

2 ВАРІАЦІЙНІ ТА ПРОЄКЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Мета: Ознайомитись з варіаційними та проєкційними методами розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних.

Тема 3. Основні теореми варіаційного методу розв'язання крайових задач

Поняття про функціонал і оператор.

Означення 2.1 Нехай $K = \{y(x)\}$ – множина функцій $y(x)$ незалежної змінної x або сукупність незалежних змінних $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Кажуть, що на множині K визначено *функціонал* Φ над полем дійсних чисел, якщо кожній функції $y(x) \in K$ ставиться у відповідність одне і лише одне число $\varphi \in \mathbb{R}$. Позначення: $\Phi: y(x) \rightarrow \varphi$; $\varphi = [\Phi y](x)$.

Множину $K = \{y(x)\}$ називають областю визначення функціонала.

Означення 2.2 Множину $K = \{y(x)\}$ називають *лінійною*, якщо

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in K \quad \alpha u + \beta v \in K.$$

Означення 2.3 Функціонал Φ називають *лінійним*, якщо

- 1) його множина визначення K є лінійною;
- 2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in K \quad \Phi(\alpha u + \beta v) = \alpha \Phi(u) + \beta \Phi(v)$.

Приклад 2.1 Розглянемо множину $K = \{y(x)\}$ функцій, диференційовних в точці 0. Розглянемо $[\Phi y](x) = y'(0)$. Таким чином визначена відповідність визначає лінійний функціонал.

Означення 2.4 Кажуть, що на множині $K = \{y(x)\}$ визначено *оператор* L , якщо кожній функції $y(x) \in K$ ставиться у відповідність одна і лише одна функція $z(x)$, яка в загальному випадку може залежати від іншої змінної $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$. Позначення: $L: y(x) \rightarrow z(x)$; $z(x) = [Ly](x)$ або $z = Ly$.

Поняття *лінійного оператора* означається аналогічно до лінійного функціонала.

Приклад 2.2. Нехай $K = C^{(1)}[a; b]$ – простір неперервно диференційовних функцій на відрізку $[a; b]$. Тоді $[Ly](x) = \frac{d}{dx} y(x)$ – *оператор диференціювання*. Він є лінійним, а його значення – неперервні на $[a; b]$, тобто $[Ly](x) \in C[a; b]$.

Якщо $K = C^{(n)}[a; b]$ – простір неперервно диференційовних n разів функцій на відрізку $[a; b]$, а $p_k(x) \in C[a; b] \quad k = \overline{0, n}$, тоді відображення

$$[Ly](x) = p_0(x) + p_1(x) y'(x) + p_2(x) y''(x) + \dots + p_n(x) y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n p_k(x) y^{(k)}(x)$$

є лінійним диференціальним оператором, причому $[Ly](x) \in C[a; b]$.

Запис лінійного диференціального рівняння в операторному вигляді:

$$[Ly](x) = f(x), f(x) \in C[a; b] /$$

Приклад 2.3 Розглянемо $K = \{u(x, y) \in C^{(2)}(G)\}$, G – область на площині.

На цій множині визначимо відображення

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Являє собою лінійний оператор, який називається *оператором Лапласа*.

Рівняння

$$\Delta u = f(x, y),$$

де $f(x, y)$ – задана функція, називається *рівнянням Пуассона*, а

$$\Delta u = 0 -$$

рівнянням Лапласа.

Розглянемо функцію на множині $K = \{y(x)\}$ неперервних на ω функцій, визначену кратним або визначеним інтегралом, що має вигляд

$$(u, v) = \int_{\omega} u v d\omega.$$

Така функція є *скалярним добутком на K* .

Означення 2.5 Розглянемо лінійний оператор $L: K \rightarrow M$, де K, M множини неперервних функцій на ω . Оператор називають *симетричним*, якщо $\forall u, v \in K (u, Lv) = (v, Lu)$.

Оператор L (із зазначеними властивостями множини визначення та множини значень) називають *додатним*, якщо 1) $(Lu, u) \geq 0 \forall u \in K$, 2) $(Lu, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$.

Приклад 2.4 Розглянемо множину $K = \{y(x) \in C^{(2)}[0; 1] : y(0) = 0, y'(1) = 0\}$, на якій визначимо оператор

$$[Ly](x) = -y''(x).$$

Тоді $[Ly](x) \in C[0; 1]$. Дослідимо його властивості. Оскільки

$$\begin{aligned} (u, Lv) &= -\int_0^1 u v'' dx = -uv' \Big|_0^1 + \int_0^1 u'v' dx = -\left(\underbrace{u(1)v'(1)}_{=0} - \underbrace{u(0)v'(0)}_{=0} \right) + u'v \Big|_0^1 - \int_0^1 v u'' dx = \\ &= \left(\underbrace{u'(1)v(1)}_{=0} - \underbrace{u'(0)v(0)}_{=0} \right) - \int_0^1 v u'' dx = (v, Lu), \end{aligned}$$

то оператор є симетричним. Тепер розглянемо (u, Lu) :

$$(u, Lu) = -\int_0^1 u u'' dx = -\left(\underbrace{u(1)u'(1)}_{=0} - \underbrace{u(0)u'(0)}_{=0} \right) + \int_0^1 (u')^2 dx = \int_0^1 (u')^2 dx \geq 0.$$

Оскільки u' – неперервна на відрізку $[0;1]$, то $(u, Lu) = \int_0^1 (u')^2 dx = 0$ тоді і тільки тоді, коли $u' = 0$ на $[0;1]$, тобто $u = \text{const}$. За умовою $u(0) = 0$, тому $u \equiv 0$.

Постановка варіаційної задачі.

Нехай $K = \{y(x)\}$ – множина функцій, $\varphi = [\Phi y](x)$ – функціонал, заданий на K . Задача, в якій потрібно знайти екстремум функціонала Φy . Називають *варіаційною*. Конкретизуємо дану постановку. Задача пошуку *максимуму* функціонала потребує визначення такої функції $\bar{y}(x) \in K$, що

$$\exists \varepsilon > 0 \forall y(x) \in K \ 0 < \rho(y, \bar{y}) < \varepsilon \Rightarrow \Phi y \leq \Phi \bar{y}.$$

Задача на мінімум функціонала – функції $\bar{y}(x) \in K$, що має властивість:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall y(x) \in K \ 0 < \rho(y, \bar{y}) < \varepsilon \Rightarrow \Phi y \geq \Phi \bar{y}.$$

Функція ρ визначає метрику відповідного простору, в якому задається множина функцій K .

Теорема про зведення крайової задачі до варіаційної.

Розглянемо область G з межею Γ . У випадку подальшого дослідження звичайного диференціального рівняння такі множини відповідно дорівнюють: $G = (a; b)$, $\Gamma = \{a; b\}$. У випадку рівняння в частинних похідних відносно n незалежних змінних, множина G – зв'язна відкрита множина евклідового простору $\mathbb{R}_2^n$ з множиною межових точок $\Gamma = \partial G$.

Припустимо, що диференціальне рівняння – звичайне або в частинних похідних – має неперервні коефіцієнти в $\bar{G} = G \cup \Gamma$ і неперервну функцію правої частини $f(P)$ на тій самій множині. Тут $P \in \bar{G}$ і позначає точку в $\mathbb{R}$ або $\mathbb{R}^n$ сукупності незалежних змінних.

Визначимо на лінійній множині $K = \{y\}$ функцій y , що мають неперервні похідні потрібного порядку в $\bar{G}$, на якій задамо диференціальний оператор L , що визначає диференціальне рівняння, що подається в операторному вигляді

$$Ly = f(P). \quad (2.1)$$

На межі Γ визначимо лінійні однорідні крайові умови

$$R[y] = 0. \quad (2.2)$$

Тут R – заданий лінійний функціонал або лінійний оператор нижчого порядку диференціювання за L .

Співвідношення (2.1) і (2.2) визначають крайову задачу з однорідними крайовими умовами.

Розв'язок крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами

$$Ly = f(P), \quad (2.3)$$

$$R[y] = \varphi(P), \ P \in \Gamma \quad (2.4)$$

може бути знайдений як сума $y = z + y_1$ функції z , що є розв'язком однорідної задачі та функції y_1 потрібного рівня гладкості, що задовольняє крайову умову (2.4).

В реалізації варіаційного методу для наближеного розв'язання крайової задачі за мету ставиться зведення даної задачі до варіаційної.

Теорема 2.1 (про єдиність розв'язку крайової задачі у випадку його існування). Якщо оператор L має властивості:

вимога А) L – лінійний симетричний оператор;

вимога Б) L – додатний оператор, визначений на множині $K = \{y\}$.

Тоді крайова задача, задана операторним рівнянням (2.1) і крайовою умовою (2.2), може мати один і лише один розв'язок на K , якщо він існує.

Теорема 2.2 (про зведення крайової задачі до варіаційної). Припустимо, що оператор L задовольняє властивості вимог А) і Б) на множині $K = \{y\}$.

Розглянемо функціонал вигляду

$$\Phi[y] = (Ly, y) - 2(f, y) \equiv \int_{\omega} (Ly - 2f)y \, d\omega. \quad (2.5)$$

Якщо крайова задача (1) – (2) з однорідними крайовими умовами має за розв'язок функцію $\bar{y}$, тоді ця функція виступає мінімумом функціонала (2.5).

Також, якщо функція $\bar{y} \in K$ визначає мінімум функціонала (2.5), тоді вона є розв'язком рівняння (2.1).

Тема 4. Зведення лінійної крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку до варіаційної задачі

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = f_1(x) \quad (2.6)$$

та лінійними крайовими умовами

$$\Gamma_a(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \Gamma_b(y) \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \quad (2.7)$$

де $p_1(x)$, $q_1(x)$, $f_1(x)$ – неперервні функції на $[a, b]$, $\alpha_i, \beta_i, A, B \in \mathbb{R}$ – сталі, що задовольняють нерівності $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

Зведемо рівняння (2.6) до самоспряженого вигляду. Для цього помножимо обидві частини (2.6) на

$$p(x) = e^{\int p_1(x) dx}, \quad (2.8)$$

матимемо:

$$p(x)y'' + p(x)p_1(x)y' + p(x)q_1(x)y = p(x)f_1(x).$$

Оскільки

$$\frac{d}{dx}[p(x) y'] = \frac{d}{dx} \left(e^{\int p_1(x) dx} \right) y' + e^{\int p_1(x) dx} \frac{d}{dx}(y') = p_1(x) y' + p(x) y'',$$

то, вводячи нові функції

$$q(x) = p(x)q_1(x), \quad f(x) = p(x)f_1(x), \quad (2.9)$$

отримаємо самоспряжене рівняння

$$\frac{d}{dx}[p(x) y'] + q(x)y = f(x), \quad (2.10)$$

де $p(x) > 0 \quad \forall x \in [a; b]$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – неперервні на $[a; b]$.

Уведемо оператор

$$Ly = -\frac{d}{dx}[p(x) y'] - q(x)y, \quad (2.11)$$

тоді рівняння (2.10) набуде операторної форми

$$Ly = -f(x). \quad (2.12)$$

Властивості оператора (2.11), що задовольняють однорідним крайовим умовам

$$\Gamma_a(y) = 0, \quad \Gamma_b(y) = 0 \quad (2.13)$$

1. Оператор, визначений співвідношенням (2.11), на множині K функцій, неперервно диференційовних функцій, що задовольняють однорідним крайовим умовам (2.13), є симетричним.
2. Якщо задовольняються умови

$$q(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a; b], \quad \alpha_1 \leq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad (2.14)$$

тоді оператор, визначений через (2.11) та однорідними крайовими умовами (2.13), є додатним.

Застосовуючи виписані властивості та теорему про зведення крайової задач до варіаційної, приходимо до висновку, що крайова задача (2.11), (2.13) за умов (2.14) еквівалентна варіаційній задачі на мінімум функціонала

$$\Phi[y] = (Ly, y) + 2(f, y) \quad (2.15)$$

на множині функцій K із зазначеними вище властивостями.

У даному випадку функціонал (2.15) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \Phi[y] = & p(a)y(a)y'(a) - p(b)y(b)y'(b) + \\ & + \int_a^b [p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx. \end{aligned}$$

Доданки, що не стоять під знаком інтеграла не впливають на функцію, в якій функціонал досягає мінімуму, тому крайову задачу (2.11), (2.13) за умов (2.14) зведено до задачі пошуку мінімуму функціонала

$$\Phi_1[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y] dx. \quad (2.16)$$

Має місце аналогічний висновок для крайової задачі (2.11) за неоднорідної крайової умови (2.7) та у випадку, коли задовольняються

нерівності (2.14), що така задача еквівалентна задачі на мінімум для функціонала (2.16).

Тема 5. Метод Рітца розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

Ідея методу Рітца в загальному випадку

Метод Рітца використовується для наближеного розв'язання варіаційної задачі. Розглянемо функціонал

$$\Phi[y] = (Ly, y) - 2(f, y), \quad (2.17)$$

визначений на лінійній множині функцій $K = \{y\}$, де L – додатний лінійний оператор на цій множині. А f – задана неперервна функція на множині $\bar{G}$. Припустимо також, що функції множини $K = \{y\}$ задовольняють лінійну крайову умову

$$R[y] = \varphi(P), P \in \Gamma, \quad (2.18)$$

де R – заданий лінійний функціонал, φ – задана функція, в загальному випадку – неперервна на Γ .

Розглянемо скінченну сукупність достатньо гладких на $\bar{G}$ функцій $\{u_k(P)\}_{k=0}^n$ з властивостями:

- **властивість 1:** функція $u_0(P)$ задовольняє неоднорідні крайові умови (2.18);
- **властивість 2:** кожна з функцій $u_k(P), k = \overline{1, n}$ – однорідні крайові умови

$$R[u_k] = 0, k = \overline{1, n}. \quad (2.19)$$

Наближений розв'язок варіаційної задачі (2.17), (2.18) подається сумою

$$\bar{y}(P, C_1, C_2, \dots, C_n) = u_0(P) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(P). \quad (2.20)$$

в якій коефіцієнти $\{C_j\}_{j=1}^n$ підлягають визначенню. Тоді

$$\forall \{C_j\} \quad R[\bar{y}] = R[u_0] + \sum_{j=1}^n C_j R[u_j] = \varphi(P), P \in \Gamma.$$

Для визначення коефіцієнтів $\{C_j\}_{j=1}^n$ підставимо функцію (2.20) у функціонал (2.17):

$$\Phi[\bar{y}] = \bar{\Phi}(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Задовольняємо необхідну умову екстремуму функції багатьох змінних:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial C_j} = 0, j = \overline{1, n}. \quad (2.21)$$

Точність методу залежить від кількості лінійно незалежних функцій n . Чим більше таких функцій використовується, тим краща точність наближеного розв'язку.

Застосування методу Рітца для розв'язання крайової задачі у випадку звичайного диференціального рівняння другого порядку.

Розглянемо крайову задачу (2.6) – (2.7). в зазначених припущеннях.

- Вводимо заміни (2.8), (2.9).
- Розглядаємо варіаційну задачу на мінімум функціонала $\Phi_1[y]$, поданого формулою (2.16) за крайової умови (2.9).
- Наведемо приклад вибору лінійно незалежних функцій $\{u_j(x)\}_{j=0}^n$, що задовольняють властивості 1 та 2. Якщо крайова умова має вигляд

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad (2.22)$$

то за потрібну систему можна обрати

$$u_0(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a), \quad u_j(x) = (x-a)^j(x-b), \quad j = \overline{1, n} \quad (2.23)$$

або

$$u_0(x) = A + (B-A) \sin \frac{\pi(x-a)}{2(b-a)}, \quad u_j(x) = \sin \frac{\pi j(x-a)}{2(b-a)}, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.24)$$

залежно від вигляду функцій $p(x), q(x), f(x)$ і передбачуваного вигляду розв'язку даної крайової задачі.

- Наближений розв'язок (2.2) у цьому випадку шукаємо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x). \quad (2.25)$$

- Знаходимо образ функціонала (2.16) для функції (2.25)

$$\begin{aligned} \Phi_1[\bar{y}] = & \int_a^b \left[p(x) \left(u_0'(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j'(x) \right)^2 - q(x) \left(u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x) \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2f(x) \left(u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x) \right) \right] dx = \bar{\Phi}(C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned}$$

- Невідомі коефіцієнти шукаємо, розв'язуючи систему (2.21).

Зауваження 2.1 Якщо функції крайова умова має загальний характер (2.7), тоді систему лінійно незалежних функцій можна шукати у вигляді

$$u_j(x) = M + (x-a)^{j+1} + N(x-b), \quad j = \overline{0, n},$$

а коефіцієнти M і N шукати, підставляючи зазначене подання неоднорідні або однорідні крайові умови відповідно:

$$\Gamma_a(u_0) = A, \quad \Gamma_b(u_0) = B; \quad \Gamma_a(u_j) = 0, \quad \Gamma_b(u_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Лабораторна робота №1 «Метод Рітца розв'язання крайової задачі для звичайного диф. рівняння»

Мета: навчитися застосовувати метод Рітца для розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку.

Завдання до лабораторної роботи №1

1. Знайти наближені розв'язки крайової задачі методом Рітца та побудувати графіки отриманих наближених розв'язків у випадку його подання лінійною комбінацією 3, 4 і 5 лінійно незалежних функцій повної системи простору $C^{(2)}[a, b]$.
2. Знайти точний або чисельний розв'язок засобами пакету комп'ютерної алгебри MAPLE (або ін..) і побудувати його графік.
3. Зробити висновок про збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

Варіанти завдань наведено в табл. 2.1.

Значення для s : $s = 2$ – для денної форми навчання, $s = 1$ – для заочної.

Таблиця 2.1 – Варіанти завдань до лабораторної роботи №1

Варіант	Крайова задача 1.1	Крайова задача 1.2
1	$y'' - x y + x = 0, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' - 2xy' - 2y = 5x + 1, \quad y(0) = 0, y(1) = s$
2	$y'' + 2xy + x = 0, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' + 2xy' - 4y = 2x, \quad y(0) = 0, y(1) = s$
3	$y'' + x y + x = 0, \quad y(0) = y(-1) = s$	$y'' - 2xy' - 3y + 2x = 0, \quad y(-1) = y(1) = s$
4	$y'' - 2xy - 2x = 0, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' - 2y' - 5xy = x, \quad y(0) = 0, y(1) = s$
5	$y'' + x y = x, \quad y(0) = y(-1) = s$	$y'' - 2xy' - 2y = 3x, \quad y(0) = 0, y(1) = s$
6	$y'' + 4xy = 4x, \quad y(0) = 0, y(-1) = s$	$y'' - x^2 y' - y = x, \quad y(0) = y(1) = s$
7	$y'' - 2x y = 3x, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' + x y' - 2xy = x - 2, \quad y(-1) = y(1) = s$
8	$y'' - xy = 5x, \quad y(0) = y(1) = s + 1$	$y'' - 2xy' - 2y = 5x, \quad y(0) = y(1) = s$
9	$y'' - 3x y = 2x, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' - 2xy' - 2y = 3x - 1, \quad y(0) = 0, y(1) = s$
10	$y'' - 2xy - 3 = 0, \quad y(0) = y(1) = s$	$y'' + 3y' - 4xy = 2x + 1, y(0) = 0, y(1) = s$

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №1

Задача 2.1 Розв'яжемо крайову задачу

$$y'' - (x+1)y' - 2x y = x - 5; \quad y(1) = -1; \quad y(3) = 2. \quad (2.26)$$

Розв'язання. У даному випадку відповідно до (2.6) маємо:

$$p_1(x) = -(x+1); \quad q_1(x) = -2x; \quad f_1(x) = x - 5, \quad (2.26)$$

а відповідно до крайової умови (2.22) –

$$a = 1; \quad b = 3; \quad A = -1; \quad B = 2. \quad (2.27)$$

Розв'язання проведемо в системі комп'ютерної алгебри Maple.

- Спочатку потрібно ввести вхідні, визначені співвідношеннями (2.26) і (2.27).
- Далі визначаємо функції $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ через співвідношення (2.8) і (2.9). Звернемо увагу, що $q(x) < 0$.
- Потім виписуємо функціонал

$$> F := \int (p(x) * (\text{diff}(y(x), x))^2 - q(x) * y(x)^2 + 2 * f(x) * y(x), x = a .. b):$$

- Коефіцієнти диференціального рівняння є многочленами, тому систему лінійно незалежних функцій задаємо формулами (2.23)?, що подається в СКА Maple операндами:

$$\begin{aligned} > u(x)[0] := A + (B - A) * (x - a) / (b - a): \\ > \text{for } j \text{ to } N \text{ do } u(x)[j] := (x - a)^j * (b - x) \text{ od:} \end{aligned}$$

тут $N = n$ – кількість лінійно незалежних функцій, що задовольняють однорідні крайові умови.

- Наближений розв'язок подамо за формулою (3.9):

$$y(x) := u(x)[0] + \text{sum}(c[i] * u(x)[i], i = 1 .. N);$$

- Визначаємо невідомі сталі, розв'язуючи систему (2.21):

$$\begin{aligned} > \text{for } j \text{ to } N \text{ do } rr[j] := \text{evalf}(\text{diff}(F, c[j]), 16) \text{ od:} \\ > \text{sys} := \{\text{seq}(rr[jj] = 0, jj = 1 .. N)\}; \text{var} := \{\text{seq}(c[jj], jj = 1 .. N)\}; \\ > R := \text{solve}(\text{sys}, \text{var}); \end{aligned}$$

- Якщо після розв'язання системи застосувати оператор `assign`, то наближений розв'язок набуде конкретного вигляду як многочлен з числовими коефіцієнтами.

- Обираючи $N = 3$, отримаємо наближений розв'язок $y(x)$ у вигляді

$$-2.090999391 - 1.374881513x + 4.574097910x^2 - 2.552117410x^3 + 0.4439004054x^4$$

При $N = 10$, отримаємо наближений розв'язок $y(x)$ –

$$\begin{aligned} &-10.10241351x + 25.95759571x^2 - 0.9905584937 - 26.08542255x^3 + 11.95780095x^4 \\ &- 0.315937429x^5 - 2.261015088x^6 + 0.9675766774x^7 - 0.1113293363x^8 \\ &- 0.02217479881x^9 + 0.006181137721x^{10} - 0.0003032797005x^{11} \end{aligned}$$

- СКА Maple містить функціонал, що відповідає за можливість пошуку чисельного розв'язку диференціального рівняння, побудову графіку функції-розв'язку та ін. Застосувати зазначений функціонал можна в такий спосіб:

$$\begin{aligned} > \text{with}(\text{plots}); \\ > eq := \text{diff}(\text{diff}(yy(x), x), x) + p1(x) * (\text{diff}(yy(x), x)) + q1(x) * yy(x) - f1(x); \\ > RR := \{eq, yy(a) = A, yy(b) = B\}; \\ > RR1 := \text{dsolve}(RR, yy(x), \text{numeric}); G2 := \text{odeplot}(RR1); \end{aligned}$$

- Для одночасного зображення трьох розв'язків використаємо оператор `display`. У даному випадку графіки набудуть вигляду, зображеному на рис. 2.1.

На рис. 2.1 суцільною чорною лінією побудовано графік функції, отриманий методом Рітца для $N=3$, точковою синьо – для $N=10$, а суцільною червоною – засобами чисельного інтегрування, закладеними в СКА Maple

Збільшення кількості лінійно незалежних функцій зменшує відхилення між функціями-розв'язками, отриманими методом Рітца та чисельними розв'язками, знайденими за допомогою засобів СКА. Це свідчить про збіжність послідовності наближених розв'язків до точного.

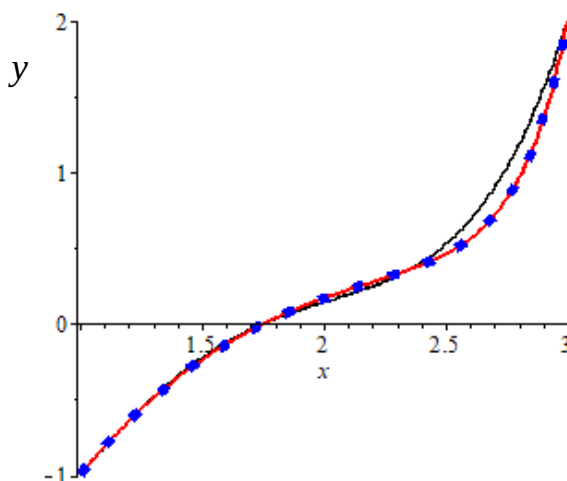


Рис. 2.1 Графічне подання результатів розв'язання задачі 2.1

Контрольні питання до лабораторної роботи №1

1. Дайте означення функціонала та оператора.
2. Сформулюйте постановку варіаційної задачі.
3. Сформулюйте теорему про зведення крайової задачі до варіаційної.
4. Опишіть ідею методу Рітца у загальному вигляді.
5. Яким властивостям мають задовольняти функції лінійно незалежної системи?
6. Опишіть послідовність дій для застосування методу Рітца до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.
7. Який фактор впливає на точність наближеного розв'язку крайової задачі методом Рітца?

Тема 6. Застосування методу Рітца задачі Штурма-Ліувіля.

Постановка задачі Штурма Ліувіля.

Розглянемо однорідне самоспряжене диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dx}[p(x) y'] + (q(x) + \lambda \rho(x))y = 0 \quad (2.28)$$

з однорідними крайовими умовами