 а напрямна задана системою рівнянь. Побудуйте поверхню та її напрямну  
 лінію в GeoGebra online.

*Варіанти завдань:*

- |    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 1. | $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 16, \\ z = 2. \end{cases}$        | 2. | $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$ |
| 3. | $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$    | 4. | $\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 = 16, \\ z = 4. \end{cases}$        |
| 5. | $\begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 16, \\ z = 3. \end{cases}$        | 6. | $\begin{cases} x^2 + 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$    |
| 7. | $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x - y + z = 3. \end{cases}$ | 8. | $\begin{cases} y^2 + (z + 3)^2 = 25, \\ x = 2. \end{cases}$        |

- |     |  |     |  |
|-----|--|-----|--|
| 9.  | $\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 = 16, \\ z = 2. \end{cases}$        | 10. | $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$ |
| 11. | $\begin{cases} y^2 - 2z + 1 = 0, \\ x - z + 1 = 0. \end{cases}$    | 12. | $\begin{cases} x^2 + (z + 3)^2 = 9, \\ y = 2. \end{cases}$         |
| 13. | $\begin{cases} x^2 + (y + 2)^2 = 16, \\ z = 3. \end{cases}$        | 14. | $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$ |
| 15. | $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$ | 16. | $\begin{cases} x^2 + (z - 4)^2 = 9, \\ y = 2. \end{cases}$         |
| 17. | $\begin{cases} y^2 + (z - 3)^2 = 25, \\ x = 4. \end{cases}$        | 18. | $\begin{cases} z^2 - 2x + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$    |
| 19. | $\begin{cases} x^2 - 2y - 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$    | 20. | $\begin{cases} (x - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9, \\ y = 4. \end{cases}$   |

5. Запишіть рівняння поверхні, утвореної обертання прямої  $l$  навколо заданої осі  $m$ . Побудуйте поверхню та її твірну в GeoGebra online, наведіть відповідний скріншот.

*Варіанти завдань:*

- |     |  |     |  |
|-----|--|-----|--|
| 1.  | $l: \begin{cases} z = 2y, \\ x = 0; \end{cases} \quad m: Oy.$  | 2.  | $l: \begin{cases} x = z, \\ y = 0; \end{cases} \quad m: Ox.$   |
| 3.  | $l: \begin{cases} z = -y, \\ x = 0; \end{cases} \quad m: Oy.$  | 4.  | $l: \begin{cases} x = -z, \\ y = 0; \end{cases} \quad m: Ox.$  |
| 5.  | $l: \begin{cases} z = 3y, \\ x = 0; \end{cases} \quad m: Oz.$  | 6.  | $l: \begin{cases} z = y, \\ x = 0; \end{cases} \quad m: Oy.$   |
| 7.  | $l: \begin{cases} z = -y, \\ x = 0; \end{cases} \quad m: Oz.$  | 8.  | $l: \begin{cases} z = -2y, \\ x = 0; \end{cases} \quad m: Oy.$ |
| 9.  | $l: \begin{cases} x = y, \\ z = 0; \end{cases} \quad m: Oy.$   | 10. | $l: \begin{cases} z = y, \\ x = 0; \end{cases} \quad m: Oz.$   |
| 11. | $l: \begin{cases} x = -2y, \\ z = 0; \end{cases} \quad m: Oy.$ | 12. | $l: \begin{cases} z = -y, \\ x = 0; \end{cases} \quad m: Oz.$  |
| 13. | $l: \begin{cases} x = y, \\ z = 0; \end{cases} \quad m: Ox.$   | 14. | $l: \begin{cases} x = 3y, \\ z = 0; \end{cases} \quad m: Oy.$  |
| 15. | $l: \begin{cases} x = -3y, \\ z = 0; \end{cases} \quad m: Ox.$ | 16. | $l: \begin{cases} x = -y, \\ z = 0; \end{cases} \quad m: Oy.$  |
| 17. | $l: \begin{cases} x = z, \\ y = 0; \end{cases} \quad m: Oz.$   | 18. | $l: \begin{cases} x = 2y, \\ z = 0; \end{cases} \quad m: Ox.$  |
| 19. | $l: \begin{cases} x = -z, \\ y = 0; \end{cases} \quad m: Oz.$  | 20. | $l: \begin{cases} x = -y, \\ z = 0; \end{cases} \quad m: Ox.$  |

6. Запишіть рівняння циліндра, якщо його твірна паралельна вектору  $\vec{a}$ , а напрямна задана кривою  $l$ . Побудуйте поверхню та її напрямну в GeoGebra online, наведіть відповідний скріншот.

Варіанти завдань:

1.  $\bar{a} = (1, 1, 1); l: \begin{cases} y^2 = 4x, \\ z = 0. \end{cases}$
2.  $\bar{a} = (-2, 1, 1); l: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 0. \end{cases}$
3.  $\bar{a} = (2, 1, 1); l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 4x, \\ y = 0. \end{cases}$
4.  $\bar{a} = (1, 2, 1); l: \begin{cases} z^2 = 3x, \\ y = 2. \end{cases}$
5.  $\bar{a} = (-2, 1, 2); l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 8x, \\ y = -2. \end{cases}$
6.  $\bar{a} = (1, 2, 2); l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 8x, \\ y = -1. \end{cases}$
7.  $\bar{a} = (1, -1, 1); l: \begin{cases} y^2 = 4x, \\ z = 1. \end{cases}$
8.  $\bar{a} = (1, 1, 2); l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 6x, \\ y = 1. \end{cases}$
9.  $\bar{a} = (2, 1, -1); l: \begin{cases} x^2 + z^2 = -4x, \\ y = 0. \end{cases}$
10.  $\bar{a} = (-1, 2, 1); l: \begin{cases} z^2 = 2x, \\ y = 1. \end{cases}$
11.  $\bar{a} = (1, -1, 2); l: \begin{cases} x^2 + z^2 = -6x, \\ y = 1. \end{cases}$
12.  $\bar{a} = (-1, 1, 2); l: \begin{cases} x^2 + y^2 = 6y, \\ z = -1. \end{cases}$
13.  $\bar{a} = (1, 1, -1); l: \begin{cases} y^2 = -2x, \\ z = 0. \end{cases}$
14.  $\bar{a} = (2, -1, 1); l: \begin{cases} y^2 + z^2 = 4y, \\ x = 0. \end{cases}$
15.  $\bar{a} = (-1, -1, 2); l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 6z, \\ y = 1. \end{cases}$
16.  $\bar{a} = (1, -2, 1); l: \begin{cases} z^2 = 4x, \\ y = 0. \end{cases}$
17.  $\bar{a} = (2, 1, 2); l: \begin{cases} z^2 + y^2 = 6y, \\ x = 1. \end{cases}$
18.  $\bar{a} = (-2, 1, 2); l: \begin{cases} x^2 + z^2 = 4x, \\ y = -1. \end{cases}$
19.  $\bar{a} = (-1, 1, 1); l: \begin{cases} y^2 = 4x, \\ z = -1. \end{cases}$
20.  $\bar{a} = (1, 2, -1); l: \begin{cases} z^2 = -2x, \\ y = -1. \end{cases}$