1. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1. Подвійні інтеграли

Нехай G – обмежена область площини xOy з кусочно-гладкою границею. Нехай функція $f(x,y)$ визначена і обмежена на області G. Область G розбиваємо на n „елементарних” областей σ_i з площами $\Delta\sigma_i$. Нехай λ – найбільший із діаметрів елементарних областей, який відповідає даному розбиттю. В кожній з елементарних областей вибираємо точку $M_i(x_i, y_i)$. Якщо існує границя $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$, то її називають подвійним інтегралом функції $f(x,y)$ по області G і позначають $\iint\limits_G f(x,y)dG$. Якщо σ_i – елементарні прямокутники, то відповідно розглядають границю:

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \iint\limits_G f(x,y)dG = \iint\limits_G f(x,y)dxdy .$$

Якщо розглядати не подвійну, а повторні границі, то одержимо повторні інтеграли, які відповідають областям двох типів (рис.1.1):

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \lim_{\max \Delta y_j \to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy ,$$

$$\lim_{\max \Delta y_j \to 0} \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx .$$

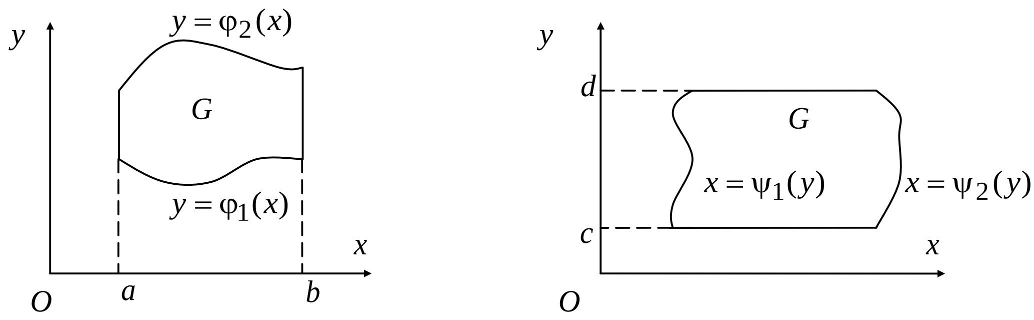


Рис. 1.1. Області в двовимірному просторі

Властивості подвійних інтегралів:

1. $\iint\limits_G (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint\limits_G f(x,y)dxdy + \iint\limits_G g(x,y)dxdy$.
2. $\iint\limits_{G_1\cup G_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy$, якщо $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.
3. $\iint\limits_G Af(x,y)dxdy = A\iint\limits_G f(x,y)dxdy$.
4. $\iint\limits_G f(x,y)dxdy \le \iint\limits_G g(x,y)dxdy$, якщо $f(x,y) \le g(x,y)$ на множині G .
5. $\left|\iint\limits_G f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_G |f(x,y)|dxdy$.

Заміна змінних в подвійному інтегралі

Нехай функції $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ однозначно відображають область G' в область G. Нехай ці функції і їх частинні похідні неперервні на G', а також

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна на G, то справедлива формула:

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{G'} f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv .$$

Найчастіше використовують полярну систему координат та її узагальнення:

Полярні координати: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, $\quad |J| = \rho$.

Узагальнені полярні координати: $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}$, $\quad |J| = ab\rho$.

Застосування подвійного інтегралу:

1. Обчислення площ плоских фігур: $S_G = \iint_G dxdy$.

2. Обчислення об'ємів циліндричних тіл (рис. 1.2): $V = \iint_G f(x,y)dxdy$.

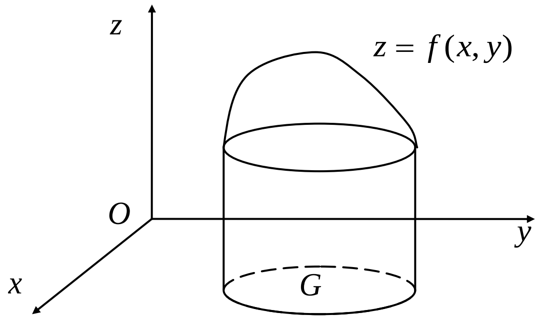


Рис. 1.2. Циліндричне тіло

3. Обчислення площ поверхонь: $S_{пов} = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$.

4. Застосування в механіці. Нехай деяка пластинка займає область G. Нехай густина цієї пластинки задана формулою $\gamma(x,y)$. Тоді справедливі формули:

маса пластинки: $m = \iint_G \gamma(x,y)dxdy$,

статичні моменти: $M_x = \iint_G y\gamma(x,y)dxdy,\ M_y = \iint_G x\gamma(x,y)dxdy$,

координати центра мас: $x_ц = \frac{M_y}{m},\ y_ц = \frac{M_x}{m}$,

моменти інерції: $I_x = \iint_G y^2\gamma(x,y)dxdy$, $I_y = \iint_G x^2\gamma(x,y)dxdy$,

$$I_o = \iint_G (x^2 + y^2)\gamma(x,y)dxdy .$$

1.2. Потрійні інтеграли

Розглянемо кубовану область $G \subset R^3$, яка обмежена поверхнею Σ. Нехай в області G визначено функцію $u = f(x, y, z)$. Розіб'ємо область G на елементарні паралелепіпеди. Нехай деяка точка $P_{i,j,s}$ належить елементарному прямокутному паралелепіпеду $\sigma_{i,j,s}$. Розглянемо $S_T = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{s=1}^{m} u(P_{i,j,s}) \Delta\sigma_{i,j,s}$ і нехай ця сума відповідає деякому розбиттю. Якщо $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_T$, де λ – найбільший діаметр паралелепіпедів, існує, то її називають потрійним інтегралом по області G функції $f(x, y, z)$ і позначають $\iiint\limits_G f(P) dG = \iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz$.

Властивості потрійних інтегралів:

1. Якщо G складається з G_i, $i = \overline{1, n}$ і ці області не перетинаються, тобто міра перетину дорівнює 0, то $\iiint\limits_G f(P) dG = \sum\limits_{i=1}^{n} \iiint\limits_{G_i} f(P) dG$.
2. $\iiint\limits_G (f(x, y, z) + g(x, y, z)) dxdydz = \iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz + \iiint\limits_G g(x, y, z) dxdydz$.
3. $\iiint\limits_G Af(x, y, z) dxdydz = A \iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz$.
4. Якщо $f(x, y, z) \le g(x, y, z)$, а функція $\varphi(x, y, z) > 0$, то $\iiint\limits_G f(x, y, z) \varphi(x, y, z) dxdydz \le \iiint\limits_G g(x, y, z) \varphi(x, y, z) dxdydz$.
5. Якщо $f(x, y, z)$ і $|f(x, y, z)|$ інтегровані, то $\left| \iiint\limits_D f(x, y, z) dxdydz \right| \le \iiint\limits_D |f(x, y, z)| dxdydz$

Способи обчислення потрійних інтегралів

Нехай в декартовій системі координат $G: \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \\ \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y) \end{cases}$. Таку область називають елементарною областю І типу. Існує 6 типів областей в просторі.

Якщо розглянути потрійний інтеграл по такій області, то в кожному випадку його можна звести до повторного інтегралу. Наприклад, для області першого типу: $\iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz$.

Заміна змінних в потрійному інтегралі

Нехай області G в системі координат (x, y, z) відповідає область G' в системі координат (u, v, w), тоді справедлива формула:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| dudvdw, \text{ де } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Найчастіше використовують циліндричну і сферичну системи координат, а також їх узагальнення.

Циліндричні координати

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi & \varphi \in [0,2\pi] \\ y = r\sin\varphi & r \in [0,+\infty) \\ z = z & z \in (-\infty,+\infty) \end{cases} \qquad \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,d\varphi drdz$$

Загальні циліндричні координати

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi \\ y = br\sin\varphi \\ z = cz \end{cases} \qquad \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G'} f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi, cz)abrcd\varphi drdz$$

Узагальнені циліндричні координати

$$\begin{cases} x = ar\cos^{\lambda}\varphi \\ y = br\sin^{\lambda}\varphi \\ z = cz \end{cases} \qquad J = -abrc\lambda\sin^{\lambda-1}\varphi\cos^{\lambda-1}\varphi$$

Сферичні координати

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta & \varphi \in [0,2\pi] \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta & \rho \ge 0 \\ z = \rho\cos\theta & \theta \in [0,\pi] \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \\ &= \iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\varphi d\rho d\theta \end{aligned}$$

Загальні сферичні координати

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\theta \end{cases} \qquad J = \rho^2\sin\theta\cdot abc$$

Узагальнені сферичні координати

$$\begin{cases} x = a\rho\cos^{\lambda}\varphi\sin^{\alpha}\theta \\ y = b\rho\sin^{\lambda}\varphi\sin^{\alpha}\theta \\ z = c\rho\cos^{\alpha}\theta \end{cases} \qquad J = \rho^2 abc\lambda\alpha\sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{\lambda-1}\varphi\sin^{\lambda-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\theta.$$

Застосування потрійних інтегралів:

1. Обчислення об'ємів тіл: $V = \iiint\limits_G dxdydz = \iiint\limits_{G'} r\,dr\,d\varphi\,dz = \iiint\limits_{G''} \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$.

2. Застосування в механіці. Нехай деяке тіло займає область G. Нехай густину цього тіла задано формулою $\gamma(x,y,z)$. Тоді справедливі формули:

маса тіла: $m = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz$,

статичні моменти: $M_{xy} = \iiint\limits_G z\gamma dxdydz$, $M_{xz} = \iiint\limits_G y\gamma dxdydz$, $M_{yz} = \iiint\limits_G x\gamma dxdydz$,

координати центра мас: $x_ц = \frac{M_{yz}}{m}$, $y_ц = \frac{M_{xz}}{m}$, $z_ц = \frac{M_{xy}}{m}$,

моменти інерції: $I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\gamma dxdydz$, $I_{xz} = \iiint\limits_G y^2\gamma dxdydz$, $I_{yz} = \iiint\limits_G x^2\gamma dxdydz$,

$$I_z = I_{xz} + I_{yz},\ I_x = I_{xy} + I_{xz},\ I_y = I_{yz} + I_{xy},\ I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}.$$

1.3. Наближені методи обчислення подвійних інтегралів

Нехай потрібно наближено обчислити подвійний інтеграл від деякої неперервної і однозначної функції $f(x,y)$ по області G, тобто

$$I=\iint\limits_G f(x,y)dxdy,$$

де область G обмежена лініями: $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, $\varphi(x)\le\psi(x)$, $a\le x\le b$ (рис. 1.3). Тобто область задано як область першого типу. Для областей другого типу міркування аналогічні.

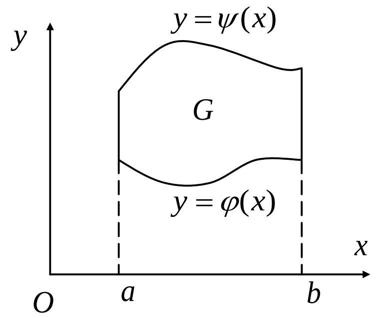


Рис. 1.3. Область інтегрування

Подвійний інтеграл можна звести до повторного інтегралу:

$$I=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy=\int\limits_a^b F(x)dx,\qquad \text{де } F(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Застосуємо до зовнішнього інтегралу квадратурну формулу і одержимо:

$$I=\iint\limits_G f(x,y)dxdy\approx\sum_{i=1}^{m}a_iF(x_i),$$

де a_i, x_i – вагові множники та вузли квадратурної формули, відповідно.

У свою чергу значення $F(x_i)$ також можуть бути обчислені за допомогою квадратурних формул, тобто

$$F(x_i)=\int\limits_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i,y)dy\approx\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f(x_i,y_{ij}).$$

Таким чином подвійний інтеграл наближено можна обчислити за формулою:

$$I\approx\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f(x_i,y_{ij})=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}f(x_i,y_{ij}),$$

де $\omega_{ij}=a_ib_{ij}$ – постійні коефіцієнти, обчислені по ваговим множникам.

У випадку використання квадратурних формул Гауса відповідна кубатурна формула для обчислення подвійного інтегралу матиме наступний вигляд:

$$I\approx\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{m}\xi_i\,\frac{\psi(x_i)-\varphi(x_i)}{2}\sum_{j=1}^{n}\eta_j f(x_i,y_{ij}),$$

де $x_i=\dfrac{a+b}{2}+u_i\dfrac{b-a}{2}$, $y_{ij}=\dfrac{\varphi(x_i)+\psi(x_i)}{2}+v_j\dfrac{\psi(x_i)-\varphi(x_i)}{2}$,

u_i при $i=1,2,...,m$ – параметри коренів полінома Лежандра $P_m(u)$, $\xi_1,\xi_2,...,\xi_m$ – відповідні їм вагові множники,

v_j при $j=1,2,...,n$ – параметри коренів полінома Лежандра $P_n(v)$, $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ – відповідні їм вагові множники.

Значення u_i, ξ_i, v_j та η_j наведені для стандартного відрізку $[-1;1]$ у таблицях [10].

Кубатурні формули Гауса на чотирьохкутній та трикутній області наведено в посібнику [9]. Також показано спосіб розбиття довільної області на трикутні та чотирикутні області. Більш розширено способи побудови кубатурних формул та методів поліпшення точності обчислень кратних інтегралів наведено у довіднику [10].

Зауважимо, що наближені обчислення потрійних, і взагалі, кратних інтегралів можна проводити за допомогою аналогічних міркувань.

Наведемо приклад обчислення інтегралу $\iint\limits_D xydxdy$, де область D: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$ (рис. 1.4).

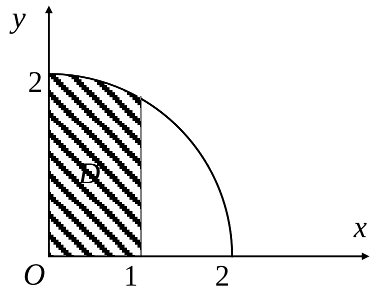


Рис. 1.4. Область інтегрування

Аналітичне обчислення інтегралу:

$$I = \iint\limits_D xydxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydy = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(4x - x^3\right)dx = \frac{7}{8} = 0{,}875 .$$

Наближене значення інтегралу обчислимо за квадратурною формулою Гауса (по вісі x візьмемо два вузла, по вісі y – три):

$$I = \iint\limits_D xydxdy \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{2}\xi_i \frac{\psi(x_i)-\varphi(x_i)}{2}\sum_{j=1}^{3}\eta_j f\left(x_i, y_{ij}\right).$$

Оскільки по вісі x ми вибрали два вузла, то відповідно маємо:

$$u_1 = -0{,}577350,\ u_2 = 0{,}577350,\ \xi_1 = 1,\ \xi_2 = 1,$$

$$x_1 = \frac{0+1}{2} + (-0{,}57735)\cdot\frac{1-0}{2} = 0{,}211325,$$

$$x_2 = \frac{0+1}{2} + 0{,}57735\cdot\frac{1-0}{2} = 0{,}788675.$$

Оскільки по вісі y ми вибрали три вузла, то відповідно маємо:

$$v_1 = -0{,}77459,\ v_2 = 0{,}0,\ v_3 = 0{,}77459,\ \eta_1 = 0{,}555556,\ \eta_2 = 0{,}888889,\ \eta_3 = 0{,}555556,$$

$$\varphi(x) = 0,\ \psi(0{,}211325) = 1{,}9888,\ \psi(0{,}788675) = 1{,}8379,$$

$$y_{11} = \frac{1,9888}{2} - 0,77459 \cdot \frac{1,9888}{2} = 0,2241,$$
$$y_{12} = \frac{1,9888}{2} + 0 \cdot \frac{1,9888}{2} = 0,9944,$$
$$y_{13} = \frac{1,9888}{2} + 0,77459 \cdot \frac{1,9888}{2} = 1,76465,$$
$$y_{21} = \frac{1,8379}{2} - 0,77459 \cdot \frac{1,8379}{2} = 0,2071,$$
$$y_{21} = \frac{1,8379}{2} + 0 \cdot \frac{1,8379}{2} = 0,9190,$$
$$y_{21} = \frac{1,8379}{2} + 0,77459 \cdot \frac{1,8379}{2} = 1,6308.$$

Наближене значення інтегралу буде наступним:

$$I \approx \frac{1-0}{2}\left(1 \cdot \frac{1,9888}{2}(0,555556 \cdot 0,211325 \cdot 0,2241 + 0,888889 \cdot 0,211325 \cdot 0,9944 + \right.$$
$$+ 0,555556 \cdot 0,211325 \cdot 1,76465) + 1 \cdot \frac{1,8379}{2}(0,555556 \cdot 0,788675 \cdot 0,2071 +$$
$$\left. + 0,888889 \cdot 0,788675 \cdot 0,9190 + 0,555556 \cdot 0,788675 \cdot 1,6308)\right) = 0,874977.$$

Пропонуємо самостійно обчислити наступні інтеграли наближеними методами:

1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (16x^2 y + 8xy^3)dxdy$, де область D: $1 \le x \le 2$, $3 \le y \le 4$.

2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (\cos^2 x + \sin^2 y)dxdy$, де область D: $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{4}$.

3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D xye^x dxdy$, де область D: $0 \le x \le 1$, $2 \le y \le 3$.

4. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, де область D обмежена кривими: $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

5. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D xdxdy$, де область D: трикутник з вершинами у точках: $A(2;3)$, $B(7;2)$, $C(4;5)$.

1.4. Індивідуальні завдання

1. Змінити порядок інтегрування.
2. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ за допомогою повторних із зовнішнім інтегруванням по x і по y.
3. Обчислити інтеграл.
4. Обчислити інтеграл, використовуючи полярні координати.
5. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями (за допомогою подвійного інтегралу).
6. Знайти площу області, яка обмежена кривою, використовуючи полярні координати.
7. Знайти координати центра мас однорідної пластинки, обмеженої лініями.

8. Обчислити інтеграл.
9. Обчислити інтеграл за допомогою циліндричних або сферичних координат.
10. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями (за допомогою потрійного інтегралу).

ВАРІАНТ 1

1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=\sqrt{3x}$, $x\ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, D: $y=x^2$, $x=y^2$.

4. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dy$.

5. $z=x^2+y^2$, $x+y=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho = a\sin^2 2\varphi$.

7. D: $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=\sqrt{3x}$, $x\ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (2x^2+3y+z)dxdydz$, D: $2\le x\le 3$, $-1\le y\le 2$, $0\le z\le 4$.

9. $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, D: $x^2+y^2+z^2=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

10. $z^2=4-x$, $x^2+y^2=4x$.

ВАРІАНТ 2

1. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $x^2=2y$, $5x-2y-6=0$.

3. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, D: $y=x^2$, $y=2x$.

4. $\int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

5. $z=2-\left(x^2+y^2\right)$, $x+2y=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho = a\sin^2\varphi$.

7. D: $x^2=2y$, $5x-2y-6=0$.

8. $\iiint\limits_D x^2yzdxdydz$, D: $-1\le x\le 2$, $0\le y\le 3$, $2\le z\le 3$.

9. $\iiint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, D: $z^2=4(x^2+y^2)$, $y\ge x$, $y\ge -x$, $z=2$, $z\ge 0$.

10. $z=4-y^2$, $x^2+y^2=4$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 3

1. $\int_0^1 dy \int_0^{y} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.

2. D: $x=\sqrt{8-y^2}$, $y=x$, $y\ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D: $y^2=x$, $x=y^2$.

4. $\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{-\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

5. $z=x$, $y=4$, $x=\sqrt{25-y^2}$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho = a\cos^2\varphi$.

7. D: $x=\sqrt{8-y^2}$, $y=x$, $y\ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (x+y+4z^2)dxdydz$, D: $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, $-1\le z\le 1$.

9. $\iiint\limits_D z^2dxdydz$, D: $1\le x^2+y^2\le 36$, $x\ge 0$, $y\ge x$, $z\ge 0$.

10. $z=2-x-y$, $x^2+y^2=1$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 4

1. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$.

2. $D:\ y = \ln x,\ 0 \le y \le 1,\ x \ge 0$.

3. $\iint_D x^2 y dxdy$, $D:\ y = 2 - x,\ x = y,\ x \ge 0$.

4. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2)dy$.

5. $z = 2x^2 + y^2,\ x + y = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

6. $\rho^2 = a^2(1 + \sin^2\varphi)$.

7. $D:\ y = \ln x,\ 0 \le y \le 1,\ x \ge 0$.

8. $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, $D:\ 0 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2$.

9. $\iiint_D ydxdydz$, $D:\ x^2 + y^2 + z^2 = 32,\ y^2 = x^2 + z^2,\ y \ge 0$.

10. $z = y^2,\ x + y = 2,\ x \ge 0,\ z \ge 0$.

ВАРІАНТ 5

1. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f(x,y)dx$.

2. $D:\ x^2 = 2 - y,\ y + x = 0$.

3. $\iint_D (x^3 - 2y)dxdy$, $D:\ y = x^2 - 1,\ x \ge 0,\ y \le 0$.

4. $\int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}dx$.

5. $z = 4 - x^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

6. $\rho = a\sin 2\varphi$.

7. $D:\ x^2 = 2 - y,\ y + x = 0$.

8. $\iiint_D x^2 y^2 z dxdydz$, $D:\ -1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ -2 \le z \le 5$.

9. $\iiint_D xdxdydz$, $D:\ x^2 + y^2 + z^2 = 8,\ x^2 = y^2 + z^2,\ x \ge 0$.

10. $x = \sqrt{9 - y^2},\ x = \sqrt{25 - y^2},\ x = z,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

ВАРІАНТ 6

1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$.

2. $D:\ y = \sqrt{2 - x^2},\ y = x^2$.

3. $\iint_D (y - x)dxdy$, $D:\ y = x,\ x^2 = y$.

4. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2 + y^2} dy$.

5. $2x + 3y - 12 = 0,\ 2z = y^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

6. $\rho = a\cos 5\varphi$.

7. $D:\ y = \sqrt{2 - x^2},\ y = x^2$.

8. $\iiint_D (x + y + z)dxdydz$, $D:\ 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0,\ 1 \le z \le 2$.

9. $\iiint_D ydxdydz$, $D:\ 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ y \le \sqrt{3}x,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

10. $z = 4 - x - y,\ x^2 + y^2 = 4,\ z \ge 0$.

ВАРІАНТ 7

1. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx$.

2. $D:\ y = x^2 - 2,\ y = x$.

3. $\iint\limits_D (1+y)dxdy$, D: $5y=x$, $x=y^2$.

4. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

5. $z=10+x^2+2y^2$, $x=y$, $x=1$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

7. D: $y=x^2-2$, $y=x$.

8. $\iiint\limits_D (2x-y^2-z)dxdydz$, D: $1\le x\le 5$, $0\le y\le 2$, $-1\le z\le 0$.

9. $\iiint\limits_D ydxdydz$, D: $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $y\ge 0$.

10. $z=x^2$, $x-2y+2=0$, $x+y=7$, $z\ge 0$.

ВАРИАНТ 8

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.

2. D: $y=x$, $1\le y\le 3$, $x\ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D: $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$.

4. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} tg(x^2+y^2)dy$.

5. $z=x^2$, $x+y=6$, $y=2x$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho=a\sin^2 4\varphi$.

7. D: $y=x$, $1\le y\le 3$, $x\ge 0$.

8. $\iiint\limits_D 2xy^2zdxdydz$, D: $0\le x\le 3$, $-2\le y\le 0$, $1\le z\le 2$.

9. $\iiint\limits_D \dfrac{y^2dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, D: $4\le x^2+y^2+z^2\le 36$, $x\ge 0$, $y\ge\sqrt{3}x$, $z\ge 0$.

10. $z=y$, $x=4$, $y=\sqrt{25-x^2}$, $x\ge 0$, $z\ge 0$.

ВАРИАНТ 9

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$.

2. D: $y^2=2x$, $x^2=2y$, $x\le 1$.

3. $\iint\limits_D x(y-1)dxdy$, D: $y=5x$, $x=y$, $x=3$.

4. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2)dy$.

5. $z=3x^2+2y^2+1$, $y=x^2-1$, $y=1$, $z\ge 0$.

6. $\rho=a\sin^2 3\varphi$.

7. D: $y^2=2x$, $x^2=2y$, $x\le 1$.

8. $\iiint\limits_D 5xyz^2dxdydz$, D: $-1\le x\le 0$, $2\le y\le 3$, $1\le z\le 2$.

9. $\iiint\limits_D \dfrac{y^2zdxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, D: $z=3(x^2+y^2)$, $y\le\sqrt{3}x$, $y\ge 0$, $z=3$.

10. $2x-y=0$, $x+y=9$, $z=x^2$, $z\ge 0$, $y\ge 0$.

ВАРИАНТ 10

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $y=\sqrt{9-x^2}$, $y\ge x$, $x\ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x-2)ydxdy$, D: $y=x$, $y=\dfrac{1}{2}x$, $x=2$.

4. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

5. $z=2x^2+y^2$, $x+y=1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho=a\sin 3\varphi$.

7. $D\colon\ y=\sqrt{9-x^2}$, $y\ge x$, $x\ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (x^2+2y^2-z)dxdydz$, $D\colon\ 0\le x\le 1$, $-1\le y\le 2$, $0\le z\le 4$.

9. $\iiint\limits_D \dfrac{x^2dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $D\colon\ x^2+y^2+z^2=16$, $z\ge 0$.

10. $x=4$, $y=2x$, $z=x^2$, $z\ge 0$, $y\ge 0$.

ВАРІАНТ 11

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-y}^0 f(x,y)dx+\int\limits_1^{\sqrt2}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)dx$.

2. $D\colon\ y^2=2-x$, $y=x$.

3. $\iint\limits_D (x-y^2)dxdy$, $D\colon\ y=x^2$, $y=1$.

4. $\int\limits_{-\sqrt3}^{\sqrt3}dx\int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dy$.

5. $y=2x$, $x+y+z=2$, $x\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho=a\sin 4\varphi$.

7. $D\colon\ y^2=2-x$, $y=x$.

8. $\iiint\limits_D (x+2yz)dxdydz$, $D\colon\ -2\le x\le 0$, $-1\le y\le 2$, $0\le z\le 2$.

9. $\iiint\limits_D \dfrac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D\colon\ z=2(x^2+y^2)$, $y\le\dfrac{1}{\sqrt3}x$, $y\ge 0$, $z=18$.

10. $y=2x$, $y=3$, $z=\sqrt{y}$, $x\ge 0$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 12

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{y^3} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.

2. $D\colon\ x=\sqrt{2-y^2}$, $x=y^2$, $y\ge 0$.

3. $\iint\limits_D x^2ydxdy$, $D\colon\ y=2x^3$, $y=0$, $x=1$.

4. $\int\limits_{-\sqrt2}^{\sqrt2}dx\int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}(1+x^2+y^2)dy$.

5. $z=x^2$, $x-2y+2=0$, $x+y-7=0$, $z\ge 0$.

6. $\rho=a\sin 5\varphi$.

7. $D\colon\ x=\sqrt{2-y^2}$, $x=y^2$, $y\ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (x^2+yz)dxdydz$, $D\colon\ 2\le x\le 3$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 4$.

9. $\iiint\limits_D \dfrac{xydxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $D\colon\ z=x^2+y^2$, $x\ge y$, $y\ge 0$, $z=4$.

10. $x=3$, $y=2x$, $z=y^2$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 13

1. $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-(2+y)}^0 f(x,y)dx+\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_{\sqrt[3]{y}}^0 f(x,y)dx$.

2. $D\colon\ x+2y-12=0$, $y=\lg x$, $y\ge 0$.

3. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, $D\colon\ x=1$, $x=y^2$.

4. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\dfrac{dy}{1+x^2+y^2}$.

5. $y=1-z^2$, $x=y$, $y=-x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho=2a(2+\cos\varphi)$.

7. $D\colon\ x+2y-12=0$, $y=\lg x$, $y\ge 0$.

8. $\iiint\limits_D (2x^2+3yz)dxdydz$, $D\colon\ 0\le x\le 1$, $-1\le y\le 2$, $0\le z\le 4$.

9. $\iiint\limits_D \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $4y = x^2 + y^2$, $y + z = 4$, $z \ge 0$.

10. $y^2 = 2 - x$, $z = 3x$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 14

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$.

2. D: $y = -x$, $1 \le y \le 3$, $x \le 0$.

3. $\iint\limits_D xydxdy$, D: $y = x^3$, $y = 0$, $x \le 2$.

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. $z = 2 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\cos 2\varphi$.

7. D: $y = -x$, $1 \le y \le 3$, $x \le 0$.

8. $\iiint\limits_D (2xy + 3z)dxdydz$, D: $2 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 2$, $3 \le z \le 4$.

9. $\iiint\limits_D \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $2x = x^2 + y^2$, $x + z = 2$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

10. $y = \sqrt{9 - x^2}$, $z = 2y$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 15

1. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $y = -\sqrt{2 - x^2}$, $y \ge x$, $y = 0$.

3. $\iint\limits_D y(1-x)dxdy$, D: $y = x$, $x = y^3$.

4. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$.

5. $z = y^2$, $x + y = 1$, $x \ge 0$, $z \ge 0$.

6. $\rho = a\cos 4\varphi$.

7. D: $y = -\sqrt{2 - x^2}$, $y \ge x$, $y = 0$.

8. $\iiint\limits_D (2x^2 - 3yz)dxdydz$, D: $0 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 4$.

9. $\iiint\limits_D \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, D: $16y = x^2 + y^2$, $y + z = 16$, $z \ge 0$, $x \ge 0$.

10. $x + y = 2$, $z = x^2 + y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 16

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $y \ge 0$, $x = \sqrt{y}$, $y = \sqrt{8 - x^2}$.

3. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, D: $y = x^3$, $y = 8$, $y = 0$, $x = 3$.

4. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$.

5. $z = 2x^2 + 3y^2$, $y = x^2$, $x = y$, $z \ge 0$.

6. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$.

7. D: $y \ge 0$, $x = \sqrt{y}$, $y = \sqrt{8 - x^2}$.

8. $\iiint\limits_D (2x^2 + 3y - z)dxdydz$, D: $2 \le x \le 4$, $-1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 4$.

9. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, D: $x^2 + y^2 = 2x$, $x + z = 2$, $z \ge 0$.

10. $z = 4 - x$, $x = 2\sqrt{y}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z \ge 0$.

ВАРІАНТ 17

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.
2. $D:\ x=-y,\ y^2=x+3$.
3. $\iint\limits_D x(2x+y)dxdy,\ D:\ y=1-x^2,\ y\ge 0$.
4. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$.
5. $z=2x^2+y^2,\ y\le x,\ y=3x,\ x=2,\ z\ge 0$.
6. $\rho^2=a^2\cos 3\varphi$.
7. $D:\ x=-y,\ y^2=x+3$.
8. $\iiint\limits_D x^3yzdxdydz,\ D:\ -1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 2\le z\le 3$.
9. $\iiint\limits_D yxdxdydz,\ D:\ 2\le x^2+y^2+z^2\le 8,\ z^2=x^2+y^2,\ y\ge 0,\ x\ge 0,\ z\ge 0$.
10. $z=5-x-y,\ x^2+y^2=9,\ z\ge 0$.

ВАРІАНТ 18

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y^2}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$.
2. $D:\ y=\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ x=1,\ x\ge 0$.
3. $\iint\limits_D xy^3dxdy,\ D:\ y^2=1-x,\ x\ge 0$.
4. $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}$.
5. $y=\sqrt{x},\ y=x,\ x+y+z=2,\ z\ge 0$.
6. $\rho=a(1-\cos\varphi)$.
7. $D:\ y=\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ x=1,\ x\ge 0$.
8. $\iiint\limits_D (x+2y+4z^2)dxdydz,\ D:\ -1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ -1\le z\le 1$.
9. $\iiint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz,\ D:\ x^2+y^2=2y,\ x\ge 0,\ x^2+y^2=4y,\ z\ge 0,\ z=6$.
10. $x=\sqrt{4-y^2},\ z=x,\ z\ge 0$.

ВАРІАНТ 19

1. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt[4]{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_1^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$.
2. $D:\ x=-1,\ x=-2,\ y\ge 0,\ y=x^2$.
3. $\iint\limits_D x(y+5)dxdy,\ D:\ y=x+5,\ x+y+5=0,\ x\le 0$.
4. $\int\limits_{-R}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,ctg\sqrt{x^2+y^2}}$.
5. $y=1-x^2,\ x+y+z=3,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.
6. $\rho^2=1+\sin^2\varphi$.
7. $D:\ x=-1,\ x=-2,\ y\ge 0,\ y=x^2$.
8. $\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz,\ D:\ 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3$.
9. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,\ D:\ x^2+y^2+z^2=36,\ z\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le -x$.
10. $z=x^2,\ x+y=2,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

ВАРІАНТ 20

1. $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_{-\arcsin y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dy \int\limits_{-\arccos y}^{0} f(x,y)dx$.
2. $D:\ x^2=-y,\ y\le 0,\ x=\sqrt{1-y^2}$.

3. $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, D: $y=x^2-1$, $y=3$.

4. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}} \frac{xy}{x^2+y^2}dy$.

5. $3y=\sqrt{x}$, $y\le x$, $x+y+z=10$, $y=1$, $z=0$.

6. $\rho=a\sin 6\varphi$.

7. D: $x^2=-y$, $y\le 0$, $x=\sqrt{1-y^2}$.

8. $\iiint\limits_D x^2y^2zdxdydz$, D: $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, $-2\le z\le 2$.

9. $\iiint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz$, D: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $z\ge 0$, $z=4$, $y\ge 0$, $y\le x$.

10. $x=\sqrt{25-y^2}$, $y=4$, $x=z$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 21

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx+\int\limits_1^e dy\int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$.

2. D: $x=-\sqrt{4-y^2}$, $y=x$, $0\le y\le 1$.

3. $\iint\limits_D (x+1)y^2dxdy$, D: $y=3$, $3x^2=y$.

4. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0}\cos\left(x^2+y^2\right)dy$.

5. $y^2=1-x$, $x+y+z=1$, $x=0$, $z=0$.

6. $\rho=a\cos 6\varphi$.

7. D: $x=-\sqrt{4-y^2}$, $y=x$, $0\le y\le 1$.

8. $\iiint\limits_D (x+y+2z)dxdydz$, D: $0\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$, $1\le z\le 2$.

9. $\iiint\limits_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, D: $1\le x^2+y^2+z^2\le 9$, $y\le\frac{\sqrt{3}x}{3}$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

10. $z=y^2$, $x^2+y^2=9$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 22

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y-2}^{0} f(x,y)dx$.

2. D: $y=1$, $y=4$, $y=-x$, $x\le 0$.

3. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, D: $y=x$, $x=1$, $y=0$.

4. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sin\left(x^2+y^2\right)dy$.

5. $y=x^2$, $x=y^2$, $z=3x+2y+6$, $z=0$.

6. $\rho=9(1+\cos\varphi)$.

7. D: $y=1$, $y=4$, $y=-x$, $x\le 0$.

8. $\iiint\limits_D (2x-y^2+z)dxdydz$, D: $1\le x\le 2$, $0\le y\le 2$, $-1\le z\le 0$.

9. $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, D: $x^2-2x+y^2=0$, $z+x=2$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

10. $z=1-x^2-y^2$, $y\ge x$, $x\ge 0$, $z\ge 0$.

ВАРІАНТ 23

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt[4]{y}} f(x,y)dx+\int\limits_1^e dy\int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$.

2. D: $y=-x$, $y=3-x^2$.

3. $\iint\limits_D (x^3+y)dxdy$, D: $x+y=1$, $x+y=2$, $0\le x\le 1$.

4. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1+x^2+y^2}dy$.

5. $x^2=1-y$, $x+y+z=3$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

6. $\rho=2\sin^2 4\varphi$.

7. $D:\ y=-x,\ y=3-x^2$.

8. $\iiint\limits_D 2xy^2zdxdydz$, $D:\ 0\le x\le 1,\ -2\le y\le 0,\ 1\le z\le 3$.

9. $\iiint\limits_D x^2zdxdydz$, $D:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ y\ge 0,\ y\le x,\ z\ge 0$.

10. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=4,\ z\ge 0$.

ВАРІАНТ 24

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt[5]{y}}^0 f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x,y)dx$.

2. $D:\ y=x^2+4,\ x=0,\ x=-2,\ y\ge 0$.

3. $\iint\limits_D xy^3dxdy$, $D:\ y=x^3,\ 4x=y,\ y\ge 0$.

4. $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}e^{x^2+y^2}dy$.

5. $y^2=x,\ x=1,\ x+y+z=4,\ z=0$.

6. $\rho=3\sin^2 3\varphi$.

7. $D:\ y=x^2+4,\ x=0,\ x=-2,\ y\ge 0$.

8. $\iiint\limits_D 5xyz^2dxdydz$, $D:\ -1\le x\le 1,\ 2\le y\le 3,\ 1\le z\le 3$.

9. $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D:\ x^2+y^2=4y,\ y+z=4,\ z\ge 0$.

10. $y=2,\ y=x,\ z=x^2,\ z\ge 0$.

ВАРІАНТ 25

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-y^3}^0 f(x,y)dx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)dx$.

2. $D:\ y=0,\ x=0,\ y=1,\ (x-3)^2+y^2=1$.

3. $\iint\limits_D (x^3+3y)dxdy$, $D:\ y+x=1,\ y=x^2-1,\ x\ge 0$.

4. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy$.

5. $y=x^2,\ y=4,\ z=2x+5y+10,\ z\ge 0$.

6. $\rho=2\sin 3\varphi$.

7. $D:\ y=0,\ x=0,\ y=1,\ (x-3)^2+y^2=1$.

8. $\iiint\limits_D (x^2+2y^2+2z)dxdydz$, $D:\ 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 1,\ 0\le z\le 3$.

9. $\iiint\limits_D \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $D:\ 4\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ y\le\sqrt{3}x,\ y\ge 0,\ z\ge 0$.

10. $y+z=2,\ x^2+y^2=4,\ z\ge 0$.

1.5. Зразок виконання індивідуального завдання

Приклад 1.1. Змінити порядок інтегрування в інтегралі:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$, б) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$.

Розв'язання. а) Змінимо порядок інтегрування в інтегралі: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$. Побудуємо область інтегрування. Для цього зобразимо в системі координат графіки функцій: $x=0$, $x=2$, $y=x$, $y=2x$ (рис. 1.5). Щоб змінити порядок інтегрування, потрібно визначитись, яка змінна буде під знаком диференціалу у внутрішньому інтегралі. В даному випадку це буде x. Тоді уявно проведемо прямі $y=const$ і подивимось від точки на якій кривій і до точки на якій кривій змінюється x. В даному випадку для $y\in[0,2]$ і $y\in[2,4]$ ці криві різні. Тому в результаті одержимо 2 інтеграли.

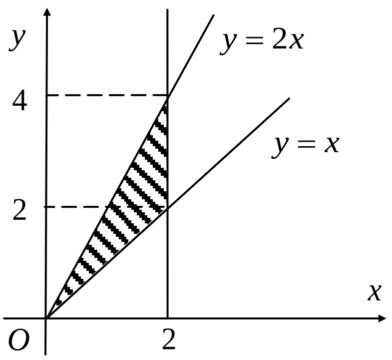


Рис. 1.5.

Оскільки зовнішнє інтегрування буде по y, то потрібно в рівняннях кривих змінну x виразити через змінну y. При $y\in[0,2]$: $x=\frac{y}{2}$, $x=y$, при $y\in[2,4]$: $x=\frac{y}{2}$, $x=2$. Таким чином, одержимо:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx .$$

б) Змінимо порядок інтегрування в інтегралі: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$. Побудуємо область інтегрування. Для цього зобразимо в системі координат графіки функцій: $y=0$, $y=1$, $x=\sqrt{y}$, $x=2-y$ (рис. 1.6).

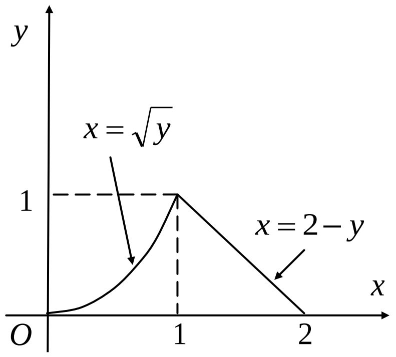


Рис. 1.6.

Під знаком диференціалу у внутрішньому інтегралі буде y. Тоді уявно проведемо прямі $x=const$ і подивимось від точки на якій кривій і до точки на якій кривій змінюється y. В даному випадку для $x\in[0,1]$ і $x\in[1,2]$ ці криві різні. Тому в результаті одержимо 2 інтеграли. Оскільки зовнішнє інтегрування буде по y, то потрібно в рівняннях кривих змінну y виразити через x.

При $x\in[0,1]$: $y=0$, $y=x^2$, при $x\in[1,2]$: $y=0$, $y=2-x$. Таким чином, одержимо:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy .$$

Приклад 1.2. Представити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ за допомогою повторних із зовнішнім інтегруванням по x і по y, де область D обмежена кривими: $x=\sqrt{y}$, $x=\sqrt{2+y}$, $x=0$, $x=2$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 1.7). Область інтегрування D обмежена дугами парабол $y=x^2$, $y=x^2-2$, прямими $x=0$, $x=2$, тобто маємо запис області D як області першого типу.

Тоді подвійний інтеграл за допомогою повторного із зовнішнім інтегруванням по x матиме вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2-2}^{x^2} f(x,y)dy.$$

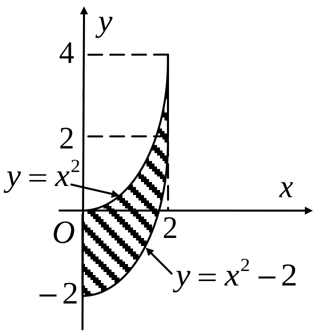


Рис. 1.7.

Для запису подвійного інтегралу за допомогою повторного із зовнішнім інтегруванням по y слід розбити область інтегрування на три частини, а саме:

1) якщо $-2\le y\le 0$, то область ліворуч обмежена прямою $x=0$, а праворуч кривою $x=\sqrt{2+y}$;
2) якщо $0\le y\le 2$, то область ліворуч обмежена кривою $x=\sqrt{y}$, а праворуч кривою $x=\sqrt{2+y}$;
3) якщо $2\le y\le 4$, то область ліворуч обмежена кривою $x=\sqrt{y}$, а праворуч прямою $x=2$.

Тоді подвійний інтеграл за допомогою повторного із зовнішнім інтегруванням по y матиме вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{0} dy\int\limits_0^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx+\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2} f(x,y)dx.$$

Приклад 1.3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D y^2\sqrt{1-x^2}dxdy$, де область D – це круг $x^2+y^2\le 1$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 1.8). Запишемо область D як область першого типу. Рівняння контуру: $x^2+y^2=1$. Звідки $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Зрозуміло, що $y=\sqrt{1-x^2}$ – рівняння верхнього півкола, $y=-\sqrt{1-x^2}$ – рівняння нижнього півкола. Таким чином, при постійному $x\in[-1,1]$ змінна y змінюється від $-\sqrt{1-x^2}$ до $\sqrt{1-x^2}$. Тоді одержимо:

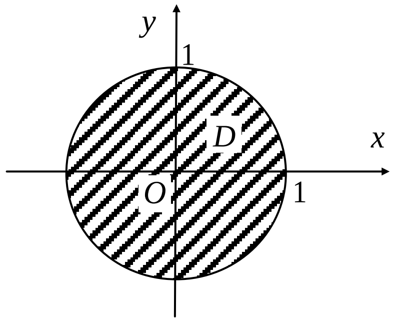
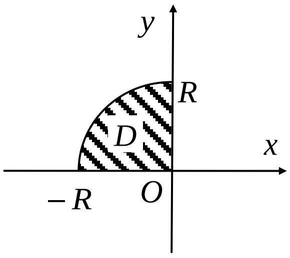


Рис. 1.8.

$$\iint\limits_D y^2\sqrt{1-x^2}\,dxdy=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}y^2dy=\left|\begin{array}{l}\textit{із парності підінт.}\\ \textit{функції у внутр.}\\ \textit{інтегралі}\end{array}\right|=2\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}}y^2dy=$$

$$=2\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2dx=\left|\begin{array}{l}\textit{із парності}\\ \textit{підінт. функції}\end{array}\right|=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^2dx=\frac{32}{45}.$$

Приклад 1.4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-R}^{0}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$, використовуючи полярні координати.



Розв'язання. Побудуємо область інтегрування D. Для цього в системі координат проведемо лінії: $x=-R$, $x=0$, $y=0$, $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Одержимо частину круга $x^2+y^2\le R^2$ (рис. 1.9). Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Рис. 1.9.

Тоді область D можна записати за допомогою нерівностей: $0\le\rho\le R$, $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$. Для інтегралу одержимо наступне:

$$\int\limits_{-R}^{0}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}\frac{\ln(1+\rho)}{\rho}\cdot\rho d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}\ln(1+\rho)d\rho=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{інтегруємо частинами}:\\ u=\ln(1+\rho),\quad dv=d\rho,\\ du=\dfrac{d\rho}{1+\rho},\qquad v=\rho\end{array}\right|=\frac{\pi}{2}\left(R\ln(1+R)-R+\ln(1+R)\right).$$

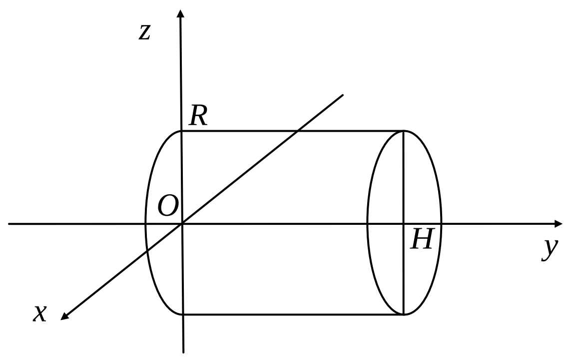
Приклад 1.5. а) Знайти об'єм тіла, обмеженого еліптичним циліндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, еліптичним параболоїдом $\frac{2z}{c}=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}$ та площиною $z=0$ за допомогою подвійного інтегралу.

б) Знайти площу бічної поверхні циліндра: $x^2+z^2=R^2$, $0\le y\le H$ за допомогою подвійного інтегралу.

Розв'язання. а) Розв'язання задачі зводиться до обчислення інтегралу по частині площини, яка обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, тому зручно перейти до узагальнених полярних координат. Тоді об'єм тіла буде дорівнювати:

$$V=\frac{c}{2}\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\right)dxdy=2abc\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^1\left(\frac{a^2\cos^2\varphi}{p^2}+\frac{b^2\sin^2\varphi}{q^2}\right)\rho^3d\rho=\frac{\pi}{8}abc\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}\right)\text{ (куб. од.).}$$

б) Знайдемо площу бічної поверхні циліндра за допомогою подвійного інтегралу. Побудуємо циліндр в системі координат (рис. 1.10). Тоді проекція на площину xOy буде область G: $\begin{cases}-R\le x\le R,\\ 0\le y\le H,\end{cases}$



$$z=\pm\sqrt{R^2-x^2}\,,\ \frac{\partial z}{\partial x}=\mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\,.$$

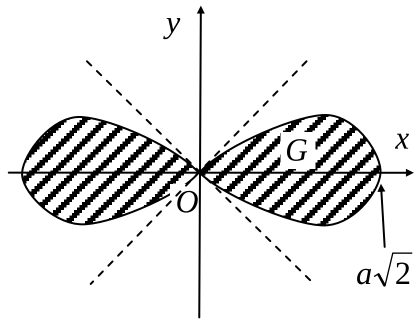
$$S=2\iint_G\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dxdy=2R\iint_G\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=2R\int_0^H dy\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4RH\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=2\pi RH\,.$$

Рис. 1.10.

Приклад 1.6. Знайти площу фігури, обмежену кривою $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$, використовуючи полярні координати.

Розв'язання. При наявності двочлена x^2+y^2 виникає думка про перехід до полярних координат. Тоді площу фігури зручно підраховувати за формулою: $S_G=\iint\limits_G\rho d\rho d\varphi$. Побудуємо область інтегрування (рис. 1.11). Для цього перейдемо до полярних координат. Рівняння кривої буде мати вигляд: $\rho=\sqrt{2\cos 2\varphi}$. При цьому $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. Область G складається з 4 однакових областей,



наприклад, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, ρ змінюється від $\rho=0$ до $\rho=\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

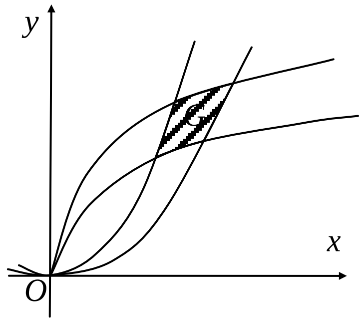
Таким чином, одержимо площу області G:

$$S_G=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\rho d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi=2 \text{ (кв. од.).}$$

Рис. 1.11.

Приклад 1.7. Знайти масу пластинки, обмежену лініями: $y=x^2$, $2y=x^2$, $y^2=x$, $y^2=3x$, якщо густина задається формулою $\gamma=xy$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 1.12). Вона являє собою криволінійний чотирикутник, тому границі інтегрування в декартових координатах записувати важко. Введемо нові координати u та v: $y^2=ux$, $x^2=vy$. Тоді $x=\sqrt[3]{uv^2}$, $y=\sqrt[3]{u^2v}$, $|J|=\frac{1}{3}$, $u\in[1,3]$, $v\in[1,2]$.



$$m=\iint_G\gamma(x,y)dxdy=\int_1^2 dv\int_1^3\sqrt[3]{uv^2}\cdot\sqrt[3]{u^2v}\cdot\frac{1}{3}du=\frac{1}{3}\int_1^2 vdv\int_1^3 udu=2\,.$$

Рис. 1.12.

Приклад 1.8. а) Обчислити інтеграл $\iiint\limits_D(3x+2y-z^3)dxdydz$, де D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$, $1\le z\le 3$.

б) Обчислити інтеграл $\iiint\limits_D xyzdxdydz$, де область D обмежена поверхнями: $z^2+x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Розв'язання. ***а)*** Дана область інтегрування являє собою прямокутний паралелепіпед, тобто одержимо для інтегралу наступне:

$$\iiint\limits_D (3x+2y-z^3)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_1^3 (3x+2y-z^3)dz=\int_0^1 dx\int_0^2\left(3xz+2yz-\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_1^3 dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^2(6x+4y-20)dy=\int_0^1(6xy+2y^2-20y)\Big|_0^2 dx=\int_0^1(12x-32)dx=-26.$$

б) Побудуємо область інтегрування (рис. 1.13). Зафіксуємо змінну x, $0\le x\le 1$. Тоді, якщо розглянути проекцію тіла на площину xOy, то y буде змінюватись від точки кривої $y=0$ до точки кривої $y=\sqrt{1-x^2}$. Якщо зафіксувати деякий x та y з проекції тіла на площину xOy, то z буде змінюватись від поверхні $z=0$ до $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Таким чином, одержимо наступний вираз:

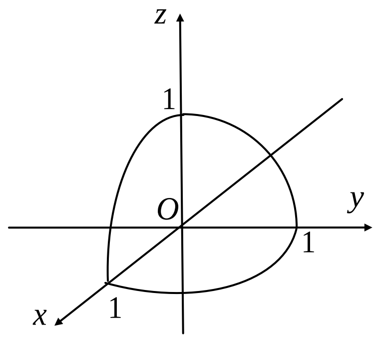


Рис. 1.13.

$$\iiint\limits_D xyzdxdydz=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\cdot\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(y-x^2y-y^3)dy=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1(x-2x^3+x^5)dx=\frac{1}{48}.$$

Приклад 1.9. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_D zdxdydz$, де область D обмежена поверхнями: $z^2=x^2+y^2$, $z=1$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування. Поверхня $z^2=x^2+y^2$ є конусом, $z=1$ є площиною (рис. 1.14). Перейдемо до циліндричних координат: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z$, де $\varphi\in[0,2\pi]$, $r\in[0,1]$, $z\in[r,1]$. Таким чином:

$$\iiint\limits_D zdxdydz=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 rdr\int_r^1 zdz=\pi\int_0^1(r-r^3)dr=\frac{\pi}{4}.$$

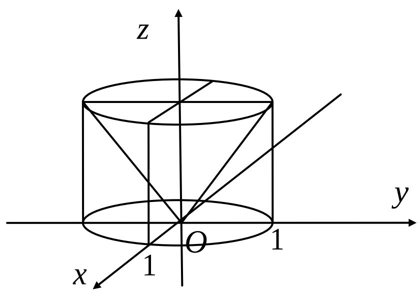


Рис. 1.14.

Приклад 1.10. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $3z^2=x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2=2z$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 1.15).

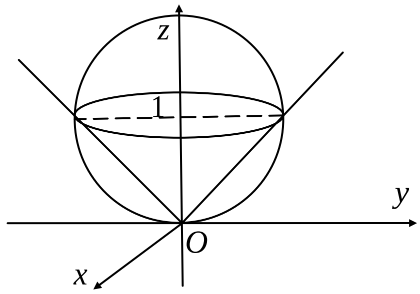


Рис. 1.15.

Перейдемо до сферичних координат:

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta.$$

Тоді рівняння сфери буде мати вигляд: $\rho=2\cos\theta$, рівняння конуса: $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

Тоді одержимо:

$$V=\iiint\limits_D \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}\rho^2\sin\theta\,d\rho=\frac{16\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cos^3\theta\,d\theta=\frac{5\pi}{4}\ \text{(куб. од.)}.$$