

суттєво відрізняються різницеві відношення у внутрішніх та кінцевих вузлах?

2. Сутність методу кінцевих різниць.
3. Чим метод кінцевих різниць відрізняється від наближених методів, що вивчалися в цьому курсі?

Самостійна робота №1 «Метод скінченних різниць розв'язання задачі Штурма-Ліувіля»

Мета: вивчити сутність методу скінченних різниць до розв'язання задачі Штурма-Ліувіля та навчитися його реалізовувати для конкретних задач.

Завдання до самостійної роботи №1

Розв'язати задачу Штурма-Ліувіля методом кінцевих різниць відповідно до індивідуальних завдань, наведених в табл. 2.2.

Тема 10. Різницевий метод розв'язання крайової задачі для рівнянь еліптичного типу

Розглянемо крайову задачу для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ на } G, \quad (3.7)$$

$$u|_{\Gamma} = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (3.8)$$

де G – деяка скінчена область (рис. 3.2), Γ – межа області G , $f(x, y)$ – задана на G функція, $\phi(x, y)$ – задана на Γ функція.

Суть різницевого методу розв'язання задачі (3.7), (3.8) полягає у наступному. Будуємо квадратну сітку з кроком $h = 1/M$ (M – натуральне): $x_k = kh$, $y_m = mh$. В усіх розташованих в області G вузлах сітки, які можна з'єднати з чотирма найближчими вузлами відрізками прямих, не перетинаючи межу Γ , частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, що входять у рівняння (3.7), замінимо формулами чисельного диференціювання другого порядку точності (порядку $O(h^2)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{V_{k-1,m} - 2V_{km} + V_{k+1,m}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{V_{k,m-1} - 2V_{km} + V_{k,m+1}}{h^2} \quad (3.9)$$

де $V_{km} = V(x_k, y_m)$ – наближений розв'язок задачі (3.7), (3.8).

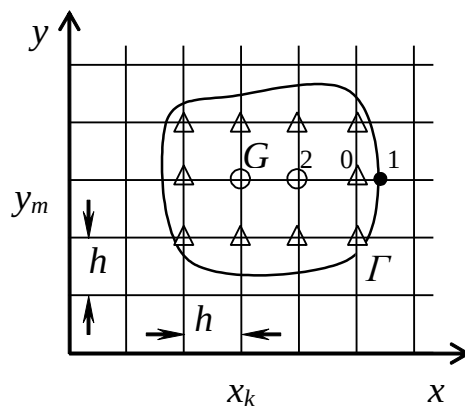


Рис.3.2 Схема використання сітки в методі скінченних різниць

Підставляючи (3.9) у (3.10), одержимо:

$$\frac{V_{k-1,m} - 2V_{km} + V_{k+1,m}}{h^2} + \frac{V_{k,m-1} - 2V_{km} + V_{k,m+1}}{h^2} = f_{km}, \quad (3.10)$$

де $f_{km} = f(x_k, y_m)$.

Для всіх внутрішніх вузлів області G поблизу її межі Γ (позначених на рис. 3.2 трикутниками), для формування різницевого рівняння застосовується лінійна інтерполяція в напрямку осі Ox . Наприклад, у точці з номером 0 рівняння має вигляд

$$V_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} V_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \phi_1, \quad (3.11)$$

де ρ_1 – відстань від точки 0 до точки 1 на межі Γ , у якій береться задане значення функції ϕ , позначене через ϕ_1 ; V_0, V_2 – невідомі в точках 0, 2; $\rho_2 = h$ – відстань між цими точками. Тут для простоти використовується один індекс. Формула (3.11) означає лінійну інтерполяцію між точками 1, 2 в точку 0.

Аналогічні різницеві рівняння задаються в інших вузлах, позначених трикутниками. При цьому відстань від точки, в яку відбувається інтерполяція, до обох крайніх точок не повинна перевищувати h і одна чи обидві крайні точки повинні лежати на межі Γ .

Отже, у кожному вузлі, позначеному кружком, задане рівняння (3.10), а в кожному вузлі, позначеному трикутником, рівняння має вид типу (3.11). Загальне число рівнянь збігається з числом невідомих. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок V , для знаходження якого можуть бути застосовані прямі й ітераційні методи розв'язання систем рівнянь.

Якщо розв'язок крайової задачі (3.7), (3.8) $u(x, y) \in C_4(\bar{G})$, то має місце оцінка похибки

$$\max_{G_h} |u - V| = O(h^2),$$

де $\bar{G} = G \cup \Gamma$, G_h – множина усіх вузлів, позначених кружками й трикутниками.

Лабораторна робота №6 «Метод скінченних різниць розв'язання крайової задачі для рівняння Пуассона»

Мета: навчитися розв'язувати крайову задачу для рівняння Пуассона методом скінченних різниць.

Завдання до лабораторної роботи №6

Різницевим методом розв'яжіть крайову задачу для рівняння Пуассона. Номер варіанта (табл. 3.2) визначається за номером прізвища студента в журналі академічної групи з додаванням числа 0 – для денної форми навчання, 10 – для заочної.

Таблиця 3.2 – Варіанти лабораторної роботи №6

№1. $f(x, y) = 1 + 0,2y \sin x - y^2$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x + y$.	№2. $f(x, y) = \cos(x + y) + 0,5(x - y)$; $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma)$, $\phi(x, y) = 2 x + y$.
№3. $f(x, y) = \frac{\cos x}{x + 1} - 0,5y^2$; $y = 4 - x^2 \Big\} (\Gamma)$, $x \in [-2, 2]$ $\phi(x, y) = x \cdot y$.	№4. $f(x, y) = (1 - y^2) \cos x + 0,6y$; $x^2 + y^2 = 16(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x + 2 y$.
№5. $f(x, y) = 1 + 0,4y \sin x - 1,5y^2$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x \cdot y$.	№6. $f(x, y) = \frac{\cos y}{x + 2} + 0,3y^2$; $x = 4 - y^2 \Big\} (\Gamma)$, $y \in [-2, 2]$ $\phi(x, y) = x + y$
№7. $f(x, y) = \cos(1,5x + y) + (x - y)$; $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x \cdot y$.	№8. $f(x, y) = 1 - \sin(x + y) + \frac{0,5y}{x + 2}$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = 2 x + y$.
№9. $f(x, y) = \frac{\cos y}{1,5 + x} + 0,1y^2$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x \cdot y$.	№10. $f(x, y) = 0,6 \sin x - 1,25y^2 + 1$; $y = 4 - x^2 \Big\} (\Gamma)$, $x \in [-2, 2]$ $\phi(x, y) = x + y$.
№11. $f(x, y) = \cos(2x + y) + 1,5(x - y)$; $x^2 + y^2 = 16(\Gamma)$, $\phi(x, y) = 0,5 x + y$.	№12. $f(x, y) = 1 - \frac{0,1y}{x + 2} - \sin(2x + y)$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma)$, $\phi(x, y) = x + 0,5 y$
№13. $f(x, y) = \frac{\cos y}{1,25 + x} - 0,1y^2$; $x = 4 - y^2 \Big\} (\Gamma)$, $y \in [-2, 2]$ $\phi(x, y) = x + \frac{y^2}{2}$.	№14. $f(x, y) = 1 + 0,8y \sin x - 2y^2$; $(x + 2)(y + 2) = 12(\Gamma)$, $\phi(x, y) = 2 x + 0,5 y$

Продовження таблиці 3.2

№15. $f(x, y) = \cos(1,5x + y) + 1,5(x - y)$; $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$ $\phi(x, y) = x + y .$	№16. $f(x, y) = 1 - \sin(2x + y) + \frac{0,3y}{x + 2}$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(\Gamma),$ $\phi(x, y) = 2 x + 0,5 y .$
№17. $f(x, y) = \frac{\cos y}{1,75 + x} - 0,5y^2$; $\left. \begin{array}{l} y = 9 - x^2 \\ x \in [-3, 3] \end{array} \right\} (\Gamma),$ $\phi(x, y) = x + \frac{1}{2} y .$	№18. $f(x, y) = 1 + (1 - x)\sin y - (2 + x)y$; $x^2 + y^2 = 16(\Gamma),$ $\phi(x, y) = \frac{1}{2} x + 2 y .$
№19. $f(x, y) = (0,8 - y^2)\cos x + 0,3y$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1(\Gamma),$ $\phi(x, y) = 0,5 x + y .$	№20. $f(x, y) = 1 + 2,2\sin x + 1,5y^2$; $\left. \begin{array}{l} y = 9 - x^2 \\ x \in [-3, 3] \end{array} \right\} (\Gamma),$ $\phi(x, y) = 0,5 x + y .$

Методичні рекомендації до лабораторної роботи №6

Задача 3.2 Методом скінченних різниць розв'язати крайову задачу (3.7) – (3.8), якщо

$$\phi(x, y) = |x| \cdot |y|, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1(\Gamma)$$

у випадках **а)** $f(x, y) = 0$; **б)** $f(x, y) = 0,6\sin(x) - 1,25y^2 + 1$, $(x, y) \in G$.

Порівняти результати з отриманими методом Рітца.

Розв'язання. Реалізуємо метод скінченних різниць поетапно у загальному випадку рівняння Пуассона.

Спочатку визначимо функції, що визначають праві частини (3.7) і (3.8), а також межу області

```
> psi1 := abs(X)*abs(Y):
  F := .6*sin(X)-1.25*Y^2+1:
> y2 := 5*sqrt(1-(1/9)*X^2);
  x2 := 3*sqrt(1-((1/5)*Y^2));
```

Далі визначимо квадратну сітку на прямокутнику, що обмежує дану область, підрахувавши кількість вертикальних та горизонтальних відрізків:

```
> i := 1: x[i] := -3:
  while x[i] < 3 do i := i+1; x[i] := -3+(i-1)*h; nn := i od:
> i := 1: h := .25: y[i] := -4:
  while y[i] < 5 do i := i+1; y[i] := -5+(i-1)*h; mm := i od:
```

Визначаємо рівняння системи та її змінні, використовуючи лічильник *nom*. Нижче наведемо один з варіантів коду з коментарями
>

```

pr := 0; nom := 0;
for i from 2 to nn - 1 do
  for j from 2 to mm - 1 do
    fij := subs(X=x[i], Y=y[j], F) :

# `Крок 1. Перевіряємо, чи відповідає точка позначенню "кружок".
if abs(y[j-1]) < subs(X=x[i], y2) and abs(y[j+1]) < subs(X=x[i], y2) and abs(y[j])
  < subs(X=x[i+1], y2) and abs(y[j]) < subs(X=x[i-1], y2) then
  nom := nom + 1;

# Для визначення утворення рівняння використовуємо формулу (3.10).
ur[nom] := -w[i,j] + 1/4*(w[i-1,j] + w[i+1,j] + w[i,j-1] + w[i,j+1]) - (1/4)*h
  ^2*fij;
w[i,j] := qw[nom] fi;

# `Крок 2. Перевіряємо точки, що мають позначку "трикутником".
# Для утворення рівнянь використовуємо формулу (3.11).
# Щоб виключити з розгляду вивчені точки, змінній pr присвоюємо значення 1 на
  подальших кроках.

# Перевіряємо такі точки на близькість до лінії верхньої межі.
if abs(y[j-1]) < subs(X=x[i], y2) and abs(y[j+1]) ≥ subs(X=x[i], y2) then
  yy := subs(X=x[i], y2);
  psij := subs(X=x[i], Y=yy, psi1);
  rho1 := abs(y[j]-yy);
  nom := nom + 1;
  ur[nom] := -w[i,j] + rho1*w[i,j-1]/(h + rho1) + h*psij/(h + rho1);
  # Відповідає (3.11).
  pr := 1;
  w[i,j] := qw[nom] fi;

# Перевіряємо такі точки на близькість до лінії нижньої межі.
if abs(y[j-1]) ≥ subs(X=x[i], y2) and abs(y[j+1]) < subs(X=x[i], y2) then
  yy := -subs(X=x[i], y2);
  psij := subs(X=x[i], Y=yy, psi1);
  rho1 := abs(y[j]-yy); nom := nom + 1;
  ur[nom] := -w[i,j] + rho1*w[i,j+1]/(h + rho1) + h*psij/(h + rho1);
  # Відповідає (3.11).
  pr := 1; w[i,j] := qw[nom] fi;

# Перевіряємо такі точки на близькість до лінії правої межі.
if pr ≠ 1 and abs(y[j]) < subs(X=x[i-1], y2) and abs(y[j]) ≥ subs(X=x[i+1], y2)
  then
  xx := subs(Y=y[j], x2);
  psij := subs(X=xx, Y=y[j], psi1);
  rho1 := abs(x[i]-xx);
  nom := nom + 1;
  ur[nom] := -w[i,j] + rho1*w[i-1,j]/(h + rho1) + h*psij/(h + rho1);
  # Відповідає (3.11).
  w[i,j] := qw[nom] fi;

```

Перевіряємо такі точки на близькість до лінії лівої межі.

```

if  $pr \neq 1$  and  $\text{abs}(y[j]) \geq \text{subs}(X=x[i-1], y2)$  and  $\text{abs}(y[j]) < \text{subs}(X=x[i+1], y2)$ 
then
   $xx := -\text{subs}(Y=y[j], x2);$ 
   $psij := \text{subs}(X=xx, Y=y[j], psi1);$ 
   $\rho1 := \text{abs}(x[i]-xx);$ 
   $nom := nom + 1;$ 
   $ur[nom] := -w[i,j] + \rho1 * w[i+1,j] / (h + \rho1) + h * psij / (h + \rho1);$ 
  # Відповідає (3.11).
   $w[i,j] := qw[nom]$  fi;
pr := 0 od: od:

```

Після розв'язання системи

```

>  $var := \{seq(qw[i], i = 1 .. nom)\}; solve(sys, var); assign(\%);$ 

```

ідентифікуємо матрицю

```

>  $w := Matrix(1 .. nn, 1 .. mm);$ 

```

в яку вносимо розв'язок системи, що фактично відповідає зворотнім крокам:

```

>  $pr := 0; nom := 0;$ 
for  $i$  from 2 to  $nn - 1$  do
  for  $j$  from 2 to  $mm - 1$  do
    if  $\text{abs}(y[j-1]) < \text{subs}(X=x[i], y2)$  and  $\text{abs}(y[j+1]) < \text{subs}(X=x[i], y2)$  and  $\text{abs}(y[j])$ 
       $< \text{subs}(X=x[i+1], y2)$  and  $\text{abs}(y[j]) < \text{subs}(X=x[i-1], y2)$  then
       $nom := nom + 1;$ 
       $w[i,j] := qw[nom]$  fi;
    if  $\text{abs}(y[j-1]) < \text{subs}(X=x[i], y2)$  and  $\text{abs}(y[j+1]) \geq \text{subs}(X=x[i], y2)$  then
       $pr := 1;$ 
       $nom := nom + 1;$ 
       $w[i,j] := qw[nom]$  fi;
    if  $\text{abs}(y[j-1]) \geq \text{subs}(X=x[i], y2)$  and  $\text{abs}(y[j+1]) < \text{subs}(X=x[i], y2)$  then
       $pr := 1;$ 
       $nom := nom + 1;$ 
       $w[i,j] := qw[nom]$  fi;
    if  $pr \neq 1$  and  $\text{abs}(y[j]) < \text{subs}(X=x[i-1], y2)$  and  $\text{abs}(y[j]) \geq \text{subs}(X=x[i+1], y2)$  then
       $nom := nom + 1;$ 
       $w[i,j] := qw[nom]$  fi;
    if  $pr \neq 1$  and  $\text{abs}(y[j]) \geq \text{subs}(X=x[i-1], y2)$  and  $\text{abs}(y[j]) < \text{subs}(X=x[i+1], y2)$  then
       $nom := nom + 1;$ 
       $w[i,j] := qw[nom]$  fi;
     $pr := 0$ 
  od: od:

```

Для утворення таблиці результатів можна використати операнд

```

>  $data := [seq([seq([x[i], y[j], w[i,j]], i = 2 .. nn-1]), j = 2 .. mm-1)];$ 

```

З таблиці визначимо деякі дані у вузлах сітки. Для відповідних координат вузлів знайдемо значення функції, що були отримані методом Рітца в задачах 2.4 і 2.5 для рівнянь Лапласа та Пуассона відповідно.

В табл. 3.3 співставлено результати для випадку рівняння Лапласа, а в табл. 3.4 – Пуассона. Відхилення в результатах становить до 14%.

Таблиця 3.3 – Зіставлення результатів розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа, отриманих двома методами

x_i	y_j	Метод скінченних різниць	Метод Рітца
-1.25	4.25	5.822507010	5.850067812
-0.5	4	4.324959506	4.678348986
-1.5	-3.75	6.379314915	6.412557045

Таблиця 3.4 – Зіставлення результатів розв'язання крайової задачі для рівняння Пуассона, отриманих двома методами

x_i	y_j	Метод скінченних різниць	Метод Рітца
-1.25	3,5	15.47767245	15.65203466
0.75	3.25	18.1009523	18.62563842
1.25	3.75	13.86975877	14.05630631

Контрольні питання до лабораторної роботи №6

1. Сутність різницевого методу розв'язання крайової задачі для рівняння еліптичного виду.
2. Яка похибка методу?

Тема 11. Різницевий метод розв'язання мішаної задачі для хвильового рівняння.

Розглянемо мішану задачу для хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.12)$$

$$u(x, 0) = p(x), \quad u_t'(x, 0) = q(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.13)$$

$$u(0, t) = \phi(t), \quad u(1, t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.14)$$

де $f(x, t)$, $p(x)$, $q(x)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ – задані досить гладкі функції, причому $p(0) = \phi(0)$, $p(1) = \psi(0)$.

Наближений розв'язок $y_k^v = y(x_k, t_v)$ будемо шукати різницевим методом на сітці (x_k, t_v) , де $x_k = kh$, $t_v = v\tau$, тут $h = 1/N$, $\tau = T/M$ – кроки за x і t (N і M – натуральні).

Заміняючи в рівнянні (3.12) частинні похідні u''_{tt} , u''_{xx} різницевиими відношеннями другого порядку в напрямку t і x відповідно, перетворимо його до вигляду