Лекція № 2

Елементарні математичні функції та їх застосування для моделювання та прогнозування стану довкілля

План

1. Загальне поняття про елементарні математичні функції
2. Властивості стандартних функцій та їх застосування

1. Загальне поняття про елементарні математичні функції

Елементарні математичні функції (лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні тощо) дуже широко застосовуються при моделюванні та прогнозуванні стану довкілля. За допомогою властивостей цих функцій можна проаналізувати взаємозалежність та взаємообумовленість різних екологічних процесів, визначити ступінь впливу одного явища на інше, виділити певні явища та процеси, вплив яких суттєвий для техноекосистеми, а саме головне – задати в аналітичній формі саму модель, яка б відображала залежність зміни одного екологічного параметра середовища від зміни іншого. Тому то знання найважливіших математичних функцій є необхідною запорукою для розуміння сутності екологічних явищ та їх взаємозв'язків, а також для їх адекватного моделювання.

Поняття ***функції*** (функціональної залежності) є одним з основних математичних понять. Розглянемо дві множини чисел X і Y, які пов'язані між собою. Числа X та Y є змінними, тобто можуть набувати різних значень. Змінну, що викликає зміни у властивостях іншої або інших змінних називають ***незалежною змінною***, а ту, яка зазнає цих змін, – ***залежною змінною***. Якщо кожному елементу x, що належить множині X ($x \in X$) за деяким законом поставлено у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задано ***функцію f (x).*** Тобто термін "функція" передбачає закон або правило, застосувавши який до аргументу x, отримає значення y. Записують це так:

$$y = f(x),\ x \in X.$$

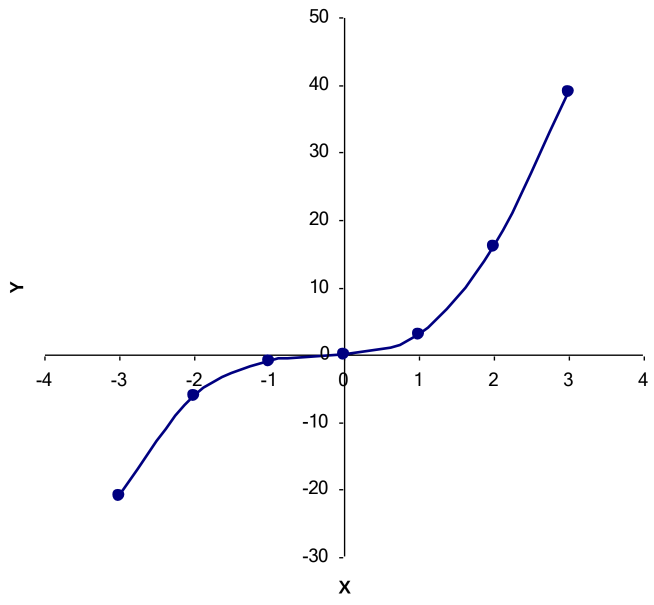
У такому разі x називають ***аргументом функції f***, а y (або f(x)) – ***функцією змінної x***. Множину всіх X називають ***областю визначення функції f***, а множину всіх y, для яких $y = f(x)$, – ***областю значень***.

Функціональну залежність між змінними величинами x та y найчастіше задають одним із трьох способів:

- аналітичним;
- графічним;
- табличним.

Аналітичний спосіб передбачає завдання функції за допомогою формули.

Візьмемо, для прикладу, поліноміальну кубічну функцію: $y = x^3 + x^2 + x$.



Графічний спо**сіб* передбачає використання графіка функції. Множину всіх точок М (x, y) координатної площини, для яких x – значення агрумента функції f, а y = f (x) – значення функції f, називають ***графіком функцій. Задати функцію графічно означає зобразити її графік. Графік функції: $y = x^3 + x^2 + x$ зображено на рис. 1.

***Рис. 1**. Графік функції* $y = x^3 + x^2 + x$

Табличний спосіб передбачає подання даних у таблиці, де значенням аргументу поставлені у відповідність значення функції. Таблиці застосовують у випадку скінченої множини визначення. Нижче задана таж сама функція $y = x^3 + x^2 + x$ у табличному вигляді.

Таблиця 1. *Залежність значень функції від значень аргументу для функції* $y = x^3 + x^2 + x$

X	Y
-3	-21
-2	-6
-1	-1
0	0
1	3
2	16
3	39

2. Властивості стандартних функцій та їх застосування

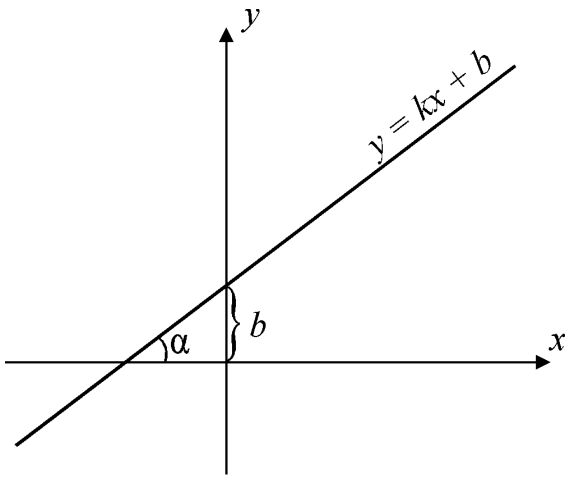
Серед елементарних математичних функцій, які застосовуються для моделювання та прогнозування стану довкілля найважливішими є: лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні. Коротко розглянемо їх.

Лінійна функція – найпростіша з функцій. Задається формулою:

$$y = kx + b \tag{1}$$

або рівнянням:

$$ax + by + c = 0 \tag{2}$$



Графіком цієї функції є пряма лінія (рис. 2). Числа *k*, *b* (або *a*, *b*, *c* у рівнянні (2)) називаються ***параметрами функції*** або ***коефіцієнтами рівняння функції***. Коефіцієнт k називається ще ***кутовим коефіцієнтом*** і характеризує нахил прямої лінії до осі абсцис. Математичний зміст цього коефіцієнта полягає у тому, що він характеризує нахил лінії графіка функції до осі абсцис і дорівнює: $k = tg\ \alpha$.

Рис. 2*. Графік лінійної функції y = kx + b*

Коефіцієнт *b* іноді ще називають ***вільним членом рівняння***. Він показує довжину відрізка, який відсікає лінія графіку від початку координат. Отже, якщо рівняння функції не містить коефіцієнта b, то її графік пройде через початок координат.

Застосування в екології. Лінійна функція в екології застосовується не дуже часто. Справа в тому, що сутність дуже складних екологічних процесів та явищ, як правило, не можна звести до простої лінійної залежності. Найчастіше дана функція використовується для приблизного моделювання, визначення лінії тренду розвитку різноманітних процесів, оцінки пропорційної залежності. В.І. Лаврик (2002), наприклад, демонструє застосування даної функції для розрахунку залежності маси риб від їх віку []:

$$w = at$$

де *w* – маса риби, *a* – емпірично визначений коефіцієнт пропорційності, що залежить від виду риби, *t* – вік риби.

Аналогічно можна записати залежність між довжиною риби і її віком:

$$\mathbf{L = bt}$$

де *b* – теж емпірично визначений коефіцієнт пропорційності, що залежить від виду риби.

З обох цих рівнянь можна виразити спільний член *t*. Отримаємо пропорцію, підставивши в яку емпіричні коефіцієнти a і b, і, наприклад, довжину риби, отримаємо її масу.

Розглянемо ще один приклад. Температура повітря зменшується з висотою. Причому таке зменшення становить 0,98 ^{o} С на кожні 100 м підйому. Тому функція, що пов’язує температуру з висотою матиме кутовий коефіцієнт 0,98 і запишеться у вигляді:

$$t = 0.98\, x + t_0,$$

де *x* – висота підйому, *t* – температура повітря на висоті х, t_0 – початкова температура біля поверхні Землі.

Зауважимо, що така залежність справедлива лише тоді, коли підйом повітря відбувається за сухоадіабатичним законом. Тобто доти, доки повітря не стане насиченим вологою і не досягне точки роси. Далі атмосферна волога почне конденсуватись і зміна температури відбуватиметься вже за іншим законом (вологоадіабатичним).

Окремим випадком лінійної функції є ***прямо пропорційна*** залежність. При ***прямо пропорційній*** залежності зміна значення аргументу в кілька разів викличе зміну значення функції у стільки ж разів. Прямо пропорційну залежність можна записати у вигляді:

$$y = kx \qquad (3)$$

Звідси:

$$y\,/\,x = k = const \qquad (4)$$

Число *k* називають ***коефіцієнтом пропорційності***. Даний коефіцієнт можна вивести із самого визначення функції (3-4). Нехай графік функції проходить через дві точки з координатами А (x_1; y_1) і У (x_2; y_2). Тоді:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (5)$$

Графік такої функції зображається прямою лінією, що проходить через початок координат (оскільки рівняння не містить вільного члена).

Якщо ж збільшення однієї величини у кілька разів призводить до відповідного зменшення іншої величини у стільки ж разів, то кажуть, що між цими величинами існує ***обернено пропорційна*** залежність. Обернено пропорційну залежність можна записати у вигляді:

$$y = \frac{k}{x} \qquad (6)$$

Тоді:

$$xy = k = const \qquad (7)$$

В рівняннях (6-7) *k* – ***коефіцієнт оберненої пропорційності***. В загальному випадку обернено пропорційна залежність виражається функцією:

$$y = \frac{k}{x - a} + b, \qquad (8)$$

де k, a, b – постійні величини (параметри або коефіцієнти).

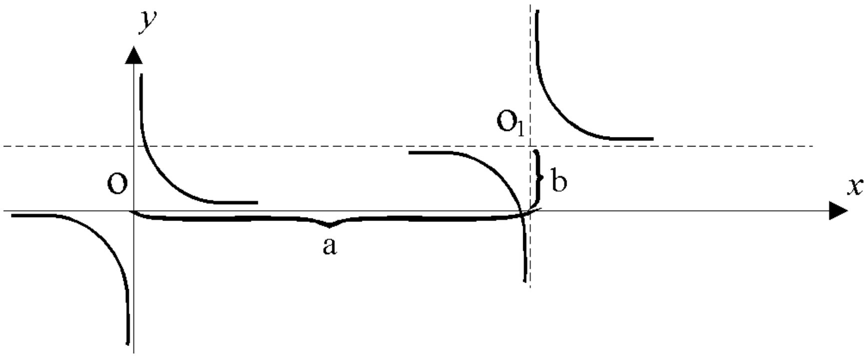


Рис. 3. *Графік функції обернено пропорційної залежності*

Як видно з рис. 3, якщо рівняння обернено пропорційної залежності не містить вище згадуваних коефіцієнтів, то її графік пройде через початок координат. Математично зміст цих коефіцієнтів полягає у тому, що їх модулі дорівнюють довжині відрізків, які відсікає графік функції відповідно на осі абсцис (a) та ординат (b).

Застосування в екології. Як правило, дана функція використовується для встановлення взаємозалежності між екологічними процесами, які або взаємодоповнюють один одного, або протиставляються один одному. Наприклад, формула для визначення коефіцієнта зволоження має вигляд:

$$k = A / B, \tag{9}$$

де A – кількість опадів на даній території (мм), B – випаровування (мм), k – коефіцієнт зволоження. Вважається, що якщо k близьке або більше за 1, то клімат – гумідний, а чим ближче його значення до 0, тим клімат аридніший.

Розглянемо дещо складніший випадок. Доволі часто дану залежність у моделюванні та прогнозуванні стану довкілля використовують для розрахунку взаємодії двох або кількох об’єктів методом потенціалів. Наприклад, взаємний вплив населених пунктів найбільш помітним чином виражається у вигляді матеріально-речовинних і людських потоків, інформаційних зв'язків. Обмежимося розглядом моделі, що враховує вплив лише людських потоків, а саме моделі потенціалу поля розселення (демографічного потенціалу), запропонованої Стюартом. Людські потоки, головним чином, залежать від розмірів населених пунктів (чисельності їхнього населення) і від відстаней між ними. В загальному вигляді дану модель можна представити рівнянням:

$$I_{i,j} = k\frac{H_i H_j}{R_{i,j}^a}, \tag{10}$$

де $I_{i,j}$ – людський потік від i-го населеного пункту до j-го населеного пункту, k – емпірично визначений коефіцієнт пропорційності, H_i – чисельність населення i-го населеного пункту , H_j – чисельність населення j-го населеного пункту, $R_{i,j}$ – відстань між населеними пунктами, a – показник степені, для більшості населених пунктів a = 2.

Обернено пропорційна залежність є окремим випадком дробово-лінійної функції, яка розглядається нижче.

Дробово-лінійна функція. В загальному випадку дробово-лінійна функція записується у вигляді:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \tag{11}$$

де a, b, c і d – сталі параметри (коефіцієнти).

Оскільки знаменник не може дорівнювати 0, то функція *y* визначається для всіх значень *x*, крім точки $x = -\frac{d}{c}$. При c = 0 дана функція перетворюється на лінійну. Графіком даної функції буде гіпербола, яка зміщена відносно осі абсцис на величину $\frac{a}{c}$, а осі ординат $-\frac{d}{c}$.

Застосування в екології. Основним критерієм самоочищення атмосфери є числове значення метеорологічного потенціалу самоочищення атмосфери (МПСОА). Воно розраховується за формулою:

$$K = \frac{T + B_1}{O + B_2}, \tag{12}$$

де К – числове значення МПСОА

Т – кількість днів із туманами

О – кількість днів з опадами

B_1 - кількість днів з швидкістю вітру 0-1м/с

B_2 - кількість днів з швидкістю вітру $>$ 6 м/с.

В свою чергу кількість днів із туманами та опадами можна розписати як функцію зволоження, стратифікації та циркуляції атмосфери, характеру підстилаючої поверхні. В такому вигляді дана функція більш наочно відповідатиме рівнянню (11). В таблиці відображені результати розрахунку величини К для метеостанцій м. Луцька і трьох найближчих метеостанцій (Ковель, Володимир-Волинський, Маневичі).

Таблиця 1. *Потенціал самоочищення атмосфери для півдня Волинської області*

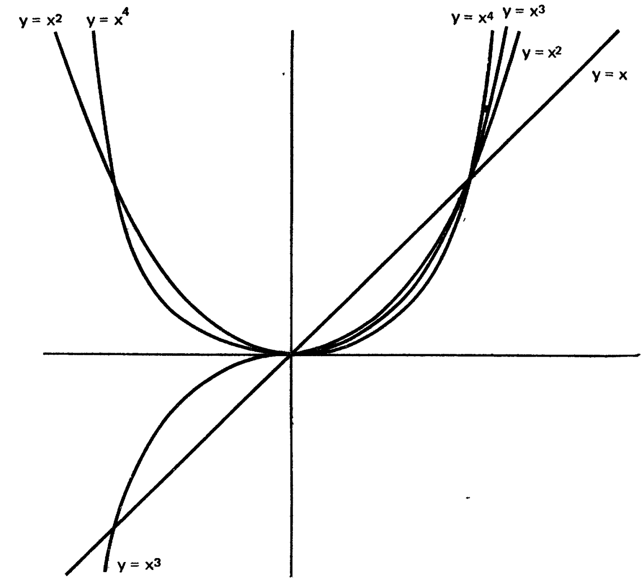
№ з/п	Показники	Метеорологічні станції			
		Луцьк	Ковель	Вол.-Вол.	Маневичі
1	Кількість днів з туманами	154	18	27	27
2	Кількість днів з швидкістю вітру 0-1 м/с	88	65	44	36
3	Кількість днів з швидкістю вітру > 6 м/с	97	5	61	6
4	Кількість днів з опадами	309	142	158	148
5	МПСОА	0,60	057	0,34	0,41

Степенева функція в загальному випадку записується рівнянням:

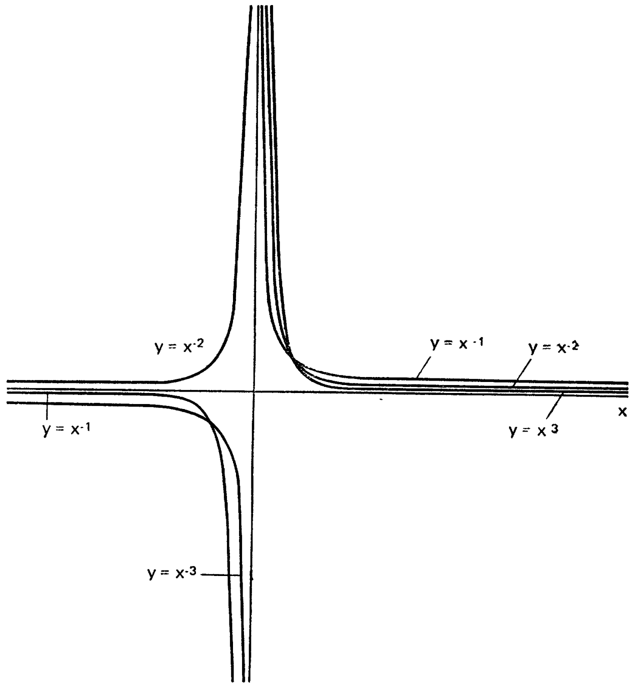
$$y = kx^n, \tag{13}$$

де k – сталий коефіцієнт, а n – показник степеня.

а.



б.



в.

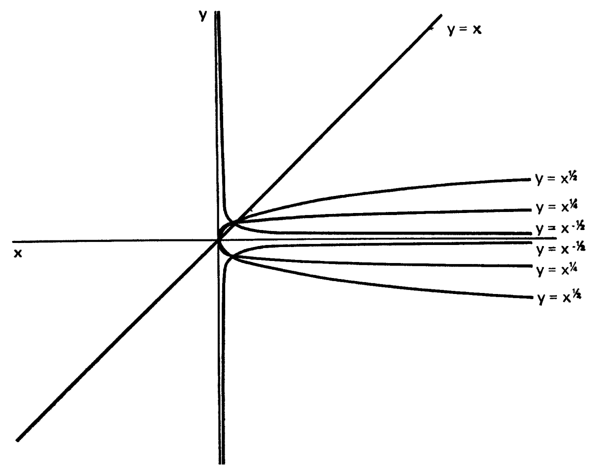


***Рис. 4**. Загальний вигляд графіків степеневих функцій при різних значеннях n*

Рис. 4.а. $n \geq 1$
Рис. 4.б. $n \leq -1$
Рис. 4.в. $-1 \leq n \leq 1$

Отже, як видно з рис. 4, вигляд кривих степеневих функцій дуже різноманітний, він залежить від модуля та знаку показника степеня n, а також коефіцієнта k. Характерним для усіх цих графіків є те, що чим більше значення n, тим ближче лежать їх вітки до осі ординат.

Застосування для моделювання та прогнозування стану довкілля. Степеневі функції застосовуються дуже широко, особливо якщо між досліджуваними явищами існує тісний однозначний зв'язок. Доволі часто вони адекватно описують суть екологічних явищ та процесів. Наприклад, на рис. 5 проілюстровано динаміку захворюваності населення м. Луцька (за []). На діаграмі також поміщено лінію тренду з прогнозом до 2005 р., апроксимовану степеневою функцією $y = 6E - 98x^{30,38}$.

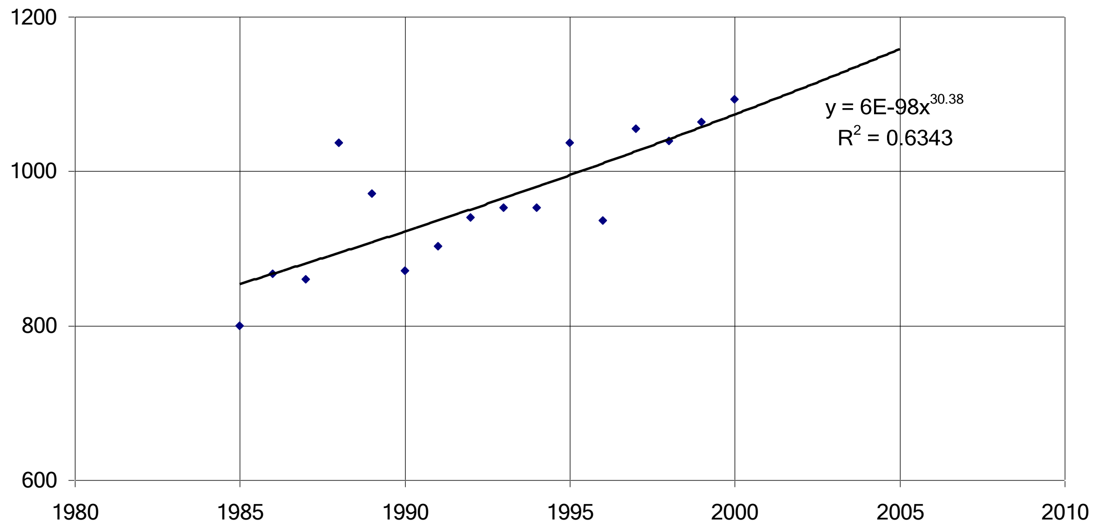


Рис. 5. *Динаміка захворюваності населення м. Луцька*

Наприклад, для пшениці залежність між вмістом у ґрунті азоту та врожайністю записується у вигляді степеневої функції [Федоров]:

$$\varphi_i^* = 90 \cdot (1 - 10^{-0.122 x_i}) \cdot 10^{-0.032 x_i^2}, \tag{14}$$

де x_i – вміст азоту в ґрунті.

В гідрології та гідроекології подібні зв’язки мають місце при аналізі стоку річки з одиниці площі водозбору, віднесеної до всієї площі басейну. Так, наприклад, при аналізі кривих середньобагаторічного паводкового стоку для р. Лінмузт *Dobbie* та *Wolf* (1953) втановили дану залежність у вигляді:

$$R = 3350\ A^{-0,5}, \tag{15}$$

де R – стік в м^3 з одиниці площі за одиницю часу, A – площа водозбору.

Логарифмічна і показникова функції. ***Логарифмічна*** функція у загальному випадку записується у вигляді:

$$y = log_a x, \tag{16}$$

де a – основа логарифму. Якщо в логарифмічній функції за основу логарифму взяти число e = 2,71828 (ірраціональне число), то така функція називається ***натуральним логарифмом*** і записується так:

$$y = ln\ x \tag{17}$$

а якщо за основу взяти число 10, то відповідно – ***десятковим логарифмом***:

$$y = lg\ x \tag{18}$$

Як видно з рис. 6, логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює 0, тому всі криві виду $y = log_a x$ пересікаються в точці (1;0).

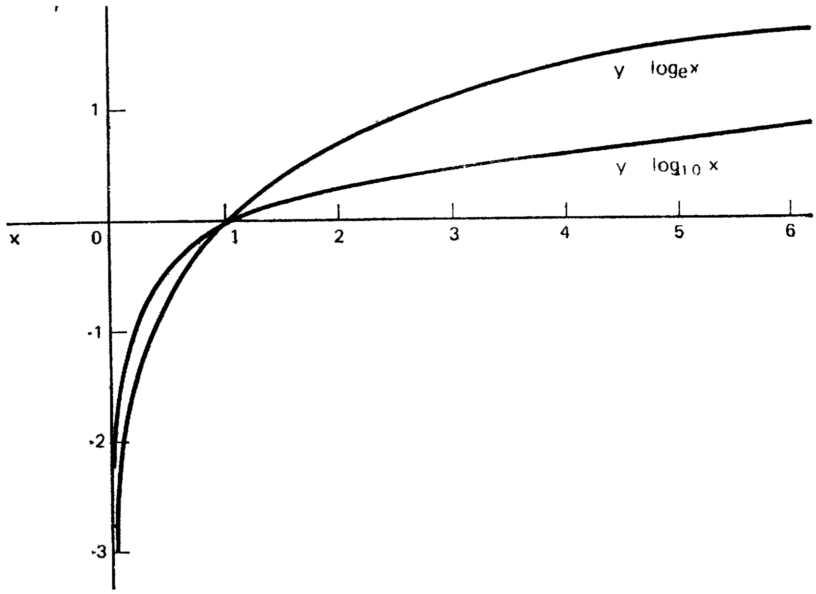


Рис. 6. *Загальний вигляд графіків логарифмічних функцій*

Звертаючись до функції $y = log_e x$ (або $y = ln\ x$) ми тим самим розглядаємо функцію $x = e^{\,y}$. Тому ***показникова*** функція (рис. 7):

$$y = e^{\,x} \tag{19}$$

є теж саме, що й функція $x = ln\, y$.

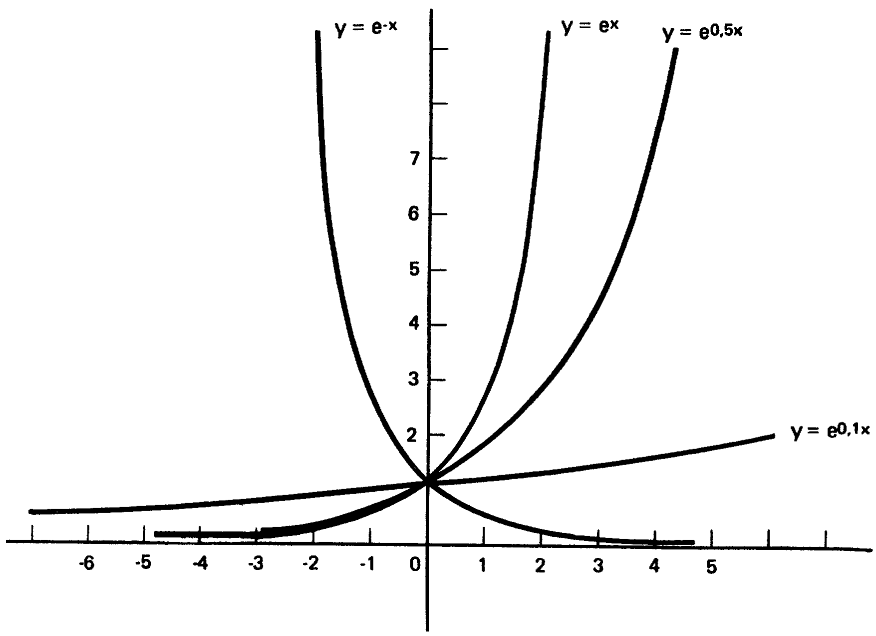


Рис. 7. *Загальний вигляд графіків показникових функцій*

Графік функції $y = e^x$ аналогічний графіку логарифмічної функції (рис. 6) за виключенням двох моментів: він наближається до осі *Ox* при $x \to -\infty$

і y ніколи не буває менше нуля. Його ще називають іноді ***експонентою***. Графік функції $y = e^{-x}$ є дзеркальним відображенням графіка функції $y = e^{x}$ відносно осі у. Очевидно, що форма графіка буде тим пологішою, чим менший коефіцієнт буде стояти перед x у показнику степеня. Це добре видно на рис. 7 (графік функції $y = e^{0,1x}$).

Застосування для моделювання та прогнозування стану довкілля. Логарифмічні та показникові функції застосовуються дуже широко. Наприклад, варіацію щільності населення усередині площі міста досліджував фахівець із математичної статистики К. Кларк. Він застосував просту теоретичну показникову функцію (20) для опису залежності між $П$ і l:

$$F(П) = e^{-\gamma 1}, \tag{20}$$

де $F(П)$ – теоретична щільність (частота) населення в даній точці міста; l – відстань у кілометрах від центра міста (за центр міста приймається уявне коло з максимальною щільністю населення); $П$ і γ – емпіричним шляхом розраховані коефіцієнти для кожного окремого міста. Наприклад, для Неаполя $П$ = 78,8, а γ = 0,598. Тоді теоретичну щільність можна обчислити за формулою (21):

$$F(П) = 78,8e^{-0,5981} \tag{21}$$

Інший приклад. Для розрахунку умов та наслідків забруднення річок у результаті скиду забруднених стічних вод крім власне розрахунку забруднення важливе значення має моделювання умов руху води в річці (швидкості, гідродинамічного потенціалу, модуля стоку, витрати води і т.д.), умов перемішування (турбулентності чи ламінарності потоку) тощо. Тому виникає важливе завдання моделювання поздовжнього профілю річки. Вперше це було виконано англійським вченим Дж. Гріном (1935) для р. Мол [самнер]. Він зв'язав криву загального виду з висотними відмітками базису ерозії в минулому, що представлені залишками терас у нижній частині долини, і отримав таку залежність:

$$y = a - k \log a\,(p - x), \tag{22}$$

де y – абсолютні відмітки висоти над рівнем моря; x – відстань від гирла річки, p – загальна протяжність річки; a і k – емпірично розраховані коефіцієнти, які для р. Мол становлять відповідно 241,5 і 65. Підставивши їх у формулу (22) отримаємо:

$$y = 241,5 - 65 \log a\,(p - x), \tag{23}$$

Для швидкості розмноження бактерій справедлива така залежність [лаврик]:

$$N = N_0\, e^{\,rt} \tag{24}$$

де N – кількість бактерій у будь-який час t; N_0 – початкова кількість бактерій у момент часу $t = 0$; r – константа швидкості розмноження бактерій. що визначається експериментально.

Тригонометричні функції. Тригонометричні функції дозволяють виразити прямокутні координати (x; y) через полярні координати (r; α). Вони виражають взаємозалежності між довжиною сторін та градусною мірою кутів прямокутного трикутника (рис. 8).

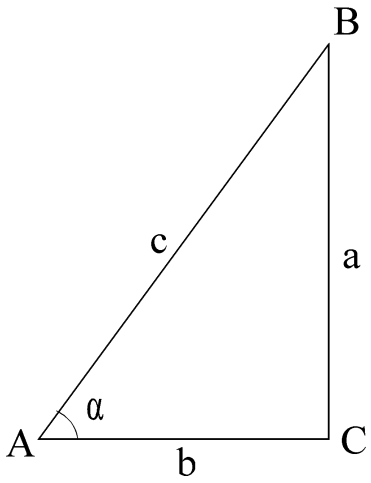


Рис. 8. *Типовий прямокутний трикутник:*

a – протилежний катет;
b – прилеглий катет;
c – гіпотенуза.

З рис. 8 можна дати визначення тригонометричних функцій кута α:

синусом кута α називається відношення протилежного катета до гіпотенузи:

$$\sin \alpha = a / c; \tag{25}$$

косинусом кута α називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи:

$$\cos \alpha = b / c; \tag{26}$$

тангенсом кута α називається відношення протилежного катета до прилеглого катета:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = a / b; \tag{27}$$

котангенсом кута α називається відношення прилеглого катета до протилежного:

$$\mathrm{ctg}\ \alpha = b / a. \tag{28}$$

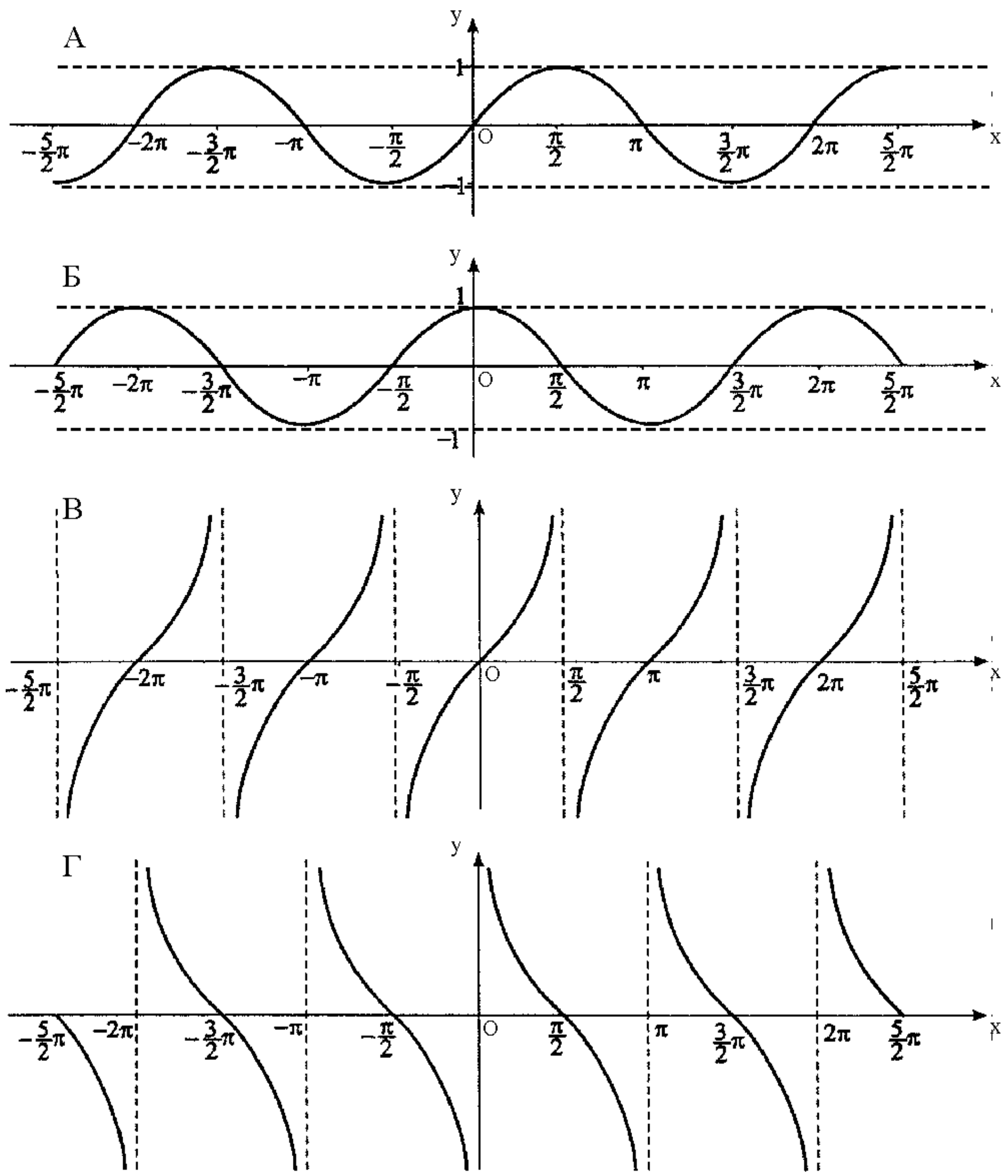


Рис. 9. *Графіки тригонометричних функцій:*

А – y = sin x; Б – y = cos x; В – y = tg x; Г – y = ctg x

Таблиця 2. *Значення тригонометричних функцій для певних значень кутів*

y	α, °							
	0	30	45	60	90	180	270	360
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

ctg x	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

На рис. 9 зображені графіки тригонометричних функцій. Для графіків *sin x* та *cos x* значення функцій знаходяться в інтервалі (-1;1). Тому на графіках через точки з ординатами $y = -1$ та $y = 1$ проведені ***асимптоти***, тобто лінії, що обмежують область значень функції. Асимптотами для графіків функцій *tg x* і *ctg x* будуть вертикальні лінії, для яких координата *x* кратна π (наприклад: -2π; -π; π; 2π і т.д.). Значення тригонометричних функцій основних кутів наведено в таблиці 2, знаки функцій у різних чвертях (квадрантах) – в таблиці 3.

Таблиця 2*. Значення тригонометричних функцій у різних чвертях (квадрантах)*

Значення функцій	Чверті			
	I (0-90^o)	II (90-180^o)	III (180-270^o)	IV (270-360^o)
sin x	+	-	-	+
cos x	+	+	-	-
tg x	+	-	+	-
ctg x	+	-	+	-

Між тригонометричними функціями існують певні залежності, що дозволяють виразити одну функцію через іншу. Виводяться вони з теореми Піфагора.

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}, \qquad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}, \qquad 1+tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1+ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad (29)$$

Застосування для моделювання та прогнозування стану довкілля. Тригонометричні функції широко застосовуються у моделюванні. Це зумовлено їх спільною властивістю – ***періодичністю***. Функцію $y = f(x),\ x \in D$ називають ***періодичною***, якщо існує таке число $T > 0$, що для всіх $x \in D$ виконується рівність $f(x + T) = f(x)$. Найменше з таких чисел T називається основним періодом функції $f(x)$. Ясно що дане твердження справедливе для всіх $(x + T) \in D$, якщо $x \in D$. Тобто для побудови графіка періодичної функції достатньо його побудувати на відрізку довжиною, що дорівнює основному періоду, а далі здійснити паралельне перенесення побудованої частини графіка функції вздовж осі *Ox*. Наприклад, для функцій *sin x* та *cos x,* як видно з рис. 9, основний період дорівнює 2π, а для функцій *tg x* і *ctg x* – π.

Строгі періодичні закономірності в природі спостерігаються дуже рідко. Зате багато явищ та процесів, які більш-менш близькі до періодичних. Їх називають квазіперіодичними. Прикладом періодичності в природі може бути зміна дня й ночі, пір року. Вони виникають внаслідок обертання Землі навколо своєї осі та навколо Сонця. Саме квазіперіодичний розподіл мають зміна припливів та відпливів, температури (рис. 10), вологості, хмарності, іноді напрямку вітру (наприклад, для мусонів, бризів), інтенсивність фотосинтезу, приросту біомаси, здатність природних систем до самоочищення та їх стійкість до антропогенного впливу. Як видно з рис. 10, графік річного ходу температури в помірних широтах дуже нагадує синусоїду, зміщену в додатну сторону по осі *Ox*.

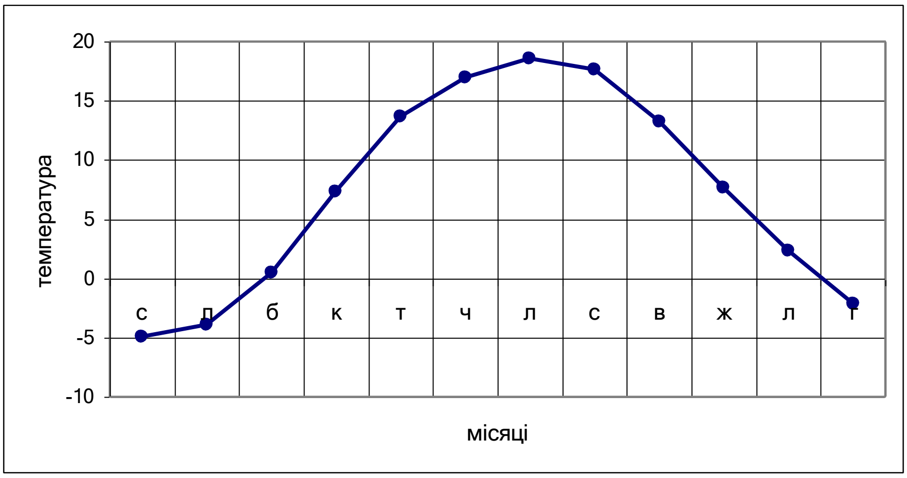


Рис. 10. *Графік річного ходу температури повітря для м. Луцька*

Для прикладу інших застосувань періодичних функцій приведемо дослідження характеру, інтенсивності та зумовленості процесу меандрування (звивистості) річки. Уперше подібна модель була розроблена американським вченим Спейджтом (Speight, 1965) у вигляді:

$$x_{(k)} = \frac{1}{n}\left[r_0 + \sum_{i=1}^{m-1}\left\{r_L\left(1+\cos\frac{\pi L}{m}\right)\cos\frac{\pi i L}{m}\right\}\right], \tag{30}$$

де x – інтенсивність меандрування, k – число коливань на одиницю відстані (частота), n – число змінених азимутів (взятих між точками, що рівномірно розподілені вздовж тальвегу річки), m – відстань меандри від витоку річки, L – довжина річки, r_L – коефіцієнт автокореляції.

Комбінації функцій. Вищерозглянуті елементарні функції є одними із основних інструментів, із допомогою яких будуються математичні моделі зв'язку між екологічними процесами та явищами. Але, на жаль, із допомогою цих стандартних функцій не завжди вдається отримати задовольняючу нас відповідність. Значення же ж елементарних функцій полягає в тому, що вони дозволяють хоча б апроксимувати вигляд криволінійного зв'язку.

Якщо зв'язки мають коливальну форму, то можна спробувати співвіднести їх із тригонометричними чи оберненими тригонометричними функціями. Там, де ясно прослідковується тенденція росту градієнта з ростом x, можна спробувати застосувати або степеневі функції з $n > 1$, або експоненціальні функції. Аналогічно там, де спостерігається зменшення нахилу із збільшенням x, потрібно виходити з властивостей логарифмічних або степеневих функцій при $0 < n < 1$. В багатьох випадках степеневі функції утворюють послідовність степенів змінної x. Наприклад, функція $y = x^3 + x^2 + x$, графік якої зображений на рис. 1. Такі функції відносяться до ***поліномів***. Поліноми, що містять x^2 називаються квадратичними, x^3 – кубічними, x^4 – полінами четвертого степеня і т.д. Як видно поліноми є дуже різноманітними, мають різні за формою графіки (це залежить від величини коефіцієнтів та порядку степеня). Для поліномів у загальному випадку можна сформулювати два правила:

- графік будь-якого полінома проходитиме через початок координат тоді і лише тоді, коли в рівнянні відсутній постійний член (як, наприклад, для полінома, графік якого зображений на рис. 1);
- максимальна кількість стаціонарних точок функції *на одиницю* менша від показника степеня найвищого порядку: для квадратичного полінома така точка буде єдиною, для кубічного їх існуватиме дві і т.д. (стаціонарними точками називають точки графіка, в яких змінюється напрям кривої, вони важливі для підбору найбільш підходящої кривої).

На сьогодні задача апроксимувати залежність певною функцією дещо полегшується. Це стало можливим завдяки широкому використанню комп'ютерної техніки та пакетів прикладних програм.

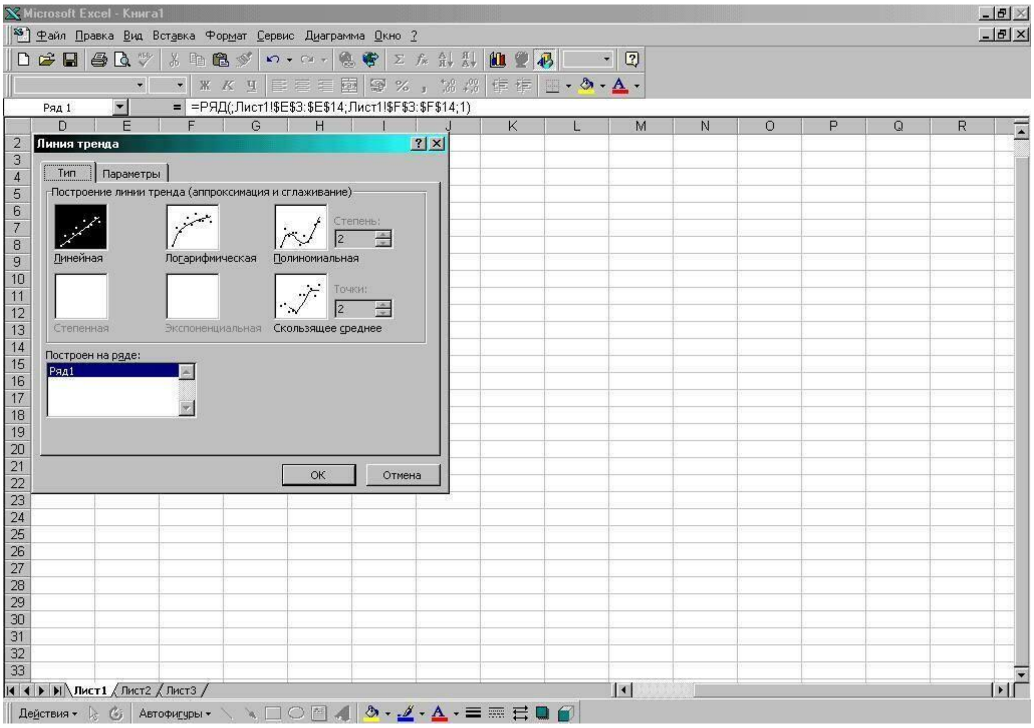


Рис. 11. *Вікно стандартної функції "Побудова лінії тренду" табличного процесора Excel пакету Microsoft Office.*

На даному рисунку показано як із допомогою стандартної комп'ютерної програми *MS Excel*, яка є практично на кожному комп'ютері можна візуально підібрати вигляд апроксимуючої функції криволінійної залежності. Якщо жодна з підібраних стандартних функцій *MS Excel* ідеально не апроксимує досліджувану залежність, то для приблизної оцінки слід скористатись тією функцією, для якої характерне найвище значення коефіцієнта детермінації. Значення даного коефіцієнта можна помістити на графік функції скориставшись наступною вкладкою – “Параметри” вікна “Побудова лінії тренду” програми *MS Excel* (рис. 11).