

Самостійна робота №2

1. Обчислити визначенні інтеграли.
2. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій.
3. Обчислити довжину дуги кривої.

Варіант 1

1. а) $\int_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{37}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}$; б) $\int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; в) $\int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx$; г) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

2. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.

3. а) $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $c^2 = a^2 - b^2$ (еволюта еліпса).

б) $\rho = \frac{a}{\cos^4 \frac{\varphi}{4}}$ (довжина петлі).

Варіант 2

1. а) $\int_{\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx$; б) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$; в) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx$; г) $\int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}$.

2. $y = \frac{10}{x^2 + 4}$, $y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}$.

3. а) $x = \int_0^t \cos \varphi^2 d\varphi$, $y = \int_0^t \sin \varphi^2 d\varphi$, $0 \leq t \leq t_0$ (клотоїда).

б) $\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$.

Варіант 3

1. а) $\int_{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}} \frac{(2 \operatorname{tg} x + 5) dx}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}$; б) $\int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; в) $\int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^8 x dx$; г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

2. $y = 4^{-x}$, $y = -\log_4 x$, $y = 0$, $x = 0$.

3. а) $x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$, $y = a \sin t$, $0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (трактриса).

$$\text{б)} \rho = a(1 - \sin \varphi), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}.$$

Варіант 4

$$1. \text{ а)} \int_{-\arctg \frac{1}{3}}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin^3 x - 5 \cos^2 x + 1} dx; \text{ б)} \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx; \text{ в)} \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx; \text{ г)} \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$2. y = 2x^2 e^x, \quad y = -x^3 e^x.$$

$$3. \text{ а)} x = \sin^4 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$\text{б)} \rho = \frac{a}{\sin^3(\varphi/3)} \quad (\text{довжина петлі}).$$

Варіант 5

$$1. \text{ а)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx; \text{ б)} \int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx; \text{ в)} \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) dx; \text{ г)}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$2. x = y^2(y-1), \quad x = 0.$$

$$3. \text{ а)} x = t - \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}, \quad y = 2 \operatorname{ch} t, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

$$\text{б)} \rho = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_0.$$

Варіант 6

$$1. \text{ а)} \int_{-\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}}^0 \frac{(11 - 3 \operatorname{tg} x) dx}{\operatorname{tg} x + 3}; \text{ б)} \int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx; \text{ в)} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1 + x^2} dx; \text{ г)}$$

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$$

$$2. y = 3^x, y = 9, y = \frac{9}{4}(3^{-x} + 1) + \frac{8}{3}.$$

$$3. a) x = a(\operatorname{sh} t - t), y = a(\operatorname{ch} t - 1), 0 \leq y \leq 7a, x \geq 0.$$

$$б) \rho = \frac{p}{1 + \cos \varphi}, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, p > 0.$$

Варіант 7

$$1. a) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}; б) \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^4 x dx; в) \int_0^{\pi/4} \frac{(7 + 3 \operatorname{tg} x) dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2}; г) \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$$

$$2. x^2 + y^2 = 2, y^2 = 2x - 1, x \geq \frac{1}{2}.$$

$$3. a) x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (t^2 - 2) \cos t - 2t \sin t, 0 \leq t \leq \pi.$$

$$б) \rho = a\varphi^3, 0 \leq \varphi \leq 4.$$

Варіант 8

$$1. a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx; б) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 2x \cos^6 2x dx; в) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx; г) \int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx.$$

$$2. y = x^2, y = x^2 + x - 1, y = \frac{\sqrt{5x}}{2}, y \leq x^2.$$

$$3. a) x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq t_0 \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$б) \rho = a\varphi^4, 0 \leq \varphi \leq 3.$$

Варіант 9

$$1. a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx; б) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx; в) \int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}; г) \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

2. $y = 2 - 4x^2 + 4x^3 - x^4$, $y = 0$, $x = x_1$, $x = x_2$, де x_1 і x_2 – точки максимуму функції.

3. а) $x = 2t^3(1 - t^2)$, $y = t^4 \cdot \sqrt{15}$ (довжина петлі).

б) $\rho = a \cos^5 \frac{\varphi}{5}$.

Варіант 10

1. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx$; б) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$; в) $\int_0^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$; г) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}$.

2. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

3. а) $x = \sqrt{3}t^2 / 2$, $y = t \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)$ (довжина петлі).

б) Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 1$.

Варіант 11

1. а) $\int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 4} dx$; б) $\int_0^{\frac{\sqrt{8}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(8 - x^2)^3}}$; в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^2 \sin^2 x \cos^2 x dx$; г) $\int_0^{1/3} \frac{12x - \operatorname{arctg} 3x}{1 + 9x^2} dx$.

2. $y = \sin 2x$, $y = 2x$, $0 \leq x \leq \pi$.

3. а) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

б) Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = e^{a\varphi}$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 1$, ($a > 0$).

Варіант 12

1. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{4 + 3 \cos 2x}$; б) $\int_1^4 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx$; в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$; г) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$.

2. $y = |\log_a x|$, $y = 0$, $x = 1/a$, $x = a$, $a > 1$.

3. а) $x = a(\cos \phi + \phi \sin \phi)$, $y = a(\sin \phi - \phi \cos \phi)$, $0 \leq \phi \leq \phi_0$ (евольвента круга).

б) Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho = 5\phi$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 10\pi$.

Варіант 13

1. а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx$; б) $\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; в) $\int_{\pi/4}^{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx$; г) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

2. $y = 3^x$, $y = 9$, $y = \frac{9}{4}(3^{-x} + 1) + \frac{8}{3}$.

3. а) $x = t^2$, $y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$ (довжина петлі).

б) $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

Варіант 14

1. а) $\int_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{37}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}$; б) $\int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$; в) $\int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx$; г) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

2. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.

3. а) $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $c^2 = a^2 - b^2$ (еволюта еліпса).

б) $\rho = \frac{a}{\cos^4 \frac{\varphi}{4}}$ (довжина петлі).

Варіант 15

1. а) $\int_{\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx$; б) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$; в) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx$; г) $\int_0^3 \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$.

$$2. y = \frac{10}{x^2 + 4}, y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}.$$

$$3. a) x = \int_0^t \cos \varphi^2 d\varphi, y = \int_0^t \sin \varphi^2 d\varphi, 0 \leq t \leq t_0 \text{ (клотоїда)}.$$

$$б) \rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}.$$

Варіант 16

$$1. a) \int_{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}} \frac{(2 \operatorname{tg} x + 5) dx}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}; б) \int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}; в) \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^8 x dx; г) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$$

$$2. y = 4^{-x}, y = -\log_4 x, y = 0, x = 0.$$

$$3. a) x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), y = a \sin t, 0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ (трактриса)}.$$

$$б) \rho = a(1 - \sin \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}.$$

Варіант 17

$$1. a) \int_{-\operatorname{arctg} \frac{1}{3}}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx; б) \int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx; в) \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx; г) \int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}}.$$

$$2. y = 2x^2 e^x, y = -x^3 e^x.$$

$$3. a) x = \sin^4 t, y = \cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi/2.$$

$$б) \rho = \frac{a}{\sin^3(\varphi/3)} \text{ (довжина петлі)}.$$

Варіант 18

$$1. a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx; б) \int_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx; в) \int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 \left(\frac{x}{2} \right) \cos^4 \left(\frac{x}{2} \right) dx; г)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}}.$$

2. $x = y^2(y-1), x=0.$

3. а) $x = t - \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}, y = 2 \operatorname{ch} t, 0 \leq t \leq t_0.$

б) $\rho = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0.$

Вариант 19

1. а) $\int_{-\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}}^0 \frac{(11-3 \operatorname{tg} x) dx}{\operatorname{tg} x + 3};$ б) $\int_{-\pi}^0 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx;$ в) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx;$ г) $\int_0^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$

2. $y = 3^x, y = 9, y = \frac{9}{4}(3^{-x} + 1) + \frac{8}{3}.$

3. а) $x = a(\operatorname{sh} t - t), y = a(\operatorname{ch} t - 1), 0 \leq y \leq 7a, x \geq 0.$

б) $\rho = \frac{p}{1 + \cos \varphi}, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, p > 0.$

Вариант 20

1. а) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$ б) $\int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^4 x dx;$ в) $\int_0^{\pi/4} \frac{(7+3 \operatorname{tg} x) dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2};$ г) $\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$

2. $x^2 + y^2 = 2, y^2 = 2x - 1, x \geq \frac{1}{2}.$

3. а) $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (t^2 - 2) \cos t - 2t \sin t, 0 \leq t \leq \pi.$

б) $\rho = a\varphi^3, 0 \leq \varphi \leq 4.$

Варіант 21

1. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx$; б) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 2x \cos^6 2x dx$; в) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$; г)

$\int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx.$

2. $y = x^2$, $y = x^2 + x - 1$, $y = \frac{\sqrt{5x}}{2}$, $y \leq x^2$.

3. а) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq t_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

б) $\rho = a \varphi^4$, $0 \leq \varphi \leq 3$.

Варіант 22

1. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx$; б) $\int_0^{\pi} 2^4 \sin^4 x \cos^4 x dx$; в) $\int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8 - x^2)^3}}$; г) $\int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$.

2. $y = 2 - 4x^2 + 4x^3 - x^4$, $y = 0$, $x = x_1$, $x = x_2$, де x_1 і x_2 – точки максимуму функції.

3. а) $x = 2t^3(1 - t^2)$, $y = t^4 \cdot \sqrt{15}$ (довжина петлі).

б) $\rho = a \cos^5 \frac{\varphi}{5}$.

Варіант 23

1. а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx$; б) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$; в) $\int_0^{\pi} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$; г) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}$.

2. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

3. а) $x = \sqrt{3}t^2 / 2$, $y = t \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)$ (довжина петлі).

б) Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 1$.

Варіант 24

1. а) $\int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}} \frac{3 \operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 4} dx$; б) $\int_0^{\frac{\sqrt{8}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$; в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^2 \sin^2 x \cos^2 x dx$; г) $\int_0^{1/3} \frac{12x - \operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2} dx$.

2. $y = \sin 2x$, $y = 2x$, $0 \leq x \leq \pi$.

3. а) $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

б) Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = e^{a\varphi}$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 1$, ($a > 0$).

Варіант 25

1. а) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{4 + 3 \cos 2x}$; б) $\int_1^4 \frac{1/\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx$; в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$; г) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

2. $y = |\log_a x|$, $y = 0$, $x = 1/a$, $x = a$, $a > 1$.

3. а) $x = a(\cos \phi + \phi \sin \phi)$, $y = a(\sin \phi - \phi \cos \phi)$, $0 \leq \phi \leq \phi_0$ (евольвента круга).

б) Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho = 5\varphi$, яка знаходиться всередині кола $\rho = 10\pi$.

Варіант 26

1. а) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^4 x \cos^4 x dx$; б) $\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; в) $\int_{\pi/4}^{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1} dx$; г)

$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

2. $y = 3^x$, $y = 9$, $y = \frac{9}{4}(3^{-x} + 1) + \frac{8}{3}$.

3. а) $x = t^2$, $y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$ (довжина петлі).

$$\text{б)} \rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}.$$

Варіант 27

$$1. \text{ а)} \int_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{37}}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6 \operatorname{tg} x dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}; \text{ б)} \int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}; \text{ в)} \int_0^{2\pi} \sin^4 3x \cos^4 3x dx; \text{ г)} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$2. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}, y + x^2 = 0, x = 1.$$

$$3. \text{ а)} x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi, c^2 = a^2 - b^2 \text{ (еволюта еліпса).}$$

$$\text{б)} \rho = \frac{a}{\cos^4 \frac{\varphi}{4}} \text{ (довжина петлі).}$$

Варіант 28

$$1. \text{ а)} \int_{\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx; \text{ б)} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}; \text{ в)} \int_0^{\pi} 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx; \text{ г)} \int_0^3 \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}.$$

$$2. y = \frac{10}{x^2 + 4}, y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}.$$

$$3. \text{ а)} x = \int_0^t \cos \varphi^2 d\varphi, y = \int_0^t \sin \varphi^2 d\varphi, 0 \leq t \leq t_0 \text{ (клотоїда).}$$

$$\text{б)} \rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}.$$

Варіант 29

$$1. \text{ а)} \int_{\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}}^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}} \frac{(2 \operatorname{tg} x + 5) dx}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}; \text{ б)} \int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}; \text{ в)} \int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^4 x \cos^8 x dx; \text{ г)} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}.$$

$$2. y = 4^{-x}, y = -\log_4 x, y = 0, x = 0.$$

$$3. \text{ а)} x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), y = a \sin t, 0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ (трактриса).}$$

$$\text{б)} \rho = a(1 - \sin \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}.$$

Варіант 30

1. а) $\int_{-\arctg \frac{1}{3}}^0 \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1} dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$; в) $\int_{-\pi/2}^0 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$; г) $\int_0^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5 - x^2)^3}}$.

2. $y = 2x^2 e^x$, $y = -x^3 e^x$.

3. а) $x = \sin^4 t$, $y = \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \pi / 2$.

б) $\rho = \frac{a}{\sin^3(\varphi / 3)}$ (довжина петлі).