

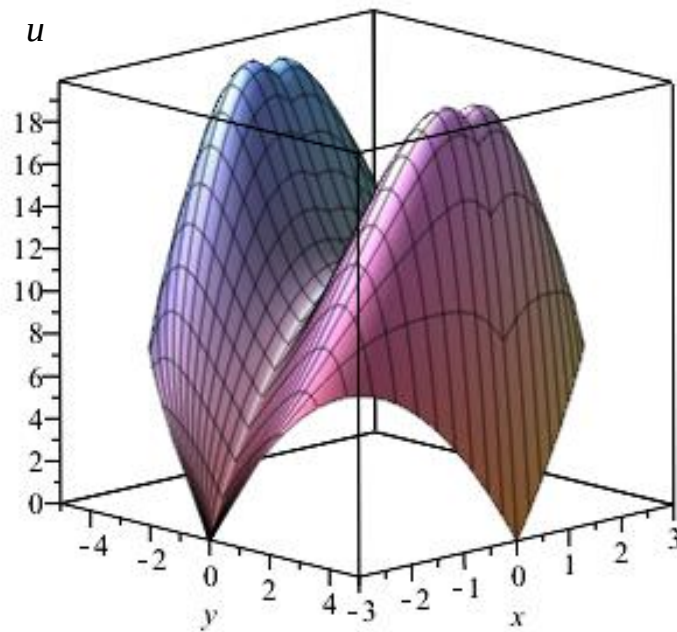


Рис. 2.5 Наближений розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

Контрольні питання до лабораторної роботи №3

1. Виписати рівняння Пуассона і Лапласа.
2. Сформулювати постановку задачі Діріхле.
3. Запишіть, до якої варіаційної задачі зводиться крайова задача для рівняння Пуассона.
4. Яким властивостям мають задовольняти координатні функції, які визначають наближений розв'язок методом Рітца?

Тема 8. Проекційний метод Галеркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

Означення 2.6 Ортогональна система функцій $\{\psi_j\}$ називається замкненою в евклідовому просторі X , якщо будь-яку функцію $f \in X$ можна наблизити з будь-яким степенем точності $\varepsilon > 0$ скінченною лінійною комбінацією елементів системи за нормою простору X , тобто

$$\forall f \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{\psi_k\}_{k=1}^n \quad \exists \{C_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R} : \left\| \sum_{k=1}^n C_k \psi_k - f \right\| < \varepsilon.$$

Означення 2.7 Ортонормована система функцій $\{\psi_j\}$ називається повною в евклідовому просторі X , якщо будь-яка функція $f \in X$, що є ортогональною до всіх елементів системи, є нульовою функцією.

Теорема 2.3 Будь яка замкнена ортонормована система $\{\psi_j\}$ є повною.

У випадку евклідового простору функцій, визначених на відрізку $[a; b]$, для повної системи функцій $\{\psi_j\}$ справджується твердження:

$$\forall j \int_a^b f(x) \psi_j(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0.$$

Зауваження 2.2 Обґрунтування зазначених тверджень засновано на загальній теорії рядів Фур'є, де функції $f \in X$ співствляється ряд її ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k \psi_k(x)$$

і доводиться, що у випадку ортогональності цієї функції всім елементам системи $\{\psi_j\}$, коефіцієнти ряду Фур'є дорівнюють нулю. Якщо функція $f \in X$ буде ортогональна скінченній множині елементів системи $\{\psi_k\}_{k=0}^n$, то відповідні їм коефіцієнти ряду Фур'є будуть дорівнювати 0, тобто $C_k = 0, k = 0, 1, \dots, n$, тому

$$\|f\|^2 = \int_a^b (f(x))^2 dx = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k^2 \|\psi_k\|^2.$$

Останнє відповідає залишку збіжного ряду, який можна зробити як завгодно малим при збільшенні кількості n елементів системи. Тому функція, що буде ортогональна до скінченного числа елементів повної системи, може стати як завгодно близькою до нульової при достатньо великому значенні n .

Сутність проєкційного методу Галеркіна.

Розглянемо лінійну крайову задачу

$$L[y] = f(x), \quad (2.48)$$

де $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$ з крайовими умовами

$$\begin{aligned} \Gamma_a(y) \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \Gamma_b(y) \equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \\ |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Виберемо скінченну систему $\{u_j(x)\}_{j=0}^n$ лінійно незалежних функцій, яка є частиною повної системи, причому функція $u_0(x)$ має задовольняти неоднорідні крайові умови $\Gamma_a(u_0) = A, \quad \Gamma_b(u_0) = B$, а інші функції системи $\{u_j(x)\}_{j=1}^n$ – однорідні умови $\Gamma_a(u_j) = 0, \quad \Gamma_b(u_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}$.

Наближений розв'язок (2.48), як і в методі Рітца, шукаємо у вигляді

$$\bar{y}(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^n C_j u_j(x). \quad (2.50)$$

Вочевидь, така функція задовольняє умови (2.49) незалежно від вибору коефіцієнтів..

Підставимо наближений розв'язок в (2.48), утворивши нев'язку

$$R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = L[u_0] + \sum_{j=1}^n C_j L[u_j] - f(x).$$

Щоб зробити нев'язку малою, відповідно до зауваження 2.2, потрібно взяти достатньо велику кількість n елементів системи й забезпечити їх ортогональність до нев'язки:

$$\int_a^b R(x, C_1, C_2, \dots, C_n) u_j(x) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.51)$$

Лабораторна робота №4 «Метод Галеркіна розв'язання крайової задачі для звичайного диф. рівняння»

Мета: навчитися застосовувати метод Галеркіна до наближеного розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Завдання до лабораторної роботи №4

Розв'язати задачі із лабораторної роботи №1 методом Галеркіна. Порівняти результати.

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №4

Задача 2.6 Розв'яжемо методом Галеркіна крайову задачу (2.26)

$$y'' - (x+1)y' - 2xy = x - 5; \quad y(1) = -1; \quad y(3) = 2.$$

Розв'язання.

- Визначимо функцію, що задаватиме нев'язку
 - > $eq := \text{diff}(\text{diff}(y(x), x), x) + p(x) * (\text{diff}(y(x), x)) + q(x) * y(x) - f(x);$
- Функції $\{u_j(x)\}_{j=0}^N$ і наближений розв'язок визначимо так само, як у задачі 2.1.
- Рівняння системи визначимо з умови ортогональності (2.51) нев'язки до кожної функції $u_j(x)$, $j = \overline{1, N}$:
 - > *for j to N do*
 - $rr[j] := \text{int}(eq * u(x)[j], x = a .. b)$
 - od*:
- Далі утворюємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладу (2.50) аналогічно задачі 2.1. Для присвоєння коефіцієнтам значень розв'язку системи можна використати оператор `assign`.
На рис. 2.6 побудовано зіставлені наближені розв'язки, отримані при $N = 5$ для крайової задачі методом Рітца (синя штрихова лінія) та методом Галеркіна (червона суцільна).

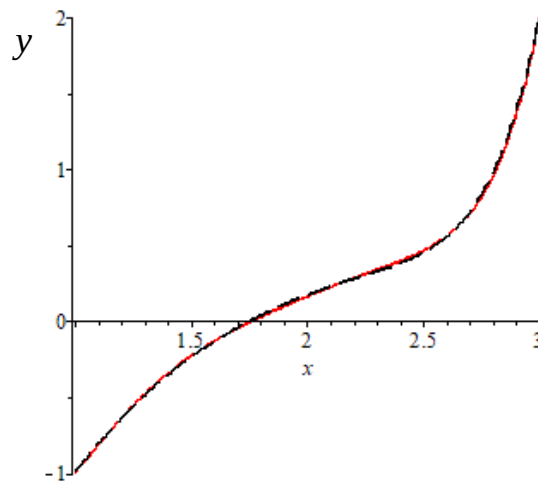


Рис. 2.6 Зіставлення наближених розв'язків за методами Рітца та Галеркіна в задачі 2.6

Для даної задачі варіаційний метод Рітца та проєкційний Галеркіна дають досить близькі результати при $N = 5$.

Задача 2.7 Розв'язати задачу (2.48) – (2.49) методом Галеркіна, якщо

$$p(x) = -x, \quad q(x) = -\frac{x}{x^2 + 4.8^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad A = 0.5, \quad B = 0.5, \\ \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2, \quad \beta_0 = -1, \quad \beta_1 = 0.$$

Розв'язання. Для пошуку системи лінійно незалежних функцій використаємо зауваження 2.1. Для реалізації зазначеної схеми можна використати код Maple:

```
> for j from 0 to N do
  mn := MM+(x-a)^(j+1)+NN*(x-b); mn1 := diff(mn, x);
  if j = 0 then A1 := A else A1 := 0 fi;
  q1 := alpha0*subs(x = a, mn)+alpha1*subs(x = a, mn1)-A1;
  if j = 0 then B1 := B else B1 := 0 fi;
  q2 := beta0*subs(x = b, mn)+beta1*subs(x = b, mn1)-B1;
  r := solve({q1, q2}, {MM, NN});
  u(x)[j] := subs(MM = rhs(r[1]), NN = rhs(r[2]), mn) od;
```

Подальші кроки методу не відрізняються від зазначених в задачі 2.6.

На рис. 2.7 наведено розв'язки, отримані методом Галеркіна при $N = 5$ (суцільна зелена лінія) і чисельним інтегруванням диференціального рівняння засобами Maple (штрихова червона лінія).

Узгодженість результатів, отриманих різними методами, є високою.

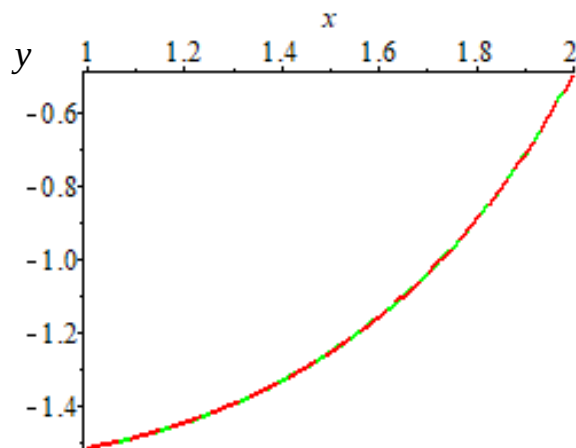


Рис. 2.7 Зіставлення розв'язків, отриманих методом Галеркіна та чисельними засобами Maple

Контрольні питання до лабораторної роботи №3

1. Дайте означення замкненої та повної системи функцій евклідового простору.
2. Сформулюйте теорему про зв'язок між замкненою та повною системами функцій.
3. Який висновок можна зробити про функцію, яка ортогональна до скінченної підмножини повної системи функцій евклідового простору?
4. Зазначте властивості функцій лінійно незалежної системи, яку обирають для утворення наближеного розв'язку.
5. На основі якої властивості утворюється система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладу наближеного розв'язку?