

РОЗДІЛ 2

ЯВИЩА ПЕРЕНЕСЕННЯ РЕЧОВИНИ Й ЕНЕРГІЇ У ПРОЦЕСАХ ПРИРОДООХОРОННОЇ ТЕХНОЛОГІЇ

2.1. Основні визначення математичного аналізу

Фізично нескінченно малий (елементарний) об'єм. Відповідно до прийнятої термінології фізично нескінченно малим об'ємом називають настільки малий об'єм суцільного середовища (газу, рідини, твердого тіла), що, з одного боку, в його межах усі параметри середовища можна вважати незмінними або локально однорідними. З іншого боку, він повинен містити в собі настільки велику кількість молекул, щоб середні для цього об'єму величини були сталими щодо зміни об'єму. Наприклад, із молекулярно-кінетичної теорії газів відомо, що такі властивості газу, як густина, температура, в'язкість, теплопровідність, дифузія, проявляються як наслідок теплового руху досить великої кількості молекул.

Зрозуміло, що об'єм, який виділяється для розгляду із усієї маси середовища, повинен бути відділеним від неї якоюсь межею.

Надалі поняття фізично нескінченно малого об'єму буде неодноразово використовуватися для одержання диференціальних рівнянь перенесення в суцільному середовищі.

Класифікація сил, що діють на фізично нескінченно малий об'єм суцільного середовища. Усі сили, що діють у суцільному середовищі (газі, рідині, твердому тілі), поділяють на два класи: об'ємні (масові) та поверхневі.

Об'ємні сили, що діють на елементарний об'єм середовища, пропорційні величині цього об'єму (чи його масі). До об'ємних сил можуть бути віднесені: сила тяжіння $F_T = m \cdot g$ (де m – маса середовища, що міститься в об'ємі V ;

g – прискорення вільного падіння); відцентрова сила $F_u = \frac{m \cdot \omega^2}{R}$ (де ω –

лінійна швидкість обертання об'єму; R – радіус обертання).

Поверхневі сили проявляються як наслідок дії суцільного середовища, розміщеного за межами виділеного об'єму, на поверхню S , що обмежує об'єм. Поверхневі сили обумовлені молекулярною взаємодією елементів середовища. Величина цих сил пропорційна площі елемента поверхні, з якою вони взаємодіють. Поверхневі сили проявляються як наслідок внутрішнього тертя, зумовленого в'язкістю середовища. До зазначених сил належать сили нормального й дотичного напружень, прикладені до поверхні S .

Основні поняття векторного аналізу. Фундаментальними математичними поняттями, що використовуються для опису фізичних величин та явищ, є скаляр і вектор. Під вектором розуміють величину, яка має напрямок у системі координат. У свою чергу, скаляр – це величина, яка не має напрямку. Прикладами скалярів є маса та температура середовища, його теплофізичні характеристики (густина, теплоємність, в'язкість і т. ін.). Векторні величини – швидкість, прискорення, сила.

Поле – це ще одне важливе математичне поняття. Вважають, що в просторі задане поле деякої величини, якщо в кожній точці простору визначені значення цієї величини. Поле може бути скалярним $U = U(x, y, z, \tau)$ (поле температур, тисків і концентрацій) або векторним $\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (поле швидкостей, прискорень).

Градiєнтом поля деякої величини U є межа відношення приросту цієї величини до інтервалу, на якому відбувається приріст (рис. 2.1):

$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta l} \right). \quad (2.1)$$

Градiєнт – векторна величина, спрямована у бік максимального зростання U . У декартовій системі координат

$$\text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \vec{\nabla} U, \quad (2.2)$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – одиничні вектори (орти) у напрямку координатних осей;

$\vec{\nabla}$ – набла.

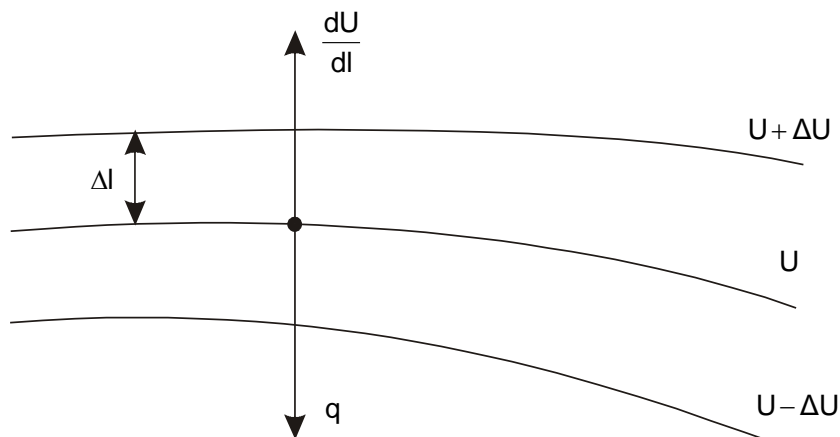


Рисунок 2.1 – До поняття градієнта (Δl , $U + \Delta U$, U , $U - \Delta U$, du , dl)

Подібно до поняття координатних ортів \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} існує поняття вектора нормалі до поверхні \vec{n} , що орієнтований у просторі перпендикулярно до поверхні рівних значень U і спрямований у бік зростання цієї функції або в напрямку зовнішньої нормалі зсередини фізично нескінченно малого об'єму (рис. 2.2).

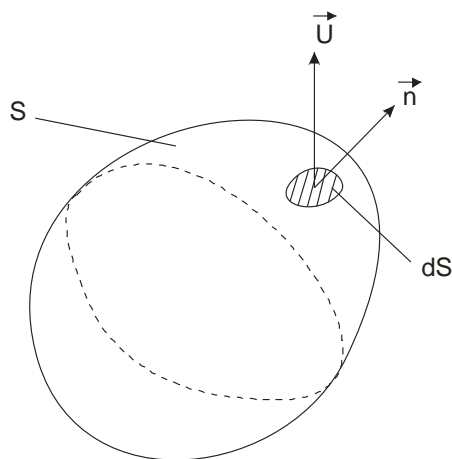


Рисунок 2.2 – До поняття вектора нормалі (S , ds , \vec{U} , \vec{n})

$$\text{grad}U = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{n} U dS = \nabla U, \quad (2.3)$$

$$\text{div} \vec{U} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_S \vec{n} \cdot \vec{U} d\vec{S} = \nabla \cdot \vec{U}. \quad (2.4)$$

Крапка у виразі (2.4) означає скалярне множення векторів, оператор div означає дивергенцію функції \vec{U} , що визначається виразом

$$div\vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}. \quad (2.5)$$

2.2. Загальні закономірності процесів перенесення речовин та енергії

Кількість теплоти, маси або кількість руху, що можуть переноситися з однієї точки простору в іншу, визначається одним словом – субстанція. Субстанція може переноситися як за рахунок хаотичного руху молекул речовини (градієнтне перенесення), так і за рахунок масових потоків середовища (конвективне перенесення).

Густина потоку теплоти, що переноситься за рахунок теплопровідності, пропорційна градієнту температури. Математично це виражається записом закону Фур'є:

$$q_T = -\lambda \cdot grad T = -\lambda \cdot \nabla T, \quad (2.6)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м · К); T – температура, К.

Знак «мінус» відображає той факт, що потік теплоти спрямований у бік, протилежний напрямку градієнта температур. Розмірність величини густини потоку теплоти $[q_T] = \text{Вт/м}$.

Аналогічно густина потоку маси речовини відповідно до першого закону Фіка визначається рівнянням

$$q_M = -D \cdot grad C = -D \nabla C, \quad (2.7)$$

де D – коефіцієнт молекулярної дифузії, м²/с; C – концентрація компонента, кг/м³.

Знак «мінус» відповідає напрямку дифузійного потоку від точки з більшою концентрацією компонента до точки з меншою концентрацією. Розмірність густини потоку маси $[q_M] = \text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$.

Потік кількості руху пропорційний градієнту швидкості в напрямку,

перпендикулярному до напрямку руху потоку:

$$\vec{q}_\delta = -\mu \cdot \text{grad } \vec{W} = -\mu \nabla \vec{W}, \quad (2.8)$$

де μ – динамічний коефіцієнт в'язкості середовища, Па · с; \vec{W} – вектор швидкості потоку.

Загальні закономірності характерні не лише для процесів градієнтного перенесення. Властиві вони й для процесів конвективного перенесення.

Наприклад, густина кількості руху речовини суцільного середовища виражається таким чином:

$$\vec{q}_{к.р} = \vec{W} \cdot \rho. \quad (2.9)$$

Розмірність густини кількості руху $[\vec{q}_{к.р}] = \text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$.

Аналогічно для густини потоку теплоти, що переноситься шляхом конвекції, можна записати так:

$$\vec{q}_{т.к} = \vec{W} \cdot \rho \cdot c_p \cdot T, \quad (2.10)$$

де c_p – теплоємність середовища за сталого тиску Дж/(кг · К).

Розмірність густини потоку теплоти $[\vec{q}_{т.к}] = \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{с})$

Густина потоку маси цільового компонента, що переноситься за допомогою конвекції, визначається таким виразом:

$$\vec{q}_{к.м} = \vec{W} \cdot C, \quad (2.11)$$

де C – концентрація перенесеного компонента.

Загальний характер закономірностей перенесення субстанції дозволяє користуватися єдиним методологічним прийомом для виведення всіх диференціальних рівнянь перенесення. Таким універсальним інструментом є теорема Остроградського – Гаусса: *потік вектора зсередини замкненої поверхні дорівнює потрійному інтегралу за об'ємом, обмеженим цією поверхнею, від дивергенції поля вектора.*

Звернемося до рис. 2.2, на якому зображені вектор \vec{U} та одиничний орт \vec{n} . Математичний запис теореми Остроградського – Гаусса має вигляд

$$\iint_S (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \text{div} \vec{U} dV, \quad (2.12)$$

або більш простий вигляд

$$\int_S (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \operatorname{div} \vec{U} dV. \quad (2.13)$$

Вирази (2.12) і (2.13) пов'язують поверхневі та об'ємні величини, що дає можливість одержати диференціальні рівняння перенесення.

2.3. Основні феноменологічні рівняння гідромеханіки суцільного середовища

Диференціальні рівняння рівноваги рідини Ейлера. Закон Паскаля

Уявімо собі рідину, що перебуває у стані відносного спокою. Умовно виділений у цій рідині елемент об'ємом V також перебуватиме в рівновазі з об'ємом середовища, що його оточує. З цих умов на виділений елемент діють об'ємні сили (сила тяжіння) і поверхневі (сила гідростатичного тиску), прикладені до поверхні об'єму. Відповідно до відомого з фізики принципу Даламбера векторна сума всіх сил, що діють на об'єм, дорівнюватиме нулю. Із властивостей гідростатичного тиску відомо, що прикладений у точці, він завжди діє однаково у всіх напрямках. Оскільки тиск є скалярною величиною, то силу тиску, що діє на елемент поверхні dS , можна записати в такому вигляді:

$$d\vec{F}_p = p\vec{n}dS. \quad (2.14)$$

Сила тиску, що діє на всю поверхню S , яка обмежує розглянутий об'єм, знаходиться інтегруванням:

$$\vec{F}_p = \int_S p\vec{n}dS. \quad (2.15)$$

Для сили тяжіння, що діє на об'єм, запишемо таку формулу:

$$\vec{F}_T = \int_V \rho\vec{g}dV. \quad (2.16)$$

За умов рівноваги

$$\vec{F}_p + \vec{F}_T = \int_S p\vec{n}dS + \int_V \rho\vec{g}dV. \quad (2.17)$$

Розділимо обидві частини рівняння (2.17) на V і знайдемо межу при $V \rightarrow 0$:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S p \vec{n} dS + \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V \rho \vec{g} dV = 0. \quad (2.18)$$

Звернемося до виразу (2.3). Порівнюючи його з виразом (2.18), неважко впевнитися в тому, що

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S p \vec{n} dS = \nabla p. \quad (2.19)$$

Для другого доданка лівої частини (2.18) відповідно до правила граничного переходу одержимо

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V \rho \vec{g} dV = \rho \vec{g}. \quad (2.20)$$

З урахуванням цього рівняння (2.18) запишемо в такому вигляді:

$$\nabla p + \rho \vec{g} = 0. \quad (2.21)$$

Одержуваний результат у проєкціях на осі декартової системи координат подамо у вигляді

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.22)$$

Система (2.22) є системою диференціальних рівнянь рівноваги ідеальної рідини Ейлера. Знак «мінус» означає той факт, що проєкція векторів \vec{p} і \vec{g} спрямована протилежно позитивному напрямку осі координат.

Інтегральним записом диференціальних рівнянь рівноваги Ейлера є закон Паскаля. Виберемо із системи (2.22) рівняння для осі z . Оскільки $\frac{\partial p}{\partial x}$ та $\frac{\partial p}{\partial y}$

дорівнюють нулю, частинна похідна $\frac{\partial p}{\partial z}$ може бути замінена на $\frac{dp}{dz}$. Тоді

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0. \quad (2.23)$$

Для того щоб знайти тиск у точці A , що перебуває на глибині h від поверхні, розділимо змінні й проінтегруємо останнє рівняння в межах від p_0 до p і від 0 до h , як це зображено на рис. 2.3:

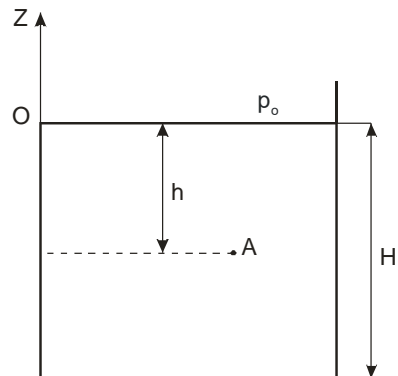


Рисунок 2.3 – Ілюстрація закону Паскаля ($A, H, z, h, 0, p_0$)

$$\int_{p_0}^p dp = - \int_0^h \rho g dz \quad (2.24)$$

Тоді

$$p - p_0 = \rho gh. \quad (2.25)$$

Звідси

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (2.26)$$

Останнє рівняння є *законом Паскаля*, згідно з яким тиск у будь-якій точці спокійної нестисливої рідини передається однаково всім точкам її об'єму та складається із зовнішнього тиску p_0 і тиску стовпа рідини ρgh .

Рівняння нерозривності потоку. Рівняння витрати. Виділимо в середовищі, що рухається, елементарний об'єм, обмежений замкненою *поверхнею* S .

Маса речовини, що проходить через площину dS за час $d\tau$, дорівнює

$$dM = -\vec{w} \cdot \vec{n} \rho dS d\tau. \quad (2.27)$$

Поява скалярного множення $\vec{w} \cdot \vec{n}$ відбиває той факт, що яким би чином не був орієнтований вектор швидкості потоку \vec{w} у просторі, надходження маси речовини в об'єм визначається лише складовою, перпендикулярною до площини dS .

Кількість речовини, що надходить в об'єм через усю поверхню S , визначається інтегруванням по цій поверхні:

$$M = - \int_S \vec{w} \cdot \vec{n} \rho dS d\tau. \quad (2.28)$$

Надходження речовини в об'єм приведе до зміни густини середовища в ньому. Відповідно до цього для величини M можна записати

$$M = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV d\tau. \quad (2.29)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (2.28) і (2.29), одержимо

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV d\tau = - \int_S \vec{w} \cdot \vec{n} \rho dS d\tau. \quad (2.30)$$

До інтеграла в правій частині виразу застосуємо теорему Остроградського – Гаусса. Тоді, використовуючи (2.13), можна записати

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV d\tau = - \int_V \text{div}(\rho \vec{w}) dV d\tau. \quad (2.31)$$

Зважаючи на довільність обраного об'єму V , знаки операторів інтегрування можна відкинути. Після скорочення на $dV d\tau$ одержимо

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \vec{w}) = 0, \quad (2.32)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.33)$$

Вираз (2.33) є математичним записом рівняння нерозривності потоку.

Якщо густина рідини не змінюється в часі й рідина нестислива (для краплинних рідин), останнє рівняння значно спрощується і набуває вигляду

$$\text{div} \vec{w} = 0. \quad (2.34)$$

Або в розгорнутому вигляді

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (2.35)$$

Інтегральним записом рівняння нерозривності потоку є рівняння витрати. Дійсно, з рівняння (2.32) випливає, що для нестисливої рідини в кожному перерізі потоку величина $\rho w S$ залишається сталою (рис. 2.4).

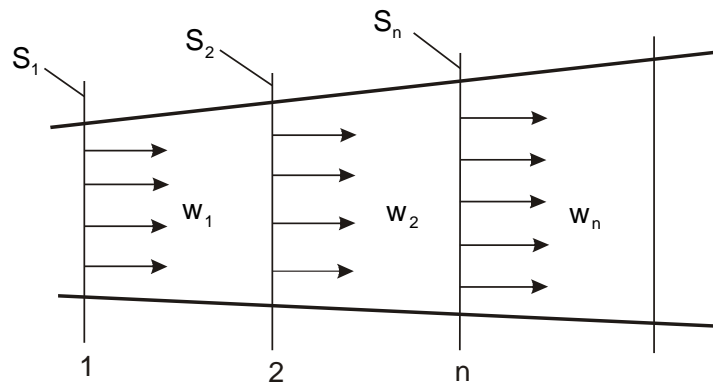


Рисунок 2.4 – Ілюстрація рівняння витрати ($1, 2, n, w_1, w_2, w_n, S_1, S_2, S_n$)

Для будь-якого перерізу потоку можна записати

$$\rho_1 \cdot w_1 \cdot S_1 = \rho_2 \cdot w_2 \cdot S_2 = \rho_n \cdot w_n \cdot S_n, \quad (2.36)$$

або

$$G_1 = G_2 = G_n, \quad (2.37)$$

де G – масова витрата рідини, кг/с.

Рівняння (2.36) є рівнянням сталості витрати, згідно з яким під час усталеного руху рідини, що повністю заповнює трубопровід, через кожний переріз за одиницю часу проходить та сама маса рідини.

Із рівняння (2.35) відповідно одержуємо

$$w_1 \cdot S_1 = w_2 \cdot S_2 = w_n \cdot S_n, \quad (2.38)$$

або

$$V_1 = V_2 = V_n,$$

де V – об'ємна витрата рідини, м³/с.

Із виразу (2.38) випливає, що швидкості краплинної рідини в різних поперечних перерізах трубопроводу обернено пропорційні площам цих

перерізів.

Рівняння сталості витрати рідини є частковим випадком збереження маси й виражає матеріальний баланс потоку.

Диференціальне рівняння ідеальної рідини Ейлера. Рівняння Бернуллі. Розглянемо рівновагу сил, що діють на елементарний об'єм V ідеальної рідини, що рухається. У нерухомій системі координат на елемент у цьому разі діятимуть сили тяжіння F_T , тиску F_p та інерції F_i . Згідно із другим законом Ньютона запишемо

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_T + \vec{F}_p. \quad (2.39)$$

Для сили інерції можна записати

$$\vec{F}_3 = -m\vec{a} = -m\frac{d\vec{w}}{d\tau}, \quad (2.40)$$

де m – маса об'єму рідини.

Сила тяжіння та сила тиску мають вирази

$$F_T = \int_V \rho \vec{g} dV,$$
$$F_p = \int_S p \vec{n} dS.$$

Підставляючи (2.15), (2.16) і (2.40) у вираз (2.39) і враховуючи, що для елементарного об'єму $m = \int \rho dV$, одержимо

$$\int_V \rho \vec{g} dV + \int_S p \vec{n} dS + \int_V \rho \frac{d\vec{w}}{d\tau} dV = 0. \quad (2.41)$$

Розділимо (2.41) на V , перейдемо до межі за $V \rightarrow 0$ і, використовуючи правило граничного переходу, а також враховуючи (2.13), запишемо

$$\rho \vec{g} + \nabla p + \rho \frac{d\vec{w}}{d\tau} = 0. \quad (2.42)$$

Або в проекціях на осі декартової системи координат одержимо

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dw_x}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{dw_y}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{dw_z}{d\tau} &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} . \quad (2.43)$$

Векторне рівняння (2.42) і система (2.43) є диференціальними рівняннями руху ідеальної рідини Ейлера.

Інтегральним записом диференціальних рівнянь руху ідеальної рідини є рівняння Бернуллі. Для його одержання помножимо ліві й праві частини системи рівнянь (2.43) відповідно на dx , dy , dz і додамо їх почленно:

$$\rho \left(\frac{dx}{d\tau} dw_x + \frac{dy}{d\tau} dw_y + \frac{dz}{d\tau} dw_z \right) = -\rho g dz - \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right). \quad (2.44)$$

Відзначимо, що похідні від координат за часом – це проекції швидкості на відповідні осі координат. Крім того, сума в дужках правої частини є повним диференціалом тиску. Відповідно до цього матимемо

$$\rho (w_x dw_x + w_y dw_y + w_z dw_z) = -\rho g dz - dp. \quad (2.45)$$

Проведемо подальші перетворення, враховуючи, що

$$w_x dw_x = d\left(\frac{w_x^2}{2}\right), \quad w_y dw_y = d\left(\frac{w_y^2}{2}\right), \quad w_z dw_z = d\left(\frac{w_z^2}{2}\right). \quad (2.46)$$

$$d\left(\frac{w_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{w_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{w_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}{2}\right). \quad (2.47)$$

Сума квадратів проекцій швидкості на осі координат – це квадрат абсолютної швидкості w^2 , тоді

$$\rho d\left(\frac{w^2}{2}\right) = -\rho g dz - dp. \quad (2.48)$$

Внесемо фізичні константи під знаки диференціювання й перенесемо всі члени в ліву частину:

$$d\left(\rho \frac{w^2}{2}\right) + d(\rho g z) + dp = 0. \quad (2.49)$$

Суму диференціалів замінимо диференціалом суми:

$$d\left(\rho \frac{w^2}{2} + \rho g z + p\right) = 0. \quad (2.50)$$

Оскільки диференціал виразу дорівнює нулю, то вираз у дужках є сталою величиною:

$$\rho \frac{w^2}{2} + \rho g z + p = const. \quad (2.51)$$

Цей запис і відображає закон Бернуллі, частіше вживаний у вигляді

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} = const. \quad (2.52)$$

Члени в цьому рівнянні мають розмірність [м]. Кожний із них відображає напір:

z – нівелірна висота, або геометричний напір;

$\frac{p}{\rho g}$ – статичний, або п'єзометричний, напір;

$\frac{w^2}{2g}$ – динамічний, або швидкісний, напір.

Для будь-яких двох поперечних перерізів (рис. 2.5) потоку закон Бернуллі можна записати у вигляді

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}. \quad (2.53)$$

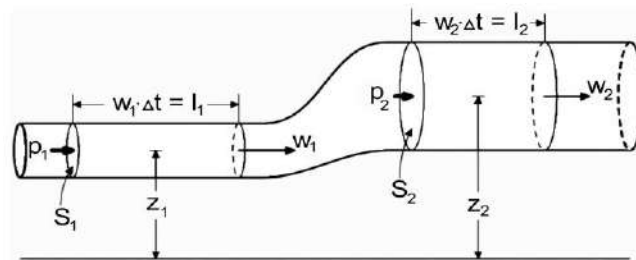


Рисунок 2.5 – Ілюстрація рівняння Бернуллі

($S_1, S_2, z_1, z_2, p_1, p_2, w_1, w_2, w_1 \cdot \Delta t = l_1, w_2 \cdot \Delta t = l_2$)

Закон Бернуллі має таке формулювання: *для будь-якого перерізу потоку сума статичного, динамічного напорів і нівелірної висоти є величиною сталою, що дорівнює повному гідродинамічному напору.*

Закон Бернуллі є частковим випадком вираження закону збереження енергії. Кожен із доданків, що становлять (2.52), може бути виражений в одиницях питомої енергії, тобто енергії, що припадає на одиницю ваги рідини.

Таким чином, кожний доданок визначає питому енергію потоку:

z – питома потенціальна енергія положення (висоти) потоку;

$\frac{p}{\rho g}$ – питома потенціальна енергія сили тиску;

$\frac{w^2}{2g}$ – питома кінетична енергія потоку.

Закон Бернуллі можна сформулювати так: *під час усталеного руху ідеальної рідини сума потенціальної й кінетичної енергії рідини для кожного з поперечних перерізів потоку залишається сталою.*

Диференціальні рівняння руху в'язкої рідини (система рівнянь Нав'є – Стокса). Реальні рідини відрізняються від ідеальних тим, що вони мають в'язкість. Це значно впливає на їх властивості й відтак на динаміку течії. Під час течії реальної рідини між шарами, що рухаються в одному напрямку, але з різними швидкостями, виникають додаткові сили – сили в'язкісного тертя.

Рівновагу сил, прикладених до елементарного об'єму рідини, що рухається, можна описати таким виразом:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_T + \vec{F}_p + \vec{F}_{тер}. \quad (2.54)$$

Неважко помітити, що якщо в рівнянні (2.54) припустити, що $\vec{F}_{тер} = 0$, то з нього одержимо рівняння (2.50) для ідеальної рідини.

Перш ніж розписати векторне рівняння (2.54) для виділеного елемента середовища, що рухається, розглянемо останній член у рівнянні (2.54). Вектор $\vec{F}_{тер}$ характеризує головний вектор сил в'язкісного тертя, що діють на поверхню

елемента об'єму:

$$\vec{F}_{\text{мер}} = -\mu \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{w_{(n+\Delta n)}}{\Delta n} S = -\mu \frac{d\vec{w}}{d\vec{n}} S.$$

У виразі знак «мінус» відбиває той факт, що напрямок вектора сили в'язкісного тертя протилежний напрямку вектора швидкості руху рідини.

Позначимо

$$-\mu \frac{d\vec{w}}{d\vec{n}} = \vec{\tau}. \quad (2.55)$$

Величина $\vec{\tau}$ називається вектором напруження тертя.

Рівняння (2.55) виражає закон внутрішнього тертя Ньютона, згідно з яким напруження внутрішнього тертя, що виникає між шарами рідини під час її течії, прямо пропорційне градієнту швидкості.

Тому для сили, прикладеної до елемента поверхні dS :

$$\vec{F}_{\text{mee}} = \tau dS = -\mu \frac{d\vec{w}}{d\vec{n}} dS.$$

Фізично останній запис означає, що вектор швидкості \vec{w} у загальному випадку має невизначений напрямок щодо одиничного орта \vec{n} , спрямованого перпендикулярно до площини dS . Але для виразу рівноваги сил, що діють на елемент, важлива дія проекції сили в'язкісного тертя на нормаль до поверхні.

Сила тертя, прикладена по всій поверхні, що обмежує виділений елемент, визначається інтегруванням

$$\vec{F}_{\text{mee}} = -\int_S \mu \frac{d\vec{w}}{d\vec{n}} dS. \quad (2.56)$$

Підставляючи вирази (2.15), (2.16), (2.40), (2.56) у рівняння (2.54), одержимо

$$\int_V \rho \vec{g} dV + \int_S p \vec{n} dS + \int_V \rho \frac{d\vec{w}}{d\tau} dV - \int_S \mu \frac{d\vec{w}}{d\vec{n}} dS = 0. \quad (2.57)$$

Розділимо (2.57) на V , знайдемо межу за $V \rightarrow 0$ і, використовуючи правило граничного переходу, а також враховуючи (2.13), запишемо

$$\rho \vec{g} + \nabla p + \rho \frac{d\vec{w}}{d\tau} - \mu \nabla^2 \vec{w} = 0. \quad (2.58)$$

Останній вираз є математичним записом рівняння Нав'є – Стокса.

Ураховуючи зв'язок напруження із градієнтом швидкості, подамо рівняння (2.58) у більш відомій формі в проекціях на осі декартової системи координат:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dw_x}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 w_x \\ \rho \frac{dw_y}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 w_y \\ \rho \frac{dw_z}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_z \end{aligned} \right\}, \quad (2.59)$$

де ∇^2 – оператор Лапласа, що дорівнює сумі других похідних по осях координат: $\nabla^2 w_x = \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}$.

Система рівнянь Нав'є – Стокса є основою для розрахунків процесів течії реальних рідин. За його допомогою можна визначати розподіл швидкостей у перерізах потоку, визначати витрати енергії на переміщення рідин.

2.4. Основні феноменологічні рівняння теплоперенесення у суцільному середовищі

Усі процеси перенесення теплоти складаються із трьох елементарних виглядів перенесення: теплопровідності, конвективного перенесення та теплового випромінювання.

Під *теплопровідністю* розуміють перенесення внутрішньої енергії з однієї точки речовини в іншу за рахунок енергообміну між структурними частинками речовини (зіткнення молекул під час їх теплового руху в газах і рідинах, обмін енергією коливального руху іонів у кристалічних ґратках твердих тіл і т. ін.).

Під *конвективним перенесенням* теплоти розуміють перенесення енергії плинним середовищем (краплинною рідиною, газом, парою або їх сумішами).

Конвекція може бути вільною або вимушеною. Вільна конвекція

відбувається за рахунок різниці густин рідини, що виникає при зміні температури рідини. Вимушена конвекція відбувається під час примусового руху рідини.

Теплове випромінювання – це процес поширення електромагнітних коливань із різною довжиною хвиль, зумовлений тепловим випромінюванням атомів і молекул випромінювального тіла. Променевий теплообмін складається з випромінювання й променепоглинання.

У реальних апаратах тепло передається не одним зі способів, а комбінованим шляхом – теплопровідністю, конвекцією та тепловим випромінюванням.

До основних феноменологічних рівнянь теплоперенесення належить диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є, що описує перенесення тепла в нерухомому середовищі, а також диференціальне рівняння конвективного теплоперенесення, що описує перенесення тепла в плинному середовищі, для якого характерне існування поля швидкостей потоку. На підставі цих рівнянь можна розв'язувати багато важливих задач, таких, наприклад, як визначення полів температур у твердих тілах, елементах конструкцій, у рідинах, що рухаються. На їх підставі можна розрахувати потоки теплоти від різних тіл або середовищ до обмежувальних їх поверхонь, знайти значення коефіцієнтів тепловіддачі від потоку до стінки. Це, у свою чергу, дає можливість визначити оптимальні температурні умови проведення технологічних процесів і безпечні умови роботи апаратури.

Диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є. Основним законом передачі теплоти теплопровідністю є закон Фур'є: *кількість теплоти, передана за допомогою теплопровідності через елемент поверхні dS , перпендикулярний до напрямку теплового потоку, за час $d\tau$, прямо пропорційна температурному градієнту $\frac{\partial T}{\partial n}$, площі поверхні й часу:*

$$dQ = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS d\tau . \quad (2.60)$$

Коефіцієнт λ називається *коефіцієнтом теплопровідності*. Коефіцієнт теплопровідності показує, яка кількість теплоти проходить унаслідок теплопровідності за одиницю часу через одиницю поверхні теплообміну при зниженні температури на 1 К на одиницю нормалі до ізотермічної поверхні.

Одиниці виміру $[\lambda] = \left[\frac{Вт}{м \cdot К} \right]$, λ залежить від природи речовини, його структури, температури, а для рідин і газів ще й від тиску. Наявність у матеріалі порожнеч і пор зменшує теплопровідність. Зволоження матеріалів, що супроводжується заповненням пор водою, приводить до значного підвищення тепло-провідності.

Найбільший коефіцієнт теплопровідності мають метали, а найменший – нерухомі пари та гази.

Для виведення диференціального рівняння теплопровідності розглянемо процес поширення теплоти в нерухомому середовищі шляхом теплопровідності. Для цього виділимо в середовищі об'єм V , обмежений поверхнею S , і розглянемо тепловий баланс цього об'єму.

Через елементарну поверхню dS за відрізок часу $d\tau$ в об'єм за допомогою теплопровідності надходить така кількість теплоти:

$$dQ_m = -\vec{q}_T \cdot \vec{n} dS d\tau = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS d\tau, \quad (2.61)$$

де \vec{q}_T – густина теплового потоку, переданого за рахунок теплопровідності, Вт/м.

Знак «мінус» означає, що тепло переміщається у бік зменшення температури. Скалярний добуток векторів \vec{q}_T і \vec{n} відображає частку теплового потоку, що надходить в об'єм перпендикулярно до поверхні dS .

Кількість теплоти, що надходить в об'єм через поверхню S , визначається інтегруванням:

$$Q_m = - \int_s \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS d\tau. \quad (2.62)$$

Припустимо, що в об'ємі діє постійне джерело теплоти потужністю q_{it}

(Вт/м³), зумовлене, наприклад, хімічною реакцією, яка проходить у цьому об'ємі й супроводжується тепловиділенням.

Кількість теплоти, що виділяється в об'ємі за час $d\tau$ за рахунок дії джерела, визначається як

$$Q_{it} = \int_V q_{it} dV d\tau. \quad (2.63)$$

За законом збереження енергії збільшення кількості теплоти в об'ємі дорівнює зміні ентальпії об'єму, тобто

$$dQ = dI = c\rho dV \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau.$$

Загальна кількість теплоти в об'ємі через зміну ентальпії

$$Q = \int_V c\rho dV \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.64)$$

Тепловий баланс для об'єму V дорівнює

$$Q = Q_m + Q_{it}. \quad (2.65)$$

Відповідно до правих частин виразів (2.62) і (2.64) запишемо

$$\int_V c\rho dV \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau = - \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS d\tau + \int_V q_{it} dV d\tau. \quad (2.66)$$

Застосуємо до першого доданка правої частини (2.66) теорему Остроградського – Гаусса відповідно до формули (2.13). У результаті одержимо

$$\int_V c\rho dV \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau = - \int_V \operatorname{div} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right) dV d\tau + \int_V q_{it} dV d\tau. \quad (2.67)$$

Ураховуючи довільність обраного об'єму V , винесемо значення з-під знаків інтегрування й розділимо обидві частини на $dV d\tau$:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = - \operatorname{div} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right) + q_{it}. \quad (2.68)$$

Позначимо $\frac{\lambda}{c\rho} = a$ й одержимо

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = - \operatorname{div} \left(a \frac{\partial T}{\partial n} \right) + \frac{q_{it}}{c\rho}. \quad (2.69)$$

При $a = \text{const}$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_{it}}{c\rho}, \quad (2.70)$$

де $\nabla^2 T$ – оператор Лапласа:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (2.71)$$

Коефіцієнт a у рівняннях (2.69), (2.70) називають *коефіцієнтом температуропровідності*, що характеризує теплоінерційні властивості тіла. За однакових умов швидше нагріється або охолоне те тіло, для якого a більше.

Одиниці вимірювання коефіцієнта температуропровідності – $\text{м}^2/\text{с}$.

Якщо температурне поле стаціонарне, але наявні внутрішні джерела енергії, то рівняння (2.70) набуває вигляду рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 T + \frac{q_{it}}{\lambda} = 0.$$

За відсутності теплового джерела й нестационарного теплообміну рівняння (2.70) має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T. \quad (2.72)$$

Якщо в будь-якій точці простору температура не змінюється в часі, то спостерігається стаціонарне теплоперенесення. Для цього випадку

$$a \nabla^2 T = 0. \quad (2.73)$$

Рівняння (2.72) і (2.73) називають диференціальними рівняннями теплопровідності – рівняннями Фур'є. Вони широко використовуються для визначення полів температур у середовищах, що нагріваються та охолоджуються.

Диференціальне рівняння конвективного теплообміну Фур'є – Кірхгофа. Розглянемо середовище, у якому перенесення теплоти здійснюється одночасно теплопровідністю і конвекцією. Виділимо знову елементарний об'єм dV , у який через поверхню dS надходить теплота за рахунок обох механізмів перенесення. Кількість теплоти, що надійшла в об'єм за час $d\tau$, знайдемо за формулою

$$dQ = -(\bar{q}_T + \bar{q}_{T,\kappa})dSd\tau, \quad (2.74)$$

де \bar{q}_T і $\bar{q}_{T,\kappa}$ – густина потоків теплоти, переданих теплопровідністю й конвекцією відповідно.

Припустимо також, що у виділеному об'ємі діє джерело теплоти потужністю q_{it} .

Тоді загальна кількість теплоти, що проникає в об'єм через поверхню S і надходить від джерела в об'ємі, визначається таким чином:

$$Q = -\int_S (\bar{q}_T + \bar{q}_{T,\kappa})dSd\tau + \int_V q_{it}dVd\tau. \quad (2.75)$$

З іншого боку, теплота, що надходить в об'єм, приведе до зміни теплоємності за рівнянням (2.64).

Запишемо тепловий баланс для об'єму V :

$$\int_V c\rho dV \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau = -\int_S (\bar{q}_T + \bar{q}_{T,\kappa})dSd\tau + \int_V q_{it}dVd\tau. \quad (2.76)$$

Застосуємо до першого доданка правої частини (2.76) теорему Остроградського – Гаусса відповідно до формули (2.13). У результаті одержимо

$$\int_V c\rho dV \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau = -\int_V \text{div}(\bar{q}_T + \bar{q}_{T,\kappa})dVd\tau + \int_V q_{it}dVd\tau. \quad (2.77)$$

Ураховуючи довільність обраного об'єму V , відкинемо знаки інтегралів і розділимо обидві частини на $dVd\tau$:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\text{div}(\bar{q}_T + \bar{q}_{T,\kappa}) + q_{it}. \quad (2.78)$$

Підставляючи під знак дивергенції вирази для векторів густин потоків теплоти за рахунок теплопровідності (2.6) і конвекції (2.10) і вважаючи, що густина, теплоємність і теплопровідність середовища в процесі теплообміну змінюються незначно, запишемо

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \text{div}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right) - c\rho \text{div}(WT) + q_{it}. \quad (2.79)$$

Після ділення рівняння (2.79) на $c\rho$ одержуємо

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\nabla^2 T - \text{div}(WT) + q_V, \quad (2.80)$$

$$\text{де } \nabla^2 T = \text{div}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right); q_v = \frac{q_{it}}{c\rho}.$$

Другий член лівої частини виразу (2.80) за правилом диференціювання добутку двох функцій запишемо як

$$\text{div}(WT) = \left(\frac{\partial T}{\partial x} w_x + \frac{\partial T}{\partial y} w_y + \frac{\partial T}{\partial z} w_z \right) + T \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right). \quad (2.81)$$

Із рівняння нерозривності (2.34) випливає, що останній доданок у (2.81) дорівнює нулю. З урахуванням вищевикладеного, рівняння (2.80) спрощується до такого вигляду:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\nabla^2 T - \left(\frac{\partial T}{\partial x} w_x + \frac{\partial T}{\partial y} w_y + \frac{\partial T}{\partial z} w_z \right) + q_v. \quad (2.82)$$

За відсутності внутрішнього джерела теплоти вираз (2.82) спрощується, і в розгорненому вигляді в проекціях на осі декартової системи координат диференціальне рівняння конвективного теплообміну запишеться таким чином:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial x} w_x + \frac{\partial T}{\partial y} w_y + \frac{\partial T}{\partial z} w_z = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (2.83)$$

або

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + w \text{grad } T = a\nabla^2 T. \quad (2.84)$$

Ці рівняння, доповнені відповідними початковими й граничними умовами, дозволяють розраховувати поля температур у плинних середовищах. При $w_x = w_y = w_z = 0$ рівняння конвективного теплообміну перетворюється в рівняння теплопровідності.

При сталому процесі теплообміну в рівняннях (2.83) і (2.84) член $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$.

2.5. Основні феноменологічні рівняння масоперенесення у суцільному середовищі

До цієї групи рівнянь належать диференціальне рівняння молекулярної дифузії (другий закон Фіка), що описує перенесення речовини в нерухомому

середовищі, та диференціальне рівняння конвективного масообміну, що описує перенесення речовини (маси) цільового компонента в плинному середовищі, для якого характерне існування поля швидкостей потоку. На підставі цих рівнянь можна розв'язувати задачі визначення полів концентрацій речовин, що переносяться, у нерухомому або рухомому об'ємі суцільного середовища, визначати потік речовини через межу середовища, знаходити значення коефіцієнтів масовіддачі від ядра потоку до межі поділу фаз або у протилежному напрямку.

2.5.1. Диференціальне рівняння молекулярної дифузії

Молекулярна дифузія – це перенесення речовини, спричинене невпорядкованим тепловим рухом молекул речовини.

Молекулярна дифузія описується першим законом Фіка, згідно з яким маса речовини dM , перенесеної за рахунок дифузії за час $d\tau$ через елементарну поверхню dS , нормальну до напрямку дифузії, пропорційна градієнту концентрації цієї речовини:

$$dM = -DdSd\tau \frac{\partial C}{\partial n}. \quad (2.85)$$

Коефіцієнт D називається коефіцієнтом молекулярної дифузії.

$$\text{Одиниці вимірювання } [D] = \left[\frac{m^2}{c} \right].$$

Коефіцієнт молекулярної дифузії показує, що маса речовини дифундує за одиницю часу через одиницю поверхні при градієнті концентрації, що дорівнює одиниці.

D – це фізична константа, що характеризує здатність даної речовини проникати внаслідок дифузії в нерухоме середовище. Коефіцієнт молекулярної дифузії не залежить від гідродинамічних умов процесу.

Значення коефіцієнта молекулярної дифузії визначають дослідним шляхом або розраховують за емпіричними залежностями.

Для виведення диференціального рівняння молекулярної дифузії розглянемо процес дифузії якої-небудь речовини в нерухомому середовищі.

Прикладом такого процесу може бути поширення газоподібного аміаку в приміщенні з відкритої пляшечки з нашатирним спиртом. Процес поширення компонента, що переноситься в іншому (інертному) компоненті (у розглянутому прикладі в повітрі) проходить аналогічно процесу поширення теплоти теплопровідністю. Тому виведення рівняння молекулярної дифузії виконується аналогічно виведенню рівняння теплопровідності.

Виділяючи, як і раніше, для розгляду фізично нескінченно малий об'єм V , позначимо концентрацію речовини в середовищі C . Припустимо, що в об'ємі діє джерело масою речовини q_{mV} , зумовлене хімічними перетвореннями, що проходять в об'ємі.

Аналогічно рівнянню (2.62) запишемо кількість речовини, що переноситься й надходить в елементарний об'єм через усю поверхню S , що обмежує цей об'єм, і підставимо в це рівняння вираз (2.7) для вектора густини потоку маси:

$$M_D = \int_S \vec{q}_M \cdot \vec{n} dS d\tau = - \int_S D \nabla C dS d\tau, \quad (2.86)$$

де \vec{q}_M – вектор густини потоку компонента, що переноситься й надходить в об'єм за допомогою молекулярної дифузії.

Аналогічно рівнянню (2.63) кількість речовини, що надходить в об'єм унаслідок дії джерела, визначимо таким чином:

$$M_i = \int_V q_{mV} dV d\tau. \quad (2.87)$$

З іншого боку, надходження маси в розглянутий об'єм приведе до зміни концентрації речовини, що переноситься в об'ємі:

$$M = \int_V \frac{\partial C}{\partial \tau} dV d\tau. \quad (2.88)$$

Матеріальний баланс об'єму V за цільовим компонентом має вигляд

$$M = M_D + M_i. \quad (2.89)$$

З урахуванням цього, прирівнюючи праву частину виразу (2.88) до суми правих частин виразів (2.86) і (2.87), одержуємо

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial \tau} dV d\tau = - \int_S D \nabla C dS d\tau + \int_V q_{mV} dV d\tau. \quad (2.90)$$

Застосувавши до першого доданка правої частини (2.90) теорему Остроградського – Гаусса, відкидаючи знаки інтегралів і скорочуючи на $dV d\tau$, одержимо

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = -\text{div}(D \nabla C) + q_{mV}. \quad (2.91)$$

У разі сталості коефіцієнта дифузії D він може бути винесений за знак оператора:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \nabla^2 C + q_{mV}. \quad (2.92)$$

У розгорненій формі в декартовій системі координат рівняння молекулярної дифузії записується у вигляді

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + q_{mV}. \quad (2.93)$$

Або за відсутності джерела маси речовини

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \nabla^2 C. \quad (2.94)$$

Рівняння (2.94) має назву другого закону Фіка.

Розв'язок цього рівняння з урахуванням початкових і граничних умов дозволяє розраховувати динаміку полів концентрацій речовини, що переноситься в нерухомому середовищі.

Диференціальне рівняння конвективного масообміну. У плинному середовищі перенесення речовини здійснюється двома механізмами – за допомогою конвекції та молекулярної дифузії. Для виведення диференціального рівняння конвективного масообміну використовуємо той самий метод, яким були одержані раніше всі рівняння перенесення. Виділимо в середовищі, що рухається, фізично нескінченно малий об'єм V , у який через елемент поверхні dS надходить потік маси речовини, що переноситься за

рахунок обох механізмів перенесення.

Кількість речовини, що надійшла в об'єм за час $d\tau$, визначається за формулою

$$dM = -(\vec{q}_M + \vec{q}_{\kappa.M})dSd\tau. \quad (2.95)$$

Припустимо також, що у виділеному об'ємі діє джерело маси, зумовлене якими-небудь хімічними перетвореннями: потужність джерела q_{mV} .

Загальна кількість речовини, що надходить в об'єм через поверхню S і створюється за рахунок дії джерела, визначається виразом

$$M = -\int_S (\vec{q}_M + \vec{q}_{\kappa.M})dSd\tau + \int_V q_{mV}dVd\tau. \quad (2.96)$$

З іншого боку, приріст маси речовини, що надходить в об'єм, приведе до зміни концентрації:

$$M = \int_V \frac{\partial C}{\partial \tau} dVd\tau. \quad (2.97)$$

Прирівнюючи два останні вирази, запишемо

$$\int_V \frac{\partial C}{\partial \tau} dVd\tau = -\int_S (\vec{q}_M + \vec{q}_{\kappa.M})dSd\tau + \int_V q_{mV}dVd\tau. \quad (2.98)$$

Застосуємо до першого доданка правої частини (2.98) теорему Остроградського – Гаусса відповідно до формули (2.13), відкинемо знаки інтегрування, й після скорочень на $dVd\tau$ одержимо

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = -\text{div}(\vec{q}_M + \vec{q}_{\kappa.M}) + q_{mV}. \quad (2.99)$$

Підставляючи під знак дивергенції вирази для векторів густин потоків маси за рахунок молекулярної дифузії (2.7) і конвекції (2.11), запишемо

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D\text{div}\left(\frac{\partial C}{\partial n}\right) - \text{div}(\vec{W}C) + q_{mV}. \quad (2.100)$$

Вираз (2.100) є диференціальним рівнянням конвективного масоперенесення в плинному середовищі із внутрішнім джерелом маси.

Другий доданок правої частини (2.100) можна подати у вигляді

$$\operatorname{div}(\vec{W}C) = \left(\frac{\partial C}{\partial x} w_x + \frac{\partial C}{\partial y} w_y + \frac{\partial C}{\partial z} w_z \right) + C \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right). \quad (2.101)$$

Із рівняння нерозривності (2.33) випливає, що останній доданок (2.101) дорівнює нулю. З урахуванням (2.101) вираз (2.100) набере вигляду

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \nabla^2 C - \left(\frac{\partial C}{\partial x} w_x + \frac{\partial C}{\partial y} w_y + \frac{\partial C}{\partial z} w_z \right) + q_{mv}. \quad (2.102)$$

За відсутності внутрішнього джерела маси рівняння (2.102) спрощується, й у розгорненому вигляді в проекціях на осі декартової системи координат диференціальне рівняння конвективного масоперенесення запишеться таким чином:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\partial C}{\partial x} w_x + \frac{\partial C}{\partial y} w_y + \frac{\partial C}{\partial z} w_z = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \quad (2.103)$$

або

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + w \operatorname{grad} C = D \nabla^2 C. \quad (2.104)$$

Неважко помітити, що при $w_x = w_y = w_z = 0$ диференціальне рівняння конвективного масоперенесення перетвориться на диференціальне рівняння молекулярної дифузії.

2.6. Початкові й граничні умови до задач перенесення

Диференціальні рівняння описують цілі класи явищ і тому мають велику кількість розв'язків. Єдиний розв'язок диференціального рівняння можна одержати, задавши значення функції на межах області простору, що розглядається, у початковий момент часу. При цьому якщо процес є стаціонарним, то для розв'язання задачі досить задати лише граничні умови. Розглянемо окремо ці умови для задач гідродинаміки та перенесення теплоти й маси.

Початкові й граничні умови до задач гідродинаміки. Розв'язанням задач гідродинаміки (рівняння руху ідеальної рідини Ейлера, рівняння руху

реальної рідини Нав'є – Стокса) є визначення профілю швидкостей потоку, його зміна в напрямку руху середовища, визначення середньої витрати рідини в розглянутому перерізі. У випадку аналізу руху реальної рідини розв'язання рівняння Нав'є – Стокса дозволяє розраховувати додаткові сили тертя й напруження, що виникають у внутрішніх шарах рідини та на поверхні, що обмежує потік, наприклад, на стінках труби, по якій рухається рідина.

У задачах гідродинаміки початковою умовою служить функція, що визначає поле швидкостей потоку в початковий момент часу:

$$w = f(x, y, z, \tau). \quad (2.105)$$

Цей запис означає, що в початковий момент часу поле швидкостей потоку є функцією координат, вигляд якої повинен бути відомим.

Граничні умови задач гідродинаміки характеризують значення швидкостей потоку на його геометричних межах – у місці контакту рідини зі стінкою або на її поверхні. Як правило, такою умовою є так звана «умова прилипання» – рівність нулю швидкості потоку на стінці в будь-який момент часу процесу:

$$w_{cm} = 0. \quad (2.106)$$

Початкові й граничні умови до задач перенесення тепла й маси.

Диференціальні рівняння перенесення теплоти й речовини встановлюють зв'язок між вимірами в часі й просторі. Для того щоб із множини розв'язків диференціального рівняння вибрати одне, що характеризує конкретний процес, необхідно доповнити задачу крайовими умовами. Крайові умови в задачах тепломасоперенесення, як і в задачах гідродинаміки, – це сукупність початкових і граничних умов.

Початкові умови задаються лише під час розв'язання нестационарних задач перенесення та містять у собі розподіл температури (концентрації) у середовищі в початковий момент часу

$$T|_{\tau=0} = T(x, y, z), C|_{\tau=0} = C_0(x, y, z). \quad (2.107)$$

До завдань теплопровідності й дифузії є чотири основні види (роди) граничних умов.

Граничні умови першого роду. Ці умови характеризують закон зміни температури (T) або концентрації компонентів (C) на зовнішній межі тіла (середовища):

$$T \Big|_{x=x_{zp}} = T ; \quad (2.108)$$

$$C \Big|_{x=x_{zp}} = C . \quad (2.109)$$

Граничні умови першого роду, за яких температура (концентрація) на поверхні не залежить від часу, називають умовами Дірихле.

Граничні умови другого роду. Відповідно до цих умов на поверхні тіла задається розподіл густини теплового (масового) потоку як функція координат і часу

$$q_T = f(x, y, z, \tau), \quad q_M = f(x, y, z, \tau). \quad (2.110)$$

З урахуванням законів Фур'є і Фіка рівняння (2.110) можуть бути записані у вигляді

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_{zp}} = -\frac{q_{Tzp}}{\lambda} , \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=x_{zp}} = -\frac{q_{Mzp}}{D} . \quad (2.112)$$

У тому разі, якщо густина потоку субстанції не змінюється в часі, гранична умова другого роду називається умовою Неймана. Частковим випадком умови Неймана є умова теплової ізоляції (для процесів теплопровідності), або умова непроникності (для дифузійних процесів).

Граничні умови третього роду. Їх називають умовами Ньютона, оскільки вони характеризують умови тепло- і масообміну на межі тіла:

$$\alpha(T_{zp} - T_a) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_{zp}} , \quad (2.113)$$

$$\beta(C_{zp} - C_{я}) = -D \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=x_{zp}}, \quad (2.114)$$

де α і β – коефіцієнти тепло- і масовіддачі в середовищі, що оточує розглянуте тіло; $T_{я}$ і $C_{я}$ – відповідно температура і концентрація речовини в ядрі потоку середовища.

Праві частини рівнянь (2.113) і (2.114) – це потоки теплоти й маси речовини, що надходять до поверхні тіла за допомогою конвективного перенесення. Ліві частини рівнянь показують, що субстанція, яка надходить, іде від поверхні всередину тіла за допомогою теплопровідності або дифузії.

Граничні умови четвертого роду. Їх називають також умовами дотикання, оскільки вони задаються в місцях контакту тіл. Допускаємо, що в місці контакту тіл однакові як температури, так і теплові потоки:

$$T_1 \Big|_{x_{zp}} = T_2 \Big|_{x_{zp}}, \quad -\lambda_1 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_{zp}} = -\lambda_2 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_{zp}}, \quad (2.115)$$

$$C_1 \Big|_{x_{zp}} = C_2 \Big|_{x_{zp}}, \quad -D_1 \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=x_{zp}} = -D_2 \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=x_{zp}}. \quad (2.116)$$

Диференціальні рівняння перенесення субстанції, доповнені крайовими рівняннями, є крайовими задачами перенесення, розв'язок яких може бути одержаний методами математичної фізики.

2.7. Подібність типових процесів природоохоронних технологій та основи моделювання

Дослідження процесів та апаратів в умовах і масштабах промислового виробництва – це складний і дорогий процес. У зв'язку із цим застосовується моделювання – вивчення закономірностей процесу на моделях у лабораторних умовах. Однак розроблення технологічного процесу, виконане в лабораторії, може дати лише принципову схему майбутнього виробництва. Тому, як правило, результати, одержані в лабораторних умовах, перевіряються на збільшених (пілотних) установках для визначення питомих витрат, коефіцієнтів

і конструкції майбутнього промислового апарата або машини. Однак такий процес дуже тривалий і складний. Це ставить завдання відмови від багатоступінчастої перевірки результатів лабораторного експерименту і можливості відразу одержати дані, які б можна було використовувати для проектування промислового апарата. Проте для цього необхідні, по-перше, знання основних кінетичних закономірностей процесу і його математичний опис, по-друге – наявність надійної теорії масштабування.

Лише поєднання експериментального й теоретичного досліджень дозволяє досягти максимального ефекту під час створення та експлуатації сучасного природоохоронного устаткування. Оптимізації досліджень служить теорія моделювання.

Теорія моделювання розвивається за двома напрямками:

- вивчення сучасних технологічних процесів за допомогою моделей та аналізу впливу фізичних параметрів і лінійних розмірів апаратів на швидкість перебігу процесу (фізичне моделювання);
- створення і дослідження математичної моделі процесу за допомогою обчислювальної техніки (математичне моделювання).

Фізичне моделювання базується на законах теорії подібності. Теорія подібності ґрунтується на тому, що експериментальні дані, одержані на лабораторній моделі, обробляються у вигляді залежності між критеріями подібності, що визначають процес. Потім за цими залежностями визначаються параметри роботи промислового апарата, а в деяких випадках і його розміри.

Під час математичного моделювання дослідження складних реальних процесів відбувається на підставі широкої фізичної аналогії явищ різної фізичної природи. Щоб виконати розрахунки будь-якого процесу природоохоронної технології, необхідно детально вивчити стадії цього процесу і побудувати його математичну модель. Модель подається у вигляді математичного запису, що встановлює зв'язок між окремими фізичними змінними – диференціальними рівняннями або їх системою. Для створення такої моделі використовуються як експериментальні дані, так і теоретичні залежності.

Моделі структури потоків у апаратах. Кожний процес природоохоронних технологій може бути класифікований відповідно до умов його проведення та апаратного оформлення. При цьому важливим фактором є дані про структуру потоків в апаратах. Найчастіше натурні виміри швидкостей потоку в апаратах складної конструкції виконати складно й дорого, тому що швидкість є функцією координат і часу. Тому інформацію про поле швидкостей потоку зручно вивчати шляхом аналізу розподілу окремих частинок рідини за часом їх перебування в апараті. Для цього в потік вводять індикатор і знаходять тривалість (час) перебування в апараті окремих його частинок. Як індикатор використовують різні фарби, розчини солей, що змінюють електропровідність рідини, радіоактивні речовини та інші речовини, концентрацію яких легко виміряти. Відгук на збурення, внесені в апарат з індикатором, поданий у вигляді кривих залежності концентрації його у рідині, що виходить із апарата, від часу, називають *кривими відгуку*.

Для опису процесу або його частини може бути обрана одна з кількох типових моделей. Найчастіше застосовують моделі: 1) повного (ідеального) витіснення; 2) повного (ідеального) перемішування.

Модель ідеального витіснення характеризується поршнеvim рухом потоків і відсутністю поздовжнього перемішування. Така структура потоку всередині апарата характеризується тим, що частинки рідини рухаються паралельно одна до іншої з однаковими швидкостями, не випереджаючи основну масу потоку і не відстаючи від неї. Це переважно процеси, що відбуваються в проточних апаратах.

Основне рівняння моделі повного витіснення

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = -w \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (2.117)$$

де C – концентрація трасера; w – швидкість потоку; τ – час; x – координата.

Час перебування τ усіх частинок потоку в апараті ідеального

витіснення однаковий і дорівнює середньому часу перебування $\tau_{сер}$, що визначається діленням довжини шляху частинок l на лінійну швидкість рідини w :

$$\tau_{сер} = \frac{l}{w} = \frac{l \cdot S}{w \cdot S} = \frac{V_a}{V}, \quad (2.118)$$

де S – площа поперечного перерізу; V_a – об'єм апарата; V – об'ємна витрата рідини.

Відгуки на імпульсне й ступінчасте збурення для ідеального витіснення зображені відповідно на рис. 2.6 а і б. Перший із них є диференціальною, а другий – інтегральною функціями розподілу часу перебування частинок. Оскільки час перебування для всіх частинок однаковий, то при $\tau < \tau_{сер}$ виходу не досягає жодна частинка: $C = 0$ (рисунок 2.6 а). При $\tau > \tau_{сер}$ на виході також не буде мічених частинок, усі вони вже пройшли $C = 0$. Концентрація відмітна від нуля лише при $\tau = \tau_{сер}$.

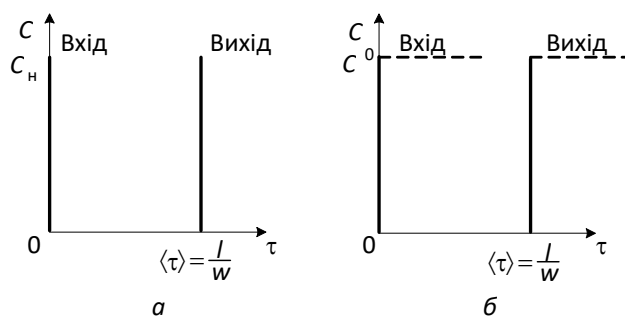


Рисунок 2.6 – Модель ідеального витіснення, відгук на: а) імпульсне збурення; б) ступінчасте збурення ($C, C_n, 0, \tau, \tau_{сер} = l/w$, вхід, вихід)

Модель ідеального перемішування відрізняється рівномірним розподілом частинок потоку по всьому об'єму і відповідає звичайному реактору з мішалкою.

Основне рівняння моделі ідеального перемішування

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{V}{V_a} (C_n - C), \quad (2.119)$$

де C_n – концентрація трасера на вході; C – поточна концентрація.

Рівняння показує, що якщо в апарат із мішалкою різко ввести барвник, то вимиватися він буде поступово, а не відразу, як в апараті ідеального витіснення.

Відгук моделі ідеального перемішування на вхідне збурення для імпульсного введення індикатора відповідає спадній експонентній залежності з початковою концентрацією C_n (крива 1 на рис. 2.7):

$$C(\tau) = C_n \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{сер}}\right). \quad (2.120)$$

Під час ступінчастого введення індикатора зі стрибкоподібною зміною концентрації в момент часу $\tau = 0$ від $C = 0$ до $C = C_0$ функція відгуку набере вигляду (крива 2 на рис. 2.7):

$$C(\tau) = C_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{сер}}\right) \right]. \quad (2.121)$$

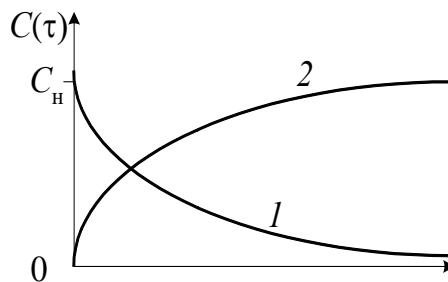


Рисунок 2.7 – Функції відгуку для моделі ідеального перемішування:

1 – метод імпульсного введення індикатора; 2 – метод ступінчастого введення індикатора ($C(\tau)$, C_n , 0, 1, 2)

Модель ідеального перемішування відрізняється значною простотою. Водночас у ряді випадків її застосування цілком обґрунтоване. Це стосується передусім багатьох апаратів із механічними перемішувальними пристроями. Основна умова застосування моделі – це інтенсивність перемішування.

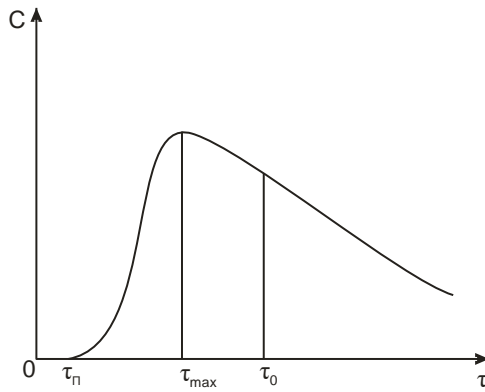


Рисунок 2.8 – Крива відгуку для проміжної моделі ($\tau, \tau_{п}, \tau_{max}, \tau_0, C, 0$)

Картина руху потоків у більшості безперервно діючих апаратів не відповідає жодній з ідеальних моделей. За структурою потоків ці апарати можна вважати апаратами проміжного типу. Крива відгуку для проміжної моделі наведена на рис. 2.8.

Для опису структури потоків у апаратах проміжного типу використовують дифузійну й коміркову моделі.

В основу **дифузійної моделі** покладене допущення, що структура потоку описується рівнянням, аналогічним рівнянню молекулярної дифузії:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D_l \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - w \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (2.122)$$

Параметром моделі є коефіцієнт поздовжнього перемішування D_l , що також має назву коефіцієнта турбулентної дифузії, або коефіцієнта зворотного перемішування.

На практиці, як правило, використовують безрозмірну форму запису основного рівняння. Як безрозмірні змінні використовують змінні

$z = \frac{x}{l}, \theta = \frac{\tau}{\tau_{сер}}$. З урахуванням прийнятих позначень рівняння (2.122) набере

вигляду

$$\frac{wl}{D_l} \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{wl}{D_l} \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}.$$

Множник $\frac{wl}{D_l} = Pe'_i$ називається модифікованим критерієм Пекле для

поздовжнього перемішування. За його числовим значенням можна робити висновки про структуру потоку, визначаючи її відхилення від моделі ідеального витіснення, за якої $Pe'_m = \infty$, або від моделі ідеального перемішування, за якої $Pe'_m = 0$. Значення Pe'_m залежить від конструкції та розмірів апарата, а також від гідродинаміки потоків у апараті.

Дифузійну модель використовують здебільшого для опису апаратів із безперервним контактом фаз.

Коміркова модель, уперше запропонована для каскаду реакторів із мішалками, є однією з найбільш простих. Згідно із цією моделлю апарат можна зобразити як ряд послідовно з'єднаних комірок, через які проходить потік речовини (рис. 2.9).

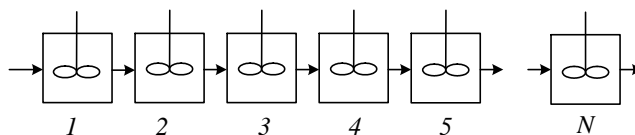


Рисунок 2.9 – Схема коміркової моделі:

1, 2, 3, 4, N – номери комірок

Вважається, що в кожній комірці здійснюється ідеальне перемішування; між комірками відсутнє зворотнє перемішування.

Параметром коміркової моделі служить число комірок повного перемішування N однакового об'єму $V_{\text{ч}}$. Зі збільшенням N структура потоку наближається до моделі повного витіснення, а зі зменшенням N – до моделі ідеального перемішування.

Структура потоку в реальних апаратах рідко відповідає розглянутим моделям, тому що поступальний рух рідини, як правило, супроводжується її частковим перемішуванням у поперечному й поздовжньому напрямках, наявністю струминних або відривних течій, застійних зон, циркуляції потоку в апараті, різких його поворотів під час удару об перешкоду. Ні коміркова модель, ні дифузійна модель у цьому разі не описує фактичного режиму течії оброблюваного середовища в апараті. У той самий час такі гідродинамічні

умови часто можна спостерігати в промислових установках, наприклад в апаратах із мішалками або в апаратах із киплячим шаром зернистих матеріалів. У цих випадках доцільно розглядати реальний апарат як сукупність взаємозалежних ділянок потоку, причому моделі руху рідини в кожній із них можуть братися різними. Зазначені моделі називають змішаними, або комбінованими.

Під час побудови комбінованої моделі для різних ділянок реактора можуть бути використані такі прості режими течії: ідеального перемішування, ідеального витіснення, витіснення з дифузією.

Під час побудови моделі, що містить перелічені компоненти, одне з важливих завдань полягає у визначенні об'єму зон апарата з різними типами течії рідини. Цю задачу необхідно розв'язувати так, щоб форма кривої, що характеризує відгук системи на збурення, передбачена на підставі моделі, по можливості близько збігалася з експериментальною кривою, одержаною для реального об'єкта. Число параметрів, що входять до передбачуваної моделі, визначається, з одного боку, точністю, з якою вона повинна відображати досліджуваний потік у межах даного класу режимів; з іншого боку – ступенем складності математичних положень, необхідних для аналізу моделі.

У міру збільшення числа параметрів модель охоплює все ширше й ширше коло явищ. Наприклад, включаючи до комбінованої моделі застійну зону, як правило, припускають, що її вміст повністю нерухомий або дуже повільно обмінюється з основним потоком, що проходить крізь апарат. Під час вивчення деякої реальної ситуації необхідно спочатку прагнути до найпростішої моделі, що узгоджується з дослідними даними. Модель повинна виходити з дійсних умов руху середовища в апараті. Лише в цьому разі параметри моделі матимуть конкретний фізичний зміст і можуть бути визначені незалежними методами.

Основні поняття й теореми подібності. Теоретичні дослідження процесів природоохоронної технології, як правило, містять у собі розв'язок і подальший аналіз диференціальних та алгебраїчних рівнянь, якими описуються зазначені процеси. Будь-яке диференціальне рівняння описує цілий клас

однотипних явищ, і для одержання єдиного розв'язку, що описує конкретний процес, воно повинне бути доповненим умовами однозначності.

Умови однозначності містять у собі геометричні розміри системи, у якій здійснюється процес, фізичні константи властивостей речовин, початкові й граничні умови.

Однак багато процесів характеризуються більшим числом змінних і вони настільки складні, що часто вдається лише математично сформулювати задачі й визначити умови однозначності. Для деяких процесів, здійснюваних, наприклад, за участі декількох фаз, що взаємодіють, не вдається навіть математично сформулювати задачу.

У цих та інших подібних випадках на допомогу дослідникам приходять теорія подібності.

Теорія подібності – це вчення про методи наукового узагальнення експерименту для одержання єдиних рівнянь, що описують широкий клас подібних процесів.

Використання теорії подібності дозволяє замість здійснення дорогих і трудомістких дослідів на промислових апаратах виконувати дослідження на моделях меншого розміру. За виразом Бекеланда проведення дослідів на моделях дозволяє здійснювати помилку в маленькому масштабі, а вигоду одержувати у великому.

Методи теорії подібності покладені в основу моделювання процесів.

Подібними називаються явища, для яких постійні відношення подібних величин, що характеризують ці явища.

У теорії подібності розрізняють геометричну подібність, фізичну подібність, часову подібність, подібність початкових і граничних умов.

Наприклад, із курсу шкільної геометрії відомо, що два трикутники подібні, якщо відношення їх подібних сторін однакові при однакових кутах між ними:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (2.123)$$

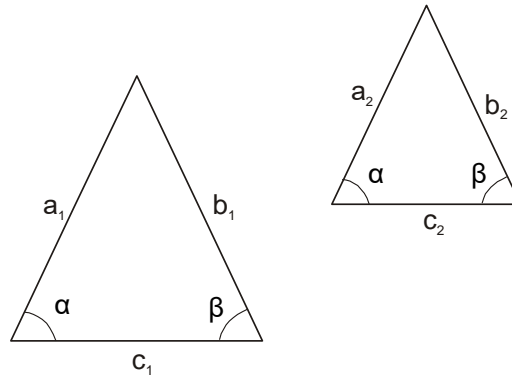


Рисунок 2.10 – До поняття геометричної подібності ($a_1, b_1, c_1, \alpha, \beta, a_2, b_2, c_2$)

Подібність фізичних величин припускає подібність фізичних властивостей у моделі й натурі. Існування подібності фізичних величин дозволяє, наприклад, вивчення закономірностей течії агресивних і токсичних рідин здійснювати безпосередньо з використанням самих рідин, а вибрати нетоксичну рідину, що має подібні фізичні властивості, й проводити дослідження з нею. Одержані результати будуть слухними й для агресивних рідин.

Наприклад, для подібних точок плинної рідини натурі й моделі

$$\frac{\rho_{01}}{\rho_{02}} = \frac{\rho_{11}}{\rho_{12}} = \frac{\rho_{21}}{\rho_{22}} = const = k_\rho, \quad (2.124)$$

$$\frac{\mu_{01}}{\mu_{02}} = \frac{\mu_{11}}{\mu_{12}} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{22}} = const = k_\mu, \quad (2.125)$$

де ρ_0, ρ_1, ρ_2 – густини рідини в подібних точках; μ_0, μ_1, μ_2 – в'язкості рідини в подібних точках.

Часова подібність спостерігається тоді, якщо процеси подібно змінюються в часі, наприклад подібні точки двох потоків рухаються за подібними траєкторіями і проходять подібні відрізки шляху за відрізки часу, відношення яких буде величиною сталою:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = const = k_t, \quad (2.126)$$

де T_1, T_2 – час проходження подібними точками всього шляху (натури й моделі відповідно); τ_1, τ_2 – час проходження подібними точками подібних відрізків шляху.

Допускається, що відношення основних параметрів на початку процесу й на межах натури й моделі є величиною сталою. Для початкових і граничних умов повинні виконуватися геометрична, фізична й часова подібності.

У теорії подібності розрізняють константи й інваріанти подібності.

Константи подібності показують відношення параметрів натури й подібних параметрів моделі. Наприклад, для розглянутого випадку геометричної подібності

$$k_l = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = const. \quad (2.127)$$

Інваріанти подібності показують відношення подібних величин у натурі й моделі:

$$i_l = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = const. \quad (2.128)$$

Константи подібності стали для різних подібних точок подібних систем, але змінюються залежно від співвідношення розмірів моделі й натури.

Інваріанти подібності, навпаки, можуть бути неоднаковими для різних подібних точок подібних систем, але не залежать від співвідношення розмірів натури й моделі.

Інваріанти подібності, що відображають співвідношення фізичних величин, називаються параметричними критеріями, або симплексами:

$$\frac{\tau_1}{T_1} = \frac{\tau_2}{T_2} = i_t, \quad \frac{w_1}{w_{01}} = \frac{w_2}{w_{02}} = i_w, \quad \frac{\rho_1}{\rho_{01}} = \frac{\rho_2}{\rho_{02}} = i_\rho, \quad \frac{\mu_1}{\mu_{01}} = \frac{\mu_2}{\mu_{02}} = i_\mu. \quad (2.129)$$

У наведених виразах за масштаб змінних взяті їх значення на вході в систему, тобто їх початкові значення w_0, ρ_0, μ_0 .

Інваріанти подібності можуть бути виражені співвідношенням різнорідних величин, однак залишатися при цьому безрозмірними

комплексами. Ці комплекси називаються критеріями подібності.

Критерії подібності мають усі властивості інваріантів: вони безрозмірні, можуть змінюватися від однієї точки простору до іншої в моделі й натурі, але для подібних точок подібних систем – однакові.

Теорема подібності. Перша теорема подібності була сформульована Ньютоном: *подібні явища характеризуються чисельно однаковими критеріями подібності.*

Із курсу механіки відомий другий закон Ньютона

$$F = m \frac{dw}{d\tau}. \quad (2.130)$$

Складемо із цього рівняння безрозмірний комплекс, розділивши величини правої частини на величини лівої частини:

$$\frac{Fd\tau}{mdw} = k. \quad (2.131)$$

Важливою властивістю теорії подібності є те, що в безрозмірних комплексах (критеріях) відношення приросту фізичних величин можуть бути замінені відношеннями самих величин. Ураховуючи це, з (2.131) одержимо критерій Ньютона, що характеризує відношення сили, яка діє на тіло, до сили інерції:

$$Ne = \frac{F\tau}{mw}, \text{ або } Ne = \frac{Fl}{mw^2}. \quad (2.132)$$

Аналізуючи послідовність виконаних дій, звернемо увагу на те, яким чином ми використовували метод подібного перетворення диференціальних рівнянь. Критерії подібності з диференціального рівняння знаходять діленням однієї частини рівняння на іншу з подальшим відкиданням знаків математичних операторів.

Якщо диференціальне рівняння у своєму складі має кілька доданків у кожній частині, то критерії знаходять за допомогою ділення складових цих частин.

Перша теорема подібності дає ще один важливий результат – вона свідчить про те, які величини потрібно виміряти під час проведення дослідів, результати яких потрібно узагальнити: виміряти потрібно величини, що входять до критеріїв подібності.

Друга теорема подібності сформульована Бекінгемом та Афанасьєвою-Еренфест. *Розв'язок будь-якого диференціального рівняння, яке зв'язує між собою змінні величини, що впливають на процес, може бути поданий як залежність між безрозмірними відношеннями цих величин (критеріями подібності).*

Якщо $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ – критерії, що характеризують процес і впливають із перетворення диференціального рівняння, то розв'язок цього рівняння в загальному вигляді може бути поданий такою функціональною залежністю:

$$\varphi(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = 0. \quad (2.133)$$

Критерії подібності, що складаються з величин, які входять до умов однозначності, називаються визначальними. Критерії, до яких входить хоча б одна величина, що не міститься в умовах однозначності, називаються невизначальними. Який із критеріїв є визначальним, а який невизначальним – залежить від постановки задачі.

Звичайний розв'язок диференціального рівняння, одержаний унаслідок подібного перетворення, подається у вигляді функціональної залежності, або у степеневому вигляді. Наприклад, якщо невизначальний критерій k_n , а інші – визначальні, одержимо

$$k_n = A k_1^m \cdot k_2^p \cdot \dots \cdot k_n^q, \quad (2.134)$$

де A, m, p, q – константи, одержані дослідним шляхом.

Друга теорема подібності показує, що результати дослідів, проведених на моделях, потрібно подавати у вигляді функціональної залежності між критеріями подібності.

Третя теорема подібності (теорема Кирпичова і Гухмана). *Подібні явища описуються одними й тими самими диференціальними рівняннями, і для них*

дотримується подібність умов однозначності.

Використання методів теорії подібності дозволяє виявити таку послідовність дій під час дослідження технологічних процесів:

– розробивши математичний опис процесу, що міститиме диференціальні (а в загальному випадку й алгебраїчні) рівняння та умови однозначності, перетворюють їх методами теорії подібності, визначаючи критерії подібності (перша теорема);

– визначивши мету досліджень, виділяють визначальні й невизначальні критерії і подають залежність між ними у вигляді степеневі, або функціональної, залежності;

– дослідним шляхом у модельних умовах визначають дійсний вигляд залежності (2.134), знаходячи числові значення коефіцієнтів і визначаючи інтервал зміни критеріїв, у якому ця залежність виконується;

– одержане узагальнене рівняння буде справедливим і для натурального об'єкта, але лише за умови, що критерії подібності в ньому змінюватимуться в тих самих межах, що й у модельному об'єкті.

Питання для самоконтролю

1. Наведіть класифікацію сил, що діють у суцільному середовищі.
2. Сформулюйте теорему Остроградського – Гаусса.
3. Які закони описують градієнтне і конвективне перенесення речовини?
4. Запишіть систему диференціальних рівнянь Ейлера. Охарактеризуйте складові цієї системи.
5. Сформулюйте закон Паскаля.
6. Запишіть рівняння нерозривності потоку та рівняння витрати.
7. Охарактеризуйте складові в рівнянні Бернуллі. Яку розмірність мають члени цього рівняння?
8. Запишіть систему диференціальних рівнянь Нав'є – Стокса. Охарактеризуйте складові цієї системи.
9. Назвіть і охарактеризуйте види перенесення теплоти.

10. Сформулюйте і запишіть закон Фур'є.
11. Запишіть диференціальне рівняння Фур'є для стаціонарного і нестаціонарного процесів перенесення тепла.
12. Запишіть диференціальне рівняння Фур'є – Кірхгофа. Охарактеризуйте члени цього рівняння.
13. Сформулюйте закон Фіка. Дайте характеристику коефіцієнта молекулярної дифузії.
14. Запишіть диференціальне рівняння молекулярної дифузії.
15. Запишіть диференціальне рівняння конвективного масоперенесення.. Охарактеризуйте члени цього рівняння.
16. Що таке крайові умови? Яке їх значення для опису процесів перенесення субстанції?
17. З якою метою застосовуються методи моделювання виробничих процесів?
18. Назвіть методи моделювання. У чому їх сутність?
19. Дайте характеристику моделей структури потоків у апаратах.
20. Які задачі розв'язує теорія подібності?
21. Сформулюйте ознаки подібності явищ.
22. Дайте визначення константи, інваріанта та критерію подібності.
23. Сформулюйте основні теореми подібності.
24. У чому відмінність визначальних і невизначальних критеріїв подібності?