Лабораторна робота №7 Елементи теорії ігор

Мета роботи: засвоїти сутність постановки та принципів розв'язання задачі матричних ігор.

Цілі роботи:

- навчитися формулювати змістовну постановку задачі матричних ігор;
- засвоїти термінологію теорії ігор з нульовою сумою;
- навчитися відрізняти гру в чистих або мішаних стратегіях;
- навчитися будувати математичну модель задачі матричних ігор і зводити її до пари двоїстих задач лінійного програмування;
- оволодіти алгоритмом розв'язання задачі матричних ігор;
- оволодіти принципами розв'язання задачі матричних ігор з використанням інструмента «Solver» для MS Excel;
- набути навичок формулювання математичними та економічними висновками щодо отриманого розв'язку задачі матричних ігор.

9.3 Завдання до лабораторної роботи №7

За наданими матрицями гри $[a_{ij}]_{4\times 5}$ виконати:

- розрахунок нижньої та верхньої ціни гри;
- зробити висновок про наявність чистої або мішаної стратегії;
- скласти взаємодвоїсті задачі лінійного програмування відповідно до матриці гри $[a_{ij}]_{4\times 5}$; знайти їх розв'язок за допомогою інструмента «Solver» Microsoft Excel;
- розрахувати ціну гри;
- розрахувати оптимальні стратегії для першого та другого гравця, зробити висновки.

Індивідуальні варіанти до лабораторної роботи №7

Варіант 1

11	1	– 6	– 8	– 7
– 6	9	– 10	– 2	8
– 1	4	– 7	0	8
– 9	– 7	9	– 1	7

Варіант 2

– 2	– 2	– 6	5	6
– 2	9	7	– 7	2
– 2	11	– 6	4	– 6
7	– 8	– 4	– 3	8

Варіант 3

– 7	6	9	7	9
– 2	6	6	1	6
4	8	– 1	0	2
– 6	2	– 1	– 4	9

Варіант 4

– 3	0	5	– 6	8
9	9	3	– 1	2
– 10	3	– 3	10	– 9
– 9	8	– 2	0	1

Варіант 5

4	– 3	– 7	– 5	– 7
– 4	7	– 3	3	– 6
10	– 6	– 4	2	4
6	7	– 6	– 1	1

Варіант 6

– 10	– 1	1	9	– 1
– 8	11	1	2	– 6
– 6	– 10	– 6	4	6
6	3	– 9	7	– 3

Варіант 7

– 8	4	4	– 5	9
7	– 3	2	11	1
2	– 4	7	3	1
– 6	– 2	1	5	6

Варіант 8

– 3	9	– 2	– 3	1
– 1	3	– 3	– 4	6
3	– 4	4	– 3	3
1	9	– 8	7	– 9

Варіант 9

– 9	9	7	– 10	– 4
3	– 7	6	0	– 3
– 1	7	10	1	– 9
6	3	11	– 1	7

Варіант 10

11	– 8	3	– 5	7
– 10	3	– 3	– 5	– 2
9	4	10	10	4
– 7	10	8	9	9

Варіант 11

10	6	8	6	– 8
3	9	7	4	6
– 6	10	2	1	6
– 6	6	– 9	3	0

Варіант 12

6	7	1	10	7
8	3	– 3	– 1	5
0	5	– 5	– 9	9
– 1	– 3	4	– 3	– 10

Варіант 13

8	5	– 9	– 4	2
8	– 1	– 3	– 6	– 7
0	9	– 9	2	3
0	– 9	2	10	– 2

Варіант 14

– 3	9	3	1	8
2	– 1	– 2	9	– 10
10	2	10	10	10
2	0	– 6	– 9	6

Варіант 15

– 7	– 1	7	– 2	– 1
– 1	1	– 3	– 6	2
– 1	– 9	– 4	4	– 3
– 3	7	– 1	8	10

Варіант 16

4	9	– 8	– 6	4
4	– 5	1	– 9	– 3
4	6	– 6	– 8	7
– 7	1	– 5	– 6	5

Варіант 17

0	3	– 7	10	5
– 7	5	– 4	– 6	3
4	– 3	4	7	5
7	11	4	2	7

Варіант 18

6	– 4	3	– 2	– 4
4	9	2	5	3
– 4	– 6	4	– 3	10
– 2	– 9	8	– 10	11

Варіант 19

– 9	– 9	9	– 1	– 3
2	7	5	– 9	7
6	– 5	– 6	– 10	0
2	– 6	8	8	– 9

Варіант 20

0	2	11	10	– 6
– 9	– 3	2	– 7	– 5
8	4	8	2	9
– 6	0	– 1	7	– 9

Варіант 21

– 3	0	2	– 8	11
6	– 1	– 4	– 8	– 2
– 8	– 1	6	– 9	6
– 9	6	1	– 6	10

Варіант 22

– 5	7	4	3	2
7	– 1	4	3	– 4
– 3	6	7	– 2	3
6	4	– 8	7	10

Варіант 23

6	9	7	6	– 9
2	9	7	– 9	3
9	8	– 7	6	– 7
6	– 9	– 5	– 2	– 7

Варіант 24

– 10	– 6	0	5	8
3	3	– 5	– 7	– 3
– 5	0	9	– 8	7
8	– 3	– 1	– 9	– 6

Варіант 25

11	1	1	10	4
– 4	10	– 2	8	– 6
– 2	6	– 4	– 5	– 10
6	– 5	8	– 6	5

Варіант 26

4	10	3	8	– 1
– 7	– 9	10	9	6
– 1	– 5	1	4	7
9	6	– 1	10	1

Варіант 27

– 2	– 1	– 10	– 6	5
7	– 3	– 5	– 4	– 8
– 6	4	– 3	8	6
4	– 9	– 8	– 9	– 8

Варіант 28

– 1	3	– 1	11	8
– 5	– 7	2	6	– 3
1	1	– 5	11	4
4	5	– 2	– 1	5

Варіант 29

– 2	– 3	7	9	8
– 9	2	– 2	6	9
8	1	2	3	2
5	– 1	– 1	– 7	6

Варіант 30

– 10	2	– 7	– 3	1
2	2	8	5	0
5	– 7	– 7	2	6
6	– 9	7	– 1	2

9.4 Методичні рекомендації до виконання лабораторної роботи №7

Розв’яжемо задачу з прикладу 9.1 за допомогою інструмента «Solver» Microsoft Excel з тим самим переліком завдань, що і в лабораторній роботу №7.

На рис. 9.1 надано всі формул для програмування комірок MS Excel для реалізації всіх кроків алгоритму, виписаного в підрозділі 9.1:

1) для визначення верхньої та нижньої ціни гри вносимо формули в комірки H2:H5, I4 та C6:G6, E4;

2) серед елементів матриці є від'ємні, тому знаходимо модуль мінімального елементу матриці, визначаючи його за допомогою формул в комірках D8 і F8. Після цього додаємо знайдене значення в комірці F8 до всіх елементів «платіжної» матриці C12:G15;

3) для подальшого розв'язання пари двоїстих задач лінійного програмування з таблиці 9.3, вносимо формули, що відповідають:

- цільовим функціям – комірки H11 для гравця B і B16 для гравця A;
- лівим частинам систем обмежень – комірки H12:H15 для гравця B і C16: G16 для гравця A;

4) вносимо формулу для обчислення значення C' в комірку B19;

5) формули для визначення стратегії гравців вносимо в комірки B22:B25 для гравця B і C21:G21 для гравця A;

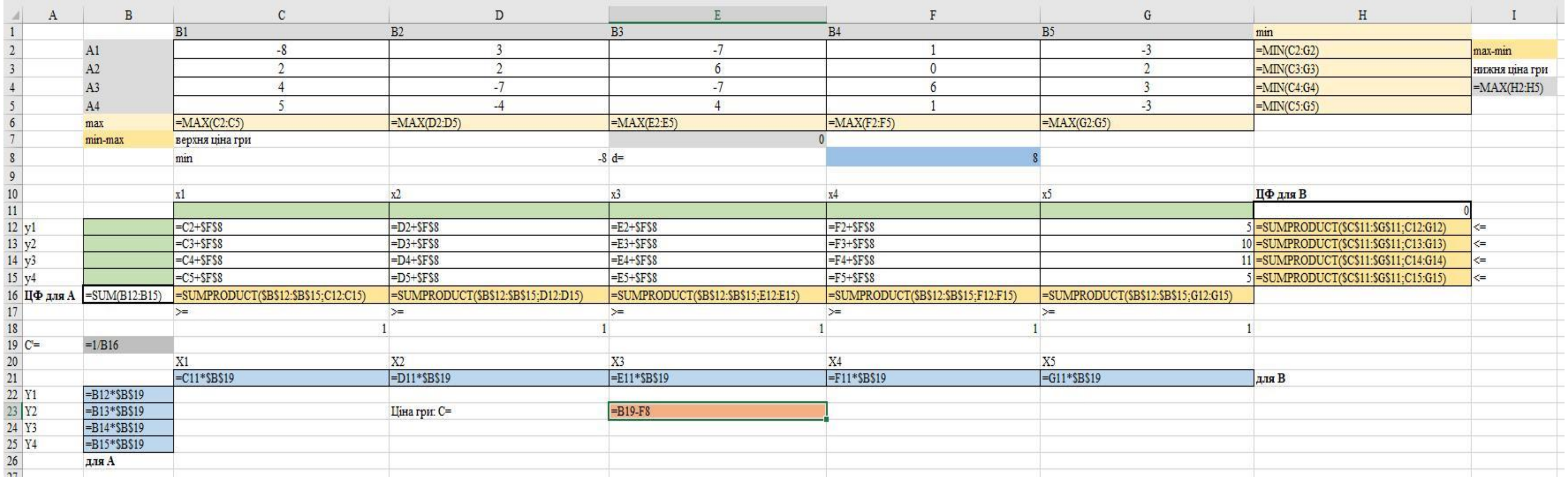
6) остаточне обчислення ціни гри вписуємо в комірку E23.

Відповідно до табл. 9.1

- на рис. 9.2 продемонстровано заповнення екранної форми «Solver Parameters» і результат розв'язання допоміжної задачі лінійного програмування на максимум для гравця B;
- на рис. 9.3 – задачі на мінімум для гравця A.

Відповідно до розрахунків, нижня ціна гри 0 у.о не дорівнює верхній ціні гри 3 у.о., тому задача в мішаних стратегіях.

Результати щодо оптимальних мішаних стратегій гравців наведено на рис. 9.4.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			B1	B2	B3	B4	B5	min	
2		A1	-8	3	-7	1	-3	=MIN(C2:G2)	max-min
3		A2	2	2	6	0	2	=MIN(C3:G3)	нижня ціна гри
4		A3	4	-7	-7	6	3	=MIN(C4:G4)	=MAX(H2:H5)
5		A4	5	-4	4	1	-3	=MIN(C5:G5)	
6		max	=MAX(C2:C5)	=MAX(D2:D5)	=MAX(E2:E5)	=MAX(F2:F5)	=MAX(G2:G5)		
7		min-max	верхня ціна гри		0				
8			min	-8	d=	8			
9									
10			x1	x2	x3	x4	x5	ЦФ для В	
11								0	
12	y1		=C2+$F$8	=D2+$F$8	=E2+$F$8	=F2+$F$8	5	=SUMPRODUCT($C$11:$G$11;C12:G12)	<=
13	y2		=C3+$F$8	=D3+$F$8	=E3+$F$8	=F3+$F$8	10	=SUMPRODUCT($C$11:$G$11;C13:G13)	<=
14	y3		=C4+$F$8	=D4+$F$8	=E4+$F$8	=F4+$F$8	11	=SUMPRODUCT($C$11:$G$11;C14:G14)	<=
15	y4		=C5+$F$8	=D5+$F$8	=E5+$F$8	=F5+$F$8	5	=SUMPRODUCT($C$11:$G$11;C15:G15)	<=
16	ЦФ для А	=SUM(B12:B15)	=SUMPRODUCT($B$12:$B$15;C12:C15)	=SUMPRODUCT($B$12:$B$15;D12:D15)	=SUMPRODUCT($B$12:$B$15;E12:E15)	=SUMPRODUCT($B$12:$B$15;F12:F15)	=SUMPRODUCT($B$12:$B$15;G12:G15)		
17			>=	>=	>=	>=	>=		
18			1	1	1	1	1		
19	C'=	=1/B16							
20			X1	X2	X3	X4	X5		
21			=C11*$B$19	=D11*$B$19	=E11*$B$19	=F11*$B$19	=G11*$B$19	для В	
22	Y1	=B12*$B$19							
23	Y2	=B13*$B$19		Ціна гри: С=	=B19-F8				
24	Y3	=B14*$B$19							
25	Y4	=B15*$B$19							
26		для А							

Рис. 9.1 – Програмування комірок аркуша MS Excel

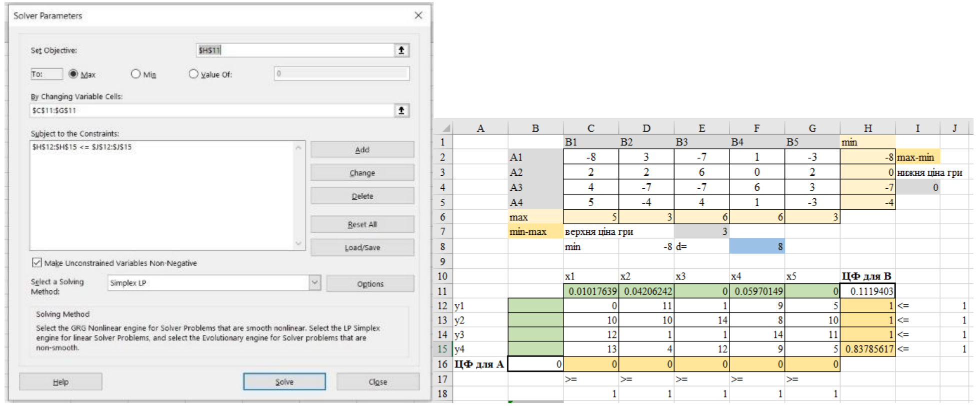


Рис. 9.2 – Реалізація розв'язку допоміжної задачі лінійного програмування для гравця А

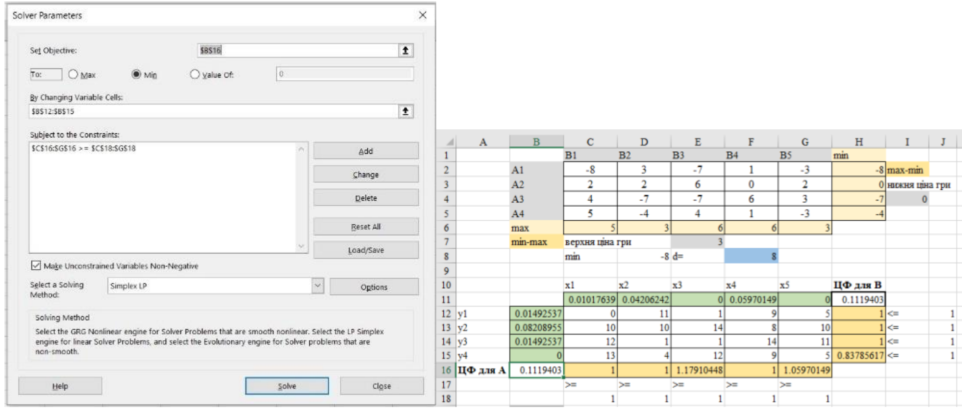


Рис. 9.2 – Реалізація розв'язку допоміжної задачі лінійного програмування для гравця В

	A	B	C	D	E	F	G	H
19	C'=	8.93333333						
20			X1	X2	X3	X4	X5	
21			0.09090909	0.37575758	0	0.53333333	0	**для B**
22	Y1	0.13333333						
23	Y2	0.73333333		Ціна гри: C=	0.93333333			
24	Y3	0.13333333						
25	Y4	0						
26		**для A**						

Рис. 9.4 – Розв'язок задачі матричних ігор з прикладу 9.1

Відповідь. Оптимальна мішана стратегія гравця А включає стратегії A_1, A_2, A_3, які застосовується гравцем А з ймовірностями Y_1 =0,13333, Y_2 =0,73333, Y_3 =0,13333, а мішана стратегія гравця В включає стратегії B_1, B_2, B_4 з ймовірностями X_1 =0,09091, X_2 =0,37576, X_4 =0,53333. При цьому ціна гри складатиме 0,93333 у.о. Це означає, що гравець А виграє 0,93333 у.о., а гравець В – програє 0,93333 у.о.

Розглянемо ***змістовний приклад***, у якому під *грою* розумітимемо сукупність стратегічних дій двох кандидатів А та В, що балотуються на посаду міського голови. До таких стратегій можуть належати, зокрема, участь у соціально значущих проєктах (будівництво супермаркета, підприємства, гідропарку тощо), розміщення агітаційних матеріалів у Telegram-каналах, на популярних вебсайтах, рекламних банерах або на телебаченні, розповсюдження друкованої продукції, участь у публічних дебатах та інші форми передвиборчої активності.

У цьому контексті елемент c_{ij} платіжної матриці інтерпретуватимемо як кількість десятків тисяч виборців, які підтримають кандидата А у разі застосування ним стратегії A_j та одночасного вибору кандидатом В стратегії B_i, якщо $c_{ij} > 0$. У випадку, коли $c_{ij} < 0$, значення елемента матриці відповідає кількості тисяч виборців, які перейдуть на бік кандидата В.

За такої інтерпретації результат, отриманий у розв'язанні наведеної вище задачі, зокрема значення цільової функції, означає перехід на бік кандидата А приблизно 93 333 виборців за умови вибору обома кандидатами відповідних стратегій із ймовірностями, визначеними у відповіді.

Питання для самоконтролю до теми 9 та лабораторної роботи №7

1. Сформулювати змістовну постановку задачі матричних ігор.
2. Що називають грою з нульовою сумою?
3. Яку гру називають грою в мішаних стратегіях?
4. Що закладено в поняття ціни гри?
5. Написати математичну модель задачі матричних ігор і описати покрокове її зведення до пари двоїстих задач лінійного програмування.
6. Охарактеризувати алгоритм розв'язання задачі матричних ігор.
7. Описати принципи розв'язання задачі матричних ігор з використанням інструмента «Solver» для MS Excel;