МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

К.А. Мамонов,
Б.Г. Скоков,
С.Я. Політучий

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

(модульний варіант)

Навчальний посібник

Рекомендовано

Міністерством освіти і науки України

для студентів вищих навчальних закладів

Харків
ХНАМГ
2010

УДК 519.8
ББК 65.053
М22

Рецензенти:

Г.С. Волинський, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри фінансів і економічної теорії Східноукраїнської філії Міжнародного Соломонова університету (м. Харків).

Ю.Д. Костін, доктор економічних наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики Харківського національного університету радіоелектроніки, завідуючий лабораторією моделювання економічних процесів в енергетиці (м. Харків).

І.Б. Жиляєв, доктор економічних наук, професор, заступник завідувача секретаріатом Комітету з питань науки і техніки в Верховній раді України (м. Київ).

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(лист №1.4/18-Г-77 від 9.01.2009)

Мамонов К.А.,

М22 Економіко-математичне моделювання (модульний варіант). Навч. посібник для студентів галузі знань 0305 «Економіка та підприємництво», напряму підготовки 6.030509 «Облік і аудит» // К.А. Мамонов, Б.Г. Скоков, С.Я. Політучий – Х.: ХНАМГ, 2010. – 226 с.

ISBN 978-966-695-158-1

У навчальному посібнику обґрунтовано теоретико-методичні підходи до визначення економіко-математичного моделювання, розглянуті методи і моделі лінійного й нелінійного програмування, виявлені особливості оцінювання ризиків на підприємствах в сучасних умовах господарювання України.

У представленому посібнику запропоновані методика економетричного моделювання і напрями її впровадження на підприємстві.

Розрахований на студентів бакалаврату з напряму підготовки «Облік і аудит».

УДК 519.8
ББК 65.053

ISBN 978-966-695-158-1

ЗМІСТ

ВСТУП

У сучасних економічних умовах господарювання, які характеризуються накопиченням негативних явищ, обумовлених світовою фінансової й економічною кризою та трансформаційними процесами України, формування фундаментальних засад розвитку підприємств є актуальним завданням. У цьому аспекті виникає необхідність використання інструментарію, який органічно поєднує математичні методи і економічні показники розвитку підприємств, для прийняття ефективних управлінських рішень.

Економіко-математичне моделювання є дисципліною, яка дає можливість спеціалістам з напряму «Економіка і підприємництво» вирішити визначені складні економічні завдання на основі оволодіння сучасними інструментами і підходами для формування фінансової й економічної політики, зміцнення потенціалу підприємства і виробничої бази.

Метою вивчення курсу є формування системи знань з методології та інструментарію побудови й використання різних типів економіко-математичних моделей.

Завданнями курсу «Економіко-математичне моделювання» є вивчення основних принципів та інструментарію постановки задач, побудови економіко-математичних моделей, методів їх розв’язання і аналізу з метою використання в економіці.

Предметом курсу виступають методологія та інструментарій побудови й розв’язання детермінованих оптимізаційних задач.

Зміст курсу «Економіко-математичне моделювання» для студентів з напряму «Економіка та підприємство» подано в темах:

1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки.
2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі.
3. Задача лінійного програмування та методи її розв’язування.

4. Теорія достовірності та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач.
5. Цілочислове програмування.
6. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем.
7. Аналіз та управління ризиком в економіці.
8. Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику.
9. Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія.
10. Лінійні моделі множинної регресії.
11. Узагальнені економетричні моделі.
12. Економетричні моделі динаміки.

У рамках цього курсу ***виділяють п'ять змістових модулів***:

- ❖ Організація економіко-математичного моделювання.
- ❖ Лінійне програмування в економічних процесах.
- ❖ Цілочислове програмування і нелінійні оптимізаційні моделі.
- ❖ Оцінка і управління ризиком в економіці.
- ❖ Економетричне моделювання.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен

Знати:

- ❖ Основні підходи до організації аналітичної роботи на підприємстві.
- ❖ Застосування методики і техніки економіко-математичного моделювання у фінансово-господарській діяльності.
- ❖ Особливості проведення економіко-математичного моделювання на вітчизняних підприємствах в сучасних економічних умовах господарювання.
- ❖ Інформаційно-методичне забезпечення економіко-математичного моделювання.
- ❖ Місце та роль економіко-математичного моделювання в системі управління економікою підприємства.

Вміти:

- ❖ Використовувати інструментарій економіко-математичного моделювання для прийняття управлінських рішень.
- ❖ Застосовувати методи економіко-математичного моделювання в економічних процесах.
- ❖ Проводити економіко-математичне моделювання на підприємстві.
- ❖ Застосовувати результати економіко-математичного моделювання для прийняття управлінських рішень.
- ❖ На основі розроблених економіко-математичних моделей, будувати ефективно діючий організаційно-економічний механізм управління підприємством.

ХАРАКТЕРИСТИКА ЗМІСТОВИХ МОДУЛІВ ДИСЦИПЛІНИ «ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

Змістовий модуль 1
Організація економіко-математичного моделювання

Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки:

Визначення економіко-математичного моделювання. Ретроспективний аналіз розвитку економіко-математичного моделювання. Види моделей. Основні етапи моделювання. Випадкові події і величини, їх числові характеристики. Закони розподілу випадкової величини. Статистичні гіпотези та їх перевірка. Попередня обробка результатів спостережень і техніко-економічної інформації.

Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі:

Особливості економіко-математичних моделей оптимізації. Модель оптимального планування виробництва. Економіко-математичні моделі оптимізації випуску продукції підприємствами. Економіко-математичні моделі розподілу фінансових ресурсів. Розподіл капітальних вкладень по проектах. Задачі безумовної та умовної оптимізації і методи їх розв'язування.

Змістовий модуль 2
Лінійне програмування в економічних процесах

Тема 3. Задача лінійного програмування та методи її розв’язування:

Сутність лінійного програмування. Особливості задач лінійного програмування. Основні методи розв’язання задач лінійного програмування. Практичні аспекти вирішення задач лінійного програмування.

Тема 4. Теорія достовірності та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач:

Теорія достовірності в економіко-математичному моделюванні. Достовірність. Міра достовірності результатів моделювання. Критерії оцінки достовірності результатів дослідження. Характеристика статистичної несуперечності. Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач. Область допустимих рішень. Критерії оптимальності. Інтерпретація отриманих економічних результатів на основі аналізу лінійних моделей оптимізаційних задач.

Змістовий модуль 3

Цілочислове програмування і нелінійні оптимізаційні моделі

Тема 5. Цілочислове програмування:

Основні поняття і сутність цілочислового програмування. Алгоритм розв'язання задач цілочислового програмування. Метод Гоморі. Метод віток і меж. Транспортна задача, її математичне формулювання і алгоритм вирішення.

Тема 6. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем:

Сутність нелінійних оптимізаційних моделей економічних систем. Використання нелінійних оптимізаційних моделей в економічних процесах. Методи формування нелінійних оптимізаційних моделей економічних систем.

Змістовий модуль 4

Оцінка і управління ризиком в економіці

Тема 7. Аналіз та управління ризиком в економіці:

Поняття, сутність і зміст невизначеності й ризику. Підходи до управління ризиком. Етапи процесу управління ризиком. Аналіз управління ризиком в економіці.

Тема 8. Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику:

Напрями кількісного оцінювання ступеня ризику. Оцінка ризику в абсолютному вираженні. Оцінка ризику у відносному вираженні ризику. Допустимий і критичний ризик. Оцінка ризику ліквідності.

Змістовий модуль 5

Економетричне моделювання

Тема 9. Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія:

Принципи побудови економетричних моделей. Критерії адекватності економетричної моделі. Сутність мультиколінеарності, напрями її виявлення. Парна лінійна регресія.

Тема 10. Лінійні моделі множинної регресії:

Кількісна регресійна модель множинної регресії. Етапи побудови лінійної моделі множинної регресії. t-критерій Ст'юдента і F-критерій Фішера в множинному регресійному аналізі. Тест Дарбіна-Уотсона для оцінки адекватності економетричної моделі. Інтерпретація економетричної моделі.

Тема 11. Узагальнені економетричні моделі:

Узагальнена економетрична модель; узагальнена лінійна економетрична модель; узагальнена нелінійна економетрична модель.

Тема 12. Економетричні моделі динаміки:

Сутність динамічних процесів в економіці. Аналіз часових рядів економічних показників і побудова економетричних моделей динаміки. Авторегресійні моделі й аналіз динаміки економетричних процесів і їх прогнозуванні.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1
ОРГАНІЗАЦІЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Тема 1. Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки

1.1. Визначення економіко-математичного моделювання. Види моделей. Основні етапи моделювання.

1.2. Випадкові події і величини, їх числові характеристики.

1.3. Закони розподілу випадкової величини.

1.4. Статистичні гіпотези та їх перевірка.

1.5. Попередня обробка результатів спостережень і техніко-економічної інформації.

Поняття: економіко-математичне моделювання; модель; подія; випадкова величина; закон розподілу випадкової величини; випадкові помилки; система; імітація; економіко-математичні моделі.

Література: [5], [13], [14], [22], [23], [24], [26], [27], [37], [38], [39], [40], [49], [53], [61], [63], [64], [65], [67], [70], [72], [74], [78], [79], [80].

1.1. Визначення економіко-математичного моделювання. Види моделей. Основні етапи моделювання

Економіко-математичне моделювання - це дисципліна, в якій поєднуються математичні методи для вирішення економічних завдань. Теоретичним базисом економіко-математичного моделювання є економічна теорія, системний аналіз, математичні закони, статистичні методи та ін.

Моделювання процесів у різних сферах діяльності людини здійснювалось ще з глибокої давнини. Методи моделювання використовувались стародавніми єгіптянами і греками в будівництві й архітектурі, технічному конструюванні. Намагання оцінити економічні процеси здійснив грецький філософ Арістотель. Проте формування методологічних аспектів і теоретичного базису використання математичних методів в економічних процесах відбулось значно пізніше.

Обґрунтування використання математичних методів в економіці починається з У. Петі (1623 – 1687 р. р.). У передмові до «Політичної арифметики» він вказує на те, що «замість того, щоб використовувати слова» необхідно перейти до «мови чисел, важелів і мір» [53]. Моделювання процесів у суспільному виробництві здійснив Ф. Кене (1694 – 1774 р.р.), склавши економічну таблицю [27]. В замітках до трактату Д. Міля російський економіст М.Г. Чернишевський (1828 – 1889 р. р.) вказує на використання в політичній економії математичних методів [72].

На початку 19 ст. стрімкий розвиток промислового виробництва й зміни в економічних відносинах привели до необхідності використання математичних методів в економічних процесах. З'являється «математична школа», засновником якої був О. Курно (1801 – 1877 р. р.). Представники математичної школи Г. Госсен (1810 – 1859 р. р.), В. Джевонс (1835 – 1882 р. р.), Л. Вальрас (1834 – 1910 р. р.), Г. Кассель (1866 – 1944 р. р.), Ф. Еджворд (1845 – 1926 р. р.), В. Парето (1848 – 1923 р. р.), В. Дмитрієв (1868 – 1913 р.р.) розробили методологію і сформували систему проведення економічних досліджень математичними методами.

У 20-му столітті і до теперішнього часу математичні методи широко використовуються при розробці економічних моделей і прийнятті управлінських рішень на макро-, мезо- і мікро рівнях. Такі відомі економісти як Ч. Кобб і П. Дуглас, В. Рамсей, Джон фон Нейман, А. Вальд, Р. Фріш, Д. Кейнс, Е. Домар, Р. Харрод, Дж. Робинсон, Д. Мід, Э. Фелпс, В. Канторович, В. В. Новожилов, В. С. Немчинов, В. Леонтьєв вирішували складні економічні проблеми і досліджували процеси з використанням математичних методів.

Ретроспективний аналіз розвитку економіко-математичного моделювання свідчить про його важливість і необхідність використання в економічних процесах, адаптуючись його до сучасних трансформаційних умов та враховуючи ocбливості розвитку підприємств.

Результуючою складовою при моделюванні економічних процесів за допомогою математичних методів є модель, термін якої походить від лат. «зразок, норма, міра». Вона являє собою аналогію, подібність явищ, процесів, об’єктів.

Таким чином, ***модель*** – це зображення об’єкта або системи в оригінальній або аналоговій формі, які розроблені на основі відповідного інструментарію, створюють передумови для здійснення управління і використовуються для прийняття рішень. Зокрема, в технологічних процесах прикладом моделей можуть бути макети машин, споруд, механізмів та ін. Ці моделі засновані на прямій подібності об’єктів.

В економічних процесах широко використовують моделі, які віддзеркалюють причинно-наслідкові зв’язки між економічними факторами і відображають особливості й напрями розвитку економічної системи .

В цілому, виділяють наступні види моделей: фізичні, символьні, аналітичні, словесно-описові, математичні, імітаційні, формальні, функціональні, теоретичні, економічні та ін.

Враховуючи особливості розвитку економічних систем та визначення моделі, як важливою результуючої складової моделювання, видиляють наступні етапи економіко-математичного моделювання:

1) виявлення проблемних аспектів і особливостей економічного процесу, його аналіз, ідентифікація і визначення достатньої структури для моделювання, формування мети і завдань моделювання;

2) аналіз економічних процесів, оцінка використаних ресурсів і потужностей необхідних для здійснення економічного процесу;

3) формування і обробка інформації з економічного процесу;

4) побудова економічної моделі на основі математичного інструментарію;

5) інтерпретація отриманої економіко-математичної моделі, уточнення і коригування її параметрів.

1.2. Випадкові події і величини, їх числові характеристики

В економічних процесах більшість явищ мають випадковий стохастичний (ймовірносний) характер. Тому при їх кількісній оцінці, яка здійснюється на основі використання інструментів економіко-математичного моделювання, необхідно визначати випадкові події і величини.

З позицій теорії пізнання спостережувані в природі й суспільстві явища можна підрозділити на такі види:

- достовірні (визначені), які обов'язково відбудуться, якщо буде здійснена певна сукупність умов, і приймуть умови, які явно можна передбачити;
- неможливі, які явно не відбудуться в певних умовах;
- випадкові, які при сукупності умов можуть відбутися або не відбутися, в результаті випробувань можуть прийняти будь-яке значення, причому невідомо, яке саме;
- невизначені, про які нічого не можна сказати, відбудуться вони або не відбудуться, незалежно від створених умов.

Слід розрізняти випадкові події - факт і випадкові величини.

Під ***"подією"*** розуміється будь-яке (не обов'язково знаменне) явище. ***Подія-факт*** в кількісному і якісному відношенні може бути величиною невизначеною, оскільки про неї нічого не можна сказати наперед з відомою ймовірністю, а випадкова величина пов'язана з характером, змістом дослідженого процесу.

Величина називається випадковою, якщо вона формується під дією багатьох дрібних причин, не піддатливих до результату випробувань повному контролю і обліку, діючих відносно незалежно один від одного.

Економіко-математичне моделювання вивчає кількісні закони масових випадкових величин і явищ, але не ставить перед собою завдання передбачити, відбудеться одинична подія чи ні, - вона просто не в силах це зробити. Одним з напрямів економіко-математичного моделювання є вивчення закономірностей масових однорідних випадкових подій.

Випадкові величини підрозділяються на ***дискретні (переривчасті) й безперервні.***

Дискретними називають випадкові величини, які приймають окремі, строго визначені, ізольовані, кінцеві чисельні значення з певною ймовірністю, між якою не може бути проміжних (число робітників у бригаді, число перевезених за один рейс пасажирів і т.п.). При цьому число можливих значень дискретної випадкової величини може бути кінцевим і нескінченним. Частіше зустрічаються ***безперервні випадкові величини***, які можуть мати всі можливі значення в деякому кінцевому або нескінченному проміжку. Очевидно, кількість можливих значень безперервної випадкової величини нескінченне, наприклад, рівень собівартості перевезення одного пасажира, продуктивність праці тощо.

Оскільки точність вимірювання або обліку завжди обмежена, то практично всі випадкові величини є дискретними.

Значна частина економіко-математичного моделювання пов'язана з необхідністю досліджувати і описувати велику сукупність об'єктів. Звичайно цю сукупність називають ***генеральною***. Вона охоплює, наприклад, усіх мешканців великого міста, продукцію галузі народного господарства.

Якщо досліджена сукупність об'єктів кількісно значна або об'єкти вивчення важнодоступні, а також є інші причини, що не дозволяють вивчити всі об'єкти, то вдаються до визначення будь-якої частини генеральної сукупності, що називається ***вибіркою.***

Вибірка повинна бути представницькою або, як зазначають, репрезентативною. Якщо вибірка представляє не всю генеральну сукупність, а відповідну її частину, то це називається зсувом вибірки. ***Зсув*** - одне з основних джерел помилок при використанні вибіркового методу.

В економіко-математичному моделюванні необхідно визначити вибірку, що складається з n однорідних одиниць (елементів). Число n називається

обсягом вибірки. Одиницями вибірки можуть бути різні економічні процеси і явища, результати виробничо-господарської діяльності підприємств: продуктивність праці, собівартість продукції, фондовіддача, рентабельність та ін.

Кількісні значення, які приймає досліджена ознака, називають ***варіантами***. Зміна величини ознаки в статистичній сукупності називається ***варіацією (коливається або розсіюванням)***.

Для того, щоб замінити в зареєстрованих значеннях процесу будь-яку закономірність, їх треба привести до доступного для аналізу вигляду, тобто впорядкувати, класифікувати, систематизувати, згрупувати. Процес розчленовування дослідженої сукупності на частини називається ***угрупованням***.

Початковою базою для вивчення закономірностей тих чи інших явищ є статистичні ряди розподілу, які будують за якісними і кількісними ознаками.

Якщо ряди є послідовністю чисел, що характеризують зміну показника в часі, то вони називаються ***тимчасовими***, а якщо показують розподіл одиниць сукупності по окремих групах, виділених за певною ознакою, то їх визначають ***варіаційними.***

Число, що показує, скільки разів зустрічається та або інша одиниці сукупності називається його ***частотою m.***

Варіаційний ряд або ряд розподілу є таблицею, в якій в порядку убування або зростання перераховані можливі значення випадкової величини за вибіркою з вказівкою їх частот (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 - Значення випадкової величини

Значення випадкової величини	X_1	X_2	X_3	...	X_n
Частоти	m_1	m_2	m_3	...	m_n

Очевидно, що сума всіх частот дорівнює обсягу вибірки:

$$m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n = \sum_{i=0}^{n} m_i = n, \qquad (1.1)$$

де n-загальне число спостережень.

Якщо різних значень випадкової величини багато, то ряди розподілу складають в інтервальній формі. Різниця між верхньою X_i і нижньої X_{i-1} межами інтервалу називається його величиною:

$$\Delta X_i - X_i - X_{i-1}. \qquad (1.2)$$

Кількість інтервалів не повинна бути надмірно великим. Для того, щоб можна краще проявити характерні особливості, пов'язані з природою величин, рекомендується ділити проміжок варіації на 6÷16 інтервалів залежно від обсягу вибірки.

Отже, для визначення величини інтервалів необхідно різницю X_{max} і X_{min} (розмах варіювання) розділити на $6 \div 16$ залежно від числа спостережень:

$$\Delta x_i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{6 \div 16}. \qquad (1.3)$$

У літературі зустрічається ще таке визначення розрахунку інтервалів, як використання формули Стерджеса:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.32 \ln n}. \qquad (1.4)$$

Отримане значення інтервалу ΔX звичайно округляють. За величину і особливо центр інтервалу приймають деяке "зручне число", що має невелике число значущих цифр, щоб полегшити надалі обчислення. Запис інтервальних рядів розподілу поданий в табл. 1.2.

Таблиця 1.2 - Інтервальні ряди розподілу

Значення випадкових величин	$X_1 - X_2$	$X_2 - X_3$	$X_3 - X_4$	…	$X_{n-1} - X_k$
частоти	m_1	m_2	m_3		m_k

Сума частот представлена наступним чином:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n \,. \tag{1.5}$$

Дослідження не обмежується побудовою ряду розподілу тієї або іншої випадкової величини. Необхідно знайти декілька величин, так званих статистичних характеристик, які відображали б властивості ряду розподілу в цілому, повніше характеризували сукупність і властиві їй закономірності. Інакше кажучи, ставиться завдання знаходження такого значення випадкової величини, навколо якої групуються всі інші і зустрічаються найбільш часто. Найважливішим і найпоширенішим з них є середня арифметична, яка позначається символом $\bar{X}$. Якщо випадкова величина приймає n значень, то середня арифметична за незгрупованими даними є сумою її значень, розділеною на їх число:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \,. \tag{1.6}$$

Середню арифметичну зважену за групованими даними обчислюють таким чином:

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + ... + x_k m_k}{\sum_{i=1}^{k} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} \,. \tag{1.7}$$

Середня арифметична, як і середня арифметична зважена, володіє тією властивістю, що сума відхилень значень випадкової величини від середньої арифметичної дорівнює нулю. Ця властивість дає можливість визначити середню арифметичну як центр угрупування випадкової величини.

Крім середнього значення ознаки важливо знати характер варіації, тобто як тісно концентруються всі значення елементів сукупності навколо середньої. З теоретичної точки зору самою відповідною мірою коливання ознаки служить ***дисперсія*** (від латинського *dispercia* - розсіяння), є квадратом відхилення досліджених даних від середнього значення:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i-1}^{k}(x_i - \overline{x})^2}{n}, \tag{1.8}$$

за незгрупованими даними,

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i-1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 m_i}{n} \tag{1.9}$$

- за згрупованими даними.

Враховуючі вищезазначене, дисперсія випадкової величини в окремих випадках може мати нереальну розмірність. Для її усунення вводять середньоквадратичне відхилення, що розглядається в тих же одиницях вимірювання:

$$\sigma_2 \sqrt{\sigma_x^2}\ . \tag{1.10}$$

Безрозмірним показником коливання випадкової величини є ***коефіцієнт варіації***, який є відношенням σ_x , $\overline{x}$, відображеним у відсотках:

$$v_x = \frac{\sigma_x}{\overline{x}} * 100\% . \tag{1.11}$$

Якщо дисперсія або коефіцієнт варіації великі, то це свідчить про значний розкид середнього значення її випадкової величини.

Слід зазначити, що випадкова величина характеризується двома параметрами:

- безліччю можливих значень;

- ймовірністю того, що вона прийме ти чи інші значення з цієї множини.

Ймовітність є одним з основних понять математичної статистики, яка відображає об'єктивну можливість відбутися або не відбутися випадковому явищу.

При вивченні рядів розподілу використовують не тільки абсолютні значення появи випадкової величини m_i (частоти), але й відносні частоти, тобто $\frac{m}{n}$.

Згідно з теоремою Я. Бернуллі (1654-1705), що отримала назву "закону великих чисел" у статистиці, можна передбачати відносну частоту події.

Теорія Я. Бернуллі була опублікована в 1713г. Стосовно вибірки вона формулюється так: *з вірогідністю, скільки завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що різниця між відносною частотою і часткою в генеральній сукупності при достатньо великому обсязі вибірки буде скільки завгодно малою.*

Коротко теорема Я. Бернуллі записується так:

$$\frac{m}{n} = \frac{вер}{m \to \infty} p\,. \tag{1.12}$$

З цього виходить, що ймовірність події *A* визначається формулою

$$\mathrm{P}\ (\mathrm{A}) = \frac{m}{n}\,. \tag{1.13}$$

Сума всіх відносних частот дорівнює 1, тобто

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + ... + \frac{m_k}{n} = P_1 + P_2 + ... + P_k = \sum_{i=1}^{k} P_i = 1\,. \tag{1.14}$$

З визначення ймовірності випливають *наступні її властивості*:

1. Ймовірність неможливої події дорівнює 1. При m=n

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю. При m=0

$$\mathrm{P_a} = \frac{m}{n} = \frac{o}{n} = 0.$$

3. Ймовірність випадкової події є позитивне число, укладене між нулем і одиницею.

Дійсно випадковій події сприяє лише частина із загального числа елементарних результатів випробувань. У цьому випадку $o<m<1$, значить

$$o < \frac{m}{n} < 1$$

$$o \le \mathrm{P(A)} \le 1.$$

4. Ймовірнсть протилежної події дорівнює різниці між одиницею і вірогідністю визначеної події, тобто

$$\mathrm{P(B)} = 1 - \mathrm{P(A)}.$$

5. Якщо в результаті випробування повинно відбутися одне, і тільки одне з деяких подій $A_1, A_2, \ldots A_к$, то сума всієї ймовірності дорівнює одиниці, тобто

$$P_1(A_1) + P_2(A_2) + \ldots + P_k(A_k) = 1.$$

Одним з узагальнюючих результатів закону великих чисел є те, що при достатньо великій кількості спостережень *n* середнє значення випадкової величини $\overline{X}$ приблизно дорівнює її математичному очікуванню, або $M_{(x)} = \overline{X}$. Така середня називається ***стохастичною***. Таким чином, математичне очікування дискретної випадкової величини є ***невипадкова (постійна) величина***. Тим самим П.Л. Чебишев (1821-1894) довів, що сукупні дії великої кількості чинників призводять до результату, майже не залежному від випадку.

У вузькому значенні слова під законом великих чисел розуміється ряд математичних теорем, в яких встановлюється факт наближення середніх показників у результаті великої кількості спостережень до деяких постійних величин.

У широкому значенні слова зміст закону великих чисел полягає в тому, що при великому числі випадкових явищ їх середній результат практично перестає бути випадковим і може бути представлений з великою визначеністю.

Дослідження випадкової величини в економічних процесах здійснюється на основі відповідних законів розподілу цієї величини.

1.3. Закони розподілу випадкової величини

Законом розподілу випадкової величини називається співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Найпростішою формою такого закону є таблиця, в якій перераховані можливі значення випадкової величини та відповідні їм ймовірності (табл. 1.3).

Таблиця 1.3 - Значення випадкової величини і відповідні їм ймовірності

X_1	X_2	X_3	...	X_n	Разом
P_1	P_2	P_3	...	P_n	$\sum_{i=1}^{n} Pi = 1$

Щоб надати ряду розподілу наочний вигляд, будують його графічне зображення у вигляді гістограми, полігону, кумуляти і огіви.

Табличний розподіл можливих значень випадкової величини і відповідних їй ймовірностей, графічне зображення кривих розподілу та аналітичний опис вказаної залежності є форми закону розподілу.

Криві розподілу можуть бути самої різної форми. Проте серед них слід виділити так звані одновершинні криві, які часто зустрічаються.

В економічних дослідженнях симетричні розподіли зустрічаються рідко. Набагато частіше вершина кривої знаходиться не в центрі, а дещо зміщена. Зустрічається також двопіковий розподіл. Його наявність свідчить про те, що розглядається неоднорідна сукупність.

Теоретичними розподілами в економічних дослідженнях головним чином є закони Пуассона, показовий, біномінальний, Ст'юдента, X_u^1- квадрат, Лапласа, нормальний та ін. Останній реалізується для випадкових величин, які формуються під сумарною дією багатьох незалежних між собою дрібних причин, дія кожної з яких мала в порівнянні із загальним результатом.

У економіко-математичному моделюванні нормальний розподіл відіграє роль стандарту, з яким порівнюються інші розподіли.

Формула нормальної кривої має наступний вигляд:

$$Y = f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})}{2\sigma_x^2}}, \qquad (1.15)$$

де X - випадкова величина;

$\overline{X}$ - середнє арифметична або математичне очікування;

σ_x - середнє квадратичне відхилення;

π =3,14159, e=2,71828 - відомі константи.

Повертаючись до кривих розподілу випадкової величини, слід вказати на криву Гаусса – Лапласа, яка має горбоподібний вигляд і симетрично розташовується відносно вертикальної прямої (рис. 1.1). Центр угрупування випадкової величини і форму нормальної кривої визначають числові характеристики $\overline{X}$ і σ_x.

При X= $\overline{X}$ функція має максимум, який дорівнює

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}. \qquad (1.16)$$

Симетрія кривої X=$\overline{X}$ вважається основною властивістю нормального розподілу: однакові відхилення значення випадкової величини від її середнього в обидві сторони зустрічаються однаково часто.

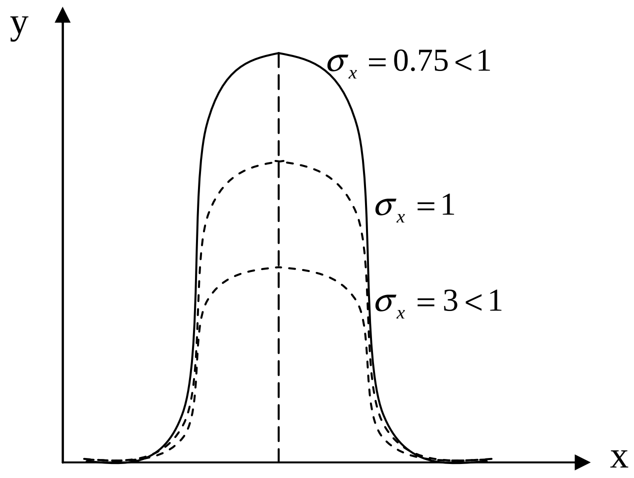


Рис. 1.1. Крива Гаусса – Лапласа

При збереженні своєї загальної форми крива розподілу нормального закону може мати різний ступінь пологості й крутизни залежно від значення σ_x.

У економіко-математичних дослідженнях, незалежно від розмірності випадкової величини *X*, може бути визначена відносна частота.

По правому боці 3σ - це величина абсолютного відхилення випадкової величини від середнього по вибірці менше ± $3\sigma_x$ з вірогідністю 0,997. Лише 0,3% всього *Xi* числа спостережень виходить з "трисигмових меж". В інтервалі від X-σ_x до X+σ_x знаходиться 68,3% спостережень, в інтервалі від X-$2\sigma_x$ до X+$2\sigma_x$ - 95,5% спостережень.

Оскільки площа диференційованої функції нормального розподілу дорівнює одиниці, то зі зростанням σ_x максимальна ордината нормальної кривої убуває, а сама крива стає більш пологою. Навпаки, з убуванням σ_x нормальна крива стає більш гостроверхою.

При $\overline{X}$=0 і уx=1 нормальну криву називають ***нормованою***, яку кількісно можна описати:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1.17}$$

Величина $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ табульована і може бути визначена з відповідних математико-статистичних таблиць (диференціальна функція Лапласа). У цих таблицях наведені функції *f(x),* відповідні позитивним значенням *X.* Для від'ємних *X* користуються тими ж таблицями, оскільки функція *f(x)* парна, тобто *f(-x)=f (x)*. У таблиці наводяться значення *f(x)* для *X* від 0 до 4 через 0,01.

Для того, щоб можна було користуватися готовими таблицями, потрібно криву нормального розподілу привести до стандартної форми. Стандартизація полягає в переході від випадкової величини *X*, має математичне очікування $\overline{X}$ і середньоквадратичне відхилення σ_x, до допоміжної величини, що називається центрованим і нормованим відхиленням:

$$t = \frac{x - \overline{x}}{\sigma_x} \text{ чи } \Delta X = t\,\sigma_x. \tag{1.18}$$

Використовуючи відповідні таблиці значень, будують таблицю стандартизованого розподілу вірогідності.

Якщо на вісь абсцис нанести значення *t,* а на вісь ординат ймовірність *P(t),* то графічне зображення дає нормальну криву. Фізичне значення *t* означає, на скільки середньоквадратичних відхилень σ_x змінюється значення випадкової величини від її середнього значення $\overline{X}$.

В економіко-математичному моделюванні економічних процесів необхідно формулювати статистичні гіпотези та перевіряти їх на достовірність.

1.4. Статистичні гіпотези та їх перевірка

При вибіркових обстеженнях допускаються різного роду похибки, при цьому розрізняють грубі, систематичні й випадкові помилки.

Грубі помилки за абсолютними величинами значно відрізняються від всього ряду помилок і підлягають виключенню з ряду спостережень.

Систематичні помилки є наслідком впливу певних чинників, що спотворюють результати вимірювань за певним законом у відомому напрямі. Вони викликані зносом засобів вимірювання, їх неправильною установкою, дією зовнішнього середовища і т.п.

Випадковими називають такі помилки, характер зміни яких не володіє видимою закономірністю. Кожна подальша помилка за абсолютним значенням може бути більше або менше попередньої.

Аналіз випадкових похибок ґрунтується на теорії випадкових помилок, яка дає змогу з певною гарантійною вірогідності обчислити дійсне значення досілдженої величини.

В основі теорії випадкових помилок лежать такі підтверджені досвідом висновки:

1. Різниця *у* значеннях характеристики вибіркової і генеральної сукупності складе помилку вибірки $\tilde{X}-\overline{X}=\varepsilon_x$, $\overline{\sigma}-\sigma_x=\varepsilon_\sigma$ і т.п. Ці помилки є випадковими величинами. Тому необхідно в кожному конкретному випадку визначити не тільки розмір помилки, але і надійність або гарантію того, що цей розмір не буде перевищений.

2. Вибіркові середні також симетрично розподіляються навколо генеральної середньої, незалежно від характеру розподілу випадкової величини в генеральній сукупності.

Закономірність розподілу випадкових помилок спостережень описується нормальною кривою (рис. 1.2). К. Гаусс (1777-1855 р. р.) використовував її як основу для теорії випадкових помилок вимірювань.

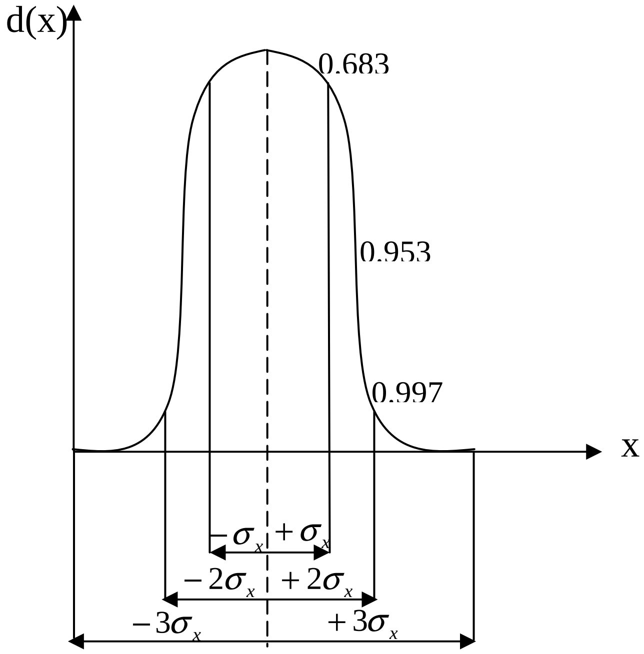


Рис. 1.2. Крива розподілу випадкових помилок спостережень

Вся площа під кривою дорівнює 1. Основна маса випадкових помилок групується навколо середнього значення, яке дорівнює 0.

На ділянці, обмеженій $\overline{X}+\sigma_x$, знаходиться 68,3% всіх спостережень; на ділянці, обмежений $\overline{X}+2\sigma_x$ і $\overline{X}-2\sigma_x$ –95,3%; на ділянці, обмеженій $\overline{X}+3\sigma_x$ і $\overline{X}-3\sigma_x$ –99,7%.

На основі характерних властивостей розподілу випадкових помилок спостережень можна зробити висновок, що при достатньо великому обсязі вибірки *n* її кількісні характеристики за ймовірністю наближаються до відповідних значень характеристики генеральної сукупності.

Рівень значущості звичайно вимірюється у відсотках та їх чисельне значення засноване на так званому принципі незалежності маловірогідних подій. На практиці звичайно приймають рівні значущості, що знаходяться між 0,01-0,05. Відповідно їх називають одновідсотковими, двовідсотковими і т.п.

З принципу неможливості маловірогідних подій випливає наступний висновок: якщо випадкова подія має вірогідність дуже близьку до одиниці, то практично можна вважати, що в одиничному випробуванні ця подія наступить ($P \geq 0,99$).

Припущення щодо закономірностей, які мають місце в генеральній сукупності, називається ***статистичною гіпотезою***, а критерій її перевірки - ***статистичною характеристикою***.

Як критерій перевірки вибирають деяку статистичну характеристику. Припущення, що висувається, може бути помилковим, внаслідок вибіркової помилки, і має назву нульової гіпотези H_o.

Конкуруюча (протипожежна) гіпотеза означає, що має місце суттєва відмінність між вибірковими значеннями в генеральній сукупності. Сформулювавши гіпотезу H_o, можна зіткнуться з чотирма ситуаціями:

- гіпотеза H_o правильна, а її забракували, оскільки характеристика потрапила в критичну область, тобто допущена помилка першого роду, вірогідність якої відповідає рівню значущості α;

- гіпотеза правильна та її прийняли, оскільки характеристика потрапила в допустиму область, тобто рішення правильне;

- гіпотеза неправильна та її прийняли, оскільки характеристика потрапила в критичну область, тобто рішення правильне;

- гіпотеза неправильна, а її відкинули, оскільки характеристика потрапила в допустиму область. Допущена помилка другого роду, тобто прийнята невірна гіпотеза.

Як видно, рівень значущості можна тлумачити як ризик вчинити помилку першого роду, тобто відкинули правильну гіпотезу. В зв'язку з цим для ухвалення гіпотези рівень значущості призначають п'ятивідсотковий (α=0,05), а для бракування гіпотези - одновідсотковий (α=0,01).

Довірчі межі та критична область ряду розподілу представлена в рис. 1.3.

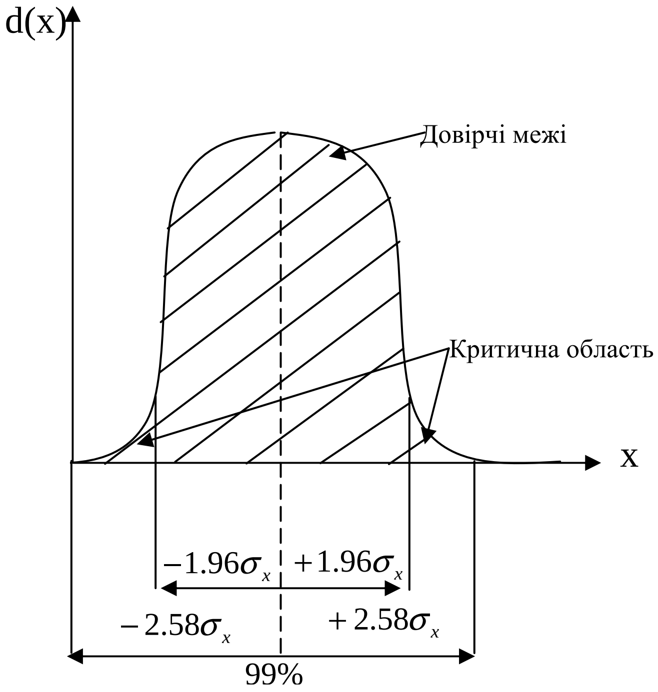


Рис. 1.3. Довірчі межі й критична область ряду розподілу

Областю ухвалення гіпотези називають сукупність значень вибраного критерію, при яких гіпотезу приймають, критичною областю - при значеннях критеріях, коли нульову гіпотезу відкидають (див. рис. 1.3).

Вибіркова середня є певне число, яке можна розглядати як випадкову величину. Отже можна говорити про її розподіл і про числові характеристики цього розподілу ($\overline{X}$, σ_x^2, σ_x та ін.).

Двостороння область, в яку повинна потрапити середня генеральної сукупності, визначається довірчими межами при певному рівні значущості $2Ф(t)=0,95$ або за інтегральною функцією Лапласа $t=1,96$.

Інтервал $X \pm 1,96\sqrt{\frac{\delta x^2}{n}}$ означає, що з вірогідністю $P=0,95$ генеральна середня потрапляє в довірчі межі, а з вірогідністю $P=0,05$ лежить зовні цих меж, тобто потрапляє у критичну область. Міра можливої відмінності між вибірковою середньою і середньою генеральної сукупності має назву ***стандартної помилки***.

Слід зазначити, що вибіркові середні, як і випадкові помилки спостережень, симетрично розподіляються навколо генеральної середньої за умови, що обсяг вибірки складає $n \geq 30$ спостережень. При малому обсязі вибіркових даних $n \geq 30$ розподіл вибіркових середніх відрізняється від нормального тим більше, чим менше обсяг вибірки.

Межі довірчого інтервалу при малих вибірках $n \geq 30$ обмежується коефіцієнтом t_α, який був запропонований в 1908 р. англійським математиком і хіміком В.С. Госсетом, який публікував свої роботи під псевдонімом "Ст'юдент" - студент. Надалі цей коефіцієнт отримав назву коефіцієнту Ст'юдента (це спеціально розроблені таблиці з урахуванням обсягу вибірки).

Доцільно дотримуватися такої послідовності попередньої обробки результатів спостережень при $n \geq 30$:

1. Результати спостережень записують в таблицю.

2. Визначають середнє значення $\overline{X}$ з n спостережень:

$$\overline{X = \frac{1}{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{1.19}$$

3. Визначають похибки окремих спостережень:

$\Delta X_i = \overline{X} - X_i$ та їх квадрати $(\Delta X_i)^2$.

4. Відсіюють спостереження, різко відмінні від інших. Для цього знаходять:

4.1. Записують середню квадратичну похибку:

$$\Delta\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}{n}}. \tag{1.20}$$

4.2. Задаються значенням похибки α =0,95.

4.3. Визначають коефіцієнт Ст'юдента t_α=(n) для заданої надійності Р і кількості спостережень n.

4.4. Знаходять межі довірчого інтервалу (похибки результатів спостережень):

$\Delta X = t_\alpha(n)\, \Delta\sigma_x$, $X = \overline{X} \pm \Delta X$.

4.5. Обчислюють відносну похибку вибіркових даних:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} * 100\%. \tag{1.21}$$

1.5. Попередня обробка результатів спостережень і техніко-економічної інформації

Економічні явища утворюються не як результат однозначного зв'язку причин і наслідку, а як результат складного переплетіння і взаємодії багатьох причин і наслідків, які здійснюються в економічних процесах.

Економіко-математичному моделюванню передує чітке уявлення суті вирішуваної задачі, аналіз її змісту з використанням технологічної, економічної і управлінської логіки. ***При цьому доцільно***:

- вивчити літературу й узагальнити професійні знання про об'єкт дослідження;
- чітко сформулювати мету і завдання дослідження;
- визначити джерела, обсяг і методи отримання виробничо-економічної інформації;
- провести попередній якісний і кількісний математико-статистичний аналіз результатів спостережень.

При визначенні умов виробництва, що впливають на досліджений показник, слід дотримуватися апробованих ***принципів якісного аналізу***:

- кожний чинник повинен бути теоретично обґрунтованим і змістовним, мати самостійне значення і не дублювати інші;
- вибіркові дані повинні бути представницькими, мати точне кількісне вимірювання, бути однорідними і зіставлюваними в часі й просторі.

Джерелами отримання виробничо-економічної інформації служать: статистична, бухгалтерська, виробничо-господарська, результати хронометражних спостережень і фотографії робочого часу, дані спеціальних обстежень і експериментів, що проводяться, експертні оцінки фахівців та інші матеріали.

Об'єктивність економіко-математичного моделювання багато в чому залежить від показовості (репрезентативності) й однорідності вибіркових даних.

Заздалегідь обґрунтовують обсяг вибірки *n* або перевіряють достатність початкової інформації для отримання математико-статистичних моделей заданої точності й надійності.

За теоремою Ляпунова для різних незалежних вибірок достатньо великого обсягу n, отриманих з однієї і тієї ж генеральної сукупності, середнє арифметичне $\bar{Y}$ підкоряється нормальному закону розподілу з дисперсією σy^2, рівної 1/n-ї частини дисперсії випадкової величини. При цьому максимальне відхилення є вибірковою середньою $\bar{Y}$ від генеральної середньої Ў, має назву ***стандартної помилки*** і визначається за формулою

$$\breve{Y}-\bar{Y}=t_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma y^2}{n}}\ , \tag{1.22}$$

де t_{α} – значення змінної в стандартизованому масштабі.

$$t_{\alpha}=\frac{Y_i-\bar{Y}}{\sigma y} \tag{1.23}$$

визначається за інтегральною функцією Лапласа. Звідси

$$n=\frac{t_{\alpha}{}^2\cdot\sigma y^2}{\varepsilon^2}\ , \tag{1.24}$$

де n – кількість спостережень.

Розглянемо декілька прикладів попередньої обробки результатів спостережень.

Приклад. Встановити, при якому обсязі спостережень n вибірка є генеральною сукупністю, якщо P=0,95 або 95%, ε=0,85 і σy=4,56?

Вирішення

$P=2\Phi(t_{\alpha})=0,95$ або $\Phi(t_{\alpha})=\frac{0,95}{2}0,475$ за нормованою інтегральною функцією Лапласа знаходимо t_{α}=1,96. Звідси

$$n=\frac{t_{\alpha}{}^2\cdot\sigma y^2}{\varepsilon^2}=\frac{1,96^2\cdot 4,56^2}{0,85^2}=35 \text{ спостережень}$$

Виявлення спостережень, різко відмінних від основної маси вибіркових даних, ґрунтується на тому, що коли $\bar{Y}_i$ розподілені приблизно за нормальним законом, то найбільше відхилення від середнього значення за абсолютною величиною перевищує приблизно $3\sigma y^2$, тобто всі спостереження повинні розміщуватися в інтервалі

$$\bar{Y}-3\tau_y \leq y_i \leq \bar{Y}+3\tau_y .$$

Точніше, контроль приналежності до досліджуваної вибірки різко відмінних значень проводиться при рівні значущості α з урахуванням обсягу вибірки n. При цьому визначають $\phi(t_\alpha)=\sqrt[n]{1-\alpha}$ - 0,5,

а потім за таблицею інтегральної функції Лапласа знаходять значення t_α і допустимий інтервал записують у вигляді

$$\bar{Y}-t_\alpha\tau_y < Y_i < \bar{Y}+t_\alpha\tau_y .$$

Приклад. Є вибірка обсягом *n*=150 спостережень. Середнє значення по вибірці $\bar{Y}$ =12,86; середнє квадратичне відхилення σ_y^2=6,24; рівень значущості α =0,05; максимальне значення ознаки y_{max} =32,64, що вивчається; мінімальне – y_{min} =3,42. Визначити можливість використання в подальших дослідженнях y_{max} і $y_{min.}$

Вирішення

При заданому рівні $\phi(t_\alpha)=\sqrt[150]{1-0{,}05}-0{,}5=0{,}4996$, t_α =3,366.

Допустимий інтервал дорівнює

$$\bar{Y}-t_\alpha\tau_y = Y_i \leq \bar{Y}+t_\alpha\tau_y = 12{,}86-3.366\cdot 6.24 < Y_i < 12{,}86+3{,}366\cdot 6{,}24 = -8{,}14 < Y_i < 33{,}86$$

Всі спостереження можуть бути використані при подальшій обробці.

У разі, якщо початкова інформація отримана по декількох об'єктах або групах, необхідно перевірити її однорідність. Така перевірка ґрунтується на гіпотезі рівності вибіркових середніх обсягами n_i і n_j, отриманих з однієї генеральної сукупності.

З теореми Чебишева, що зі збільшенням обсягу вибірки її середнє значення прагне за вірогідністю до генеральної середньої, випливає наступний висновок: якщо по декількох вибірках достатньо великого обсягу з однієї і тієї ж генеральної сукупності буде знайдено вибіркові середні $\bar{Y}_i$ і $\bar{Y}_j$, то вони будуть приблизно рівні між собою.

За умови незалежності вибірок і їх приналежності до єдиної нормально розподіленої генеральної сукупності для будь-яких двох вибірок і-ї і j-ї маємо ймовірність

$$\{|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j|\} \le t_{ij}\sqrt{\frac{\tau_i^{\,2}}{n_i} + \frac{\tau_j^{\,2}}{n_j}} = 2\phi(t_{ij}), \tag{1.25}$$

де σ_i^2, σ_j^2 – вибіркові дисперсії;

n_i, n_j – обсяги вибірок.

Наявні різниці $\bar{Y}_i - \bar{Y}_j$ відносяться до відповідної стандартної помилки. Як критерій перевірки приймають нормовану різницю, яку обчислюють на основі співвідношення: $\frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}{\sqrt{\frac{\tau_i^{\,2}}{n_i} + \frac{\tau_j^{\,2}}{n_j}}} \le t_{ij}$,

що порівнюється з табличним значенням t_α, де $2\Phi(t_\alpha)=1-\alpha$.

Гіпотеза однорідності вибіркових даних затверджується при $P=2\Phi(t_\alpha)=0,95$ і менше, тобто $\alpha=0,05$ і більше. Це означає, що при всіх значеннях $t_{ij} \le 1,96$ вся сукупність вихідних даних вважається приблизно однорідною і обробка може вестися по всьому масиву.

Приклад. По двох об'єктах зібрана інформація з наступними кількісними характеристиками: $n_1=54$; $n_2=56$; $\bar{Y}_1=16,13$; $\bar{Y}_2=13,5$; $\sigma_{y1}^2=65,3$; $\sigma_{y2}^2=57,9$. Визначте рівень значущості при формуванні гіпотези про однорідність сукупності вибіркових даних.

Вирішення

Визначаємо t_{ij}(max) для y_1 і y_2: $t_{ij} = \dfrac{16{,}13 - 13{,}5}{\sqrt{\dfrac{65{,}3}{54} + \dfrac{57{,}9}{56}}} = 1{,}76$

Звідси Р=2Ф(1,76)=0,92 або 92%.

Гіпотеза про однорідність сукупності вибіркових даних затверджується з рівнем значущості α =0,08 або 8%.

Необхідність знання закону розподілу в кореляційному аналізі зумовлена насамперед обґрунтовуванням форми зв'язку між змінними.

Нормальний закон реалізується для випадкових величин, які формуються під сумарною дією багатьох відносно незалежних між собою причин, дія кожної з яких незначна в порівнянні із загальним результатом.

Результати спостережень обробляють в такій послідовності:

1. Вихідні дані розбивають на інтервали і складають ряд розподілу функціональної ознаки y_i, визначають абсолютні й відносні частоти і будують гістограма розподілу.

2. Розраховують параметри закону розподілу $\bar{Y}$ і σ_y. Для спрощення роботи вводиться безрозмірна величина

$$y'_{ср} = \frac{Y_{i\,cp} - C_y}{\Delta y}, \qquad (1.26)$$

де Y_{icc} - деяке інтервальне значення функції;

C_y – інтервальне значення Y_{icp}, прийняте за центр угрупування;

Δy – інтервал зміни випадкової величини.

Дійсне значення $\bar{Y}$ и σ_y визначаються на основі співвідношень $\bar{Y} = \bar{Y}'\Delta y + Cy$, $\tau_y{}^2 = \tau'_y{}^2 \cdot \Delta y^2$ и $\tau_y = \tau'_y \cdot \Delta y$.

3. Знаходять середнє інтервальне значення Y_{icp} в стандартизованому масштабі, відповідне центрам інтервалів. За допомогою диференціальної функції Лапласа для кожного ti знаходять значення f(t);

Визначають ординати теоретичної кривої розподілу і за знайденими точками будують теоретичну криву:

$$Y_н = \frac{f(t)}{\tau_y}. \qquad (1.27)$$

Оцінюють ступінь згоди теоретичної кривої з дослідженими даними. Оцінку ступеня згоди частіш за все проводять за допомогою критерію χ^2 – «*хі-квадрат*» Пірсона, який є спеціально підібраною випадковою величиною, що визначається за формулою

$$\chi'^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - \bar{m})^2}{\bar{m}_i}, \qquad (1.28)$$

де k – число інтервалів угрупування змінної;

$\bar{m}_i$ - емпіричні й теоретичні частоти.

Задаючись довірчим рівнянням значущості α=5%, за допомогою таблиці χ'^2 – розподілу за числом ступенів свободи

$$f=K-(S+1), \qquad (1.29)$$

де K –число інтервалів;

S – ступінь свободи

(для нормального розподілу S=2($\bar{Y}$,σ_y), оскільки необхідно скласти 2 рівняння для знаходження теоретичного розподілу $\bar{Y}$ і σ_y).

Встановлюють критичне значення χ'^2, з якими порівнюють розрахункове значення.

Якщо обчислене значення χ'^2 за дослідженими даними менше табличного, тобто воно потрапляє в область прийняття гіпотези H_0, то теоретична крива розподілу узгоджується з емпіричним розподілом. Якщо чисельне значення χ'^2 перевершує табличне або рівне йому, тобто воно потрапляє в критичну область, дана гіпотеза H_0 про форму кривої розподіл відкидається.

Приклад. Визначити закон розподілу витрат часу проходження рухомим складом маршруту між двома зупинками (хв.) при n=180 спостережень і y_{min}=0,70, y_{max}1,57 хв. Розмір інтервалу складає 0,1. Побудуйте гістограму і полігон розподілу. Розрахуйте показники нормального закону розподілу.

Вирішення

Результати побудови гістограми і полігону розподілу представлені на рис. 1.4 і 1.5.

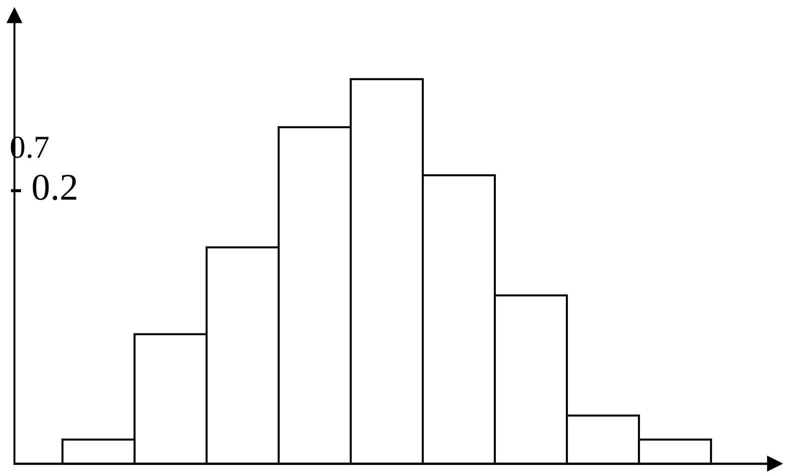


Рис.1.4. Гістограма розподілу

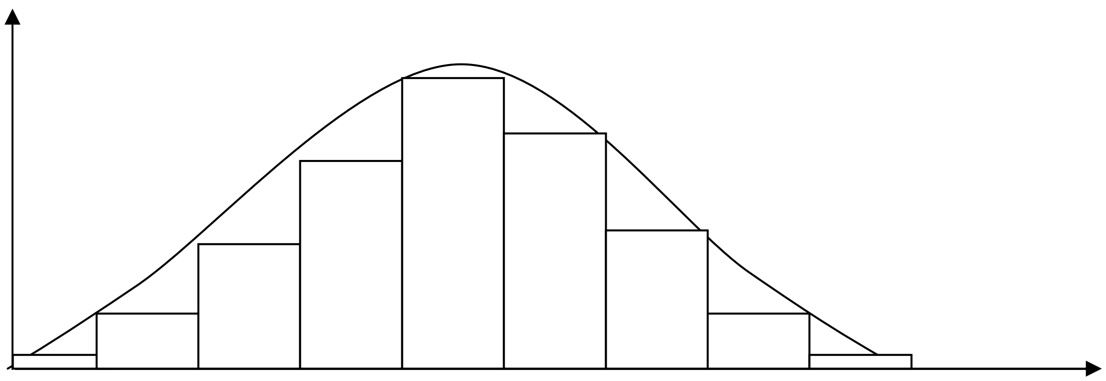


Рис. 1.5. Гістограма і полігон розподілу

На підставі даних, поданих в табл. 1.4, отримуємо:

$$\bar{Y}' = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i y'_{cp}}{n} = -\frac{69}{180} = -0{,}38;$$

$$\bar{Y} = \bar{Y}'\Delta y + C_y = (-0{,}38)\cdot 0{,}1 + 1{,}15 = 1{,}11;$$

$$\bar{Y}'^{2}_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{k} y'^{2} m_i}{n} = \frac{481}{180} = 2{,}67;$$

1) $\tau_y'^2 = \tau_{cp}'^2 - \bar{y}'^2 = 2{,}97 - (-0{,}38)^2 = 2{,}57$

$\tau_y^2 = \Delta y^2 \tau_y'^2 = 0{,}1^2 \cdot 2{,}57 = 0{,}025;\ \ \tau_y = \sqrt{0{,}025} = 0{,}159$;

2) $\tau_y'^2 = \dfrac{(y_{cp}' - \bar{y}')^2 m_i}{n} = \dfrac{448{,}6316}{180} = 2{,}4924;$

$\tau_y^2 = 0{,}1^2 \cdot 2{,}4924 = 0{,}025;\ \ \tau_y = \sqrt{0{,}025} = 0{,}159$

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{m_i} = \dfrac{(3-3{,}36)^2}{3{,}36} + \dfrac{(13-11{,}9)^2}{11{,}9} + \ldots + \dfrac{(1-1{,}03)^2}{1{,}03} = 0{,}795$

$f = k - (S+1) = 9 - (2+1) = 6;$ $\chi^2_{рас} < \chi^2_{табл}$. 5%.

Таким чином, теоретична крива розподілу зіставляється з емпіричним розподілом, що свідчить про наявність нормального розподілу.

Таблиця 1.4 - Розрахунок показників нормального закону розподілу

Інтервал Δy	Серед-нє зна-чення інтер-валу	Часто-та	Відносна частота	Умовні варіанти	Розра-хунок серед-нього значен-ня	Розрахунок дисперсії		Значення в стандарти-зованому масштабі	Значен-ня дифе-ренціа-льної функції	Емпірич-ні розраху-нки	Ординати теоретич-ного розподілу	Розрахун-кові частоти
y_{k-1}-y_k	y_{cp}	m_i	m_i/n	Y'_{cp}	$m_i y'_{cp}$	$m_i y'^2_{cp}$	$(y'_{cp} - \bar{y}'_{cp})^2$	$t_i = \|\frac{y_{cp} - \bar{y}}{\tau_y}\|$	$f(t)$	$y_2 = \frac{m_i}{n\Delta y}$	$y_n = \frac{f(t)}{\tau_y}$	$m_i = y_n \cdot n\Delta y$
0,7 – 0,8	0,75	3	0,017	-4	-12	48	39,3132	2,26	0,031	0,17	0,195	3,36
0,8 – 0,9	0,85	13	0,072	-3	-39	117	89,2372	1,63	0,1057	0,72	0,665	11,90
0,9 – 1,0	0,95	30	0,167	-2	-60	120	78,7320	1,00	0,2420	1,67	1,522	27,40
1,0 – 1,1	1,05	40	0,222	-1	-40	40	15,3760	0,38	0,3712	2,22	2,385	42,03
1,1 – 1,2	1,15	41	0,228	0	0	0	0	0,25	0,3867	2,28	2,432	43,7
1,2 – 1,3	1,25	31	0,172	1	31	31	59,0364	0,88	0,2709	1,72	1,704	30,7
1,3 – 1,4	1,35	16	0,089	2	32	64	90,6304	1,50	0,1295	0,89	0,817	14,7
1,4 – 1,5	1,45	5	0,028	3	15	45	57,1220	2,13	0,0413	0,28	0,259	4,66
1,5 – 1,6	1,55	1	0,005	4	4	16	19,1844	2,75	0,0091	0,05	0,057	1,03

Тема 2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі

2.1. Сутність економіко-математичних моделей оптимізації.
2.2. Загальна характеристика задач математичного програмування.
2.3. Види економіко-математичних моделей оптимізації.

Поняття: оптимізаційна задача; математичне програмування; методи математичного програмування; система обмежень в економіко-математичних моделях оптимізації; види економіко-математичних моделей оптимізації.

Література: [4], [5], [12], [16], [23], [26], [37], [40], [61], [63].

2.1. Сутність економіко-математичних моделей оптимізації

В сучасних умова господарювання України для забезпечення розвитку підприємств одним з важливих завдань є забезпечення оптимального й ефективного використання виробничих потужностей і ресурсів. Для вирішення цих цього завдання необхідно розробити економіко-математичні моделі оптимізації шляхом розв’язання задачі оптимізації.

Слід відзначити, що метою ***розв’язання оптимізаційної задачі*** є знаходження оптимального її вирішення і отримання значення або співвідношення, яке максимально задовольняло поставленим вимогам. Для вирішення оптимізаційних задач використовуються відповідні методи, які називаються методами ***математичного програмування***.

Слід зазначити, що оптимізаційні задачі почали використовуватись з першої третини минулого століття. Зокрема, ця задача була сформульована радянським економістом Л.М. Толстим (1930 р.), яка полягала у необхідності розробки пропозицій щодо укладання національного плану перевезень, який дозволяв мінімізувати сумарний кілометраж. Одну з різновидів транспортної задачі в 1941 р. визначив американський вчений Хічкок, яка отримала назву «проблема Хічкока». У загальному вигляді задача математичного програмування сформульована в 1939 р. Л.В.Канторовичем, який запропонував метод множників для її вирішення. Разом із М.К.Гавуріним у 1949 р., Л.В.Канторович розробив метод потенціалів, який і в сучасних умовах є найбільш поширеним методом вирішення транспортних задач.

В сучасних наукових дослідження досить широко поширеним методом вирішення задачі лінійного програмування є симплексний метод, який був опублікований Д.Б.Данцигом у 1949 р. Модифікацією цього методу є диференціальний алгоритм, який визначається з диференціального алгоритму вирішення загальної задачі математичного програмування. Цей метод протягом останніх десятиліть (з 1978 р.) успішно викладав професор А.Г. Евдокимов, а тепер проф. М.І. Самойленко в Харківській національній академії міського господарства.

Використання оптимізаційних задач в економіці на першому етапі ознаменувалося досить гострою дискусією економістів так званої "традиційної" школи, де економіко-математичні методи або взагалі не використовувались, або використовувались обмежено, і економістів нового покоління. Тепер мало залишилося економістів, які б прямо заперечували проти необхідності використання ефективних математичних методів при вирішенні важливих економічних проблем:

ціноутворення;

дослідження міжгалузевих зв'язків; підвищення ефективності капітальних вкладень; використання обмежених ресурсів; розміщення продуктивних сил;

обґрунтування нормативів на витрати матеріалів і оборотних коштів та багато інших, не менш важливих, задач економіки та менеджменту.

Слід зазначити, що в економічних системах перманентно відбувається зміни, які мають в тому числі й негативний характер. Тому стає очевидним утопічність всебічної багатокритеріальної оптимізації народногосподарського плану. Управляти економічною системою України можна тільки за допомогою багаторівневої структури управління: центральні органи, галузеві, виробничо-територіальні об'єднання та окремі підприємства.

Враховуючи вищезазначене, на рівні економіки держави переважно використовуються неформальні методи оптимального планування із залученням для вирішення часткових питань економіко-математичних методів і електронно-обчислювальної техніки.

Основними економічними передумовами постановки і вирішення задач методами математичного програмування для формування економіко-математичних моделей оптимізації слід вважати:

органічне сполучення централізованого народногосподарського планування із самостійністю підприємств, виробничих об'єднань і галузей економіки;

наявність декількох або багатьох можливих (альтернативних припустимих, але не рівнозначних) варіантів використання обмежених ресурсів і виробничих потужностей;

широке використання економіко-математичних методів у сполученні із сучасними засобами електронно-обчислювальної техніки;

можливість одержання необхідної і достовірної виробничо-економічної інформації;

достатньо повна теоретична розробка методів вирішення задач математичного програмування [61].

2.2. Загальна характеристика задач математичного програмування

Математичне програмування дозволяє вирішувати оптимальним способом багато виробничих задач організації, планування і управління. Зокрема, економіст має надійний інструмент для одержання найвищого економічного ефекту в конкретних виробничих умовах.

Вираз ***"математичне програмування"*** слід розуміти як ітераційний пошук найкращого варіанту використання обмежених виробничих потужностей і ресурсів для досягнення поставлених цілей [61].

Прикладами, що відображають корисність і необхідність використання методів математичного програмування, можуть бути наступні економічні задачі:

одержання максимального випуску продукції або максимального прибутку при заданих матеріальних, трудових та інших витратах;

забезпечення планових показників підприємства при мінімальних фінансових вкладеннях або мінімальній витраті якогось виробничого ресурсу;

досягнення мінімального терміну виготовлення продукції, будівництва об'єкта, товарообігу, виробничого циклу і т.п. при існуючих або заданих виробничих ресурсах (матеріальних, трудових, енергетичних та ін.);

забезпечення мінімальної собівартості продукції при заданих виробничих ресурсах [61].

Виходячи з поставлених економічних завдань, максимальний випуск продукції, максимальний прибуток, мінімальні фінансові вкладення, максимально короткий термін - це є шукані оптимуми (максимуми або мінімуми). У математиці максимум і мінімум мають ще одну назву - екстремум, а задачі пошуку екстремуму називають екстремальними задачами.

Слід вказати, що у оптимізаційних накладаються відповідні обмеження, які відображаються матеріальними, трудовими показниками, виробничими ресурсами та ін.

В оптимізаційних задачах, рішення, при яких досягається оптимум, називають ***оптимальними, або екстремальними рішеннями.***

У загальному випадку екстремальна задача може мати одне, декілька, безліч, нескінченну безліч або жодне оптимальне рішення.

У практиці економіста оптимальне рішення прийнято називати ***оптимальним планом.***

Змістовна постановка задачі повинна дозволяти переходити до строгої математичної моделі. У загальному вигляді екстремальна задача формулюється наступним чином: знайти найбільше (максимальне) або найменше (мінімальне) значення деякої функції $Y(x_l,x_2, \dots ,x_n)$ при умовах $f_i(x_1,x_2, \dots ,x_n) \le b_i$ $(i = 1,m)$, *і* де *у* і f_i - задані функції, а b_i - дійсне число.

Наведене формулювання є узагальненням постановок ряду часткових задач математичного програмування, що можуть розрізнятися між собою як видом функцій y і f_i (лінійні, нелінійні, стохастичні), так і характером (дискретний, неперервний) змінних.

Функцію $Y(x_l,x_2,---,x_n)$, яку мінімізують або максимізують, називають ***цільовою функцією.***

Залежно від особливостей функцій y і f_i математичне програмування можна розподілити на ряд самостійних дисциплін, що вивчають і розробляють методи вирішення окремих класів екстремальних задач. Насамперед, задачі математичного програмування розподіляються на задачі ***лінійного і нелінійного програмування.*** При цьому якщо усі функції y і f_i є лінійними, то відповідна задача відноситься до класу задач лінійного програмування. Якщо ж хоча б одна із зазначених функцій є нелінійною, то відповідна задача належить до класу задач нелінійного програмування.

Окремими класами задач математичного програмування є ***задачі цілочислового, параметричного і дрібно-лінійного програмування.***

У задачах цілочислового, або дискретного програмування частина або всі невідомі можуть приймати тільки цілочислові значення.

У задачах параметричного програмування цільова функція або функції обмежень, що визначають область можливих змін змінних (або і те, і інше) залежать від деяких параметрів.

У задачах дрібно-лінійного програмування цільова функція являє собою відношення двох лінійних функцій, а функції, що визначають область припустимих рішень, також є лінійними.

Особливі класи становлять задачі стохастичного і динамічного програмування.

Стохастичне програмування використовують для вирішення задач, в яких обмеження мають імовірний, випадковий характер, тобто необхідно враховувати вплив яких-небудь непередбачених обставин. Як і цільова функція, в задачах стохастичного програмування може служити математичне очікування деякого виробничого показника.

До задач такого типу відносяться:

комплектування ремонтних підприємств устаткуванням, коли заздалегідь невідомий обсяг робіт;

визначення необхідної кількості транспортних засобів на пасажирських маршрутах, коли: обсяг перевезень має випадковий характер;

визначення запасів деяких ресурсів, коли його постачання має випадковий характер.

За допомогою лінійного, нелінійного, цілочислового і стохастичного програмування вирішуються задачі, що зводяться до відшукання оптимального рішення без урахування можливої динаміки виробничого процесу, тобто без урахування чинника часу.

У динамічному програмуванні мають місце багатоетапні задачі, що вимагають оптимізації прийнятих рішень не як одиничного акту, а з урахуванням розвитку явища, його зміни в часі.

Переваги динамічного програмування:

можливість поетапного аналізу результатів у процесі вирішення задачі, визначення оптимальної стратегії з урахуванням чинника часу;

поглиблення раніше розроблених методів кількісного і якісного дослідження природи економічних процесів;

більш об'єктивне, повне і точне вирішення планово-економічних і виробничих завдань.

Таким чином, математичне програмування є важливим інструментарієм побудови економіко-математичних моделей оптимізації, що досліджує екстремальні задачі й розробляє методи їх вирішення. Математичне програмування як наука знаходиться у процесі постійного розвитку. Вченими всього світу розроблено чимало методів для вирішення різних класів задач математичного програмування.

Вирішення екстремальної економічної задачі складається ***з наступних етапів:***

побудови економіко-математичної моделі, тобто обґрунтування критерію оптимізації, виявлення і формалізації у вигляді системи рівнянь або нерівностей найбільш істотних обмежень задачі;

вибору математичного методу, що дозволяє за кінцеве число кроків одержати шукане рішення з будь-якою заздалегідь заданою точністю, або вибору відповідної комп'ютерної технології;

знаходження оптимального плану й аналізу отриманих результатів з позицій можливого їхнього практичного застосування, оскільки в «економіко-математичній моделі розв'язуваного завдання враховуються тільки найбільш істотні зв'язки і залежності, а не всі, що мають місце в реальному виробництві.

З погляду економіста оптимальним називається такий план виробництва, що є найкращим з позицій досягнення максимального або мінімального рівня конкретного техніко-економічного критерію оцінки використання виробничого потенціалу і наявних ресурсів.

Критерієм оптимальності називається показник, за яким оцінюється міра ефективності плану. Критерій оптимальності повинен бути однозначним і мати кількісне вираження.

Для побудови економіко-математичної моделі найбільш часто використовують задачі лінійного програмування. Тому розглянемо їх докладніше.

***Загальна задача лінійного програмування формулюється таким чином*:** знайти оптимум лінійної функції y(x), якщо на змінні задачі накладені лінійні обмеження у вигляді рівностей і нерівностей.

Аналітичний запис цього завдання має такий вигляд:

$$y(x)=c^T x+c_0 \rightarrow \underset{x\in\Omega\subset R^n}{opt}, \tag{2.1}$$

$$\Omega: \quad A_1x+b_1\leq 0; \tag{2.2}$$

$$A_2x+b_2=0; \tag{2.3}$$

$$A_3x+b_3\geq 0; \tag{2.4}$$

$$x\geq 0, \tag{2.5}$$

де x - n - мірний вектор дійсних змінних; c - n - мірний вектор коефіцієнтів; C_0 - вільний член у складі функції y; A_1, A_2, A_3 - матриці коефіцієнтів лінійних систем розмірності $m_1 \times n$, $m_2 \times n$, $m_3 \times n$ відповідно, $m_2 < n$; b_1, b_2 ,b_3 - вектори вільних членів обмежень розмірності $m_1 \times 1$, $m_2 \times 1$, $m_3 \times 1$ відповідно.

Часткові задачі лінійного програмування можуть не містити однієї або двох систем обмежень типу (2.2) - (2.4), все рівно яких. Крім того, замість умови невід'ємності (2.5) може мати місце двостороння або одностороння обмеженість змінних.

Задачу, складену з (2.1), (2.2) і (2.5), називають стандартною задачею лінійного програмування.

***Канонічна, або основна задача лінійного програмування має такий вигляд*:**

$$y(x)=c^T x+c_0 \to \max_{x \in \Omega \subset R^n}, \tag{2.6}$$

$$\Omega: Ax+b=0, \tag{2.7}$$

$$x \geq 0, \tag{2.8}$$

де A - матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$; b - вектори вільних членів розмірності m×1.

Очевидно, що обмеження-нерівність типу "≤" можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової невід'ємної змінної, а кожне обмеження-нерівність типу "≥" - в обмеження-рівність шляхом вирахуванням з його лівої частини додаткової невід'ємної змінної. Задачу мінімізації лінійної функції у можна звести задачі максимізації шляхом множення останньої на *-1*. Таким чином задачу лінійної оптимізації (2.1) - (2.5) завжди можна перетворити в задачу (2.6) - (2.8) і навпаки.

Складання економіко-математичної моделі загальної задачі математичного програмування або її канонічної форми вимагає певних зусиль і кмітливості Але досвід складання економіко-математичних моделей швидко накопичується. Досить мати практику вирішення декількох задач, щоб надалі не мати особливих труднощів при переході від змістовної постановки задачі лінійного програмування до формальної (аналітичної) [61].

2.3. Види економіко-математичних моделей оптимізації

При здійсненні господарської діяльності підприємством використовують декілька видів оптимізаційних моделей. Проте, у цьому дослідженні розглянемо наступні види економіко-математичних моделей оптимізації:

1. Економіко-математичні моделі оптимізації випуску продукції.

2. Економіко-математичні моделі розподілу фінансових ресурсів по оптимізації зростання потужностей підприємства.

3. Економіко-математична модель розподілу капітальних вкладень.

Економіко-математичні моделі оптимізації випуску продукції розробляються для максимізації прибутку від реалізації продукції. У загальному вигляді ця функція моделі має наступний вигляд:

$$F = \sum_{s=1}^{R} \sum_{i=1}^{n} P_{si} Q_{si} \rightarrow \max, \tag{2.9}$$

де F - функція максимізації прибутку;

s - номер, вид вироблюваної продукції;

R - кількість видів продукції;

i - номер підприємства;

n - кількість підприємств;

P_{si} - прибуток від реалізації одиниці продукції s на i-му підприємстві;

Q_{si} - обсяг s виду продукції на i-му підприємстві.

При цьому використовують наступні обмеження:

1. Обсяг споживання ресурсів не повинен s виду продукції не повинен перевищувати загальний обсяг використаних ресурсів на підприємстві.
2. Обсяг s виду виробленої продукції дорівнює плану випуску цієї продукції.

3. Обсяг s виду виробленої продукції знаходиться між нижньою і верхньою границею виробництва цієї продукції на i-му підприємстві.
4. Обсяг s виду виробленої продукції на i-му підприємстві перевищує нуль.

В основі економіко-математичної моделі розподілу фінансових ресурсів по оптимізації зростання потужностей підприємства є наступна функція:

$$F = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (P_i + KV_i x KE + TV_{ij}) x O_{ij} \rightarrow \min , \qquad (2.10)$$

де P_i - вартість одиниці продукції і-го постачальника;

KV_i - капітальні витрати на одиницю готової продукції;

KE - коефіцієнт ефективності капітальних вкладень;

TV_{ij} - транспортні витрати по перевезенню одиниці продукції *і*-го постачальника *j* покупцю;

O_{ij} - обсяг поставок продукції *і*-го постачальника *j* покупцю.

При цьому вводяться наступні обмеження:

1. Обсяг поставок продукції *і*-го постачальника *j* покупцю не перевищує потужність *і*-го постачальника.
2. Обсяг поставок продукції *і*-го постачальника *j* покупцю дорівнює попиту *j* покупця.
3. Обсяг поставок продукції *і*-го постачальника *j* покупцю дорівнює або перевищує нуль.

При ***побудові економіко-математичної моделі розподілу капітальних вкладень по проектах*** враховують функцію, яка полягає в максимізації можливого доходу від реалізації *j* варіанта капітальних вкладень ($D_j(s_j)$):

$$F = \sum_{j=1}^{p} D_j(s_j) \rightarrow \max , \qquad (2.11)$$

де р - загальна кількість проектів;

j - варіант (індекс) проекту капітальних вкладень;

D_j - можливий дохід від реалізації j варіанта капітальних вкладень.

Обмеження для виконання цієї функції наступні:

1. Загальна кількість варіантів капітальних вкладень повинна перевищувати або дорівнювати кількості видів продукції.
2. Обсяг капітальних вкладень по j варіанту не повинен перевищувати загальний річний обсяг капітальних вкладень.
3. Якщо обсяг вироблюємої продукції досягає одиниці, то проект приймається, якщо цей обсяг дорівнює нулю – проект відхиляється.

В економічному моделюванні також використовують і розв'язують ***задачі безумовної оптимізації***, в яких задається лише одна цільова функція. У задачах безумовної оптимізації не існує обмежень і граничних умов. У цих задачах поняття оптимуму й екстремуму збігаються, для знаходження оптимуму в них застосовують методи знаходження екстремуму. Слід відзначити, що найбільше або найменше значення - це екстремум, а оптимум – оптимальне найбільше або найменше значення.

У цих задачах знаходяться першу похідну функції, дорівнюють її до нуля, знаходять параметри моделі, знаходять другу похідну і визначити її знак. Якщо друга похідна більша за нуль, то точка x — мінімум функції.

***Методами розв'язання задач умовної оптимізації*:**

1. Метод штрафних функцій, в якій мінімізується нова цільова функція, яка містить у собі першу цільову функцію й задані обмеження. При цьому визначається штрафна функція.

2. Метод Лагранжа – полягає у побудові функції виду: $L(x_x, x_2, X) = f(x_v\ x_2) + Xg(x_v\ x_2)$, тобто зведення задачі на умовний екстремум двох незалежних змінних до задачі на абсолютний екстремум функції $L\{xy, x_2, X)$ трьох незалежних змінних x_1, x_2, X. Функція Лагранжа є сумою цільової функції і функції обмеження, помноженої на нову незалежну змінну X (множник Лагранжа), яка має перший порядок. Для знаходження точок

умовного локального екстремуму функції за наявності обмеження слід насамперед знайти критичні точки функції Лагранжа. Потім критичні точки функції Лагранжа потрібно скоротити на координати Х. Потім кожну одержану скорочену точку необхідно проаналізувати, чи є вона точкою умовного екстремуму функції за даних обмеженнях чи ні.

Таким чином, в економіко-математичному моделюванні, використання методів математичного програмування і вирішення оптимізаційних задач, обумовлено необхідністю отримання оптимальних вирішень для прийняття ефективних управлінських рішень в аспекті розвитку суб’єктів підприємницької діяльності.

Питання і завдання для самоконтролю до змістового модуля 1

Питання для самоконтролю:

1. Що таке економіко-математичне моделювання?
2. Назвіть етапи розвитку економіко-математичного моделювання?
3. Визначте поняття «Модель» і які види моделей Ви можете назвати.
4. Назвіть основні етапи моделювання?
5. Які види явищ Ви знаєте?
6. Визначте випадкову величину і її числову характеристику?
7. Назвіть і охарактеризуйте закони розподілу випадкової величини?
8. Як перевіряють статистичні гіпотези?
9. Назвіть етапи попередньої обробки інформації?
10. Охарактеризуйте оптимізаційні моделі і назвіть їх види.
11. У чому полягають задачі умовної і безумовної оптимізації.
12. Які методи використовуються для вирішення задач умовної і безумовної оптимізації і в чому вони полягають.
13. У чому полягають економіко-математичні моделі оптимізації випуску продукції, розподілу фінансових ресурсів по оптимізації зростання потужностей підприємства, розподілу капітальних вкладень по проектах.

Завдання для самоконтролю:

1. Встановити, при якому обсязі спостережень n вибірка є генеральною сукупністю, якщо Р=0,95 або 95%, ε=0,80 і σy=4,18?

2. Є вибірка обсягом n=100 спостережень. Середнє значення по вибірці $\overline{y}$ = 10,12; середнє квадратичне відхилення σy^2=5,12; рівень значущості α=0,05; максимальне значення ознаки y_{max}=26,16; мінімальне - y_{min}=3,09. Визначити можливість використання в подальших дослідженнях y_{max} і y_{min}.

3. По двох об'єктах зібрана інформація з наступними кількісними характеристиками: n_1=45; n_2=46; $\bar{Y}_1$=15,17; $\bar{Y}_2$=12,5; $\sigma_{y1}{}^2$=61,4; $\sigma_{y2}{}^2$=55,6. Визначте рівень значущості при формуванні гіпотези про однорідність сукупності вибіркових даних.

4. Визначіть закон розподілу витрат часу проходження рухомим складом маршруту між двома зупинками (хв.) при n=190 спостережень і y_{min}=0,50 хв., y_{max}=1,46 хв. Розмір інтервалу складає 0,1. Побудуйте гістограму і полігон розподілу. Розрахуйте показники нормального закону розподілу.

5. Знайдіть екстремум функції випуску продукції у вигляді $y = f(x)$ аналітичним методом.

6. Знайдіть екстремум функції $y = x_1 + x_2$ за умови $x_1 + x_2 - 1 = 0$ або розв’яжіть задачу на умовний екстремум методом Лагранжа.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2
ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСАХ

Тема 3. Задача лінійного програмування та методи її розв'язування

3.1. Сутність і методи лінійного програмування.
3.2. Особливості задач лінійного програмування та практичні аспекти їх вирішення.
3.3. Транспортна задача. Математичне формулювання і алгоритм вирішення.

Поняття: лінійне програмування; симплекс-метод; метод внутрішніх крапок; цільова функція; класична модель транспортної задачі; математична модель реальної транспортної задачі; метод північно-західного кута

Література: [14], [26], [29], [47], [50], [56], [61], [63], [64], [67], [80]

3.1. Сутність і методи лінійного програмування

Лінійне програмування використовує математичний інструментарій, який базується на теорії і методах вирішення задач про екстремуми лінійних функцій, що задаються системами лінійних рівнянь. В цілому, термін ***«програмування»*** визначається як ***«планування»***.

Найбільш універсальним методом лінійного програмцвання є ***диференціальний алгоритм***, який дозволяє вирішувати будь-які задачі лінійного програмування. Плоряд з цим, може для вирішення цих задач можуть використовуваться і графічний метод, який відзначається простотою і наочністю, але потребує графічних побудов. Для вирішення задач лінійного програмування, які визначаються транспортними, може бути використаний ***метод потенціалів***.

Сутність методу лінійного програмування базується на принципі аналізу і послідовного поліпшення деякого початкового плану розподілу і використання ресурсів. Зокрема, план поліпшують до тих пір, поки не буде знайдений найкращий (оптимальний) варіант. Алгоритм використання методів лінійного програмування наступний:

- спочатку складають початковий план, який аналізується за конкретними строго розробленими правилами;

- використовуючи результати аналізу визначають можливість і напрямок поліпшення початкового варіанта плану;

- обчислюють новий план, який аналізується і здійснюються процедури щодо поліпшення з метою наближення до оптимального результату;

- процес визначення оптимального результату здійснюється до отримання найбільш оптимального результату.

В процесі розв'язання задач лінійного програмування використовується ***симплекс-метод***, який полягає в тому, що, відправляючись з деякої довільної вершини багатокутника обмежень, переходять до обчислення тільки такої вершини, в якій значення лінійної форми буде більше, ніж у попередній. Решту варіантів не обчислюють. Тоді при кінцевому порівняно малому числі кроків може бути знайдений оптимальний план. Таким чином, проводиться впорядкований перебір вершин, при якому відбувається постійне збільшення лінійної форми. У цьому аспекті симплексний метод називається також методом послідовного поліпшення плану.

Вирішення задач лінійного програмування симплекс-методом полягає:

- по-перше, в розробці базового рішення на оптимальність. Якщо воно оптимальне, то задача вирішена, в іншому випадку виконують другий етап;

- по-друге, визначають вектор $\vec{A}_k$, який повинен бути введений в базис, і вектор $\vec{A}_r$, який повинен бути виключений з нього, тобто виходить новий базисний план з великим значенням лінійної форми. Щоб знайти вектори $\vec{A}_k$ і $\vec{A}_r$, заміна яких забезпечує найбільше зростання лінійної форми, виразимо всі вектори, що не входять в базис, через базисні вектори

$$\vec{A}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{A}_i , \tag{3.1}$$

де a_{ij} - проекції вектора $\vec{A}_j$ на вектор $\vec{A}_i$. Запишемо систему обмежень у векторній формі в наступному вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \vec{A}_i - \theta \vec{A}_k + \theta \vec{A}_k = \vec{B}.$$

Оскільки $\vec{A}_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \cdot \vec{A}_i$, то

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - \theta a_{ik}) \vec{A}_i + \theta \vec{A}_k = \vec{B}. \tag{3.2}$$

Співвідношення (3.2) дає рішення тільки у тому випадку, коли коефіцієнти при векторах $\vec{A}_i$ і $\vec{A}_k$ нового базису будуть ненегативними, тобто

$$x_i' = x_i - \theta a_{ik} \geq 0 \text{ і } \theta \geq 0. \tag{3.3}$$

Відповідне нове значення лінійної форми набуває вигляду

Позначимо

$$L_1 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \theta a_{ik}) c_i + \theta c_k = \sum_{i=1}^{m} x_i c_i + \theta \left(c_k - \sum_{i=1}^{m} a_{ik} c_i \right). \tag{3.4}$$

$$d_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} c_i - c_j . \tag{3.5}$$

Тоді значення лінійної форми в новій вершині багатокутника рішення можна знайти з рівняння

$$L_1(\vec{X}) = L(\vec{X}) - \theta d_j . \tag{3.6}$$

Величину d_j називають ***оцінкою плану***. В симплексному методі параметри d_j відіграють важливу роль: їх знаки дозволяють визначити, чи є опорний план оптимальним. Якщо dj $\rangle 0$ для всіх j, то даний опорний план є оптимальним, оскільки на підставі (3.6) і зважаючи на $\theta \geq 0$ перехід до будь-якої нової вершини веде до убування лінійної форми. Якщо опорний план неоптимальний, то можливі два випадки:

1. Є хоча б один індекс $j = k$ для якого $d_k < 0$ і всі відповідні компоненти $a_{ik} \leq 0 \; (i = \overline{1, m})$. У цьому випадку лінійна форма не обмежена зверху і задача нерозв'язна.

2. Для деяких j $d_j < 0$ і для кожного такого j, принаймні, одна з проекцій $a_{ij} > 0$. Тоді при переході до наступної вершини лінійна форма зростає і план поліпшується. Для найшвидшого зростання L необхідно в базис включити той вектор $\vec{A}_k$, для якого оцінка $d_k < 0$ і максимальна за модулєм, а вектор $\vec{A}_r$, для якого значення позитивно і мінімально, виключити.

При лінійному програмуванні також використовують методи еліпсоїдів, метод внутрішніх точок, методи логарифмічних бар'єрних функцій нелінійного програмування. У цих методах вирішення задач лінійного програмування здійснюють шляхом пошуку уздовж траєкторій у просторі змінних задачі, що не проходять через вершини багатокутника.

3.2. Особливості задач лінійного програмування та практичні аспекти їх вирішення

Задачам лінійного програмування властиві наступні особливості:

1. Цільова функція є зваженою лінійною сумою від невідомих змінних x_i вигляду:

$$J = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \max(\min) \qquad (3.7)$$

де c_i – коефіцієнти цільової функції. Таку цільову функцію часто називають лінійною формою.

2. Обмеження, що накладаються на область можливих рішень, мають вид лінійної рівності або нерівності:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{3.8}$$

де a_{ij}, b_i – значення показників цільової функції, причому величини a_{ij}, x_i, b_i позитивні.

Розглянемо приклади вирішення задач лінійного програмування.

Приклад. Фірма виробляє дві моделі A і B збірних книжкових полиць. Їх виробництво обмежено наявністю сировини (високоякісних дощок) і часом машинної обробки. Для кожного виробу моделі A потрібен 3 м^2 дощок, а для моделі B - 4 м^2. Фірма може одержувати від своїх постачальників до 1700 м^2 дощок в тиждень. Для кожного виробу моделі A потрібно 12 хв. машинного часу, а для виробу моделі B - 30 хв. У тиждень можна використовувати 160 годин машинного часу. Скільки виробів кожної моделі слід випускати фірмі в тиждень, якщо кожний виріб моделі A приносить 2 грн. прибутку, а кожний виріб моделі B - 4 грн. прибутку?

Вирішення

Побудова математичної моделі.

Хай x_1 - кількість випущених за тиждень полиць моделі A, а x_2 - кількість випущених полиць моделі B.

Тоді: $3x_1$ - кількість дощок, що необхідно на тиждень для виготовлення полиць моделі A

$4x_2$- кількість дощок, що необхідно на тиждень для виготовлення полиць моделі B.

$3x_1 + 4x_2$ - кількість дощок, що потрібні на тиждень для виготовлення книжкових полиць двох моделей, а за умовами задачі це число не повинно перевищувати 1700 м^2, отже одержуємо перше обмеження:

$$3x_1 + 4x_2 <= 1700 . \qquad (3.9)$$

Знайдемо обмеження на використання машинного часу.

12 хв. складають 0,2 години, а 30 хв. - 0,5 год., таким чином:

$0,2x_1$ - кількість часу, що вимагається на тиждень для виробництва полиць моделі А;

$0,5x_2$ - кількість часу, що вимагається на тиждень для виробництва полиць моделі В;

$0,2x_1 + 0,5x_2$ - кількість часу, що необхідна на тиждень для виробництва двох моделей, а за умовою задачі це число не повинно перевищувати 160 годин, отже одержуємо друге обмеження:

$$0,2x_1 + 0,5x_2 <= 160 \text{ або } 2x_1 + 5x_2 <= 1600 . \qquad (3.10)$$

Крім того, оскільки x_1 і x_2 виражають щотижневий обсяг виробів, що випускаються, то вони не можуть бути негативними, тобто

$$x_1 >= 0, x_2 >= 0. \qquad (3.11)$$

Ця задача полягає в тому, щоб знайти такі значення x_1 і x_2, при яких щотижневий прибуток буде максимальним. Складемо вираз для щотижневого прибутку:

$2x_1$ - щотижневий прибуток, одержаний від продажу полиць моделі А.

$4x_2$ - щотижневий прибуток, одержаний від продажу полиць моделі В

Тоді $F=2x_1+4x_2$ - щотижневий прибуток, який повинен бути максимальним. Таким чином, маємо наступну математичну модель для даної задачі.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 1700 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 1600 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$F=2x_1 + 4x_2 -> max$$

Отримана модель є задачею лінійного програмування. Функція F - це цільова функція, вона є лінійною функцією своїх змінних(x_1 і x_2). Обмеження на ці змінні (3.9) і (3.10) теж є лінійними. Виконана умова позитивності для змінних x_1 і x_2.

Необхідно знайти значення змінних x_1 і x_2, при яких дана функція F приймає максимальне значення, при дотриманні обмежень, що накладаються на ці змінні.

Рішення, що задовольняють системі обмежень і вимогою позитивності, є допустимими, а рішення, що задовольняють одночасно і вимогою мінімізації (максимізації) функції в цілому є оптимальними.

3.3. Транспортна задача. Математичне формулювання і алгоритм вирішення

В аспекті вирішення задач лінійного програмування розглянемо математичне формулювання і алгоритм розв'язання транспортної задачі.

Змістовна постановка задачі: Однорідний продукт, зосереджений у m пунктах відправлення в кількостях a_1, a_2, ... a_m одиниць відповідно, необхідно доставити в кожний із n пунктів призначення в кількості b_1, b_2, ... b_n одиниць відповідно. Вартість (відстань) перевезення одиниці продукту з і-го пункту відправлення в j-й пункт призначення дорівнює c_{ij} і відома для кожного маршруту. Нехай x_{ij} - кількість продукту, перевезеного з і-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Задача полягає у визначенні таких розмірів x_{ij} для всіх маршрутів, при яких сумарна вартість (відстань) перевезень була б мінімальною.

Математична модель задачі:

Позначимо:

c_{ij} - тарифи (вартість, час, відстань) перевезення одиниці вантажу з і-го пункту відправлення в j-й пункт призначення;

a_i - запаси вантажу в і-му пункті відправлення;

b_i — потреба у вантажі в j-му пункті призначення;

x_{ij} - кількість одиниць вантажу, перевезеного з і-го пункту відправлення в j-й пункт призначення.

Тоді математична модель транспортної задачі про планування перевезень має такий вигляд:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\underset{x_{ij}\in\Omega}{\to}min; \tag{3.12}$$

$$\Omega: \quad f_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_i, \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.13}$$

$$f_{n+i}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, \quad i=\overline{1,m}; \tag{3.14}$$

$$x_{ij}\geq 0; \ i=\overline{1,m}; \ j=\overline{1,m}. \tag{3.15}$$

Тут (3.12) - цільова функція, що визначає вартість перевезень усього вантажу. Саме екстремальне (мінімальне) значення цієї функції необхідно знайти в задачі. Причому значення змінних x_{ij}, при яких цільова функція досягає свого мінімуму, повинні належати області припустимих рішень Ω.

Вирази (3.13) - (3.14) визначають область припустимих рішень Ω. При цьому вираз (3.13) відбиває потреби у вантажі в пунктах призначення, вираз (3.14) визначає запаси вантажів у пунктах відправлення, а вираз (3.15) відокремлює негативну область значень x_{ij}, в яку дані змінні не можуть потрапляти за своїм фізичним змістом.

Вирази (3.13)-(3.15) ***називаються обмеженнями задачі лінійного програмування***. Вирішення задачі (частковий набір значень змінних x_i) називається припустимим, якщо воно одночасно задовольняє всім і обмеженням задачі. Вирішення задачі називається оптимальним, якщо воно забезпечує оптимум (у даному випадку мінімум) функції цілі.

Вважатимемо, що функції $y, f_1, f_2, \ldots, f_n$ - неперервні лінійні функції, задані на невід'ємному ортанті евклідового простору R^n. Дані функції мають місце, коли перевезений вантаж є рідиною, сипкою речовиною, дрібними заготівлями або дрібною неспакованою продукцією. Такий вантаж характеризується параметрами, що являють собою вагу, довжину (погонні метри), площу (квадратні метри), об'єм і т.п.

Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює запасу вантажу в пунктах відправлення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{3.16}$$

то модель такої транспортної задачі називається ***закритою***, у противному разі - ***відкритою***.

При вирішенні задач лінійного програмування використовують відповідні теореми.

Теорема 1.1. Для можливості розв'язання транспортної задачі необхідно і достатньо, щоб запаси вантажу в пунктах відправлення були рівні потребам у вантажі в пунктах призначення, тобто щоб виконувалася рівність (3.16).

У випадку перевищення запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i \rangle \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводиться фіктивний (n+1)-й пункт призначення з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю:$c_{i,n+1}=0$ (i=1,m) .Така задача буде вже транспортною задачею, для якої умова (3.13) виконується.

Аналогічно, якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i \langle \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний *(m+1)*-й пункт відправлення із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ **.** При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1,j}=0$ (j=1,n). Така задача буде вже транспортною задачею, для якої умова (3.16) виконується.

Далі будемо розглядати закриту модель транспортної задачі. Якщо ж модель конкретної задачі є відкритою, то, виходячи зі сказаного вище, її необхідно перетворити так, щоб виконувалася рівність (3.16).

У відкритій моделі область припустимих значень (за інших рівних умов) значно ширше, тому цільова функція досягає кращих значень або, принаймні, не гірше.

Особливості вирішення закритої транспортної задачі:

Визначення 1.1. Усяке невід'ємне рішення систем лінійних рівнянь (3.13) і (3.14) , що обумовлене матрицею $X=[x_{ij}]$, $i=1,m$, $j=1,n$, називається *планом транспортної задачі*.

Визначення 1.2. План $X^* =[x^*_{ij}]$, $i=1,m$, $j=1,n$, при якому функція (3.12) приймає своє мінімальне значення, називається оптимальним планом транспортної задачі.

Число змінних x_{ij} у транспортній задачі з m пунктами відправлення і n пунктами призначення дорівнює mn, а число рівнянь у системах (3.13) і (3.14) дорівнює $m+n$. Оскільки передбачається, що виконується умова (3.16), то число лінійно незалежних рівнянь дорівнює $m+n-1$. Отже, опорний план транспортної задачі може мати не більше $m+n-1$ відмінних від нуля невідомих.

Визначення 1.3. План $X^* =[x^*_{ij}]$, $i=1,m$, $j=1,n$ є опорним, якщо в ньому кількість відмінних від нуля компонентів у точності дорівнює $m+n-1$, а якщо менше - то ні.

Для визначення опорного плану існує декілька методів. Один з них - метод північно-західного кута, який буде розглянутий нижче.

Як і для всякої задачі лінійного програмування, оптимальним план транспортної задачі є також опорним планом. Для визначення оптимального плану транспортної задачі можна використовувати диференціальний алгоритм, симплекс-метод та інші універсальні методи. Однака через виняткову практичну важливість цієї задачі і специфіку її обмежень (кожна невідома входить лише в два рівняння систем (3.13) і (3.14), а коефіцієнти при невідомих дорівнюють одиниці) для визначення оптимального плану транспортної задачі розроблені спеціальні методи. Один з них - метод потенціалів - розглядається в даному курсі.

Звичайно вихідні дані транспортної задачі записують у вигляді табл.3.1.

Таблиця 3.1 - Вихідні дані транспортної завдання

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення					
		1	2	…	j	…	n
		Потреби					
		b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Визначення початкового опорного плану транспортної задачі: Вирішення транспортної задачі починають із знаходження будь-якого опорного плану. Для цього розроблені специфічні методи. Один з них одержав у літературі назву *"метод північно-західного кута"*. Іноді його називають ще *"діагональним методом"*, *"методом перехідних приступів"* і т. ін.

Сутність цього методу полягає в тому, що опорний план знаходять за $m+n-1$ кроками, на кожному з яких у таблиці транспортної задачі заповнюють одну клітку. Заповнення однієї клітки забезпечує задоволення потреби у вантажі одного з пунктів призначення (відповідно до того, в стовпці якого знаходиться клітка), або вивіз вантажу з одного з пунктів відправлення (відповідно до того, в рядку якого знаходиться клітка).

Заповнення таблиці слід починати з лівого верхнього квадрата (північно-західного кута). З позиції цього квадрата порівнюють запас вантажу в першому пункті відправлення з потребою першого пункту призначення. Вибирають менший розмір і записують у даний квадрат, який з цього моменту стає "зайнятим". Якщо в клітку записується потреба пункту призначення, то з подальшого розгляду виключають відповідний стовпець таблиці і переходять у ліву сусідню клітку. Якщо в клітку записується запас пункту відправлення, то з подальшого розгляду виключають відповідний рядок таблиці і переходять у сусідню клітку, що знаходиться нижче заповненої.

У новій клітці для частини таблиці, що залишилася, повторюють процедуру першого кроку з урахуванням зміни запасу вантажу одного з i відправників або потреби у вантажі одного з одержувачів у результаті попереднього кроку.

Після $m+n-2$ описаних вище кроків одержують задачу з одним пунктом відправлення і одним пунктом призначення. При цьому залишається вільною тільки одна клітка, а запаси пункту відправлення дорівнюватимуть потребам пункту призначення. Заповнення цієї клітки, тобто здійснення $(m+n-1)$-го кроку приводить до шуканого опорного плану.

Слід зауважити, що в процесі використання методу північно-західного кута може трапитися, що потреби у вантажі чергового пункту призначення рівні запасам чергового пункту відправлення. У цьому випадку з подальшого розгляду виключають або стовпець, або рядок, тобто тільки що-небудь одне. Таким чином, запаси відповідного пункту відправлення, або потребу відповідного пункт призначення вважають рівними нулю. Цей нуль записують у чергову клітку, яка заповнюється [61].

Зазначені вище умови гарантують одержання m+n-1 зайнятих кліток, у яких знаходяться компоненти опорного плану.

Опорний план перевезень повинен відповідати таким вимогам:

по-перше, кількість зайнятих маршрутів (кліток) повинна бути на одиницю менше суми числа постачальників т і числа споживачів п, тобто повинна дорівнювати значенню $m+n-1$;

по-друге, не повинно бути жодного зайнятого маршруту (клітки), що опинився б єдиним і в рядку, і в стовпці таблиці.

Визначення оптимального опорного плану транспортної задачі:

Для відзначення оптимального плану транспортної задачі розроблено декілька методів. Найбільш часто використовують ***метод потенціалів***. Метод припускає, що вже відомий якийсь опорний план. Його можна одержати, наприклад, розглянутим методом північно-західного кута. Вихідний опорний план необхідно перевірити на оптимальність.

Теорема 1.2. Якщо для деякого опорного плану $X^* = [x^*_{ij}]$, $i=1,m$, $j=1,n$ транспортної задачі із заданими тарифами перевезень c_{ij} існують такі числа $\alpha_i (i=1,m)$ і $\beta_j (j=1,n)$, що

$$\beta_i - \alpha_j = c_{ij} \qquad \text{при } x_{ij} > 0 \tag{3.17}$$

$$\text{і} \quad \beta_i - \alpha_j \leq c_{ij} \qquad \text{при } x_{ij} = 0 \tag{3.18}$$

для всіх $i=1,m$ і $j=1,n$, то $X^* = [x^*_{ij}]$ - оптимальний план.

Визначення 1.4. Числа $\alpha_i (i=1,m)$ і $\beta_j (j=1,n)$ називаються потенціалами відповідно пунктів відправлення і пунктів призначення.

Теорема 1.2 дозволяє побудувати алгоритм знаходження рішення транспортної задачі. Він являє собою наступне. Нехай знайдений опорний план транспортної задачі. Для кожного з пунктів відправлення і призначення визначають потенціали $\alpha_i (i=1,m)$ і $\beta_j (j=1,n)$ із системи рівнянь

$$\beta_i - \alpha_j = c_{ij}. \tag{3.19}$$

Оскільки число заповнених кліток дорівнює $n+m-1$, то система (3.19) із $n+m$ невідомими містить $n+m-1$ рівнянь. Оскільки число невідомих перевищує на одиницю число рівнянь, одне з невідомих потрібно взяти рівним довільному числу, наприклад $\alpha_1=0$, і знайти послідовно із системи (3.19) значення інших невідомих.

Після того, як усі потенціали знайдені, дія кожною з вільних кліток визначають числа $\alpha_{ij}=\beta_i-\alpha_j-c_{ij}$. Якщо серед чисел α_{ij} немає позитивних, то знайдений опорний план є оптимальним. Якщо ж для деякої вільної клітки $\alpha_{ij}>0$, то опорний план , що перевіряється , не є оптимальним, і треба перейти до нового опорного плану. Для цього розглядають усі вільні клітки, для яких $\alpha_{ij}>0$, і вибирають ту, для якої число α_{ij} максимальне. Обрану клітку необхідно заповнити.

Заповнюючи обрану клітку, треба змінити обсяги перевезень, записаних у ряді інших зайнятих клітках і зв'язаних з обраною циклом.

Визначення 1.5. Циклом у таблиці транспортної задачі ***називається замкнута ломана лінія***, вершини якої розташовані в зайнятих клітках таблиці, а ланки - уздовж рядків і стовпів, причому в кожній вершині циклу зустрічаються рівно дві ланки, одна з яких знаходиться в рядку, а інша - у стовпці.

Якщо ломана лінія, що складає цикл, перетинається сама із собою, то точка самоперетину не є вершиною.

При правильній побудові опорного плану для будь-якої вільної клітки можна побудувати тільки один цикл. Після того як для обраної вільної клітки він побудований, необхідно перейти до нового опорного плану. Для цього треба перемістити вантажі в межах кліток, що утворюють цикл. Переміщення роблять за такими правилами:

кожній з кліток, пов'язаних циклом з обраною вільною кліткою, і приписують знак "+" або "-", причому вільній клітці - знак плюс, а всім іншим кліткам - по черзі знаки мінус і плюс;

у вільну клітку переносять менше з чисел x_{ij}, що знаходяться в мінусових клітках, і одночасно це число додають до відповідних чисел, що знаходяться в "плюсових" клітках, і віднімають із чисел, що знаходяться в "мінусових" клітках. Клітка, що раніше була вільною, стає зайнятою, а "мінусова" клітка, в якій стояло мінімальне число x_{ij}, стає вільною.

У результаті зазначених вище переміщень вантажів у межах кліток, пов'язаних циклом з обраною вільною кліткою, визначають новий опорний план транспортної задачі. Число зайнятих кліток залишається рівним $n+m-1$. Якщо в зайнятих "мінусових" клітках циклу є два і більше однакових мінімальних чисел x_{ij}, то звільняють тільки одну з таких кліток, а інші залишають зайнятими з нульовими постачаннями.

Отриманий новий опорний план транспортної задачі перевіряють на оптимальність. Для цього визначають потенціали пунктів відправлення і призначення і знаходять числа $\alpha_{ij}=\beta_i-\alpha_j-c_{ij}$ для всіх вільних кліток. Якщо серед цих чисел не буде позитивних, то це означає, що новий опорний план є оптимальним. Якщо ж є позитивні числа, то необхідно перейти до нового опорного плану. У результаті ітераційного плану кінцевого числа переходів одержують оптимальний план процесу.

Таким чином, процес вирішення транспортної задачі методом потенціалів включає такі етапи:

1-й етап. Знаходять опорний план.

2 й етап. Знаходять потенціали пунктів відправлення; і призначення.

3-й етап. Визначають числа α_{ij} для кожної вільної клітки. Якщо серед них немає позитивних, то отримано оптимальний план транспортної задачі, у противному разі переходять до нового опорного плану.

4-й етап. Вибирають серед позитивних чисел α_{ij} максимальне, будують для відповідної вільної клітки цикл перерахування і роблять зсув за циклом, одержуючи при цьому новий опорний план. Далі переходять до другого етапу.

Розглянемо приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів.

Приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів:

Приклад 1.1. Три заводи, що виготовляють бетонні конструкції, постачаються цементом з чотирьох складів. Попит заводів b_j відповідно дорівнює 280, 90 і 180 тис.т/міс. Пропускна здатність складів a_i, відповідно становить 200, 150, 80 і 120 тис.т/міс. Відстані перевезень (у км)

з i-го складу на j-й завод подані в матриці $C=[c_{ij}]=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Потрібно скласти план перевезень цементу зі складів на заводи, що задовольняв би пропускним спроможностям складів і потребам заводу, а сумарний пробіг вантажного транспорту був би мінімальним.

Вирішення

Позначимо через x_{ij} - кількість цементу, який щомісяця потрібно доставляти щомісяця на j-го завод з і-го складу. Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$y=x_{11}+5x_{12}+3x_{13}+6x_{21}+8x_{22}+9x_{23}+2x_{31}+7x_{32}+4x_{33}+4x_{41}+x_{42}+11x_{43}\underset{xij\in\Omega}{\rightarrow}\min; \quad (3.20)$$

$$\Omega: \quad x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=280; \quad (3.21)$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=90; \quad (3.22)$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=180; \quad (3.23)$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=200; \quad (3.24)$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=150; \quad (3.25)$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=80; \quad (3.26)$$

$$x_{41}+x_{42}+x_{43}=120; \quad (3.27)$$

$$x_{ij}\geq 0. \quad (3.28)$$

Тут (3.20) - цільова функція, (3.22) - (3.24) - обмеження задачі, що визначають місячні запаси цементу на складах, (3.25) - (3.27) – обмеження задачі, що визначають місячну потребу в цементі на заводах (3.28) - обмеження, що визначає неможливість негативних значень для постачань цементу на заводи.

<u>**1-й крок.** 1-й етап.</u> Використовуючи метод північно-західного кута, знайдемо опорне вирішення транспортної задачі (3.20)- (3.28).

Відповідно до цього методу заповнюємо таблицю, починаючи лівого верхнього квадрата. Порівнюємо запас вантажу в першому пункті відправлення (200 тис.т/міс.) із потребою першого пункту призначення (280 тис.т/міс.). Вибираємо меншу величину (200) і записуємо її в даний квадрат. Оскільки весь запас у першому пункті відправлення вичерпаний, то з подальшого розгляду виключаємо перший рядок і переходимо в сусідню клітку, що знаходиться нижче заповненої. У новій клітці для частини таблиці, що залишилася, повторюємо процедуру заповнення верхньої лівої клітки, але з урахуванням того, що потреба першого пункту призначення зменшилася на 200 тис.т/міс. і стала рівною 80 тис.т/міс. Тобто порівнюємо запас другого пункту відправлення (150 тис.т/міс.) з новою потребою першого пункту призначення (80 тис т/міс). Вибираємо меншу величину(80) і записуємо її в нову клітку Оскільки потреба у вантажі в першому пункті призначення повністю задоволена, то з подальшого розгляду виключаємо перший стовпець і переходимо в сусідню клітку, що знаходиться справа від тільки що заповненої. Для нової верхньої лівої клітки частини таблиці, що залишилася, повторюємо процедуру заповнення з урахуванням зміни запасу в другому пункті відправлення на 50 тис.т/міс. І так доти, поки не буде заповнено m+n-2 кліток.

Остання (m+n-2)-я клітка заповнюється механічно - у неї записується залишкова потреба останнього пункту призначення або залишковий запас останнього пункту відправлення. В умовах задачі це величина 120. Усі проміжні результати по знаходженню початкового опорного плану

$X_0 = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 80 & 70 & 0 \\ 0 & 20 & 60 \\ 0 & 0 & 120 \end{pmatrix}$ відображені в табл. 3.2. Ці результати в таблиці виділені напівжирним шрифтом.

Для початкового опорного плану обчислюємо значення цільової функції (3.20):

y_0*=1x200+6x80+8x70+7x20+4x60+11x120=2940 тис.т/міс.*

Це значення буде використано на наступних кроках для контролю просування до оптимуму. Значення цільової функції повинно послідовно зменшуватися з кожним кроком.

Таблиця 3.2 - Проміжні результати по знаходженню початкового опорного плану

Пункт відправ-лення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 200	5	3	0
2	150	6 80	8 70	9	-5
3	80	2	7 - 20	4 + 60	-4
4	120	4	1 +	11 - 120	-11
Потенціал пункту призначення β_i		1	3	0	

<u>2-й етап.</u> Знайдений опорний план перевіряємо на оптимальність. У зв'язку з там знаходимо потенціали пунктів відправлення і призначення із системи

β_1-α_1=1, β_2-α_2=8, β_3-α_3=4,

β_1-α_2=6, β_2-α_3=7, β_3-α_4=11.

що містить шість рівнянь із сімома невідомими. Вважаючи α_1=0, знаходимо β_1=1, α_2=-5, β_2=3, α_3=-4, β_3=0, α_3=-11. Записуємо знайдені потенціали в табл.3.2.

<u>3-й етап</u>. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}=β_i-α_j-c_{ij}: α_{12}=-2, α_{13}=-3, α_{23}=-4, α_{31}=3, α_{41}=8, α_{42}=13.

Записуємо знайдені числа у відповідні вільні клітки табл.3.2 і вміщуємо їх у рамочки, щоб відрізняти їх від іншої інформації в таблиці Тому що серед чисел α_{ij} є позитивні, то опорний план X_0 не є оптимальним.

<u>4-й етап.</u> Серед позитивних чисел α_{ij} вибираємо максимальне: α_{42}=13. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл.3.2 зайняті клітки, що складають цикл, виділені сірим фоном. Потім позначаємо знаками «-» і «+» по черзі інші клітки циклу, слідуючи уздовж ломаної лінії циклу.

Найменшим з чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{32} (20). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в такий спосіб: X_{42}=20, x_{43}=120-20=100, x_{33}=60+20=80.

У результаті зроблених перетворень одержуємо новий опорний план

$$X_1=\begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 80 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 20 & 100 \end{pmatrix}$$

При такому опорному плані функція цілі (3.20) стає рівною 2680 тис.т/міс, що менше вихідного значення 2940 тис.т/міс.

На цьому закінчується 1-й крок оптимізації. На наступному кроці процедура 1-го кроку повторюється, але без першого етапу.

<u>**2-й крок.**</u> Аналізуємо новий опорний план (табл.3.3) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо таку систему рівнянь:

$\beta_1-\alpha_1=1$, $\beta_2-\alpha_2=8$, $\beta_2-\alpha_4=1$,

$\beta_1-\alpha_2=6$, $\beta_3-\alpha_3=4$, $\beta_3-\alpha_4=11$.

Вважаючи $\alpha_1=0$, знаходимо $\beta_1=1$, $\alpha_2=-5$, $\beta_2=3$,$\alpha_4=2$, $\beta_3=13$, $\alpha_3=9$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12}=-2$, $\alpha_{13}=10$, $\alpha_{23}=9$, $\alpha_{31}= -10$, $\alpha_{32}=-13$, $\alpha_{41}=-5$.

Тому що серед чисел α_{ij} є позитивні (α_{13}=10, α_{23}=9), то опорний план X_1 не є оптимальним.

Таблиця 3.3 - Новий опорний план

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 - 200	5	3 +	0
2	150	6 + 80	8 - 70	9	-5
3	80	2	7	4 80	9
4	120	4	1 + 20	11 - 100	2
Потенціал пункту призначення β_i		1	3	13	

Серед позитивних чисел α_{ij} вибираємо максимальне: α_{13}=10. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначає знаком «+». У табл.3.3 зайняті клітки, що складають цикл, виділені рим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «-» і «+».

Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{23} (70). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в так спосіб: x_{11}=200-70=130, x_{13}=70, x_{21}=80+70=150, x_{42}=20+70=90, x_{43}=100-70=30.

У результаті виконаних перетворень одержуємо новий опори план

$$X_2=\begin{pmatrix} 130 & 0 & 70 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 90 & 30 \end{pmatrix}$$

При такому опорному плані функція (3.20) стає рівною 1980 тис.т/міс, що значно менше попереднього значення 2680 тис.т/міс.

<u>3-й крок.</u> Аналізуємо новий опорний план (табл. 3.4) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо наступну систему рівнянь:

$\beta_1-\alpha_1=1$, $\beta_1-\alpha_2=6$, $\beta_2-\alpha_4=1$,

$\beta_3-\alpha_1=3$, $\beta_3-\alpha_3=4$, $\beta_3-\alpha_4=11$.

Вважаючи $\alpha_1=0$, знаходимо $\beta_1=1$, $\beta_3=3$, $\alpha_2=-5$, $\beta_3=4$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=-8$, $\beta_2=-7$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12}=-12$, $\alpha_{22}=-10$, $\alpha_{23}=-1$, $\alpha_{31}=-1$, $\alpha_{32}=-14$, $\alpha_{41}=5$. Оскільки серед чисел α_{ij} одне позитивне ($\alpha_{41}=5$), то опорний план X_2 не є оптимальним.

Таблиця 3.4 - Новий опорний план

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 - 130	5	3 + 70	0
2	150	6 150	8	9	-5
3	80	2	7	4 80	0
4	120	4 +	1 90	11 - 30	-8
Потенціал пункту призначення β_i		1	-7	3	

Для відповідної вільної клітки (нижньої, лівої) будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл.3.4 зайняті клітки, що складають цикл, виділені сірим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «-» і «+». Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{43} (30). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в такий спосіб: x_{11} =130-30=100, x_{13} =70+30=100, x_{14}=30.

У результаті зроблених перетворень одержуємо новий опорі план

$$X_4=\begin{pmatrix} 100 & 0 & 100 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 30 & 90 & 0 \end{pmatrix}$$

При такому опорному плані функція (3.20) стає рівною 1830 тис.т/міс, що менше попереднього значення 1980 тис.т/міс.

4-й крок. Аналізуємо новий опорний план (табл.3.5) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо наступну систему рівнянь:

$\beta_1-\alpha_1=1$, $\beta_1-\alpha_2=6$, $\beta_1-\alpha_4=4$,

$\beta_3-\alpha_1=3$, $\beta_3-\alpha_3=4$, $\beta_2-\alpha_4=1$.

Вважаючи $\alpha_1=0$, знаходимо $\beta_1=1$, $\beta_3=3$, $\alpha_2=-5$, $\alpha_3=-1$, $\alpha_4= -3$, $\beta_2= -2$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12}=-7$, $\alpha_{22}=-4$, $\alpha_{23}=-1$, $\alpha_{31}=0$, $\alpha_{32}=-8$, $\alpha_{41}=-5$. Тому що серед чисел α_{ij} і немає строго позитивних, то опорний план X_3 є оптимальним.

Таблиця 3.5 - Новий опорний план

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 100	5	3 100	0
2	150	6 150	8	9	-5
3	80	2	7	4 80	-1
4	120	4 30	1 90	11	-3
Потенціал пункту призначення β_i		1	-2	3	

Різновиди транспортних задач

Розглянута математична модель (3.12) - (3.16) є класичною моделлю транспортної задачі. У реальній практиці економіста і менеджера, як правило, транспортна задача зустрічається в дещо іншій постановці. Математична модель реальної транспортної задачі може відрізнятися від класичної або видом цільової функції, або видом обмежень, або характером змінних, або будь-яким сполученням перерахованих відмінностей одночасно.

Розглянемо декілька модифікацій транспортної задачі.

Транспортна задача про розподіл випуску продукції

При комплексному вирішенні проблеми виробництва і реалізації продукції виникає задача, що полягає у визначенні такого плану випуску і перевезень готової продукції, при якому досягаються мінімальні витрати на її виготовлення і доставку споживачам.

Для вирішення даної задачі розглядається повна собівартість виробництва одиниці продукції на кожному підприємстві (S_i) і транспортні витрати (S_{ij}), що залежать від типу застосовуваних транспортних засобів і районів розташування заводів-виробників і споживачів.

Математична модель такої задачі має вигляд:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(s_i+s_{ij})x_{ij}\underset{x_{ij}\in\Omega}{\rightarrow min}; \tag{3.29}$$

$$\Omega: \quad f_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_i, \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.30}$$

$$f_{n+i}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, \quad i=\overline{1,m}; \tag{3.31}$$

$$x_{ij}\geq 0;\ i=\overline{1,m};\ i=\overline{1,m}; \tag{3.32}$$

$$x_{ij}=int;\ i=\overline{1,m};\ i=\overline{1,m}. \tag{3.33}$$

Якщо за умовою задачі потрібні ще капітальні вкладення в засоби транспорту, то показником ефективності служать приведені витрати, і (3.29) матиме вигляд

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(s_i+s_y+E_n k_i)\cdot x_{ij}\rightarrow \min\ . \tag{3.34}$$

E_n - нормативний коефіцієнт ефективності капітальних вкладень; к - питомі капітальні вкладення, що приводяться на одиницю перевезень.

Виконуючи підстановку $C_{ij}=s_i+s_{ij_i}$ в цільову функцію (3.29) і підстановку $C_{ij}=s_i+s_{ij}+E_n k_i$ в цільову функцію (3.34), задача (3.29) - (3-33) і задача (3.34), (3.29) - (3.33) відповідно приводяться до класичної транспортної задачі, що може бути вирішена методом потенціалів.

Розподільна транспортна задача про вибір засобів доставки вантажу

Змістовна постановка задачі. Нехай через j=1,2, ...,n позначено пункти, що мають вантажі для перевезень об'ємами a_j відповідно. Є m засобів доставки вантажу (видів транспорту). Вантажопідйомність і-го засобу доставки складає p_i а наявний його парк дорівнює b_i, i=1,2,...,m... Вантажі підлягають доставці в один центральний пункт (склад). Витрати при здійсненні однією одиницею і-го засобу доставки від j-го пункту до складу дорівнюють C_{ij}. Потрібно скласти найбільш економічний план доставки.

Математична модель задачі. Позначимо через X_{ij} кількість засобів доставки і-го типу, що відправляється з j-го пункту. Тоді математична модель розподільної транспортної задачі про вибір транспортних засобів матиме вигляд

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min ; \qquad (3.35)$$

$$\Omega : \sum_{i=1}^{m} p_i \, x_{ij} \geq a_j , \ j = \overline{1,n} ; \qquad (3.36)$$

$$\sum_{l=1}^{n} x_{ij} \leq , b_i , i = \overline{1,m} ; \qquad (3.37)$$

$$x_{ij} \geq o; i = \overline{1,m}; i = \overline{1,m} \ ; \qquad (3.38)$$

$$x_{ij} = \text{int}; i = \overline{1,m;i}; i = \overline{1,m} . \qquad (3.39)$$

Цільова функція (3.35) визначає сумарні витрати на доставку вантажу на центральний склад. Вираз (3.36) вказує на необхідність вивезення всього вантажу з пунктів відправлення. Обмеження (3.37) вказує те, що кількість використовуваних засобів доставки не повинна перевищувати їхній наявний парк.

Поява параметра p_i,- у системі обмежень (3.37) перешкоджає зведенню математичної моделі завдання до моделі класичної. Тому вирішувати її методом потенціалів неможливо. Вирішення даної задачі класичними методами лінійного програмування також неможливе через цілочисельність змінних x_{ij}. Вирішення задачі можна одержати методом відсікання (шляхом введення в задачу додаткових обмежень у вигляді нерівностей Гоморі), однак процедура вирішення різко ускладнюється. Тому вирішення задачі найбільш доцільно покласти на програм; Solver (Пошук рішення) інформаційної системи Microsoft Excel.

Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу

Змістовна постановка задачі. Однорідний вантаж потрібно доставити з т пунктів відправлення в п пунктів призначення. При доставці в пункти призначення вантажі можуть бути спочатку доставлені на р перевалочних пунктів. Задано вартості перевезень C_y з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення і перевалочний пункт, а також вартості перевезення з кожного перевалочного пункту в пункт призначення.

Математична модель завдання. Позначимо:

C_{ij} - вартість перевезення одиниці вантажу з і-го пункту відправлення j-й пункт призначення, $i=\overline{1,v},\quad j=\overline{1,n};$;

C_{ik} - вартість перевезення одиниці вантажу з і-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт $i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,p};$;

C_{kj} - вартість перевезення одиниці вантажу з к-го перевалочного пункту j-й пункт призначення $k=\overline{1,p},\quad j=\overline{1,n};$

a_i - запаси вантажу в і-м пункті відправлення;

b_i - потреба у вантажі j-м пункті призначення;

c_k - місткість k-го перевалочного пункту;

X_{ij} - кількість вантажу, перевезеного з і-го пункту відправлення в j-й пункт призначення;

Y_{ik} - кількість вантажу, перевезеного з і-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт;

Z_{kj} - кількість вантажу, перевезеного з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення.

Математична модель задачі з урахуванням вище наведених позначень може бути подана у вигляді задачі лінійного програмування:

$$y = \sum_{i-1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} * x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} c_{ik} * y_{ik} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} c_{kj*z_{kj}} \to \min_{x_{ij}, y_{ik}, z_{kj} \in \Omega}; \qquad (3.40)$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{k=1}^{p} y_{ik} \le a_i, \quad i = \overline{1, m}; \qquad (3.41)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{k=1}^{p} z_{kj} \ge p_j, \quad j = \overline{1, n}; \qquad (3.42)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik} \le c_k, \quad k = \overline{1, p}; \qquad (3.43)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} z_{kj}, \quad k = \overline{1, p}; \qquad (3.44)$$

$$x_{ij} \ge o; \; y_{ik} \ge o; \; z_{kj} \ge 0, \; i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n}, \; k = \overline{1, p}. \qquad (3.45)$$

Тут цільова функція (3.40) складається з витрат трьох видів: на доставку частини вантажу з пунктів відправлення в пункти призначення, маючи перевалочні пункти; на перевезення частини вантажу з пункту призначення в перевалочні пункти; на доставку вантажу з перевалочних пунктів у пункти призначення. Система обмежень (3.41) говорить про те, що сумарні об'єми вантажів, що вивозяться з пунктів відправлення, не можуть перевищувати запаси вантажів у цих пунктах. Система обмежень (3.42) свідчить про те, що сумарні об'єми вантажів, що надходять у пункти призначення, не можуть бути менше відповідних потреб пунктів призначення. Система обмежень (3.43) означає, що сумарне завезення вантажів на кожний перевалочний пункт не може перевищувати його місткості. Система обмежень (3.44) вказує на те, що весь вантаж з перевалочних пунктів повинен бути вивезений повністю.

Як і в попередній задачі, математична модель (3.40) - (3.45) не може бути приведена до класичної. Тому вирішення задачі найбільш доцільно покласти на програму Solver (Пошук рішення) інформаційної системи Microsoft Excel.

Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу декількох видів

Змістовна постановка завдання. Вантаж, що включає q видів продукції, потрібно доставити з т пунктів відправлення в n пунктів призначення. При доставці в пункти призначення вантажі можуть бути спочатку доставлені на q перевалочних пунктів. Задано вартості перевезень для кожного виду вантажу з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення і перевалочний пункт, а також вартості перевезення з кожного перевалочного пункту в кожний пункт призначення.

Математична модель завдання. Позначимо:

C_{ijl} - вартість перевезення одиниці 1-го виду вантажу з г-го пункту відправлення в у-й пункт призначення, $i=\overline{1.m},\quad j=\overline{1,n},\quad l=\overline{1,q};$

C_{ikl} - вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з і-го пункту відправлення в к-й перевалочний пункт, $i=\overline{1.m},\quad k=\overline{1,p},\quad l=\overline{1,q};$

C_{kjl} - вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення, $k=\overline{1,p},\quad j=\overline{1,n},\quad l=\overline{1,q};$

a_{il} - запаси l-го виду вантажу в і-м пункті відправлення;

b_{jl} - потреба в l-м виді вантажу j-м пункті призначення;

c_{kl} - місткість k-го перевалочного пункту стосовно l-го виду вантажу;

x_{ijl} - кількість l-го виду вантажу, перевезеного з і-го пункту відправлення j-й пункт призначення;

y_{ikl} - кількість l-го виду вантажу, перевезеного з і-го пункту відправлення k -й перевалочний пункт;

z_{kil} - кількість l-го виду вантажу, перевезеного з k-то перевалочного пункту j-й пункт призначення.

Математична модель задачі з урахуванням вище приведених позначень може бути подана у вигляді задачі лінійного програмування:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}c_{ijl}*x_{ijl}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}c_{ikl}*y_{ikl}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}c_{kjl}*z_{kjl}\to\min_{x_{ijl},y_{ikl},z_{ikl}\in\Omega}\ ; \qquad (3.46)$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ijl} + \sum_{k=1}^{p} y_{ikl} \le a_{il}, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (3.47)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijl} + \sum_{k=1}^{p} z_{kjl} \ge b_{jl}, \quad j = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,q}\;; \qquad (3.48)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ikl} \le c_{kl}, \qquad k = \overline{1,p}, \quad l = \overline{1,q}\;; \qquad (3.49)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} z_{kj}, \quad k = \overline{1,p}, \quad l = \overline{1,q}\;; \qquad (3.50)$$

$$x_{ijl} \ge o; \quad y_{kjl} \ge o; \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}, \; k = \overline{1,p}, \; l = \overline{1,q}\,. \qquad (3.51)$$

Математична модель задачі відрізняється від попередньої тільки тим, що враховує різновид вантажів.

Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажів декількох видів за запитами споживачів

Існує модифікація транспортної задачі двохетапного перевезення вантажів декількох видів, у якій кількість вантажу в пунктах відправлення не фіксована. Вона залежить від запитів споживачів.

Математична модель задачі. Позначимо:

c_{ijl} - вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з і-го пункту відправлення в j-й пункт призначення, $i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1.n}, \quad l = \overline{1,q};$

c_{ikl} - вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з і-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт, $i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,p}, \quad l = \overline{1,p};$

c_{kjl} - вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення, $k = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,n}, \quad l = \overline{1,q};$

t_{il} - витрати на виробництво l-го виду вантажу в 2-м пункті відправлення;

b_{jl} - потреба в l-му виді вантажу в j-му пункті призначення;

c_{kl} - місткість k-то перевалочного пункту стосовно l-го вантажу;

x_{ijl} - кількість l-го виду вантажу, перевезеного з і-го пункту відправлення в j-й пункт призначення;

y_{ikl} - кількість l-го виду вантажу, перевезеного з і-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт;

z_{kjl} - кількість l-го виду вантажу, перевезеного з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення;

s_{il} - кількість виробленого l-го виду вантажу в і-м пункті відправлення.

Математичну модель задачі з урахуванням вище наведених значень можна подати у вигляді задачі лінійного програмування:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} c_{ijl} * x_{ijl} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} c_{ikl} * y_{ikl} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} c_{kjl} * z_{kjl} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{q} t_{il} s_{il} \rightarrow \min_{x_{ijl}, y_{ikl}, z_{kjl}, s_{it} \in \Omega}; \qquad (3.52)$$

$$\Omega: \ \sum_{j=1}^{n} x_{ijl} + \sum_{k=1}^{p} y_{ikl} \le s_{it}, \quad i = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,q} \ ; \qquad (3.53)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijl} + \sum_{k=1}^{p} z_{kjl} \ge b_{jl}, \quad j = \overline{1,n}, \quad l = \overline{1,q}; \qquad (3.54)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ikl} \le c_{kl}, \quad k = \overline{1,p}, \quad l = \overline{1,q} \ ; \qquad (3.55)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} z_{kj}, \quad k = \overline{1,p}. \quad l = \overline{1,q}; \qquad (3.56)$$

$$x_{ijl} \ge 0; \ y_{ikl} \ge 0; \ z_{kjl} \ge 0, \ s_{il} \ge 0, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}, \ k = \overline{1,p}, \ l = \overline{1,p} \ . \qquad (3.57)$$

Цільова функція в математичній моделі (3.52) - (3.57) відрізняється від цільової функції (3.46) тільки тим, що враховує витрати на виробництво продукції (вантажу) в пунктах відправлення.

Транспортна задача про закриття підприємства

Змістовна постановка задачі Виробниче об'єднання складається з п заводів і т складів. Задано потреби складів у продукті й вартості на перевезення продуктів з кожного заводу на кожний склад. Задані фіксовані вартості функціонування заводів і можливості заводів з виробництва продукту. Виробниче об'єднання розглядає можливість закриття одного або декількох заводів. Це повинно зменшити витрати на перевезення. Які заводи, якщо це доцільно, повинні бути закриті?

Математичне формулювання завдання. Позначимо:

c_{ij} - вартості перевезення j-го заводу на i-й склад;

d_i - потреби i-го складу в продукті, i=1,…,m;

a_j - можливість j-го заводу з виробництва продукту;

e_i - фіксована вартість функціонування j-го заводу;

z_j - бульове число, що показує, чи потрібно закрити j-й завод (значення 0), чи залишити його працювати (значення 1);

x_{ij} - кількість перевезеного товару з j-го заводу на i-й склад.

Тоді математична модель транспортної задачі про закриття заводу можна подати у такому вигляді:

$$y = \sum_{j=1}^{n}\left(z_j * e_j + \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}\right) \to \min_{z_j, x_{ij}, \in \Omega}; \qquad (3.58)$$

$$\Omega: \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le z_j a_j, \quad j = \overline{1,n} \ ; \qquad (3.59)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge d_i, \quad i = \overline{1,m} \ ; \qquad (3.60)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad j\overline{1,n}; \qquad (3.61)$$

$$z_j \in \{0,1\}; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (3.62)$$

Тут цільова функція (3.58) визначає загальні витрати виробничого об'єднання на функціонування заводів і транспортування готової продукції на склади. Обмеження (3.59) визначає можливості заводів з виробництва продукції. Обмеження (3.60) визначають потреби складів у готовій продукції.

Тема 4. Теорія достовірності та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

4.1. Теорія достовірності в економіко-математичному моделюванні

4.2. Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

Поняття: достовірність; авторизованість; авторитетність; інформативність; свідомість; кореляційне відношення; середня помилка; міра достовірності результатів моделювання; статистичний критерій Уилкоксона; статистичний критерій χ^2 - Пірсона; статистичний критерій Колмогорова-Смірнова; метод відношення правдоподібності; метод сценаріїв; модифікований критерій Колмогорова-Смірнова і Мізеса; статистична несуперечність; область допустимих рішень; критерій оптимальності.

Література: [2], [4], [7], [12], [18], [30], [43], [48], [52], [55], [56], [60], [66], [75], [80], [91].

4.1. Теорія достовірності в економіко-математичному моделюванні

Для розуміння теоретичних аспектів і прикладних напрямів використання теорії достовірності важливе значення має визначення поняття «достовірність». Термін ***достовірність*** використовується в теорії ймовірності, логіці, гносеології та праві й визначається як характеристика обгрунтованого, доказового, безперечного і як синонім істини. Слід відзначити, що достовірність також може розглядатись як події, що підтверджені експериментально (практично).

Існують ще декілька визначень поняття «достовірність».

Достовірність – це форма існування істини, яка обґрунтована будь-яким способом [91]. В словарі термінів логіки ***достовірність*** визначається як обґрунтованість, доказовість, безпорність знання.

З позиції теорії ймовірності ***достовірність*** визначається як поняття, що відображає упевненість суб'єкта в правильності своєї оцінки ймовірності настання тієї чи іншої події [55].

Теорія імовірності спрямована на вирішення проблеми визначення достовірності проведеного дослідження для подальшого використання його результатів в економічних процесах. У цьому аспекті важливе значення має оцінка достовірності інформації, яка використовується в дослідженні, і оцінка достовірності результатів дослідження.

Оцінка достовірності інформації – це складне завдання. У цьому аспекті можна відзначити, що, наприклад, експерт, який формулює висновки щодо економічних питань, може помилятись або свідомо вводити в оману. Тому необхідно не тільки оцінювати економічну інформацію, а і її джерела. У зв’язку з цим вводять наступні терміни: авторизованість, авторитетність, інформативність і свідомість.

Авторизованість – це прив'язка пропонованих у відповіді даних до визначеного джерела. Як джерело можуть бути використані посилання на сайт, книгу та ін.

Авторитетність - характеристика джерела даних. Якщо експерт у відповіді не посилається на джерело, а говорить від першої особи, оцінюється авторитетність самого експерта.

Інформативність показує кількість нових даних у відповіді, які відносяться до запитання.

Свідомість – показує, наскільки відповідаючий зрозумів запитання.

При оцінці достовірності результатів дослідження необхідно враховувати те, що достовірним можна вважати результат, допустима похибка якого не виходить за різницю між розрахунковим значенням моделі і отриманим значенням, в результаті розрахунків економічних показників:

$$\left| \hat{y} - y_i \right| \le \varepsilon , \qquad (4.1)$$

де $\hat{y}$ - розрахункове значення моделі;

y_i - вихідне значення економічного показника моделі;

ε - величина допустимої погрішності.

Саме виникнення значної погрішності результатів дослідження призводить до зниження достовірності результатів моделювання. В цілому погрішність виникає у зв'язку з:

- неадекватністю моделі;
- помилками розрахунку показників і параметрів моделі;
- низькою якістю інформації, яка використовується для моделювання та інш.

Для визначення факту наявності або відсутності помилок, використовують спосіб, який полягає порівняння їх з аналітичними рішеннями. Цей спосіб використовується при наявності значної кількості різних аналітичних рішень. Проте, екстраполювати результати оцінки одного порівняння на всі можливі рішення й параметри моделі досить загрозливо, оскільки в кожному конкретному випадку можуть виникати відхилення, особливо при зміні параметрів.

Часто використовується спосіб, коли розрахунок одного і того ж параметру відбувається декількома способами. Цей спосіб дає можливість визначити погрішності практично для всіх комбінацій параметрів моделі.

Розглянемо приклад визначення достовірності на основі розробленої економіко-математичної моделі.

Розроблена лінійна модель виду

$$\frac{K'}{K} = 0{,}326 - 0{,}212xP_в - 0{,}08xPз \quad , \tag{4.2}$$

де $\frac{K'}{K}$ - індикатор розвитку (відношення нового капіталу до інвестованого капіталу);

$P_в$ - рівень витрат;

$P_з$ - рівень матеріальних запасів.

Встановіть достовірність розрахунків моделі (4.2) на основі встановленої похибки. Вихідні статистичні дані представлених економічних показників подані в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 - Вихідні статистичні дані економічних показників моделі (4.2)

№ спостереження	$\frac{K^{'}}{K}$	$Р_в$	$Р_з$
1	0,113	0,957	0,042
2	0,09	-1,052	0,057
3	0,092	1,047	0,052
4	0,083	1,075	0,066
5	0,069	1,113	0,09
6	0,067	1,123	0,099
7	0,069	1,118	0,094
8	0,08	1,085	0,071
9	0,081	1,09	0,066
10	0,009	1,354	0,137
11	0,016	1,33	0,127
12	0,024	1,302	0,118
13	0,031	1,269	0,113
14	0,048	1,198	0,108
15	0,05	1,193	0,104
16	0,055	1,174	0,099
17	0,057	1,165	0,099
18	0,063	1,146	0,094
19	0,063	1,141	0,094
20	0,074	1,113	0,075
21	0,075	1,108	0,071
22	0,08	1,09	0,066
23	0,082	1,08	0,061

Вирішення

Визначення оцінок індикатора розвитку та помилки розрахунків моделі (4.2) представлені в табл. 4.2

Таблиця 4.2 - Розрахунок оцінок індикатора розвитку та помилки

№ спостереження	$\frac{K'}{K}$	Параметри моделі (4.2)				$\sum((\frac{K'}{K})' - \frac{K'}{K})$
		0,326	-(0,212 x $P_в$)	-(0,08 x $P_з$)	$(\frac{K'}{K})'$	
1	0,113	0,326	-0,203	-0,009	0,114	0,001
2	0,09	0,326	-0,223	-0,012	0,091	0,001
3	0,092	0,326	-0,222	-0,011	0,093	0,001
4	0,083	0,326	-0,228	-0,014	0,084	0,001
5	0,069	0,326	-0,236	-0,019	0,071	0,002
6	0,067	0,326	-0,238	-0,021	0,067	0
7	0,069	0,326	-0,237	-0,020	0,069	0
8	0,08	0,326	-0,230	-0,015	0,081	0,001
9	0,081	0,326	-0,231	-0,014	0,081	0
10	0,009	0,326	-0,287	-0,029	0,01	0,001
11	0,016	0,326	-0,282	-0,027	0,017	0,001
12	0,024	0,326	-0,276	-0,025	0,025	0,001
13	0,031	0,326	-0,269	-0,024	0,033	0,002
14	0,048	0,326	-0,254	-0,023	0,049	0,001
15	0,05	0,326	-0,253	-0,022	0,051	0,001
16	0,055	0,326	-0,249	-0,021	0,056	0,001
17	0,057	0,326	-0,247	-0,021	0,058	0,001
18	0,063	0,326	-0,243	-0,020	0,063	0
19	0,063	0,326	-0,242	-0,020	0,064	0,001
20	0,074	0,326	-0,236	-0,016	0,074	0
21	0,075	0,326	-0,235	-0,015	0,076	0,001
22	0,08	0,326	-0,231	-0,014	0,081	0,001
23	0,082	0,326	-0,229	-0,013	0,084	0,002
$\sum$	1,471	x	x	x	1,492	0,021

У результаті розрахунків встановлено, що помилка розрахунків складає 0,021 тис. грн./тис. грн. або 2,1%. Таке значення свідчить про високий рівень достовірності розрахунків параметрів лінійної моделі, оскільки значення помилки наближається до нуля.

З теорії статистики відомо, що коли рівень помилки складає від 0 до 5%, то результати розрахунків можна вважати достовірними.

Слід сказати, що для визначення ступеня достовірності результатів економіко-математичного дослідження необхідно для кожної відносної або середньої величини розрахувати відповідну ***середню помилку***.

Середня помилка дозволяє визначити межі, в яких з відповідною ймовірністю може знаходиться значення показників розробленої моделі. При оцінці достовірності визначається і середня помилка різниці між двома середніми або відносними величинами:

$$M_{ррізниці} = \sqrt{M_i^2 + M_2^2}, \tag{4.3}$$

де M_i^2, M_2^2 - квадрати середніх помилок.

Якщо різниця середніх величин більше середньої помилки різниці в 2,5-3,0 рази, то з відповідною ймовірністю можна стверджувати, що різниця середніх (відносних) величин не випадкова, а залежить від будь-якої визначеної причини. Якщо різниця перевищує свою середню помилку в 2,5-3,0 разів, то різниця цих середніх не випадкова.

Для встановлення достовірності розрахунків необхідно оцінити середню помилку розрахунків, а також граничну помилку розрахунків. Це потрібно для виявлення довірчих границь.

Довірчі границі визначають так [18]:

$$\hat{y} - \varepsilon_{гy} \le y \le \hat{y} + \varepsilon_{гy}, \tag{4.4}$$

де $\hat{y}$ - розрахункові значення економічного показника лінійної моделі;

$\varepsilon_{гy}$ - граничне значення помилки розрахунків;

y - вихідні значення економічного показника.

Для визначення граничної помилки розрахунків використовують наступне співвідношення:

$$\varepsilon_{гу} = 1{,}96 \cdot \bar{\varepsilon}, \qquad (4.5)$$

де $\bar{\varepsilon}$ - середня помилка розрахунків.

Середня помилка розрахунків визначається за формулою [18]:

$$\bar{\varepsilon} = \sigma_y \sqrt{1 - \eta_{y/x}^{\ 2}}; \qquad (4.6)$$

де σ_y - середнє квадратичне відхилення показника;

$\eta_{y/x}$ - емпіричне кореляційне відношення.

Для оцінки тісноти зв'язку між змінними використовується *емпіричне кореляційне відношення* ($\eta^2_{y/x}$), яке є часткою дисперсії (коливаємості) функції *y* за рахунок впливу аргументу *x*. У даному випадку загальна (повна) дисперсія розкладається на дві частини – дисперсію усередині кожного інтервалу зміни функції $\sigma^2_{y/x}$, яка не залежить від впливу *x*, і дисперсію середніх значень функції $\delta\frac{2}{y}$, яка викликана впливом аргументу, тобто

$$\sigma^2_y = \sigma^2_{y/x} + \delta\frac{2}{y}. \qquad (4.7)$$

Звідси формула для оцінки тісноти зв'язку між змінними має вигляд

$$\eta^2_{y/x} = \frac{\sigma^2_{\tilde{y}}}{\sigma^2_y} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sigma^2_y}, \qquad (4.8)$$

а в разі згрупованих даних

$$\eta^2_{y/x} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{y}_i - \bar{y}\right)^2 m_i}{\sigma^2_y}, \qquad (4.9)$$

де $\tilde{y}$i - розрахункове значення функції;

$\bar{y}$ - середнє значення функції за вибіркою;

n - обсяг вибірки;

m_i – кількість спостережень *y* в кожному інтервалі зміни.

Кореляційне відношення не залежить від одиниць вимірювання змінних, що вивчаються. Воно показує, яку частину загальної дисперсії σ^2_y можна віднести за рахунок зміни аргументу на одну $\sigma^2_{x.}$

При цьому характеристика $\eta^2_{y/x}$ тим точніше визначає частку впливу x на загальну дисперсію у, чим менше варіюється залишкова дисперсія $\sigma^2_{y/x}$ при кожному x. Якщо $\eta_{y/x}=1$, то має місце функціональна залежність y від x. Якщо $\eta_{y/x}=0$ – y кореляційно не залежить від x.

Слід зазначити, що результати моделювання також вважаються адекватними або достовірними, якщо обґрунтовано, що вибірки реальних значень показників системи і отриманих результатів мають однакові закони розподілу, тобто коли спільні функції розподілу векторів параметрів, які характеризують умови функціонування системи і моделі, і векторів вихідних характеристик дорівнюють один одному.

Для визначення міри різниці між функціями розподілу **вводиться *міра достовірності результатів моделювання*** або міра відмінності моделі або системи.

Розрахунок міри відмінності не становить особливих труднощів у трьох випадках. Перший випадок, коли повністю відомі закони розподілу показників ефективності, по яких порівнюються система і модель, другий — коли відомі закони розподілу показників системи і моделі до параметрів, третій — якщо є достатній обсяг вибірки результатів моделювання.

Для всіх трьох випадків існують класичні методи оцінки достовірності результатів моделювання. Так, для одновимірного показника оцінка достовірності результатів моделювання може проводитись за допомогою *статистичних критеріїв Уілкоксона,* χ^2 *- Пірсона, Колмогорова-Смирнова, методу відношення правдоподібності* та ін.

Для оцінки достовірності результатів моделювання по векторному показнику можна скористатися також ***методом відношення правдоподібності або розпізнавальними системами*** визначення ступеня близькості класів, що розпізнають. В якості розпізнавальних класів використовуються генеральні сукупності векторів-показників системи $\{\overleftrightarrow{y}\}_c$ і моделі $\{\overleftrightarrow{y}\}_м$, які описуються щільністю ймовірності P_c і $P_м$.

Сутність класичних методів оцінки достовірності зводиться до перевірки гіпотези про розбіжність результатів моделювання і вихідних даних для заданого рівня значущості, на якому перевіряється гіпотеза.

Розглянуті методи оцінки достовірності припускають наявність вибірок (статистики) результатів моделі і системи, оскільки по ним можна визначити оцінки функцій розподілу показників моделі і системи.

Слід вказати і на те, що результати математичного моделювання подібні результатам реальних економічних подій на рівні випадкових ймовірних подій, то можна стверджувати, що кількісні результати моделювання економічних подій в цілому є достовірними.

Для дослідження достовірності результатів моделювання використовують ***методи сценаріїв***, по яким є виборки. Причому сценарій складається таким чином, щоб умови здійснення кожної ймовірносної події в моделі співпадали з умовами, в яких проводились дослідження.

Для оцінки достовріності результатів моделювання за малою вибіркою може бути використана методика перевірки подібності теоретичної і емпіричної функцій розподілу, який заснований на використанні ***модифікованих критеріїв Колмогорова-Смірнова і Мізеса*** [60]. Проте ці методи використовуються для незначного класу завдань.

Існують ще інші підходи до вирішення задачі оцінки достовірності по малій вибірці, відповідно до якого за наявності малої вибірки доцільно говорити не про оцінку достовірності результатів моделювання, а про оцінку статистичної несуперечності результатів дослідження результатам моделювання. При цьому під ***статистичною несуперечністю*** слід розуміти несуперечність результатів дослідження твердженню, що їх значення на заданому рівні значущості можуть розглядатися як ті, що належать до тієї ж генеральної сукупності, що і вибірка результатів моделювання. Якщо реалізації дослідження економічних процесів не відповідають закону розподілу результатів моделювання (змінюють його параметри), то вони належать до іншої генеральної сукупності.

Для перевірки достовірності результатів моделювання економічних процесів можна використати ***перевірку на статистичну еквівалентність моделей елементарних подій***. Метод дозволяє оцінити достовірність результатів елементарних подій моделі за статистикою, яка отримана за спеціальними моделями елементарних подій. Ці моделі розробляються, наприклад, в науково-дослідних установах [60].

Таким чином, наведені методики оцінки достовірності інформації та результатів дослідження є підґрунтям для отримання моделі, яка віддзеркалює реальні економічні події і може бути використана для прийняття ефективних управлінських рішень.

4.2. Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач спрямований на прийняття оптимального рішення. Лінійна оптимізаційна модель включає систему обмежень, цільову функцію, області допустимих рішень, критерії оптимальності.

Цільова функція в загальному вигляді складається з трьох елементів:

- змінних, що управляються;
- змінних, що не управляються;
- форми функції (види залежності між змінними).

Область допустимих рішень – це область, в межах якої здійснюється вибір рішень. В економічних задачах вона обмежена наявними ресурсами і умовами, які записуються у вигляді системи обмежень, що складаються із рівнянь.

Критерії оптимальності – це економічні показники, які визначають за допомогою цільової функції через інші економічні показники. Одному і тому ж критерію оптимальності можуть відповідати декілька різних, але еквівалентних цільових функцій. Моделі з однією і тією ж системою обмежень можуть мати різні критерії оптимальності й різні цільові функції.

Для здійснення аналізу лінійних моделей необхідно побудувати економіко-математичну модель методика розробки якої полягає в тому, щоб економічну сутність задачі представити математично, використовуючи різні символи, змінні й постійні величини, індекси та інші символи.

Всі умови задачі записують у вигляді рівнянь. Тому, в першу чергу, необхідно визначити систему змінних, які можуть для конкретної задачі висвітлювати вихідні значення економічних показників, наприклад, обсягу виробництва й реалізації продукції, кількість вантажу, який перевозиться постачальниками та інш.

Слід відзначити, що будь-яку оптимізаційну задачу лінійного програмування можна привести до задач лінійного програмування в канонічній формі (див. розділ 2.2). Для цього в загальному випадку необхідно зводити задачу максимізації до задачі мінімізації, переходити від обмежень нерівностей до обмежень рівнянь і замінювати змінні, які не підходять умовам невід’ємності.

Правила приведення оптимізаційної задачі лінійного програмування до канонічного вигляду полягає в наступному:

1) якщо в початковій задачі необхідно визначити максимум лінійної функції, то слід змінити знак і шукати мінімум цієї функції;

2) якщо в обмеженнях права частина негативна, то слід помножити це обмеження на -1;

3) якщо серед обмежень є нерівності, то шляхом введення додаткових від’ємних змінних вони перетворяться в рівняння;

4) якщо деяка змінна x_i не має обмежень за знаком, то вона замінюється (в цільовій функції і у всіх обмеженнях) різницею між двома новими від’ємними змінними.

Складність вирішення оптимізаційних задач лінійного програмування, побудови відповідних моделей та їх аналізу залежить:

- від виду функціональних залежностей, тобто від зв'язку функції з елементами рішення;
- від розмірності задачі, тобто від кількості елементів рішення;
- від виду і кількості обмежень, які накладаються на елементи рішень.

При аналізі лінійних оптимізаційних моделей важливим етапом є ***інтерпретація*** отриманих економічних результатів. Саме на цьому етапі проявляється кваліфікація спеціаліста з напряму «Економіка і підприємництво». Інтепритація полягає в тому, що на базі розробленої лінійної оптимізаційної моделі визначаються зв'язки між економічними показниками, оптимізаційні рішення економічних проблем, пропонуються управлінські рішення щодо трансформаційних процесів переходу на підприємстві від економіки стагнації або, взагалі, падіння до економіки розвитку.

Питання і завдання для самоконтролю до змістового модуля 2

Питання для самоконтролю:

1. У чому сутність задач лінійного програмування?
2. Які особливості задач лінійного програмування Ви можете виділити?
3. Розкрийте сутність симплексного методу?
4. Розкрийте алгоритм використання симплексного методу при вирішенні задач лінійного програмування.
5. Які методи використовують при вирішенні задач лінійного програмування.
6. Розкрийте змістовну постановку транспортної задачі.
7. Сформулюйте математичну модель транспортної задачі?
8. Встановіть особливості вирішення закритої транспортної задачі.
9. Охарактеризуйте алгоритм визначення початкового опорного плану в транспортній задачі методом північно-західного кута.

10. Визначте напрями формування оптимального опорного плану транспортної задачі?
11. Назвіть види транспортних задач і охарактеризуйте їх.
12. Охарактеризуйте поняття «достовірність».
13. Назвіть напрями оцінки достовірності.
14. По яких напрямах відбувається аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач.
15. Охарактеризуйте область допустимих рішень і критерій оптимальності.
16. У чому полягає інтерпретація отриманих економічних результатів, отриманих на основі лінійних оптимізаційних моделей.

Завдання для самоконтролю:

1. Підприємство випускає протягом планового періоду два види продукції - столи і стільці. При їх виробництві використовують три види ресурсів. Дані по їх витратах на випуск одного виробу, запаси ресурсів, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в табл. 4.3.

Таблиця 4.3 - Дані по витратах на випуск одного виробу, запасів ресурсів, прибутку від реалізації одиниці продукції

	Стіл	Стільці	Запас ресурсів
Ресурс 1	4	6	24
Ресурс 2	3	2	12
Ресурс 3	1	1	8
Прибуток	4	5	

Необхідно спланувати кількість вироблюваних столів і стільців таким чином, щоб при цих умовах виробництва прибуток був максимальним.

2. Припустимо, що в денний раціон тварин повинні входити поживні речовини двох видів у кількості, яка подана в табл. 4.4. Є можливість складати

раціон з кормів двох видів, для яких задано змістопоживних речовин в одиниці корму і ціні однієї одиниці кожного з видів кормів.

Таблиця 4.4 - Дані про поживні речовини і вартість кормів на підприємстві

	Корм 1	Корм 2	Поживчі речовини в раціоні
Поживна речовина 1	2	1	12
Поживна речовина 2	6	4	30
Ціна корму	5	2	

При задоволенні умов щодо необхідного вмісту поживних речовин в цьому раціоні необхідно досягти його мінімальної вартості.

3. Фірма виробляє дві моделі А і В збірних книжкових полиць. Їх виробництво обмежено наявністю сировини (високоякісних дощок) і часом машинної обробки. Для кожного виробу моделі А потрібні 2 м^2 дощок, а для моделі В - 5 м^2. Фірма може одержувати від своїх постачальників до 1300 м^2 дощок в тиждень. Для кожного виробу моделі А потрібно 15 хв. машинного часу, а для виробу моделі В - 30 хв. У тиждень можна використовувати 180 годин машинного часу. Скільки виробів кожної моделі слід випускати фірмі в тиждень, якщо кожний виріб моделі А приносить 4 грн. прибутку, а кожний виріб моделі В - 2 грн. прибутку?

4. Скласти оптимальний план перевезень цегли між трьома заводами і п’ятьма об’єктами будівництва, якщо відстані (в *км*) між заводами і об’єктами будівництва визначаються матрицею

$$C = \lfloor C_{ij} \rfloor = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 13 & 1 \\ 6 & 8 & 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,5}.$$

Відомими є потужності заводів і об’єктів будівництва. Дані про потужність заводів і об’єктів будівництва студент вибирає із табл. 4.5 і 4.6 відповідно до його варіанта. Варіант вибирають за останньою цифрою номеру залікової книжки студента.

Таблиця 4.5 - Потужність цеглових заводів (*тис. шт. за добу*)

№ заводу	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,4	3,0	4,2	3,1	1,9	0,9	1,0	2,5	3,3	1,8
2	2,3	1,5	1,3	4,2	2,6	4,3	3,1	3,5	3,9	4,3
3	2,8	4,0	3,0	1,2	4,0	3,3	4,4	2,5	1,3	2,4

Таблиця 4.6 - Потужність об'єктів будівництва (*тис. шт. за добу*)

№ об'єктів будівництва	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,5	0,9	1,1	1,0	2,7	2,1	1,2	2,5	2,8	1,3
2	1,6	2,5	1,3	3,0	1,5	2,3	1,9	2,0	1,9	0,6
3	2,1	3,0	2,2	0,6	1,0	1,4	1,8	1,7	1,1	2,4
4	1,7	0,7	3,1	1,9	3,0	1,2	1,5	0,9	0,7	3,0
5	1,6	1,4	0,8	2,0	0,3	1,5	2,1	1,4	2,0	1,2

5. Скласти оптимальний план забудови мікрорайону міста, якщо відомо, що він повинен забудовуватися житловими будинками трьох серій. Характеристики житлових будинків кожної серії подані в табл. 4.7. З огляду на демографічний прогноз населення проектування мікрорайону, необхідно, щоб кількість квартир відповідала проектному завданню, що подано в табл. 4.8.

Дані про проектну кількість квартир вибирають із табл. 4.8 відповідно до варіанта студента. Варіант визначають за останньою цифрою залікової книжки студента.

Таблиця 4.7 - Склад квартир і кошторисна вартість житлових будинків різних серій (для всіх варіантів однакові)

Характеристика житлових будинків	Серія		
	1	2	3
Кількість квартир, усього	200	210	150
в тому числі на двох чоловік	50	50	60
на трьох чоловік	60	70	50
на чотирьох чоловік	90	90	40
Кошторисна вартість житлового будинку, тис. грн.	1200	1250	800

Таблиця 4.8 - Проектна кількість квартир у мікрорайоні на 2, 3 і 4 чоловіки

Склад сім'ї	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 чол.	600	800	750	625	900	850	950	700	1000	800
3 чол.	1800	1750	1850	1750	2100	1900	2000	1850	1950	2050
4 чол.	700	650	800	600	750	550	400	850	600	450

5. Встановіть достовірність розрахунків моделі:

$$\frac{K'}{K} = 0{,}12 + 0{,}21 x Кобз + 0{,}06 x Кобдз\,, \qquad (4.10)$$

де $Кобз$ - коефіцієнт оборотності матеріальних запасів;

$Кобдз$ - коефіцієнт оборотності дебіторської заборгованості.

на основі встановленої похибки. Вихідні статистичні дані визначених економічних показників наведені в табл. 4.9.

Таблиця 4.9 - Вихідні статистичні дані економічних показників моделі (4.10)

№ спостереження	$\frac{K'}{K}$	*Кобз*	*Кобдз*
1	0,661	2,25	1,16
2	0,595	1,96	1,06
3	0,587	1,93	1,05
4	0,576	1,87	1,07
5	0,527	1,63	1,09
6	0,523	1,61	1,10
7	0,525	1,62	1,09
8	0,574	1,86	1,07
9	0,577	1,87	1,07
10	0,424	1,12	1,14
11	0,469	1,34	1,13
12	0,487	1,43	1,12
13	0,495	1,47	1,11
14	0,503	1,51	1,11
15	0,507	1,53	1,10
16	0,515	1,57	1,11
17	0,515	1,57	1,11
18	0,519	1,59	1,09
19	0,520	1,60	1,09
20	0,526	1,63	1,07
21	0,523	1,62	1,07
22	0,559	1,79	1,06
23	0,561	1,80	1,05

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3
ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ І НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ

Тема 5. Цілочислове програмування

5.1. Основні поняття і сутність цілочислового програмування.
5.2. Алгоритм розв'язування задач цілочислового програмування.
5.3. Метод Гоморі.
5.4. Метод віток і меж.
5.5. Цілочислова транспортна задача.
5.6. Задача цілочислового лінійного програмування.

Поняття: цілочислове програмування; методи відтикання; комбінаторні методи; метод Р. Гоморі; метод віток і меж; велика ітерація; мала ітерація.

Література: [4], [14], [23], [26], [31], [51], [61], [63].

5.1. Основні поняття і сутність цілочислового програмування

Цілочислове програмування – це вид задач лінійного програмування, в яких змінні, що використовуються й отримані результати мають цілочислове значення.

Задачі цілочислового програмування можуть бути лінійними, якщо обмеження і цільова функція задачі є лінійною залежністю, або нелінійними – якщо залежності будуть мати нелінійну форму.

Слід вказати, що широке використання задач цілочислового програмування в економічних дослідженнях полягає в тому, що необхідно отримувати цілочислове рішення. Цілочислове програмування виникло в 50-60-ті роки 20 століття на основі робіт Дж. Данцига і Р. Гомори.

Задача цілочислового програмування записується так :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \qquad (5.1)$$

за умов того, що x_i є цілим числом і позитивним.

Для знаходження оптимального вирішення цілочислових задач застосовують відповідні методи. Найпростішим методом вирішення цілочислової задачі є знаходження її оптимального роз в'язку як задачі, що має лише неперервні змінні, з подальшим округленням останніх.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислової програмування застосовують ***дві групи методів***:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи.

Сутність методів відтинання полягає у поступовому «звуженні» області допустимих напрямів вирішення задачі. Пошук цілочислового оптимального вирішення задачі починають з розв'язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисленності змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисленність змінних, багатокутник допустимих рішень послабленої задачі поступово зменшується з отриманням змінних оптимального вирішення до отримання цілочислових значень. До цієї групи належать:

- методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);
- методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових рішень, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв’язків (досить невелика), а решта враховується одним із спеціальних методів. Найпоширенішим у цій групі методів є метод віток і меж.

Рекомендації з формулювання і вирішення задач цілочислового програмування:

1. Кількість цілочисельних змінних зменшувати наскільки можливо. Наприклад, цілочисельні змінні, значення яких повинно бути не менше 20, можна розглядати як безперервні.

2. На відміну від загальних задач лінійного програмування, додавання нових обмежень, особливо включених цілочисельних змінних, звичайно зменшує час вирішення задач цілочислового програмування.

3. Якщо немає необхідності в знаходженні точного оптимального цілочисельного рішення, відмінного від безперервного рішення, наприклад, 3%. Тоді реалізацію методу гілок і меж для задачі максимізації можна закінчувати, якщо відношення різниці між верхньої і нижньої межою до верхньої межі менше 0,03.

5.2. Алгоритм розв’язування задач цілочислового програмування

Алгоритм розв’язування задач цілочислового програмування наступний:

1. Розв'язують задачу лінійного програмування без обмежень на цілочисельність, наприклад, симплекс-методом.

2. Якщо оптимальне рішення задачі лінійного програмування нецілочисельне, то проводять «велику ітерацію». Будують лінійне обмеження, якому задовольняє будь-яке цілочисельне рішення задачі і не задовольняє отримане оптимальне нецілочисельне значення. Геометрично це означає – провести перетин (гіперплощина), який відсікав би нецілочисельну вершину, не зачіпаючи решту цілочисельних точок. Такий перетин називають ***правильним.*** Правильний перетин повинен задовольняти наступним умовам:

1) умова відсікання - оптимальне рішення задачі лінійного програмування не задовольняє умові відсікання;

2) умова правильності - всі цілочисельні рішення задачі задовольняють умові відсікання.

Оскільки для початкової задачі додаткове обмеження (відсікання) даватиме неприпустиме базисне рішення, необхідно провести «малі ітерації» для отримання оптимального рішення. Якщо отримане оптимальне рішення нецілочисельне, то проводять наступне відсікання. В іншому випадку пошук завершений.

Р. Гоморі запропонував ідею формування додаткових обмежень, яка приводить до вирішення задач цілочислового програмування за кінцеве число кроків.

5.3. Метод Гоморі

***Перший алгоритм Р. Гоморі полягає в наступному*:**

Нехай задана повністю цілочисельна лінійна задача:

$$\min z(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad j = 1,\ldots n, \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,\ldots m, \\ x_j \geq 0, \\ x_j \in Z. \end{cases} \tag{5.3}$$

Нехай в результаті лінійних операцій над рівняннями системи (5.3) отримано нове лінійне рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b. \tag{5.4}$$

Цілою частиною числа a називається найбільше ціле число $[a]$, яке не перевищує a. Наприклад $[4{,}25] = 4$; $[-4{,}25] = -5$.

Замінивши в рівнянні (5.4) всі коефіцієнти a_j їх цілими частинами, отримаємо:

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j] x_j \leq b. \tag{5.5}$$

Якщо всі x_k є цілочисельними, то ліва частина рівняння (5.5) теж цілочисельна. Рівняння (5.5) можна посилити таким чином:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[a_j\right] x_k \le [b]. \qquad (5.6)$$

Це обмеження-нерівність (4.6) можна перетворити в обмеження-рівняння шляхом введення додаткової цілочисельної і ненегативної змінної x:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[a_j\right] x_k + x = [b]. \qquad (5.7)$$

Віднімемо (5.4) з (5.7). Враховуючи, що $a = [a] + \{a\}$, отримаємо:

$$x = -\{b\} - (\sum_{j=1}^{n} - \left\{a_j\right\} x_j). \qquad (5.8)$$

У першому методі Гоморі всі обмеження формуються відповідно до рівнянь (5.8) – це і є відсікання нецілочисельних точок.

Фактично (5.8) – рівняння ***відсікаючої гіперплощини.*** Після вирішення задачі лінійного програмування одержуємо деяке базисне рішення, в якому деякі змінні можуть бути цілочисельними, а інші – нецілочисельними. Для нецілочисельних базисних змінних будуємо відсікання за першим алгоритмом Гоморі, послідовно для кожної з них. Якщо нецілочисельних змінних декілька, то краще вибрати ту, в якої більше дробова частина. Якщо рівняння вибраної базисної змінної має вигляд

$$x_{баз} = b_i - (\sum a_{ij} x_j), \qquad (5.9)$$

то рівняння додаткового обмеження-відсікання виглядає таким чином:

$$x = -\{b_i\} - \left(\sum - \left\{a_{ij}\right\} x_j\right). \qquad (5.10)$$

Побудова відсікання - «велика ітерація». Далі для звуженої області проводять «малі ітерації».

Вирішення задач цілочислового лінійного програмування можуть бути відсутні, якщо:

1) цільова функція є необмеженою знизу, тобто як початкова нецілочисельна, так і цілочисельна задачі лінійного програмування не мають рішення;

2) початкова задача лінійного програмування має рішення, а цілочисельна не має. У симплекс-таблиці це видно таким чином: у стовпці вільних членів у деякому рядку стоїть неціле число, а вся решта коефіцієнтів цього рядка – цілі числа.

Збіжність даного алгоритму достатньо повільна. Для задачі з 10-ма змінними необхідно провести порядку 1000 ітерацій.

Перебір можливих цілих точок допустимої області не зменшує обчислень, оскільки їх звичайно достатньо багато.

Округлення нецілочисельного рішення до найближчого цілого може дати точку, що не належить області.

***Другий алгоритм Р. Гоморі*:**

Застосовується для вирішення як повністю, так і не повністю цілочисельних задач. Багато індексів I при змінних x_j розбивають на дві неперекресні підмножини I_1 і I_2 так, що:

при $j \in I_1$, $x_j \in Z$ (x_j - цілочисельні);

при $j \in I_2$, $x_j \in R$ (x_j - нецілочисельні).

Як і в першому алгоритмі Гоморі, спочатку знаходять рішення задачі лінійного програмування без обмежень на цілочисельність і далі проводять відсікання за допомогою введення додаткових обмежень.

Припустимо, що після розв’язання задачі лінійного програмування отримана деяка базисна змінна, яка повинна бути цілочисельною:

$$x_5 = b_i - (\sum_j a_{ij}\, x_j), \tag{5.11}$$

де - x_j вільна змінна.

Тоді за другим алгоритмом Гоморі відсікання будуємо таким чином:

$$x_5 = -\{b_i\} - (\sum_j -\alpha_{ij} x_j), \tag{5.12}$$

де

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} a_{ij}, & a_{ij} \ge 0 \\ \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}}\left|a_{ij}\right|, & a_{ij} < 0 \end{array}\right\} x_j \in R; \\ \\ \left.\begin{array}{ll} \{a_{ij}\}, & \{a_{ij}\} \le \{b_i\} \\ \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}}(1-\{a_{ij}\}), & \{a_{ij}\} > \{b_i\} \end{array}\right\} x_j \in Z. \end{cases} \tag{5.13}$$

5.4. Метод віток і меж

Метод віток і меж використовують як до повністю цілочисельних задач, так і до частково цілочисельних задач.

Спочатку розв'язують ослаблену задачу без обмежень на цілочисельність:

$$x_k = b_k - (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j). \tag{5.14}$$

x_k повинна бути цілочисельною .

Тоді сферу допустимих рішень G_0 розбиваємо на дві підмножини G_1 і G_2 таким чином, що

$$G_1:\ x_j \le [b_i]$$

$$G_2:\ x_j \ge [b_i] + 1. \tag{5.15}$$

Отже виключається інтервал $[b_i]+1 > x_j > [b_i]$, який не містить цілочисельних точок.

Початкову задачу розбиваємо на дві підзадачі. У кожній з областей G_1, G_2 знаходяться оптимальні точки, якщо вони не задовольняють умові цілочисельності, знову здійснюємо розгалуження. Якщо отриманий оптимум виявляється допустимим (цілочисельним) для даної задачі, він фіксується і наголошується як найкращий. При цьому немає необхідності продовжувати розгалуження цієї підзадачі, оскільки поліпшити це рішення не вдасться.

Як тільки отримане допустиме (цілочисельне) рішення іншої підзадачі виявляється краще, його фіксують замість попереднього.

Процес розгалуження продовжується до тих пір, поки кожна підзадача не приведе до цілочисельного рішення або не буде встановлена неможливість поліпшення наявного рішення. Висновок про необхідність подальшого розбиття задачі робиться на основі введення межі.

Як межу використовуємо значення цільової функції отриманого допустимого цілочисельного рішення. Якщо будь-яке оптимальне рішення підзадачі забезпечує гірше значення цільової функції, ніж наявне рішення (прийняте як межа), то цю під задачу далі розглядати не слід.

Алгоритм методу віток і меж є ітеративним.

При використанні цього алгоритму потрібне вирішення послідовності задач лінійного програмування без обмежень на цілочисельність. Послідовність задач, що підлягають вирішенню називається ***основним списком***, який складається з наступних напрямів:

1. Якщо основний список порожній – закінчення алгоритму, інакше – вибирають задачу з основного списку і знаходять її оптимальне рішення.

2. Якщо вибрана задача не має рішення, або її оптимальне рішення гірше прийнятої оцінки, то необхідно виключити цю задачу із списку і перейти до п. 1, інакше – до п. 3.

3. Якщо отримане рішення цілочисельне – сформувати нову оцінку z_{t+1}, яка відповідає якнайкращому оптимальному рішенню поточної задачі. Перехід до п. 1. Якщо рішення поточної задачі нецілочисельне, то оцінка залишається у наступному вигляді: $z_{t+1} = z_t$, де t - номер ітерації; z_t - оцінка (для задачі мінімізації $z_0 = \infty$).

4. Вибираємо одну із змінних x_k, яка за умовою повинна бути цілочисельною. Проводимо розгалуження, тобто в основний список додаємо дві підзадачі, для яких зберігаються ті ж обмеження, але для однієї:

$$x_k \le [b_k], \tag{5.16}$$

а для іншої:

$$x_k \geq [b_k]+1. \tag{5.17}$$

Перехід до п. 1.

Слід зазначити, що вибір змінної може бути довільним (за збільшенням номерів) або визначатися таким чином:

1) представлена змінна є важливим рішенням, яке приймається в рамках розробленої моделі;

2) коефіцієнт в цільовій функції істотно переважує всі інші.

5.5. Цілочислова транспортна задача

У попередньому розділі розглядали математичні аспекти й особливості вирішення транспортних задач. Одним з видів цих задач є цілочислова транспортна задача, яка має цілочисловий характер. ***Цілочислові змінні мають місце***, коли перевезений вантаж являє собою лічильну множину великих заготівель або комплектуючих, неподільних продуктів виробництва, упакованих сипучих матеріалів і т.п. Об'єм такого вантажу характеризується розміром, що виражається в штуках, пакунках, партіях і т.п.

Тоді математична постановка транспортної задачі планування перевезень набуває вигляду:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\underset{x_{ij}\in\Omega}{\rightarrow} min; \tag{5.18}$$

$$\Omega:\quad f_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_i,\quad j=\overline{1,n}; \tag{5.19}$$

$$f_{n+i}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\quad i=\overline{1,m}; \tag{5.20}$$

$$x_{ij}\geq 0;\ i=\overline{1,m};\ i=\overline{1,m}; \tag{5.21}$$

$$x_{ij}=int;\ i=\overline{1,m};\ i=\overline{1,m}. \tag{5.22}$$

Математична модель цілочислової транспортної задачі (5.18)-(5.22) відрізняється від раніше розглянутих математичних моделей транспортної задачі додатковим обмеженням на цілочисельність невідомих x_{ij} (5.22). Це потребує накладення обмеження цілочисельності на функції $f_1, f_2, \dots , f_{n+m\dots}$

Слід зауважити, що в загальному випадку умова цілочисельності може накладатися і на значення функції цілі *y*.

5.6. Задача цілочислового лінійного програмування

Розглянемо ще декілька задач, математична модель яких відповідає цілочисловій задачі лінійного програмування.

Оптимальне вирішення нижче наведених задач можна одержати методом відсікання введення в задачу додаткових обмежень у вигляді нерівностей.

Задача про розподіл вантажного флоту:

Змістовна постановка завдання. Нехай вантажний флот має у своєму складі судна *n* типів. Кількість суден типу *j* дорівнює q_i, витрати при використанні одного судна типу *j* у планованому періоді складають $c_j, j = 1,2,...,n...$ Кожне судно має вантажні ємкості *m* типів (трюми, палуби, танки і т.п.). Вантажопідйомність ємкості *i* на судні типу j дорівнює $d_j, j = 1,2,...,m...$ Перевезенню підлягають *p* видів вантажу. Вантаж виду k є в кількості a $a_k, k = 1,2,...p...$ Треба вибрати найбільш економічний комплекс транспортних засобів для перевезення вантажу.

Математична модель задачі.

Позначимо:

x_i - кількість суден j-го типу, $j = 1,2,...,n;$

z_{ik} кількість вантажу виду *к*, що підлягає завантаженню в ємкість $i, k = 1,2,..., p$...

Тоді математична модель задачі про розподіл вантажного флоту має вигляд:

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{x_j \in \Omega} \tag{5.23}$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j - \sum_{k=1}^{p} z_{ik} \geq o, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.24}$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ik} = a_{ik}, \quad k = \overline{1, p}; \tag{5.25}$$

$$0 \leq x_j \leq q_j; \quad j = \overline{1, n}; \tag{5.26}$$

$$x_j = \text{int}, \quad j = \overline{1, .n}; \tag{5.27}$$

$$z_{ik} \geq o; \ i = \overline{1, m}; \ k = \overline{1, p} \tag{5.28}$$

Тут обмеження (5.24) показує, що загальна кількість вантажу, яка завантажена в ємкості кожного типу, не повинна перевищувати сумарну вантажопідйомність цих ємкостей у всіх судах, а обмеження (5.25) говорить про те, що перевезення усіх вантажів повинно бути повністю здійснено.

Задача про розвезення вантажу

Змістовна постановка задачі. Нехай деяка центральна база постачає продукцію (її можна вважати однорідною) на *т* складів. Розвезення продукції на склади здійснюються однією вантажівкою, причому кожний склад одержує своє замовлення в один прийом - вантажопідйомність вантажівки для цього достатня. Вантажівка може одночасно взяти вантаж, що відповідає не більше ніж *к* замовленням. Вантажівка може об'їжджати склади за визначеними *г* маршрутами. Один і той самий I склад може знаходитися на різних маршрутах.

Нехай для кожного складу відома функція витрат залежно, наприклад, від розміру замовлення. Потрібно скласти графік перевезень, що забезпечує всіх клієнтів і мінімізує сумарні витрати. Час доставки не враховується.

Передбачається, що всі операції з доставки гарантовані й можуть бути здійснені протягом деякого періоду часу, що влаштовує всіх споживачів.

Під способом розвезення будемо розуміти будь-яку припустиму комбінацію виконання замовлень. Вона являє собою m-мірний стовпець», 1-й компонент якого дорівнює одиниці, якщо i-й замовлення в цьому способі задовольняється, і нулю - у противному разі. Для будь-якої реальної задачі при невеликих значеннях *т, к* і *г* можна фактично виписати всі такі способи розвезення. Число *п* цих способів залежатиме не тільки від перерахованих параметрів, але і від числа складів на кожному маршруті, об'єму замовлень і т.д. Кожному *j*—му способу розвезення І відповідають витрати *Cj*.

Нехай при даних конкретних умовах задачі сформована матриць $A=[a_{ij}]$ способів розвезення, що складається з нулів і одиниць. Стовпці цієї матриці являють собою описані вище способи розвезення, тобто $a_{ij=1}$, якщо в j-му способі і -є замовлення задовольняється, і $a_{ij}=0$ - у противному разі. Тепер завдання полягає у виборі найбільш економічної комбінації цих способів.

Математична модель задачі. Введемо змінні: x_j в рівні 1, якщо j спосіб розвезення реалізується, і рівні 0 - у противному разі. Тоді математична модель задачі набуває вигляду:

$$y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{x_j \in \Omega}; \qquad (5.29)$$

$$\Omega: \quad \sum^{n} j=1 a_{ij} x_j = 1, \quad i=\overline{1,m}; \qquad (5.30)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j=\overline{1,n}; \qquad (5.31)$$

$$a_{ij} \in \{0,1\}, \quad i=\overline{1,m}. \qquad (5.32)$$

Умова (5.30) означає, що всі замовлення повинні бути задоволені тільки один раз.

Тема 6. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем

6.1. Сутність нелінійних зв’язків в економічних системах

6.2. Методи розробки нелінійних оптимізаційних моделей економічних систем

Поняття: система; емерджентність, детермінована система; стохастична система; динамічна система; нелінійність; траєкторія; аттрактор; бифуркація; нелінійне програмування; цільова функція; оптимальний план; фрактал; графічний метод; метод Лагранжа.

Література: [5], [7], [14], [23], [29], [49].

6.1. Сутність нелінійних зв’язків в економічних системах

Більшість економічних процесів мають нелінійний стохастичний характер, що суттєво впливає на їх аналіз і створює незручності в аспекті їх інтерпретованості й адаптованості до реальних ситуацій. В сучасних наукових дослідженнях для вивчення й аналізу цих процесів існує широкий арсенал методів, серед яких особливе місце займає економіко-математичне моделювання.

Слід зазначити, що теорія ***"нелінійної економіки"*** значно відрізняється від теорії ***"лінійної економіки"***. Більш того при їх аналізі необхідно визначити категорію система, яка від грецької означає складене з частин з'єднання і визначається як відносно відособлена і впорядкована сукупність вододіючих особливою зв'язаністю і цілеспрямованістю взаємодіючих елементів, здатних реалізувати певні функції.

При оцінці нелінійних економічних процесів, в аспекті визначення якості системи, необхідно враховувати ***емерджентність***, яка характеризується наявністю таких властивостей, що не властиві жодному з елементів і входять у систему.

Системи бувають детерміновані й стохастичні. Під ***детермінованою системою*** розуміють систему, в якій причинно-наслідкові зв’язки між економічними факторами строго обумовлені й мають чітке визначення.

Стахастична система – це система, в якій причинно-наслідкові зв’язки між економічними факторами мають ймовірнісний характер.

Слід зазначити, що більшість економічних процесів мають ймовірнісний характер і можуть бути описані нелінійними моделями. У цілому, в детерміновані економічні процеси введення незначної нелінійності приводить до непередбачуваного ряду подій.

При дослідженні нелінійних зв’язків необхідно враховувати динаміку системи**.** ***Динамічна система*** – система, в якій перехід з одного стану в інший здійснюється не миттєво, а протягом деякого часу, тобто процес переходу можна спостерігати і описати.

Найбільший інтерес з погляду управління представляють закономірності поведінки складних динамічних систем. Системи, які мають розгалужену структуру і велику кількість взаємозв'язаних і взаємодіючих елементів, що забезпечують виконання будь-якої складної функції, називаються ***складними.*** Одна з важливих властивостей складних систем - ***нелінійність***.

При проведенні аналізу нелінійних динамічних систем треба враховувати поняття «фазовий простір» і «траєкторія». Багато станів динамічної системи називають ***фазовим простором***, а траєкторію руху в цьому просторі з деякого початкового стану – ***фазовою траєкторією***. Найважливіша характеристика цього простору – його розмірність, тобто число величин, які необхідно задати для визначення стану системи.

Траєкторія – крива в просторі параметрів, яку описує точка при своєму русі в часі.

Найважливіше поняття в теорії нелінійних динамічних систем – це поняття ***грубості*** (або структурної стійкості). Якщо при малих змінах параметрів системи вид фазових змін нелінійної системи залишається незмінним, то таку системи називають *грубою*.

При аналізі динаміки нелінійних моделей враховують поняття ***«ат трактор»*** - безліч точок або підпростір у фазовому просторі, до якого наближається траєкторія після загасання перехідних процесів. Класичними прикладами аттракторів у динаміці можуть служити точки динамічної рівноваги, нерухомі точки відображень, або граничні цикли. Динамічні системи, які володіють ат тракторами, називають ***дисипативними.***

При моделюванні нелінійних економічних процесів динаміки необхідно враховувати теорії прогнозу, катастроф і біфуркації. Прогнозування економічних процесів розглядається в розділі 12. ***Теорія катастроф*** полягає в тому, що відстеження змін здійснюється на основі розуміння коли, чому і як відбуваються економічні зміни. Для цих процесів характерні раптові стрибкоподібні зміни, а не поступовий плавний розвиток.

Основи теорії біфуркацій динамічних систем були закладені у працях великого французького вченого А. Пуанкаре. ***Біфуркація*** – це зміна характеру руху динамічної системи на великому тимчасовому інтервалі при зміні одного або декількох параметрів. Ті значення параметрів, при яких змінюються якісні або топологічні властивості руху, називаються ***критичними або біфуркаційними значеннями.*** Хаос в динаміці означає чутливість динамічної еволюції до змін початкових умов.

При вивченні нелінійних об’єктів необхідно враховувати поняття ***фракталу.*** Будь-який нелінійний процес призводить до розгалуження, до розвилки на шляху, в якій система може вибрати ту або іншу гілку. Будь-яка найменша неточність в початкових умовах може пізніше дуже сильно вплинути на подальший рух. У кожний окремий момент причинний зв'язок зберігається, але після декількох галужень її вже не видно. Поняття ***фракталу*** в самому початку розробляв Бенуа Б. Мандельброт як альтернативу евклідовій геометрії, що претендувала на найбільш відповідний опис об'єктів природи. Їх істотною межею була невичерпність найдрібніших деталей і самоподібність в різних масштабах вимірювання. Найсильнішим твердженням теорії фракталів є те, як багато процесів, що відповідають за формування економічних об'єктів, прагнуть стати хаотичними, і що хаотичні аттрактори є фрактальними об'єктами.

6.2. Методи розробки нелінійних оптимізаційних моделей економічних систем

Для розробки нелінійних оптимізаційних моделей економічних систем вирішуються задачі нелінійного програмування.

Нелінійне програмування – це математичні методи визначення максимуму або мінімуму функції за наявності обмежень у вигляді нерівностей або рівнянь. Максимізувавши або мінімізувавши функцію, вона є прийнятим критерієм ефективності вирішення задачі, відповідним поставленій меті. У цьому випадку визначений критерій, як і в лінійному програмуванні, має назву ***цільової функції***.

Цільова функція задач нелінійного програмування полягає в тому, щоб знайти умови, що визначають цільову функцію мінімумом або максимумом. Рішення, що задовольняє умові задачі і відповідає визначеній меті, називається ***оптимальним планом***. Нелінійне програмування необхідно для того, щоб вибрати найкращий план розподілу обмежених ресурсів з метою вирішення поставлених економічних задач цілях вирішення. У загальному вигляді постановка задачі нелінійного програмування зводиться до наступного: умови задачі представляються за допомогою системи нелінійних рівнянь або нерівностей, що виражають обмеження, які накладаються на використання наявних ресурсів.

У загальному вигляді математична модель задачі нелінійного програмування формулюється таким чином:

$$f=(x_1,x_2,\dots,x_n)\to min\ (max). \tag{6.1}$$

При цьому ці змінні повинні задовольняти обмеженням:

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_m, \\ g_{m+1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b_{m+1}, \\ \\ g_k(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b_k, \\ g_{k+1}(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_p(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_p. \end{cases} \tag{6.2}$$

$x_1,x_2,\dots,x_n\ge 0$, де одна з функцій f, g_i нелінійна.

Для задач нелінійного програмування немає єдиного методу вирішення. Залежно від виду цільової функції і системи обмежень розроблені спеціальні методи вирішення, до яких відносяться метод множників Лагранжа, градієнтні методи, наближені методи вирішення, графічний метод.

Розглянемо деякі з них. Основні ідеї графічного методу: максимум і мінімум досягається в точках дотику лінії рівня з областю допустимих рішень, яка задається системою обмежень. Наприклад, якщо лінії рівня - прямі, то точки дотику можна визначити, використовуючи геометричне значення похідної.

Широке використання при здійсненні нелінійного програмування отримав метод Ланґранжа, приклад застосування якого наведено нижче.

Приклад. Загальні витрати виробництва задані функцією $T=0{,}5x^2+0{,}6xy+0{,}4y^2+ +700x+600y+2000$, де x і y відповідно кількість товарів A і B. Загальна кількість виробленої продукції повинна дорівнювати 500 одиниць. Скільки одиниць товару A і B потрібно виробити, щоб витрати на їх виготовлення були мінімальними?

Вирішення

Складемо функцію Лагранжа

$L(x, y, \lambda) =0{,}5x^2+0{,}6xy+0{,}4y^2+ +700x+600y+2000+\lambda(x+y-500).$

Дорівнюючи до нулю її часні похідні, отримаємо

$$\begin{cases} x+0{,}6y+700+\lambda=0, \\ 0{,}6x+0{,}8y+600+\lambda=0, \\ x+y-500=0. \end{cases}$$

Вирішивши систему, знайдемо *(0, 500, -1000).*

Використаємо достатні умови для визначення знайденого значення

$L''_{xx}(x_0,y_0)=1$, $L''_{yy}(x_0,y_0)=0.8$, $L''_{xy}(x_0,y_0)=0.6$. Функція $g= x+y-500$. $g'_x=1$, $g'_y=1$.

Δ=-($0 \cdot L''_{xx} \cdot L''_{yy} + g'_x \cdot L''_{xy} \cdot g'_y + g'_y \cdot g'_x \cdot L''_{xy} - g'_x \cdot L''_{xx} \cdot g'_y - 0 \cdot L''_{xx} \cdot L''_{xy} - g'_x \cdot g'_x \cdot L''_{yy}$)=0,6>0

Таким чином, в точці *(0;500)* функція *L* має умовний мінімум.

Відповідь: Вигідно виробляти тільки 500 одиниці товару *B*, а товар *A* не виробляти.

Питання і завдання для самоконтролю до змістового модулю 3

Питання для самоконтролю:

1. Охарактеризуйте сутність цілочислового програмування.
2. Розкрийте напрями формулювання і вирішення задач цілочислового програмування:
3. Які методи використовують при вирішенні задач цілочислового лінійного програмування. Охарактеризуйте їх.
4. Представте алгоритм вирішення задач цілочислового програмування.
5. У чому полягає метод Гоморі, представте алгоритм вирішення задач цілочислового програмування цим методом.
6. У чому полягає метод віток і меж, представте алгоритм вирішення задач цілочислового програмування цим методом.
7. Охарактеризуйте математичну модель цілочислової транспортної задачі.
8. Назвіть види і особливості вирішення задач цілочислового лінійного програмування.
9. Назвіть і охарактеризуйте основні поняття, які пов’язані з нелінійними зв’язками в економічних системах.
10. Визначте поняття нелінійного програмування й сутність вирішення задач нелінійного програмування.
11. Охарактеризуйте графічний метод вирішення задач нелінійного програмування при формуванні нелінійних оптимізаційних моделей.
12. Охарактеризуйте метод Лагранжа вирішення задач нелінійного програмування при формуванні нелінійних оптимізаційних моделей.

Завдання для самоконтролю:

1. Знайти оптимальний цілочисловий план задачі $Z(X) = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + +2x_4 –\max$ за умови:

$x_1+x_2+x_3 =15$

$2x_1+ 3x_3+x_4=8,$

$x_j, > 0,$ x_j — цілі числа, $j = 1, 2, 3, 4$.

2. Отримати цілочисловий оптимальний план задачі $Z(X)$ $x_1— 4x_2 — 2x_3 + 3x_4 —> \max$ за умови

$3x_1+x_2+8x_3+x_4=35$

$x_1+x_3+x_4\leq 6$

$x_j\geq 0,$ x_j — цілі числа, $j = 1, 2, 3, 4$.

3. Контейнер обсягом 5 $м^3$ розташований на контейнеровозі вантажністю 12 т. Контейнер необхідно заповнити вантажем двох найменувань. Маса одиниці вантажу m_j (в тонах), обсяг одиниці вантажу V_j (в $м^3$), вартості Cj (в умовних грошових одиницях) наведені в табл. 6.1.

Таблиця 6.1 - Маса одиниці вантажу m_j (в тонах), обсяг одиниці вантажу V_j (в $м^3$), вартості Cj (в умовних грошових одиницях)

Вид вантажу у	m_j	V_j	C_j
1	3	1	10
2	1	2	12

Необхідно завантажити контейнер таким чином, щоб вартість вантажу, що перевозить була максимальною.

4. Знайти екстремуми функції $L(x_1,x_2)=2x_1+x_2$ при обмеженнях $x_1^2+x_2^2 \le 15$, $x_1, x_2 \ge 0$.

5. Підприємець вирішив виділити на розширення своєї справи 50 тис. грн. Відомо, якщо на придбання нового устаткування затрачувати x тис. грн., а на зарплату прийнятих працівників у тис. грн., то приріст обсягу продукції складе $Q=0.001x^{0.4}\cdot y^{0.2}$. Як необхідно розподілити виділені грошові ресурси, щоб приріст обсягу продукції був максимальним.

6. Загальні витрати виробництва задані функцією $T=0,8x^2+0,7xy+0,6y^2+800x+500y+1600$, де x і y відповідно кількість товарів A і B. Загальна кількість виробленої продукції повинна дорівнювати 400 одиниць. Скільки одиниць товару A і B потрібно виробити, щоб витрати на їх виготовлення були мінімальними?

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4
ОЦІНКА І УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ В ЕКОНОМІЦІ

Тема 7. Аналіз та управління ризиком в економіці

7.1. Поняття, сутність і зміст невизначеності й ризику

7.2. Сутність та етапи управління ризиком на підприємстві в сучасних умовах господарювання

7.3. Аналіз заходів управління ризиком в економіці

Поняття: ризик; управління ризиком; невизначеність; ступінь невизначеності.

Література: [1], [6], [8], [9], [10], [11], [21], [32], [41], [42], [57], [58], [62], [68], [69], [71], [76], [81], [82], [83], [84], [85], [86], [87], [88], [89].

7.1. Поняття, сутність і зміст невизначеності й ризику

За останнє десятиріччя відбулись значні структурні зміни в економіці України. Це пов’язано з перебудовою форм власності, трансформації трудового, виробничого потенціалів, зміною в макро- і мікросередовищах підприємств. Невизначеність ринкових умов, зростання рівня стохастичності впливу економічних факторів на результативність діяльності підприємства призводить до зростання ризиків втрати суб’єктами підприємницької діяльності не тільки своїх позицій на ринку, але і їх занепаду.

Таким чином, в сучасних умовах господарювання більшість економічних процесів мають невизначений характер, коли досить складно сказати, як будуть розвиватися події в майбутньому. Це ускладнює процес прийняття управлінських рішень і прогнозування показників діяльності підприємств. У таких умовах зростає рівень невизначеності й ризику. Тому важливого значення набуває визначення змісту, сутності цих понять.

Поняття ***«невизначеність»*** означає постійну мінливість умов, поведінки зв’язків, швидкі зміни в макро- і мікросередовищі підприємства. Невизначеність супроводжує прийняття будь-яких управлінських рішень. Виділяються такі типи невизначеності в економічних задачах при прийнятті управлінських рішень:

- об'єктивна (природна) невизначеність;
- інформаційна невизначеність, що характеризується недостатністю або відсутністю відповідної інформації;
- невизначеність, що пов’язана з діяльністю інших суб’єктів підприємницької діяльності;
- невизначеність, що пов’язана з низькою структурованістю і ефективністю організаційної структури підприємств;
- невизначеність, що обумовлена нечіткістю, розпливчатістю економічних процесів, явищ, інформації.

Ухвалення рішень в умовах невизначеності є вибором тієї або іншої можливості з їх різноманіття, а сам процес ухвалення рішень нерозривно пов'язаний з перетворенням невизначеності у визначеність.

Невизначеність обумовлюється неповнотою, несвоєчасністю, низьким рівнем специфікації, ймовірністю інформації, що пов’язана з діяльністю суб’єктів підприємницької діяльності. В умовах зростання рівня невизначеності відповідно збільшується ризик господарської діяльності підприємств.

Слід вказати, що залежність між рівнем невизначеності економічної ситуації і рівнем ризику досить висока. Чим більше невизначеність, тим більше ризик і навпаки. Тому необхідно обґрунтувати поняття ризику, його сутність, оцінити його рівень і встановити причини його виникнення. Розглянемо поняття «ризик» з позиції різних аспектів діяльності суб’єктів підприємницької діяльності.

Термін ***«ризик»*** походить від грецьких слов ridsikon, ridsa — круча, скала [3]. З позиції формування прибутків або збитків підприємства під ризиком розуміють ймовірність виникнення збитків або недоотримання доходів порівняно з прогнозними варіантами.

Особливу роль в діяльності підприємства відіграють фінансові ризики, які визначаються як ймовірність виникнення непередбачених фінансових втрат в ситуації невизначеності умов фінансової діяльності підприємства [68].

Інвестиційний ризик відображає можливість виникнення непередбачених фінансових втрат у процесі інвестиційної діяльності підприємства. До них відносять ризики реального інвестування, портфельні ризики і ризики інноваційного інвестування.

Ризик – це дія, яка здійснюється із сподіванням на щасливий результат за принципом «повезе – не повезе» [76].

Ризик – це суб’єктивна характеристика невизначеності сценарію реалізації проекту.

Ризик – це об'єктивно-індивідуальна категорія, що характеризує загрозу, небезпеку виникнення негативних явищ в економічному й організаційному середовищі підприємства.

Ризик - це можливість відхилення від мети, для досягнення якої ухвалювалося рішення; вірогідність помилки або успіху того чи іншого вибору в ситуації з деякими альтернативами; це ситуативна характеристика діяльності, що полягає у невизначеності її результату в можливих несприятливих наслідках у разі «неуспіху»; рівень невизначеності в прогнозі результату [76].

Ризик - вибір управляючих параметрів (управляючих дій), що не гарантує виконання поставленої мети у зв'язку з невизначеністю (характером вірогідності) умов господарювання [58].

Ризик - це діяльність, пов'язана з подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору, в процесі якої є можливість кількісно і якісно оцінити вірогідність досягнення передбачуваного результату невдачі і відхилення від мети [62].

Як видно з теоретичних визначень економічної категорії «ризик», їх об’єднує невизначеність здійснення події в позитивну або негативну сторону. В цьому аспекті виникає необхідність оцінки ризику для мінімізації негативних явищ і забезпечення позитивного результату.

Сутність ризику полягає у співвідношенні мети й результату діяльності між якими існують відхилення. Ступінь цього відхилення і визначає рівень ризику діяльності суб’єктів підприємницької діяльності. Якщо відхилення мети і результату зростає, то і збільшується ризик, якщо навпаки – то останній зменшується.

7.2. Сутність та етапи управління ризиком на підприємстві в сучасних умовах господарювання

В умовах реформування економіки управління ризиком є складним процесом, на який впливають багато чинників. Управління ризиком складається з чотирьох блоків:

Перший блок - це порівняльна характеристика ризику. Суть його полягає в розрахунку кількісних показників, в якому показники ризику порівнюються із стандартними величинами ризику, інформацією нормативних документів або порівнянними показниками ризиків.

У другому блоці визначається, наскільки значний наявний ризик.

У третьому блоці відбувається моніторинг ризику й здійснення управлінських дій щодо його зниження.

У четвертому блоці здійснюється контроль за ризиком і розповсюдження інформації про його рівень.

Управління ризиком є важливим і постійно присутнім елементом управління з підприємницькими структурами, яке випливає із загальної концепції ризику, що склалася. Тут є дві сторони:

- перша - «оборонна», пасивна, що реалізується за допомогою страхування і відокремлення від ризику;

- друга - «наступальна», активна, реалізована в ході зростання, оновлення, накопичення тієї інформації, яка необхідна для скорочення області невизначеності й ризику.

Виділяють такі етапи управління ризиком:

1 етап – формування цілей у відповідній сфері діяльності підприємства.

2 етап – визначення критеріїв оцінки різних заходів з управління ризиком.

3 етап – вибір і аналіз заходів з досягнення визначених цілей.

4 етап – вибір найбільш адекватних заходів і контроль результатів їх виконання.

На першому етапі визначають масштаб рівня ризику, суб’єкти і об’єкти ризику, спрямованість заходів щодо зниження ризиків, формують задачі.

На другому етапі вибирають оптимальні заходи щодо скорочення або запобігання ризиків, які б були спрямовані на їх досягнення. До початку вибору заходів щодо управління ризиком потрібно вирішити, за допомогою яких критеріїв оцінювати вибирані заходи. Необхідною умовою вибору переважної більшості заходів щодо управління ризиком є їх технологічна і економічна здійсненність.

На третьому етапі аналізують заходи щодо управління ризиком.

На четвертому етапі проводять постійний контроль виконання різних етапів робіт. При проведенні контролю результатів дослідження необхідно враховувати:

- відповідність вибраних показників меті й завданням здійснюваних заходів;
- проведення контролю результатів робіт через певний проміжок часу;
- проведення контролю всіх аспектів проведення заходів (експозиції, ризику, економічних показників і т.п.);
- використання показників відповідного масштабу.

7.3. Аналіз заходів управління ризиком в економіці

На підприємстві аналіз заходів щодо управління ризиком спрямований на досягнення основної мети його діяльності – забезпечення розвитку. Управління ризиком, як складний системний процес, складається з декількох взаємозалежних етапів. На першому етапі в процесі управління ризиком використовують систему показників або «набір інструментів», які спрямовані на зниження ризику або формують підходи щодо запобігання появи ризику. В цьому аспекті важливо не констатувати появу ризику, а його діагностувати. Це дозволить встановлювати причинно-наслідкові зв'язки виникнення і розвитку ризику на підприємствах. Після здійснення діагностики ризику на другому етапі запропоновані заходи аналізують в ході роботи, щоб оцінити переваги різних стратегій.

Наступними діями є аналіз заходів та вибір найбільш ефективних з них. При цьому здійснюють роботу, пов'язану із залученням спеціалістів, з наступним обговоренням отриманих результатів.

На наступному етапі розробляється система дій щодо впровадження стратегії управління ризиком. Цей етап передбачає розробку конкретних заходів і підходів управління ризиком у конкретних умовах господарювання підприємства.

На останньому етапі впроваджують стратегію і здійснюють її моніторинг.

Таким чином, аналіз заходів управління ризиком являє собою систему дій, яка спрямована на зниження його рівня або його знежкодження і досягнення соновної мети діяльності підприємства – забезпечення його розвитку.

Тема 8. Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику

8.1. Напрями кількісного оцінювання ступеня ризику

8.2. Оцінка ризику на основі абсолютних і відносних показників

8.3. Допустимий та критичний ризик

8.4. Оцінка ризику ліквідності

Поняття: кількісне оцінювання ризику; математичне сподівання; допустимий ризик; критичний ризик.

Література: [1], [6], [8], [9], [10], [11], [21], [32], [41], [42], [57], [58], [62], [68], [69], [71], [76], [81], [82], [83], [84], [85], [86], [87], [88], [89].

8.1. Напрями кількісного оцінювання ступеня ризику

Оцінка ризику – це систематичний процес виявлення факторів і видів ризику та їх кількісна оцінка для прийняття ефективних управлінських рішень.

Ця оцінка здійснюється в два етапи: якісний і кількісний. У рамках першого етапу встановлюють джерела й причини ризику, етапів або робіт, при виконанні яких виникає ризик, тобто визначають потенційні зони ризику, виявляють ризики, які пов'язані з діяльністю підприємства, прогнозують практичні вигоди й можливі негативні наслідки ризиків. Результати якісного аналізу є важливими для проведення кількісного аналізу.

На другому етапі розраховують кількісні значення окремих ризиків і ризиків підприємства в цілому. Також виявляють можливий збиток і дають вартісну оцінку від прояву ризику, нарешті, завершальною стадією кількісної оцінки є вироблення системи антикризикових заходів і розрахунок їх вартісного еквівалента.

Розглянемо більш детально особливості кількісного оцінювання рівня ризику.

Кількісне оцінювання рівня ризику - важливий етап процесу управління, який має включати оцінювання реального (фактичного) ризику, а також встановлення меж допустимого ризику для окремих господарських операцій, організаційних підрозділів і фінансових установ. Водночас потрібно оцінити ризики освоєння нових ринків, продуктів і напрямів діяльності. Ризик економічних рішень оцінюється втратами, що є наслідком цього рішення. Ступінь ризику вимірюється втратами (збитками), яких можна очікувати в разі реалізації цього ризику, а також ймовірністю, з якою ці втрати можуть статися. Коли ймовірність втрат висока, а розмір їх малий або навпаки – збитки малоймовірні, хоча й оцінюються як суттєві, то ризик вважається невисоким (малим). Отже, методи оцінки ризику, які формалізують процес вимірювання і розрахунків, мають визначати три компоненти ризику:

- розмір (величина) – сума можливих втрат;
- ймовірність настання негативної події;
- тривалість періоду впливу ризику.

Зазначимо, що кількісна оцінка ризику визначається величиною можливих ймовірносних втрат, тому необхідно враховувати випадковий характер таких втрат. Ймовірність настання події може бути визначена об'єктивним і суб'єктивним методами.

Перша група методів використовується для визначення ймовірності настання події на основі розрахунку частоти, з якою відбувається ця подія. Це методи теорії ймовірностей, економічної статистики, теорії ігор та інші математичні методи.

Суб’єктивні методи базуються на використанні суб’єктивних критеріїв, які базуються з різними припущеннями. До таких припущень відносяться судження оцінюючого, його особистий досвід, оцінка експерта з рейтингу та ін. [3]. Суб'єктивні методи застосовують тоді, коли ризики не піддаються кількісному вимірюванню – ***квантифікації***.

Для оцінки величини фінансових ризиків використовують три групи показників:

- статистичні величини (стандартне відхилення, варіація, дисперсія, коефіцієнт бета);
- непрямі показники ризиковості діяльності, обчислені звичайно у формі фінансових коефіцієнтів за даними публічної звітності;
- аналітичні показники (індикатори), призначені для оцінки конкретного виду ризику (валютного, відсоткового, кредитного, інвестиційного, незбалансованої ліквідності та ін.) у процесі внутрішнього аналізу діяльності підприємницьких структур.

Для мінімізації або нівелювання впливу ризиків можуть бути використані кумулятивні методи. Ці методи базуються на експертних оцінках, пов'язаних з інвестуванням. При використанні кумулятивного методу на першому етапі розраховують безризикову ставку доходу. Наступним етапом є оцінка надбавки, що додається до безризикової ставки доходу. Таким чином, кількісно ставку дисконтування розраховують так:

$$Сд = БСД + \Sigma ІР, \tag{8.1}$$

де Сд – ставка дисконту;

БСД – безризикова ставка доходу;

ΣІР – сума інвестиційних ризиків.

У цілому кумулятивний метод визначається як один з методів оцінки коефіцієнта (ставки) капіталізації, коли коефіцієнт складається з декількох складових: безризикова ставка; премія за ризик; премія за низьку ліквідність; премія за управління інвестиціями; фактор фонду відшкодування.

При використанні цього методу запропоновано наступне співвідношення:

$$Y = 26{,}41 \text{ x } \ln X – 64{,}16, \tag{8.2}$$

де Y – базова ставка дисконту;

X – діюча ставка Національного банку України.

Ця формула дозволяє конкретизувати кількісну характеристику оцінки інвестиційних ризиків. Проте отримане в результаті кореляційно-регресійного аналізу співвідношення базується на конкретних показниках минулих періодів.

Тому воно має обмежений характер і віддзеркалює лише ті умови, в яких формувались ці показники.

Слід зазначити, що підходи щодо впровадження кумулятивних методів тісно пов’язані також з оцінкою премії за ризик для конкретного підприємства. Премія за ризик диференціюється залежно від об’єкта інвестування або від умов інвестування реалізації проекту. Першими факторами виступають: використання нової технології, обладнання, нової техніки, випуск нової продукції та ін. До других факторів відносять: попит і пропозицію, вплив зовнішньоекономічних ризиків, внутрішньо-економічні ризики, політичну нестабільність та ін.

Досить проблемним питанням є визначення сумарного ризику. В цьому аспекті показник ризику може бути кількісно оцінений наступним чином:

$$\Sigma P = (1+a1) * \ldots * (1+ак) - 1, \qquad (8.3)$$

де ΣР – сумарний ризик;

а1….ак – види ризиків.

В умовах інфляційних процесів ставка дисконту визначається співвідношенням

$$Rн = Rp + i + Rpxi\ , \qquad (8.4)$$

де Rн – номінальна ставка дисконту;

Rр – реальна ставка дисконту;

і – темп інфляції.

Запропоновані різноаспектні підходи щодо визначення категорії ***«ризик»*** і напрями його оцінки дозволять підприємствам своєчасно реагувати на негативні явища, які пов’язані з макросередовищем і внутрішньогосподарською діяльністю. Слід сказати, що прийняття ефективних управлінських рішень базується на кількісному підґрунті. У цьому аспекті представлені методи кількісної оцінки ризику дозволяють оцінити ці ризики підприємства і встановити рівень премії за них.

8.2. Оцінка ризику на основі абсолютних і відносних показників

Система кількісних оцінок ризику в абсолютному вираженні складається з таких:

- у випадку, коли рішення є альтернативним, тобто можливі лише два наслідки його реалізації, показники ризику розраховують за такою залежністю:

$$R = X_н \times P_н, \tag{8.5}$$

де $X_н$ – величина збитків у разі настання негативного наслідку рішення;
$P_н$ – ймовірність настання негативного наслідку.

- у випадку, якщо рішення мають декілька (безліч) наслідків реалізації, використовують показники:

- математичне сподівання. Математичне сподівання дискреційної величини являє собою суму добутків можливих варіантів цієї величини на їх імовірність:

$$M(x)=\sum_{i=1}^{n} Xi \cdot Pi, \tag{8.6}$$

причому основною умовою використання цієї формули є:

$$\sum_{i=1}^{n} Pi = 1. \tag{8.7}$$

Математичне сподівання для неперервної величини:

$$M(x)= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{8.8}$$

- показник дисперсії характеризує ступінь мінливості реальних даних деякої випадкової величини навколо математичного сподівання. Визначається як математичне сподівання квадратів відхилень індивідуальних значень випадкової величини від її математичного сподівання:

$$\sigma^2=M(x - M(x))2. \tag{8.9}$$

Для дисперсійної величини формула дисперсії має вигляд:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x))^2 \cdot Pi \quad (8.10)$$

Для безперервної величини

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} M(x - M(x))^2 f(x) dx \quad (8.11)$$

- середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{M(x - M(x))^2}, \quad (8.12)$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x))^2 \cdot p_i} \quad (8.13)$$

Іноді для оцінки величини ризику в абсолютному вираженні використовують ймовірність настання небажаних наслідків, тобто величини Р.

Для оцінки ризику при обґрунтуванні управлінських рішень в більшості випадків не достатньо використання абсолютних показників. У системі оцінки ризику використовують відносні показники.

У відносному вираженні ризик визначається: коефіцієнтом ризику, який визначається як відношення величини максимальних втрат від даного виду діяльності до деякої бази порівнянь (за таку базу може прийматися обсяг власних ресурсів підприємства, загальні величини втрати за даними видом діяльності або сподіваний дохід від даного виду діяльності):

$$Кр = Х/К, \quad (8.14)$$

де Х – величина максимально можливих втрат;

К – база порівнянь.

Цей показник, як правило, завершує проведення дисперсійного аналізу ризику і використовується при наявності масиву статистичної інформації. Причому чим більший цей показник, тим більшим є ризик, пов’язаний з даним проектом.

8.3. Допустимий та критичний ризик

У системі оцінки ризику необхідно визначити границі або інтервали, де можна допускати відповідний рівень ризику, а де він є критичним. Тобто визначають ***зони ризику***. При цьому використовують графічний аналіз і аналітичні підходи щодо визначення цих зон.

Графічний аналіз полягає в побудові кривої щільності розподілу ймовірностей настання ризику. При цьому визначають зони допустимого й критичного ризику. Наприклад, для інвестиційного проекту будують криву, що висвітлює залежність між ймовірними збитками за проектом і сподіваними віддачами цього проекту. В цьому процесі визначають точки, що відповідають зонам критичного або допустимого ризику.

Точка допустимого ризику - характеризує найбільш ймовірні збитки по проекту і сподівану або середню віддачу цього проекту, в якій збитки будуть мати величину, що дорівнює загальній величині прибутку від проекту. Ця точка є верхньою межею зони допустимого ризику.

Ймовірність допустимого ризику визначають за залежністю

$$F(x) = \int_{0}^{X_{доп}} f(x)dx \quad (8.15)$$

Під ***зоною допустимого ризику*** розуміють область у межах якої відповідний вид підприємницької діяльності зберігає свою економічну доцільність, тобто випадкові збитки не перевищують очікуваного підприємницького ризику від проекту.

Точка допустимого критичного ризику характеризує ступінь гранично допустимого критичного ризику, тобто ризику втрат, які сягають величини розрахункової виручки від проекту.

Ймовірність критичних ризиків визначають за залежністю

$$F(x) = \int_{X_{доп}}^{X_{кр}} f(x)dx \quad (8.16)$$

Під ***зоною критичного ризику*** розуміють область випадкових збитків, розміри яких перевищують величину очікуваного підприємницького збитку і сягають величини розрахованої виручки.

Точка катастрофічного ризику - характеризує ступінь гранично-катастрофічного ризику, тобто ризику втрат, які сягають розміру всього майна підприємства.

Ймовірність катастрофічного ризику визначають шляхом інтегрування:

$$F(x) = \int_{X_{кр}}^{X_{кат}} f(x)dx \qquad (8.17)$$

Зона катастрофічного ризику – це область можливих втрат, які перевищують величину розрахованої виручки і можуть сягати вартості майна підприємця.

Катастрофічний ризик може призвести підприємство до банкрутства, крім того до катастрофічних відносяться всі ризики, пов'язані із загрозою для життя людей, оточуючого середовища, тощо.

Частіше всього під час прийняття економічних рішень підприємця цікавить не стільки ймовірність певного рівня втрат, скільки ймовірність, що його втрати не перевищать певної позначки:

$$W(x) = 1 - F(x), \qquad (8.18)$$

де W(x) – це функція розподілу ймовірностей перевищення певного рівня випадкових збитків.

Відповідно до визначених зон ризику розраховують наступні показники ризику:

1) ***показник допустимого ризику*** – це ймовірність того, що втрати виявляться більшими за гранично допустимий рівень (таким рівнем є прибуток від проекту);

2) ***показник критичного ризику*** – це ймовірність того, що втрати виявляться більшими за допустимий критичний рівень (розрахункова виручка);

3) ***показник катастрофічного ризику*** – це ймовірність того, що втрати за проектом виявляться більшими за граничний катастрофічний рівень (вартість майна підприємця).

Таким чином, наведені показники дають змогу комплексно оцінити стадії ризикованості проекту й прийняти управлінські рішення, які матимуть мінімальний ризик.

Відповідно для цих показників визначають граничні значення допустимого, критичного або катастрофічного ризиків. Граничні значення подані в табл. 8.1.

Таблиця 8.1 - Граничні значення допустимого, критичного або катастрофічного ризиків

Показник	Значення показника
Граничне значення допустимого ризику	0,1
Граничне значення критичного ризику	0,01
Граничне значення катастрофічного ризику	0,001

На основі граничних значень показників ризику приймають управлінські рішення. Так, граничне значення допустимого ризику не повинно перевищувати значення 0,1, граничне значення критичного ризику – 0,01, а граничне значення катастрофічного ризику – 0,001.

8.4. Оцінка ризику ліквідності

Підприємство на кожному етапі господарської діяльності здійснює відповідні інвестування грошових коштів в економічний процес. Тому необхідно постійно моніторити цей процес, виявляти негативні явища й встановлювати рівень ризику ліквідності. Потреба в оцінці ризику ліквідності виникає і під час змін стратегії і тактики діяльності підприємства.

Ризик ліквідності – це форма ризику, яка показує ймовірність погашення зобов'язань підприємством на кожному етапі інвестування грошових коштів у виробничий процес. Цей ризик пов'язаний з низьким рівнем віддачі об'єктів інвестування, неефективним створенням відповідних зобов'язань, відсутністю необхідного розміру грошових коштів і т.п.

Для оцінки ризику ліквідності використовують два критерії:

- період переходу інвестицій у грошові кошти, які залежно від часу їх трансформації бувають:

- терміново ліквідні з незначним ризиком (час трансформації до 7 днів);
- високоліквідні інвестиції з низьким ризиком (час трансформації від 7 до 30 днів);
- середньо ліквідні із середнім ризиком (час трансформації від 1 до 3 місяців);
- мало ліквідні об'єкти з високим ризиком (час трансформації більше 3 місяців).

Виходячи з цього для оцінки ризику ліквідності підприємства за цими критеріями застосовують показники: питомої ваги терміново ліквідних інвестицій у вартості всіх активів підприємства; ризику ліквідності – відношення суми вартості терміново ліквідних активів і вартості високоліквідних активів до суми вартості середньо ліквідних активів і вартості низько ліквідних активів. Чим більшим є показник ризику ліквідності, тим меншим є ризик ліквідності.

- оцінку ліквідності інвестицій за рівнем фінансових витрат здійснюють на основі розрахунку процентного співвідношення величини можливих втрат до обсягів інвестицій, які прагнуть реалізувати. За цим критерієм всі об'єкти інвестування оцінюють як: з дуже високим ризиком (витрати перевищують 20%); з високим ризиком (11-20%); із середнім ризиком (6-10%); з низьким ризиком (до 5%).

Слід сказати, що існує залежність між показниками ризику ліквідності за періодом і рівнем фінансових втрат. Якщо зростає показник ризику ліквідності, то спостерігається скорочення оцінки ризику ліквідності інвестицій за рівнем фінансових втрат і навпаки. Це пов'язано з тим, що при здійснені інвестицій у виробничий процес його суб'єкти хочуть швидше реалізувати й отримати віддачу від проекту за короткий термін при досить великому рівні фінансових втрат.

Таким чином, при здійсненні виробничого процесу наведені напрями оцінки ризику дають змогу виявляти його, моніторити на кожному етапі економічного процесу, здійснювати контроль за його рівнем і, не тільки констатувати факт виникнення ризику, а й діагностувати і приймати управлінські рішення.

Питання і завдання для самоконтролю до змістового модуля 3

Питання для самоконтролю:

1. Назвіть типи невизначеності в задачах ухвалення управлінських рішень.
2. Визначте категорію «ризик» в аспекті розвитку сучасних економічних відносин.
3. Охарактеризуйте аспекти управління ризиком.
4. Назвіть і охарактеризуйте етапи управління ризиком.
5. Назвіть основні напрями аналізу при здійсненні управління ризиком.
6. У чому полягає кількісна оцінка ризику.
7. Які показники використовують для кількісної оцінки ризику.
8. Охарактеризуйте систему кількісних оцінок ризику в абсолютному виразі.
9. Охарактеризуйте систему показників визначення ризику у відносному виразі.
10. Визначте напрями оцінки допустимого і критичного ризику.
11. Охарактеризуйте напрями оцінки ризику ліквідності.

Завдання для самоконтролю:

Найдіть правильну відповідь у наступним тестових завданнях:

1. Основні типи невизначеності в економічних задачах при прийнятті управлінських рішень наступні:

а) інформаційна невизначеність, що характеризується недостатністю або відсутністю відповідної інформації;

б) організаційна невизначеність;

в) математична невизначеність;

г) об'єктивна (природна) невизначеність.

2. Ризик – це:

а) негативні явища, які виникають в обумовленій економічній системі;

б) можливість відхилення від мети, ради досягнення якої ухвалювалося рішення;

в) система дій, спрямована на розвиток підприємства;

г) вибір управляючих параметрів (управляючих дій), що не гарантує виконання поставленої мети у зв'язку з невизначеністю (характером вірогідності) умов господарювання.

3. Якому етапу відповідають наступні дії:

1 етап____

2 етап____

3 етап____

4 етап____

а) визначення критеріїв оцінки різних заходів з управління ризиком;

б) вибір найбільш адекватних заходів і контроль результатів їх виконання;

в) формування цілей у відповідній сфери діяльності підприємства;

г) вибір і аналіз заходів з досягнення визначених цілей.

4. Розташуйте етапи аналізу заходів управління ризиком відповідно до їх здійснення:

1 етап____

2 етап____

3 етап____

4 етап____

5 етап____

а) використовують систему показників або «набор інструментів», які спрямовані на зниження ризику або формують підходи щодо запобігання появи ризику;

б) залучення експертів щодо вибору стратегії управління ризиком;

в) аналіз запропонованих заходів, щоб оцінити переваги різних стратегій;

г) впровадження стратегії і здійснення її моніторингу;

д) розробка системи дій щодо впровадження стратегії управління ризиком.

1. Емігрант з України включається в гру на фондовій біржі після того як отримав роботу і має стабільний дохід. Заощадивши власні 10000 доларів, він взяв у борг ще 40000 доларів під 10%-річних і вклав всі 50000 доларів в акції однієї з компаній, розраховуючи на річне зростання курсу 20%. Але фактичний курс почав падати з ряду причин і коли він знизився на 40%, емігрант вирішив позбутися ненадійних акцій, у результаті чого збитки призвели його до банкрутства. Його знайомий американець також вклав власні 50000 доларів в акції тієї ж фірми, а потім продав їх, проте американцю вдалося уникнути банкрутства. Чому збанкрутував емігрант?

2. Необхідно інвестувати тимчасово вільні грошові кошти строком на 2 роки з тим, щоб в кінці отримати суму рівну 1260000 грн. На ринку доступний 2 види фінансових інструментів - дисконтні облігації терміном звернення 1 рік і 3 року (номінальна вартість 126 грн.). Поточна ціна річних облігацій складає 100.8 грн., трирічних, - 64.5 грн. Прибутковість як одного, так і іншого виду облігацій складає 25 %.

Визначити необхідну суму інвестицій при незмінності ставок прибутковості протягом всього терміну інвестування.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 5
ЕКОНОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Тема 9. Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія

9.1. Принципи побудови економетричних моделей

9.2. Оцінка зв’язку між факторами і критерії адекватності економетричної моделі

9.3. Сутність мультиколінеарності, напрями її виявлення

9.4. Парна лінійна регресія

Поняття: економетрична модель; екзогенна змінна; ендогенна змінна; випадковий член; коефіцієнт кореляції; коефіцієнт детермінації; парний регресійний аналіз; коефіцієнт парної кореляції; коефіцієнт множинної кореляції; F-тест; t-критерій Ст’юдента; гетероскедастичність; гомоскедастичність; мультиколінеарність.

Література: [17], [18], [19], [20], [22], [28], [34], [35], [36], [44], [45], [46], [50], [59].

9.1. Принципи побудови економетричних моделей

В економіко-математичному моделюванні важливе місце займають економетричні моделі, які дозволяють встановити причинно-наслідковий зв’язок між економічними факторами. На основі економетричних моделей розробляють організаційно-економічні механізми діяльності підприємства, формуються управлінські рішення, які кількісно й якісно відображають економічні процесі, що відбуваються у сфері діяльності суб’єктів підприємницької діяльності. Слід також зазначити, що більшість економічних процесів мають стохастичний невизначений характер. Стохастична залежність може бути суттєвою, тобто обумовлена внутрішньо властивими даному явищу причинами, і несуттєвими, які викликані дією зовнішніх (випадкових) причин (середовищем); безпосередніми і опосередніми, стійкими і нестійкими, сильними і слабкими, простими (між двома змінними) і складними (між залежною змінною У і декількома чинниками-аргументами $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Для оцінки саме таких процесів і використовують методи економетричного моделювання.

Економетричні моделі бувають:

1. Парними – відображають причинно-наслідковий зв'язок між незалежним фактором (x) і залежною змінною (y). Наприклад, модель залежності між середньосписковою чисельністю працюючих ($Ч$) і рентабельністю витрат ($P_в$):

$$P_в = 0{,}07 + 0{,}18 x Ч, \tag{9.1}$$

модель залежності між рентабельністю реалізації продукції ($P_п$) і рівнем витрат ($P_{вп}$):

$$P_п = 0{,}018 – 0{,}21 x P_{вп}, \tag{9.2}$$

2. Багатофакторними – відображають причинно-наслідковий зв'язок між декількома незалежними факторами (x) і залежною змінною (y). Прикладом цих моделей можна розглядати наступні:

$$P_в = 0{,}23 + 0{,}25 x Ч – 0{,}16 x P_{вп}. \tag{9.3}$$

Ці моделі відображають залежність між економічними факторами, що характеризуються математичною формою $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$.

Зазначимо, що розглянуті моделі висвітлюють лінійну форму залежності між показниками. Проте, як вже зазначалось, більшість економічних процесів мають нелінійний характер. Тому для спрощення проведення економетричного дослідження необхідно використовувати методи лінеаризації для переходу від нелінійної форми до лінійної.

Таким чином, ***економетрична модель*** – це кількісне відображення причинно-наслідкових зв'язків між економічними факторами, встановлених шляхом використання відповідного економетричного інструментарію, результатом яких є розробка моделей для прийняття ефективних управлінських рішень.

В економетричних моделях незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$, називають ***пояснюючими змінними*** (або ***факторами***, інколи регресорами). Залежні змінні y називають ***пояснюваними змінними*** (або регресандами). Крім цього усі змінні економетричних моделей, як і будь-якої економіко-математичної моделі, поділяють на ***екзогенні й ендогенні.***

Екзогенними (зовнішніми) називаються змінні, значення яких є наперед визначеними перед використанням моделі, а ***ендогенними*** (внутрішніми) – такі, значення яких визначаються тільки із самої моделі.

В економетричному моделюванні необхідно визначити принципи побудови цих моделей. Принцип від лат. *principium* - основа, початок. Існують декілька визначень категорії «принцип»:

1. Основні положення передумови.

2. Основоположне теоретичне знання, що не є ні доказовим, ні потербуючим доказу.

3. Основоположна етична норма, яка, згідно з Кантом, є або суб'єктивною – максимою – і направляє волю, оскільки вона виступає як керівний по відношенню до окремих індивідів момент, або об'єктивною – законом – і у такому разі признається значущою для волі кожної розумної істоти….

Виходячи з вищесказаного, основними принципами побудови економітричних моделей є:

1. Інформація, яка використовується в економетричному моделюванні, повинна бути повною, достовірною, що адекватно відображає економічні процеси, які відбуваються на підприємстві.

2. Фактори, які включають в економетричну модель, повинні бути кількісно оцінені, економічно інтепретовані, кількість споережень на один економічний показник складає не менше 8.

3. Математичний апарат, який використовується в економетричному моделюванні, повинен вирішити проблему побудови моделі, за його допомогою можна оцінити адекватність цієї моделі.

4. При розробці економетричної моделі необхідно враховувати випадковий член. Останній існує з декількох причин:

- Невключення пояснювальних змінних. Співвідношення між y і x завжди є досить великим спрощенням. В дійсності існують інші фактори, які здійснюють вплив на y і які не включені в економетричну модель.
- Агрегирування змінних. У багатьох випадках залежність, що розглядається, – це спроба об'єднати разом деяке число економічних співвідношень.
- Помилковий опис структури моделі. Структура моделі може бути описана помилково.
- Функціональна специфікація може бути помилково визначена. Наприклад, залежність між факторами моделі описана лінійно, хоч вона має більш складний нелінійний характер.
- Помилково проведені розрахунки в моделюванні.

5. Параметри моделі повинні економічно адекватно відображати причинно-наслідковий зв'язок між факторами. Наприклад, в моделі (9.1) зростання середньоспискової чисельності працівників на 1 робітника приведе до збільшення рентабельності витрат на 18 коп./грн.

6. Економетрична модель повинна бути перевірена на адекватність шляхом використання відповідних критеріїв.

9.2. Оцінка зв’язку між факторами і критерії адекватності економетричної моделі

Для оцінки зв’язку між факторами економітеричної моделі використовують критерії: коефіцієнт кореляції і коефіцієнт детермінації.

Коефіцієнт кореляції показує ступінь впливу незалежних факторів (*x*) і залежну змінну (*y*). Цей критерій використовують в парних економетричних моделях – коефіцієнт парної кореляції, і в багатофакторних економетричних моделях – коефіцієнт множинної кореляції.

Коефіцієнт кореляції показує, на яку частину середнього квадратичного відхилення змінюється функція *y*, якщо аргумент *x* збільшується (зменшується) на своє середньоквадратичне відхилення σ_x. Знак коефіцієнта парної кореляції співпадає із знаком коефіцієнта регресії, а його чисельне значення коливається в межах

$$-1 \le r_{y/x} \le 1. \tag{9.4}$$

Коефіцієнт парної кореляції може бути визначений наступним чином [18]:

$$r_{y/x} = \frac{\overline{XУ} - \overline{X} \times \overline{У}}{\sigma_y \times \sigma_x}, \tag{9.5}$$

де $r_{y/x}$ – коефіцієнт парної кореляції;

$\overline{X}$ - середнє значення незалежної змінної *X*;

$\overline{У}$ - середнє значення залежної змінної *У*;

σ_x - середнє квадратичне відхилення показника *X*;

σ_y - середнє квадратичне відхилення показника *У*.

Середнє квадратичне відхилення визначається за формулою

$$\sigma_y = \sqrt{D_y}, \tag{9.6}$$

де D_y - дисперсія (середній квадрат відхилення).

Відповідно дисперсія:

$$D_y = \overline{У^2} - \overline{У}^2, \tag{9.7}$$

де $\overline{У^2}$ - середній квадрат показника *У*;

$\overline{У}^2$ - квадрат середнього для показника *У*.

Аналогічні формули використовують і для показника *х*.

Приклад. Розрахуйте коефіцієнти кореляції і детермінації на основі представлених в табл. 9.1 спостережень.

Таблиця 9.1 - Таблиця вихідних даних для проведення розрахунків

Спостереження	x	y
1	1	3
2	2	5
3	3	6
Сума	6	14
Середнє	2	4,667

Вирішення

1. Визначимо дисперсію для факторів *у* і *х*. Для цього складемо табл. 9.2.

Таблиця 9.2 – Розрахунок середніх значень показників *у* і *х*

Спостереження	x	y	x^2	y^2
1	1	3	1	9
2	2	5	4	25
3	3	6	9	36
Сума	6	14	14	70
Середнє	2	4,667	4,667	23,33
Квадрат середнього	4	21,78		

Використовуючи формулу (9.7) знайдемо дисперсію для y і x:

$$D_y = 23{,}33 - 21{,}78 = 1{,}55;$$

$$D_x = 4{,}667 - 4 = 0{,}667.$$

2. Визначимо середнє квадратичне відхилення показників y і x, використовуючи формулу (9.6):

$$\sigma_y = \sqrt{1{,}55} = 1{,}24;$$

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}667} = 0{,}82.$$

3. Використовуючи формулу (9.5) визначимо коефіцієнт парної кореляції для y і x:

$$r_{y/x} = \frac{10{,}333 - (2 \times 4{,}667)}{1{,}24 \times 0{,}82} = \frac{0{,}999}{1{,}017} = 0{,}98.$$

Значення коефіцієнта парної кореляції, що характеризують силу впливу показника x на y, наводимо в табл. 9.3.

Таблиця 9.3 - Значення коефіцієнта парної кореляції

Значення коефіцієнта кореляції	Сила впливу показника x на y
0,85 - 1	сильний
0,55 – 0,84	помірний
0,25 – 0,54	слабкий
0 – 0,24	дуже слабкий

Знак значення коефіцієнта парної кореляції вказує на напрямок зв’язку. Якщо знак «+», то це вказує на прямо пропорційний зв’язок між факторами, якщо навпаки – то обернений.

Коефіцієнт множинної кореляції використовують в багатофакторному економетричному аналізі. Його значення знаходиться в проміжку між 0 і 1. Сила впливу показників x на результуючий фактор y характеризується значеннями, представленими в табл. 9.3.

Коефіцієнт детермінації визначається як квадрат коефіцієнту кореляції:

$$D_{y/x} = r^2_{y/x} \tag{9.8}$$

або $$D_{y/xi} = R^2_{y/xi}\ . \tag{9.9}$$

Основними напрямками оцінки адекватності економетричної моделі є:

1. Перевірка за допомогою F-тесту (F-критерій Фішера);
2. Використання t-розподілу Ст`юдента для оцінки надійності коефіцієнта кореляції;
3. Перевірка моделі на гомо-гетескедастичність;
4. Перевірка факторів економетричної моделі на мультиколінеарність.

F-тест використовують для оцінки того, чи важливе пояснення, яке дає рівняння в цілому. Цей тест заснований на порівнянні залишкової теоретичної дисперсії $\tilde{\sigma}^2_{y/x}$ і загальної дисперсії σ_y^2. Розглядають відношення $\frac{\sigma^2_{y/x}}{\sigma^2_y} = Трасч$ і порівнюють з табличним (для $\bar{f}$% Фішера знайдено розподіл і складена спеціальна таблиця) при заданому рівні значущості й різних ступенях свободи.

Загальну дисперсію σ_y^2 досліджених даних від їх середнього значення встановлюють з урахуванням числа ступенів свободи $f = n - k$:

$$\sigma^2_{y/x} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y})^2 m_i}{n-k}, \tag{9.8}$$

де К – число інтервалів у вибіркових даних.

Залишкову теоретичну дисперсію $\tilde{\sigma}^{2y/x}$ встановлюють як різниця розрахункових $\tilde{y}_i$ і середніх інтервальних значень $\bar{y}_i$ з урахуванням числа ступенів свободи d_1=*K-P* і d_2=*n-K*,

де Р – число параметрів управління.

Якщо $\bar{f}_{рас} \le \bar{f}_{табл}$, то при заданому рівні значущості складене рівняння регресії використовується. Вірогідність помилки тим менше, чим більше рівень значущості α%.

У разі, коли чисельник $\tilde{\sigma}^{2y/x}$ менше знаменника σ_y^2, то міняємо їх місцями разом з відповідними ступенями свободи d_1=K-P і d_2=n-K.

Приклад. Загальна дисперсія σ_y^2=41,5 при n=154 і К=12.

Залишкова дисперсія $\tilde{\sigma}^{2y/x=34,44}$ при К=12 і Р=3 (Р=3 в квадратному рівнянні регресії).

Вирішення

$Трасч = \frac{\tilde{\sigma}^2_{y/x}}{\sigma^2_y}$, оскільки $\sigma_y^2 > \tilde{\sigma}^2_{y/x}$, переходимо до відношення із ступенями свободи D_1=154-12=142, d_2=12-3=9 $\bar{f}_{розр.} = \frac{41{,}5}{34{,}44}$ =1,21,

за таблицею $\bar{f}_{5\%}$(142,9)=2,75 $\bar{f}_{20\%}$(142,9)=1,7.

Отже, знайдене квадратне рівняння регресії з високою надійністю узгоджується з вихідними даними.

Зазначимо, що в регресійному аналізі побудова *F*-статистики здійснюється шляхом відношення дисперсії залежної змінної на *"пояснювальні"* й *"непояснювальні"* складові:

$$F = (ESS / k) / RSS / (n\text{-}k\text{-}1), \tag{9.11}$$

де *ESS* - пояснювальна сума квадратів відхилень;

RSS – залишкова (непояснювальна) сума квадратів;

к – кількість ступенів свободи;

n – кількість значень факторів моделі.

При здійсненні F-тесту для рівняння перевіряємо, чи перевищує r^2 те значення, яке може бути отримано випадково. Для розрахунку F-статистики для рівняння в цілому формулу (9.9) можна трасформувати шляхом ділення чисельника і знаменника рівняння на TSS (загальну суму квадратів), відмічаючи, що ESS/TSS дорівнює r^2, а RSS/TSS дорівнює (1 - r^2). У результаті отримуємо наступне рівняння:

$$F = r^2 / к / (1 - r^2) / (n - k - 1). \tag{9.12}$$

Розрахунковий F-критерій визначаємо при відповідному рівні значущості і ступенях свободи і порівнюємо з критичним F-критерієм Фішера. Значення останнього критерію представлені у спеціальних таблицях. Якщо розрахунковий F-критерій перевищує його критичне значення, то можна стверджувати, що пояснення, яке дає рівняння, в цілому, важливе, а економетрична модель адекватна. У протилежному разі – модель вважається неадекватною, а пояснення неважливим.

Іншим важливим статистичним параметром для перевірки адекватності економетричної моделі є t-розподіл Ст'юдента. Він використовується для оцінки надійності коефіцієнта кореляції. У цьому випадку t-статистика для r розраховується наступним чином:

$$t = \sqrt{n\text{-}2/1\text{-}r^2}. \qquad (9.13)$$

Вибравши рівень значущості в 5% дослідним знаходить критичне значення *t* з (n - 2) ступенями свободи. Якщо значення *t* перевищує його критичне значення (позитивний або негативний бік), то нульову гіпотезу відхиляють про те, що коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. У цьому випадку роблять висновок про лінійний зв'язок (позитивний або негативний).

Якщо нульова гіпотеза підтверджується, то значення *t* буде перевищувати його критичне значення (в позитивний або негативний бік) тільки в 5% випадках. Це означає, що при виконанні перевірки ймовірності допущення помилки, що відхиляє нульову гіпотезу, коли вона фактично вірна, складає 5%.

Ймовірно, що ризик допущення такої помилки в 5% випадків досить великий для дослідника. Тоді можна скоротити ступінь ризику, здійснюючи розрахунки при рівні значущості в 1%. Критичне значення *t* тепер буде вище, ніж до цих пір, тому необхідна більш висока (позитивна або негативна) *t*-статистика для відхилення нульової гіпотези, а це означає, що потрібне більше значення коефіцієнта кореляції.

Слід вказати і на те, що t-статистика може бути розрахована як співвідношення оцінки коефіцієнта регресії на стандартну помилку.

Розглянемо методику розрахунку F-критерію і *t*-статистики на прикладі.

Приклад. Виконайте відповідні *t*-тести для багатофакторної моделі. Розрахуйте F-критерій, якщо відомо, що кількість спостережень дорівнює 25, коефіцієнт детермінації (R^2) дорівнює 88%. Багатофакторна економетрична модель має вигляд

$$y = 55{,}3 + 0{,}093x_1 + 0{,}087x_2. \qquad (9.14)$$

Стандартні помилки дорівнюють: постійний член – 2,4, x_1 – 0,003, x_2 – 0,002.

Вирішення

Для *t*-тест необхідно визначити розрахунковий t-критерій. Для кожного із члену економетричного рівняння він розраховується окремо як співвідношення оцінки коефіцієнта регресії на стандартну помилку. Таким чином розрахункові t-критерій наступні:

$$t_{p1} = 55{,}3/2{,}4 = 23{,}04;$$

$$t_{p2} = 0{,}092/0{,}003 = 30{,}67;$$

$$t_{p3} = 0{,}067/0{,}002 = 43{,}5.$$

Наступним кроком проведення *t*-теста є порівняння розрахункових значень з табличними. Табличне значення t-критерію визначається на основі спеціальних таблиць при відповідних рівнях значущості (5% або 1%) і ступенях свободи, які визначаються ($n - k - 1$), де n – кількість спостережень; k – кількість факторів моделі, включаючи постійний параметр).

У нашому випадку ступені свободи дорівнюють – 25 – 4 – 1 = 20.

Табличне значення t-критерію при рівні значущості в 5% дорівнює 1,725; при 1% - 2,528.

Як бачимо розрахункові значення t-критеріїв усіх факторів моделі значно перевищують його табличні значення. Це означає, що всі фактори економетричної моделі суттєво впливають на змінний показник (y).

F-критерій визначаємо за формулою (9.10). Для розробленої економетричної моделі розрахункових F-критеріїв має наступне значення: F_p = (0,88/4) / ((1 – 0,88) / (20)) = 36,7.

Потім розрахункове значення F-критерію порівнюємо з його табличним значенням при відповідному рівні значущості й кількості спостережень.

При 5% рівні значущості для 25 спостережень табличний F-критерій дорівнює 2,99, при 1% - 29,46.

Таким чином, розрахункові значення F-критерію більше табличних, що вказує на суттєвий рівень пояснення причинно-наслідкових зв’язків економітричної моделі.

Наступним етапом оцінки адекватності економетричної моделі є перевірка її на ***гетеро- або гомоскедастичність***. ***Гомоскедастичність*** означає однаковий розподіл фактичних значень вибірки змінних. Тобто фактичні значення спостережень іноді будуть позитивними, іноді негативними, іноді – відносно близькими до нуля, проте в апріорі відсутні причини появи великих відхилень між спостереженнями.

Разом з тим для деяких вибірок, можливо, більш доцільно припустити, що теоретичний розподіл випадкового члену є різним для різних спостережень. Це не означає, що випадковий член обов'язково матиме особливо більші (позитивні або негативні) значення в кінці вибірки, але це означає, що апріорна ймовірність отримання більш відхилених значень буде відносно висока. Це є прикладом ***гетероскедастичності***, що означає ***"неоднаковий розподіл"***.

Гетероскедастичність стає проблемою, коли значення змінних, які включаються в рівняння регресії, значно відрізняються в різних спостереженнях. Якщо залежність може буде описана рівнянням, в якому економічні показники змінюють свій масштаб одночасно, то зміна значень невключених змінних і помилок виміру, впливаючи разом на випадковий член, роблять його порівняно незначними при незначних y і x і порівняно великими – при великих y і x.

Досить часто можна виявити проблему гетероскедастичності. У таких умовах можна здійснити відповідні дії з виключення цього ефекту на етапі специфікації моделі регресії, це дозволить зменшити або, можливо, усунути необхідність формальної перевірки. У даний час запропонована значна кількість тестів (і, відповідно, критеріїв для них). Найбільш поширеними з них є: тест рангової кореляції Спірмена.

При виконання ***тесту рангової кореляції Спірмена*** припускається, що дисперсія випадкового члену буде або збільшуватися, або зменшуватися відповідно до збільшення змінної х, тому в регресії абсолютні значення залишків і значення х будуть корельовані. Дані по х і залишки впорядковуються, і коефіцієнт рангової кореляції визначається як

$$r_{x,e} = 1 – (6\Sigma D^2_i/n(n^2 - 1)),\qquad (9.15)$$

де D_i – різниця між рангом *x* і рангом помилки *e*;

e – залишки.

Коли припускати, що відповідний коефіцієнт кореляції для генеральної сукупності дорівнює нулю, то коефіцієнт рангової кореляції має нормальний розподіл з математичним очікуванням 0 і дисперсією 1/(n - 1) в більших вибірках. Таким чином, відповідна тестова статистика дорівнює $r_{x,e}\ \sqrt{n-1}$, при використанні двобокового критерію нульова гіпотеза про відсутність гетероскедастичності буде відхилена при рівні значущості в 5%, якщо вона перевищує 1,96, і при рівні значущості в 1%, якщо вона перевищує 2,58. Якщо в моделі регресії знаходиться більше однієї пояснювальної змінної, то перевірка гіпотези може здійснюватися з використанням іншої з них.

Використовують й інші критерії для оцінки гетероскдастичності. Зокрема, критерій, запропонований ***С. Голдфелдом і Р. Квандтом*** та критерій ***Глейзера***.

У цьому розділі представлені основні критерії і тести щодо оцінки адекватності моделі. В економетричних дослідженнях можна використовувати й інші тести та критерії. Представлені критерії оцінки адекватності економетричної моделі дають змогу отримати більш ґрунтовні й, насамперед, об'єктивні результати тих економічних процесів, які відбуваються на підприємстві для прийняття ефективних управлінських рішень.

9.3. Сутність мультиколінеарності, напрями її виявлення

В економетричному моделюванні необхідно враховувати явище мультиколінеарності.

Мультиколінеарність – це явище, що використовується для опису проблеми, коли нестрога лінійна залежність між пояснювальними змінними призводить до отримання ненадійних оцінок регресії. Проте така залежність, зовсім необов'язково дає незадовільні оцінки. Якщо всі інші умови задовільні, тобто якщо кількість спостережень і вибіркові дисперсії пояснювальних змінних великі, а дисперсія випадкового члену – мала, то в результаті можна отримати досить позитивні оцінки.

Мультиколлінеарність виникає за рахунок отримання нестрогої залежності одній (або більше) незадовільних умов, це питання ступеня визначеності явища, а не його виду. Оцінки регресії будуть не задовільні від неї у відповідному ступені, коли тільки всі незалежні змінні будуть абсолютно некорельовані. Розгляд цієї проблеми починається тільки тоді, коли вона суттєво впливає на результати оцінки регресії.

Досить простий спосіб виявлення мультиколінеарності - це побудова матриці коефіцієнтів парної кореляції, яка відображає силу зв'язку між факторами. У випадку, коли коефіцієнти парної кореляції між незалежними факторами входять у відповідний проміжок (табл. 9.4), можна говорити про відповідний рівень мультиколінеарності.

Таблиця 9.4 - Рівень мультиколінеарності залежно від значень коефіцієнтів парної кореляції між незалежними факторами

Значення коефіцієнтів парної кореляції між незалежними факторами	Рівень мультиколінеарності
$r_{x1x2} = 0{,}85 – 1{,}0$	сильна
$r_{x1x2} = 0{,}55 – 0{,}84$	помірна
$r_{x1x2} = 0{,}25 – 0{,}54$	слаба
$r_{x1x2} = 0 – 0{,}24$	відсутня

Існують різні методи для зменшення мультиколлінеарності. Вони діляться на дві категорії: до першої категорії відносяться методи, спрямовані на виконання умов, що забезпечують надійність оцінок регресії; до других – використання зовнішньої інформації. Якщо з початку використовувати можливі значення показників, то, звичайно, було б важливим збільшити кількість спостережень. Якщо, наприклад, використовують часові ряди, то це можна зробити шляхом скорочення терміну кожного періоду часу. Якщо використовують дані перехресної вибірки і дослідник знаходиться на стадії планування дослідження, то можна збільшити точність оцінок регресії і послабити проблему мультиколінеарності за рахунок більших витрат коштів на збільшення розміру вибірки та ін. методи.

Зазначимо, що ці методи тільки зменшують вплив мультиколінеарності. У практиці економетричного моделювання економічних процесів нівелювання впливу цього явища здійснюють шляхом виключення одного з незалежних факторів моделі, який сильно впливає на інший фактор, а потім продовжують дослідження.

9.4. Парна лінійна регресія

Парний регресійний аналіз спрямований на визначення ступеня зв'язку між змінними і яким чином вони зв'язані в побудові парної моделі. Слід відзначити, що не слід очікувати отримання точного співвідношення між будь-якими економічними показниками, крім випадків, коли воно існує за визначенням.

Парний регресійний аналіз відбувається *за наступними напрямами*:

1. Збір статистичної інформації, яка відображає економічні процеси на підприємстві. Це відбувається шляхом обробки фінансових, економічних, бухгалтерських, статистичних документів діяльності суб'єктів підприємницької діяльності.

2. Обробка статистичної інформації, її специфікація. Це важливий етап, оскільки він створює підґрунтя для отримання об'єктивних результатів і адекватної парної економетричної моделі.

3. Використання економетричного інструментарію для розробки парної моделі. У цьому аспекті здійснюють побудова матриці статистики, оцінка показників варіації змінних, розрахунок коефіцієнтів парної кореляції й детермінації (див. розділ 9.2), визначення показників параметрів парної економетричної моделі. Для обчислення параметрів рівняння виду $\bar{y} = kx + b$

(лінійна парна модель залежності) частіш за все користуються методом найменших квадратів. При цьому ставиться умова, щоб сума квадратів відхилень (відстаней) всіх досліджених точок від ординат, обчислених за рівнянням прямої ε_i, була мінімальною. Іншими словами, пряма повинна проходити якомога ближче до вершин емпіричної лінії регресії. Це означає, що параметри *К* і *b* управління регресії треба визначити з рівняння

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i) = \min , \qquad (9.16)$$

де y_i – ординати досліджуваних точок;

$\tilde{y}_i$ – ординати розрахункових точок, визначені за рівнянням регресії $\bar{y}$ =к x_i+ b таким чином $\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (kx + b) \right]^2 = F(k,b) \min$.

Умовою екстремуму даної функції слід вважати рівність нулю часткових виробничих, взятих за параметрами *К* і *b*:

$$\frac{dF}{dk} = 0 \;\; u \;\; \frac{dF}{db} = 0, \;\; [F(u)]' = F_u(u) * u' \text{ звідси } \begin{array}{l} \dfrac{dF}{dk} = -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (kx_i + b) \right] x_i = 0 \\ \dfrac{dF}{dk} = -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (kx_i + b) \right] = 0. \end{array} \qquad (9.17)$$

Скоротивши на (-2) і розкривши квадратні дужки, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = k\sum_{i=i}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = k\sum_{i=i}^{n} x_i + bn. \end{array} \qquad (9.18)$$

Підставивши сюди чисельні значення відповідних величин, знайдемо параметри *К* і *b*.

У разі лінійної залежності геометричне і алгебраїчне значення коефіцієнта регресії полягає в тому, що він кількісно характеризує, на скільки в середньому змінюється *у* при зміні *Хі* на одиницю свого вимірювання. Чим більше чисельні значення коефіцієнта регресії, тим більше відносний приріст функції при зміні аргументу.

4. Оцінка адекватності розробленої парної лінійної економетричної моделі на основі критеріїв і тестів, представлених в розділах 9.2 і 9.3.

5. Інтерпретація отриманих параметрів парної лінійної економетричної моделі. Це важливий етап, на якому відображається економічна результативність економетричного моделювання.

У загальному вигляді економетрична модель парної лінійної регресії може мати вигляд

$$y = a_0 + a_1 x + e, \tag{9.19}$$

де y – залежна змінна;

x – незалежна змінна;

a_0, a_1 – параметри економетричного рівняння;

e – випадковий член.

Таким чином, парний регресійний аналіз дозволяє побудувати парну лінійну економетричну модель і встановити причинно-наслідковий зв'язок між залежною економічною змінною і незалежним фактором і створити передумови для побудови організаційно-економічних механізмів управління підприємствами та прийняття рішень, спрямованих на розвиток цих суб'єктів підприємницької діяльності. Проте більшість економічних процесів мають складний характер, де враховується велика кількість факторів. Тому необхідно будувати економетричні моделі, які враховують декілька економічних показників, тобто розробляти лінійні моделі множинної регресії.

Тема 10. Лінійні моделі множинної регресії

10.1. Сутність кількісного регресійного аналізу

10.2. Напрями побудови лінійної моделі множинної регресії

10.3. Критерії оцінки адекватності лінійної моделі множинної регресії

10.4. Економічна інтерпретації лінійних моделей множинної регресії

Поняття: кількісний регресійний аналіз; коефіцієнт регресії; тест Дарбіна-Уотсона.

Література: [17], [18], [19], [20], [22], [28], [34], [35], [36], [44], [45], [46], [50], [59].

10.1. Сутність кількісного регресійного аналізу

Кількісний регресійний аналіз є продовженням парного регресійного аналізу у випадках, коли залежна змінна *y* зв'язана з двома або більше незалежними змінними *x*. Тобто відбувається розширення парної регресійної моделі, де важливе значення відіграє спільний вплив незалежних змінних на залежну змінну. Тому в кількісному регресійному аналізі необхідно враховуватита чітко визначити цей вплив, а також важливе значення має вирішення проблеми специфікації. Остання проблема лежить в площині вибору тих факторів, які впливають на результуючий показник, економічно інтерпретуються і об'єктивно відображають господарські процеси, що відбуваються на підприємстві. Результатом кількісного регресійного аналізу є побудова кількісної (багатофакторної) регресійної моделі.

Взагалі кількісна регресійна модель має вигляд

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_ix_i + e, \text{ або}$$

$$y = b + k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_ix_i + e, \qquad (10.1)$$

де y – результуюча залежна змінна;

x_1, x_2, x_i - незалежна змінна;

$a_0, a_1, a_2, a_i, b, k_1, k_2, k_i$ – параметри рівняння (коефіцієнти регресії);

e – випадковий член.

У кількісному регресійному аналізі визначають ***коефіцієнт регресії***, який необхідний для забезпечення найкращої відповідності спостереженням і отримання оптимальних оцінок невідомих значень параметрів моделей.

Для ***розрахунку коефіцієнтів регресії*** a_0, a_1, a_2, a_i використовують метод найменших квадратів. Так, для пошуку коефіцієнтів регресії (параметрів) двофакторної моделі складають систему нормальних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} \sum y = n\cdot a_0 + a_1\sum x_1 + a_2\sum x_2 \\ \sum yx_1 = a_0\sum x_1 + a_1\sum x_1^{\;2} + a_2\sum x_1x_2 \\ \sum yx_2 = a_0\sum x_2 + a_1\sum x_1x_2 + a_2\sum x_2^{\;2} \end{aligned}\right\}. \qquad (10.2)$$

Кількісний регресійний аналіз дозволяє розмежовувати вплив незалежних змінних, допускаючи при цьому можливість їх корельованості. Коефіцієнт регресії для кожної змінної x дає оцінку її впливу на величину y у випадку незмінності впливу на неї всіх інших змінних x.

Це може бути встановлено двома способами. Один з них полягає в виявленні того, що якщо модель правильно специфікована і виконуються умови Гаусса-Маркова, то оцінки будуть незміщеними. Інший спосіб полягає в оцінюванні регресійної залежності y від однієї з незалежних змінних, зсуненням перед цим можливості використання останньої як заміщувальної для іншої будь-якої незалежної змінної і показавши далі, що оцінка її коефіцієнта регресії співпадає з оцінкою коефіцієнта кількісної регресії. У рамках висвітлених способів необхідно розглянути умови Гаусса-Маркова [20].

Якість коефіцієнтів регресії залежить від якості випадкового члена. Для того, щоб регресійний аналіз давав найкращі результати, випадковий член повинен задовольняти ***4 умовам, відомим як умови Гаусса-Маркова.***

1-а умова Гаусса-Маркова – полягає в тому, що математичне очікування випадкового члена будь-якого спостереження повинно дорівнювати нулю.

2-а умова Гаусса-Маркова – полягає в тому, що дисперсія випадкового члена повинна бути постійною для всіх спостережень.

3-а умова Гаусса-Маркова припускає відсутність систематичного зв'язку між значення випадкового члена в будь-яких спостереженнях. Випадкові члени повинні бути абсолютно незалежними один від одного.

4-а умова Гаусса-Маркова – полягає в тому, що випадковий член повинен бути розподілений незалежно від пояснювальних змінних. Тобто пояснювальні змінні не є стохастичними. Значення будь-якої незалежної змінної в кожному спостереженні повинно бути встановлено зовнішніми причинами, які не визначені в рівнянні регресії.

Коефіцієнти регресії є більш точними:

1) чим більша кількість спостережень у виборці;
2) чим більша дисперсія вибірки пояснювальних змінних;
3) чим менша теоретична дисперсія випадкового члена;
4) чим менше зв'язані між собою пояснювальні змінні.

Стандартна помилка коефіцієнта кількісної регресії визначається аналогічно, як і в парному регресійному аналізі. Тобто формула для стандартної помилки може бути визначена на основі заміни дисперсії на незміщену оцінку і витягування квадратного кореня.

Результатом кількісного регресійного аналізу є побудова багатофакторної економетричної моделі, що відображає причинно-наслідкові зв'язки між економічними факторами і створює кількісне підґрунтя для розробки економічних механізмів і прийняття ефективних управлінських рішень.

10.2. Напрями побудови лінійної моделі множинної регресії

Для побудови лінійної моделі множинної регресії використовують статистичну інформацію про діяльність підприємства і здійснюють такі етапи: математико-статистичний аналіз, побудова багатофакторної регресійної моделі, перевірка побудованої моделі на адекватність, аналіз (інтерпретація) отриманих результатів.

На етапі математико-статистичного аналізу проводять перевірку основних припущень класичного регресійного аналізу, крім того, здійснюють найважливішу процедуру багатофакторного аналізу – перевірку факторів на мультиколінеарність.

Для здійснення математико-статистичного аналізу будують матрицю коефіцієнтів парної кореляції, який показує ступінь зв'язку між факторами економетричної моделі. Потім аналізують коефіцієнти парної кореляції між факторами. Результатом етапу математико-статистичного аналізу є знаходження множини основних незалежних між собою факторів, що є базою для побудови регресійної моделі.

На другому етапі для побудови багатофакторної моделі вибирають фактори, що будуть відображати причинно-наслідковий зв'язок. У цьому аспекті широке використання отримали «покроковий» метод і метод «виключень».

Найбільш доцільно відшукувати рівняння множинної регресії шляхом послідовного підключення до парного рівняння решти аргументів у порядку їх значущості («покроковий метод»). У цьому випадку виявляється можливість на кожному етапі аналізувати:

- обумовленість вирішуваної системи за чисельним значенням її визначника (детермінатора);

- зміну β- коефіцієнтів, чисельне значення яких має бути менше 1, а знак не суперечити логіці;

- зростання коефіцієнта множинної кореляції R і убування залишкової дисперсії $\tilde{\sigma}^2_{ост} = \tilde{\sigma}^2_y(1 - R^2)$.

Методика послідовного підключення аргументів складається з наступних операцій:

1.Обирають аргумент x_1, якому відповідає найбільший за абсолютним значенням "зовнішній коефіцієнт" кореляції

$$|r_{y1}| = max\,|r_{yi}|,\ j = 1,2\ldots q. \qquad (10.3)$$

За аргументом x_1 записують рівняння

$$t_{y1} = t_{y1}\,t_{x1}. \qquad (10.4)$$

2. Приєднюють аргумент x_{io}, для якого

$$| r_{xj} X_1 | = min | r_{xj\ x1} |, j = 2,3,\dots q. \qquad (10.5)$$

Складають систему нормальних рівнянь

$$r_{yx1} = \beta_1 + r_{xjo}\ \beta_2; \qquad (10.6)$$

$$r_{y\,xjo} = \beta_1\, r_{xjo\,x1} + \beta_2 \qquad (10.7)$$

і обчислюють значення β_1 и β_2. Визначають

$$R^2_{y,\,x1\,xjo} = \beta_1\, r_{yx1} + \beta_2\, r_{y\,xjo}; \qquad (10.8)$$

$$\sigma_{y,\ x1\,xjo} = \sqrt{1-R^2 y, x_1 x_{j0}}. \qquad (10.9)$$

Порівнюється $R^2_{y,\,x1\,xjo}$, $\sigma_{y,\ x1\,xjo}$ відповідно з $r^2_{yx1,}\ \sigma_{y\,x1}$.

Переконують в справедливості нерівності

$$R^2_{y,\,x1\,xjo} \geq r^2_{yx1}\,;\ \sigma_{y,\ xjo} \leq \sigma_{y\,x1}. \qquad (10.10)$$

У противному разі замінюють чинний аргумент іншим $x_{j1,}$ а аргумент X_{j0} переносять на останнє місце.

3. Далі приєднують наступний аргумент X_{j1} і розв'язують систему з трьома невідомими:

$$r_{y\,x1} = \beta_1 + \beta_2\ r_{x1\,xjo} + \beta_3\ r_{x1\,xj1}; \qquad (10.11)$$

$$r_{y\,xjo} = \beta_1\, r_{x1\,xjo} + \beta_2\ + \beta_3\ r_{xjo\,xj1}; \qquad (10.12)$$

$$r_{y\,xj1} = \beta_1\, r_{x1\,xjo} + \beta_2\, r_{xjo\,xj1}\ + \beta_3. \qquad (10.13)$$

Обчислюють значення $\beta_{1,}$ β_2 та β_3. Визначають

$$R^2_{y,\,x1\,xjo\,xj1} = \beta_1\ r_{y\,x1} + \ \beta_2\, r_{y\,xjo} + \beta_3\, r_{y\,xj1}; \qquad (10.14)$$

$$\sigma_{y,\ xjo\,xj1} = \sigma y\ \sqrt{1-R^2_{y_1 x_1 x_{j0} x_{j1}}}\ . \qquad (10.15)$$

і порівнюють з $R^2_{y,\ x1\ xjo}$ і $\sigma_{y,\ x1\ xjo}$. Переконуються в справедливості нерівності

$$R^2_{y,\,x1\,xjo\,xj1} \geq R^2_{y,\,x1\,xjo}; \qquad (10.16)$$

$$\sigma_{y,\ x1\,xjo\,xj1} \leq \sigma_{y,\ x1\,xjo}. \qquad (10.17)$$

У противному разі діють аналогічно пункту 2.

Дослідження ведуть до тих пір, поки не будуть апробовані чинники-аргументи і збережені тільки ті з них, для яких β_j–коефіцієнти суттєві й лінійно незалежні. У результаті виходить множинне рівняння в стандартизованому масштабі.

Від рівняння множинної регресії у стандартизованому масштабі

$$t_{\bar{y}_{xi}} = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \ldots + \beta_p t_n \qquad (10.18)$$

до рівняння множинної регресії в натуральному масштабі

$$\bar{y}_{x1,\,x2\ldots Xp} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_p x_p + b. \qquad (10.19)$$

Перехід здійснюють подвійно.

1.Шляхом використання формул

$$t_{\bar{y}_{xi}} = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y};\ t_{xi} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}, \qquad (10.20)$$

$$де\ i = 1,2....p.$$

При цьому маємо

$$\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = \beta_1 \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}} + \beta_2 \frac{x_2 - \bar{x}_2}{\sigma_{x_2}}, \ldots \beta_p \frac{x_p - \bar{x}_p}{\sigma_{x_p}} \qquad (10.21)$$

Підставивши відомі значення $\bar{y}$, σ_{xi}, σ_y, β_i і $\bar{X}_I$, отримуємо рівняння множинної регресії в натуральному масштабі, в якому чисельне значення вільного члена додатково визначати не потрібно.

2. Невідомі коефіцієнти a_i в рівнянні множинної регресії в натуральному масштабі визначають з виразу

$$a_1 = \beta_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}};\ a_2 = \beta_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}}; \ldots a_p = \beta_p \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_p}}. \qquad (10.22)$$

Чисельне значення вільного члена

$$b = \bar{y} - (a_1 \bar{X}_1 + a_2 \bar{X}_2 + \ldots + a_p \bar{X}_p). \qquad (10.23)$$

Метод «виключень» полягає в тому, що вибирають набор факторів, які ймовірно можуть впливати на результативний показник. Потім по черзі виключають ті фактори, в яких найменший коефіцієнт кореляції (згідно з матрицею статистики), а значення часткових F-критеріїв не перевищують нормативні значення. Таким чином, залишаться тільки ті змінні, які відповідають розглянутим вище умовам.

Слід сказати, що на цьому етапі розраховують ***коефіцієнт множинної кореляції***, який показує загальний вплив незалежних факторів на результуючий показник економетричної моделі. Він знаходиться у проміжку між 0 і 1. Чим більше вплив факторів, тим більше коефіцієнт множинної кореляції наближається до 1. Він не може перевищувати значення останньої.

Розрахунок коефіцієнта множинної кореляції ($R_{yx_1x_2...x_n}$) виконують за формулою Боярського [18]:

$$R_{yx_1x_2...x_n} = \sqrt{\frac{-1^{\alpha}\Delta_*}{\Delta_0}}, \tag{10.24}$$

де α – порядок повної матриці коефіцієнтів кореляції;

Δ_* – визначник повної матриці коефіцієнтів кореляції із заміною нижнього правого елемента нулем;

Δ_0 - визначник матриці, в якій враховані коефіцієнти парної кореляції незалежних факторів.

Якщо розкрити визначники для двофакторної економетричної моделі, то коефіцієнт множинної кореляції може бути визначений як

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{-1^3\begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & r_{yx_1} \\ r_{x_1x_2} & 1 & r_{yx_2} \\ r_{yx_1} & r_{yx_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_1x_2} & 1 \end{vmatrix}}}, \tag{10.25}$$

де r_{yx_1}, r_{yx_2} - коефіцієнти парної кореляції між залежною змінною y і незалежними факторами x_1, x_2;

$r_{x_1x_2}$ - коефіцієнт парної кореляції між незалежними змінним x_1, x_2.

З метою контролю правильності розрахунків цей коефіцієнт визначають також за формулою [18]:

$$R_{yx_1x_2...x_n} = \sqrt{r_{yx_1}\beta_{x_1} + r_{yx_2}\beta_{x_2} + ... + r_{yx_n}\beta_{x_n}}. \tag{10.26}$$

де $\beta_{x_1,x_2,...,x_n}$ - β-коефіцієнти для незалежних факторів економетричної моделі. Цей коефіцієнт може бути розрахований наступним чином [18]:

$$\beta_i = \Delta_i / \Delta_0, \tag{10.27}$$

де Δ_i – визначник (детермінант) матриці взаємної кореляції (мультиколінеарності) із заміною в ній i-го стовпця стовпцем коефіцієнтів кореляції r_{yx_i}. Наприклад, β-коефіцієнти для одного з факторів двофакторної моделі разраховують наступним чином:

$$\beta_{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} r_{yx_1} & r_{x_1x_2} \\ r_{yx_2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_1x_2} & 1 \end{vmatrix}}. \qquad (10.28)$$

Знайдені в результаті вирішення кореляційної матриці β-коефіцієнти показують, на яку частину середньоквадратичного відхилення σ_y змінюється середнє значення функції, якщо відповідний аргумент зменшується або збільшується, а інші аргументи залишаються незмінними.

Для з'ясування математико-статистичного змісту множинної кореляції всю досліджувану групу змінних слід розглядати як один чинник-аргумент. При цьому розраховують коефіцієнт надійності

$$M = \frac{R\sqrt{n}}{1-R^2}. \qquad (10.29)$$

Стандартну помилку (середню квадратичну похибку) коефіцієнта множинної кореляції визначають за формулою

$$\sigma_R = (1-R)/\sqrt{n}, \qquad (10.30)$$

де n - обсяг вибірки.

Сукупний вплив врахованих змінних на функцію визначається коефіцієнтом загальної детермінації R^2, а окремих чинників-аргументів за чисельними значеннями приватної детермінації $r_i\beta_i$:

$$R^2 = r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \ldots + r_p\beta_p. \qquad (10.31)$$

Стандартну (систематичну) похибку $\hat{R}^2$ обчислюють за формулою

$$\hat{R}^2 = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-p}, \qquad (10.32)$$

де Р - число параметрів рівняння регресії. З рівняння множинної регресії можна отримати рівняння чистої (приватної) регресії y по кожному з аргументу x_i. Для цього фіксують значення всіх аргументів, окрім x_i, на середньому рівні.

Отримане рівняння описує, як в середньому змінюється із зміною x_i, якщо всі інші аргументи постійні й закріплені саме на своїх середніх рівнях.

Приклад. Розрахуйте коефіцієнт множинної кореляції і визначіть β-коефіцієнти, на основі даних, наевдених в табл. 10.1.

Таблиця 10.1 - Матриця статистики економічних показників

Показники	Коефіцієнти парної кореляції		
	Р (у) (рентабельність продукції)	ФЗоз (x_1) (фондоозброєність основних засобів)	Ч (x_2) (середньоспискова чисельність працівників)
Р (у) (рентабельність продукції)	1	0,87	0,65
ФЗоз (x_1) (фондоозброєність основних засобів)	0,87	1	0,36
Ч (x_2) (середньоспискова чисельність працівників)	0,65	0,36	1

Вирішення

1. Визначимо β-коефіцієнти для факторів x_1 і x_2 (формула (10.28):

$$\beta_{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 0,87 & 0,36 \\ 0,65 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0,36 \\ 0,36 & 1 \end{vmatrix}} = 0,731,$$

$$\beta_{x_2} = \frac{\begin{vmatrix} 0,87 & 1 \\ 0,65 & 0,36 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0,36 \\ 0,36 & 1 \end{vmatrix}} = 0,387.$$

2. Розрахуємо коефіцієнт множинної кореляції (формула (10.26):

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{r_{yx_1}\beta_{x_1} + r_{yx_2}\beta_{x_2}} = \sqrt{0,87x0,7371 + 0,65x0,387} = 0,945.$$

На наступному етапі аналізу перевіряють адекватність моделі за допомогою використання F-критерію Фішера і t-критерію Ст'юдента. При перевірці на адекватність економетричної моделі також використовують тест Дарбіна-Уотсона, який спрямований на перевірку кореляції між залишками.

На останньому етапі отриману модель аналізують і інтерпретують.

10.3. Критерії оцінки адекватності лінійної моделі множинної регресії

Статистичну оцінку надійності коефіцієнта регресії здійснюють за допомогою ***t-критерію Ст'юдента***. Він, як зазначалось, застосовується для оцінки тісноти зв'язку між незалежною змінною x і залежною y. При використанні цього критерію формулюється нульова гіпотеза. Потім отримане значення t-розподілу Ст'юдента порівнюють з критичним. Якщо фактичне значення t-розподілу Ст'юдента перевищує критичне, то спростовується нульова гіпотеза й зв'язок між змінними x і y вважається щільним. Якщо ні, то приймається нульова гіпотезу, а фактори моделі вважають статистично неадекватними і виключають з моделі при встановленому рівні значущості в 5% і 1%.

F-тест використовують для оцінки того, важливе пояснення, яке дає рівняння в цілому. Якщо фактичне значення F-критерія вище нормативного, то модель адекватна, а її фактори залишаються у рівнянні. Методика оцінки t-*критерію Ст'юдента і F-критерія Фішера* подана в розділі 9.2.

Для перевірки адекватності економетричної моделі використовується ***тест Дарбіна-Уотсона***, який спрямований для перевірки кореляції між залишками використовується. Він включає такі етапи:

1. Розраховують d-статистику для аналізованої вибірки даних. Як відомо з теорії, значення d-статистики лежать у межах від 0 до 4. Показник Дарбіна-Уотсона розраховують наступним чином:

$$DW = \frac{\sum_{j=2}^{n}(e_j - e_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^{n} e_j^2}, \qquad (10.33)$$

де e_j – залишки j-го ряду вибірки даних;

e_{j-1} – залишки попереднього j-го ряду вибірки даних.

2. Порівнюють отримані d-статистики з табличними *d*-статистиками при рівні значущості $\alpha = 0,05$, кількості факторів *k*, що присутні в моделі, і кількості спостережень *n*. Якщо розраховане значення *d*-статистики знаходиться в проміжку від *0* до d_L $(0 < d < d_L)$, то це свідчить про наявність позитивної автокореляції. Якщо значення d потрапляє в зону невизначеності, тобто набуває значення $d_L \le d \le d_U$, або $4 - d_U \le d \le 4 - d_L$, то можемо зробити висновки ні про наявність, ні про відсутність автокореляції. Якщо $4 - d_L < d < 4$, то маємо негативну автокореляцію. Нарешті, якщо $d_U < d < 4 - d_U$, то автокореляції немає.

Для оцінки адекватності лінійної моделі множинної регресії важливе значення має перевірка її на ***гомо- або гетероскедастичність***. Суть цього явища полягає в тому, що варіація кожної ε_i навколо її математичного сподівання не залежить від значення *x*. Дисперсія кожної ε_i зберігається сталою незалежно від малих чи великих значень факторів: σ_ε^2 не є функцією x_{ij}, тобто $\sigma_\varepsilon^2 \ne f(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi})$.

Якщо σ_ε^2 не є сталою, а її значення залежать від значень *x*, можемо записати $\sigma_\varepsilon^2 = f(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi})$. У цьому разі маємо справу з гетероскедастичністю. Оцінка моделі на наявність гетероскедастичності полягає в тому, що на першому етапі здійснюють тестування моделі на наявність гетероскедастичності. І якщо підтверджується гіпотеза про її наявність, то на другому етапі модель виключається.

Тестування лінійної моделі множинної регресії, як і випадку лінійної моделі парної регресії, на гетероскедастичність здійснюють на підставі тесту рангової кореляції Спірмена. Значущість отриманого коефіцієнта рангової кореляції Спірмена перевіряють за допомогою t-критерія Ст'юдента при (n-2) кількості ступенів свободи.

Фактичне значення t-критерію Ст'юдента зіставляють з $t_{кр}$. Якщо $t_{ф} > t_{кр}$, то підтверджується гіпотеза про наявність гетероскедастичності. А, якщо $t_{ф} < t_{кр}$, то приймається гіпотеза про гомоскедастичність.

10.4. Економічна інтерпретації лінійних моделей множинної регресії

На ***етапі аналізу отриманих результатів*** здійснюють економічну інтерпретацію отриманої економетричної моделі. На цьому етапі обґрунтовується економічна доцільність отриманих результатів.

Розглянемо, наприклад, економічний зміст моделі залежності суми капіталу і середньооблікової чисельності працівників ($Ч$), співвідношення власного і позикового капіталів ($\frac{ВК}{ПК}$), відношення витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріалів ($\frac{Воп}{Вм}$).

$$Кпор = -2355{,}39 + 28{,}7 \times Ч + 1795{,}24 \times \frac{ВК}{ПК} + 8{,}95 \times \frac{Воп}{Вм}. \tag{10.34}$$

Економетрична багатофакторна модель (10.8) показує, що 82% коливань нового капіталу (коефіцієнт детермінації – 82%) обумовлюється трьома факторами: середньообліковою чисельністю працівників, співвідношенням власного й позикового капіталу, а також відношенням витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріалів. Статистичні характеристики моделі адекватні. Фактичні значення t-статистик більші ніж критичні (табл. 10.2); фактичне значення критерію Фішера $F_{ф} = 69 > F_{0{,}05;24} = 3{,}01$ також значно перевищує його критичне (табличне) значення; значення критерію Дарбіна - Уотсона свідчить про відсутність автокореляції залишків: $1,65 < d_ф = 2,14 < 2,35$; величина критерію Спірмена ($r_s = 0,124$) свідчить про гомоскедастичність, оскільки отримане значення t-статистики нижче його критичного значення ($t_ф = 0,628 < t_{кр} = 1,706$), мультиколінеарність між незалежними факторами низька, оскільки коефіцієнти парної кореляції між цими показниками мають значення в проміжку від 0,15 до 0,45.

Таблиця 10.2 - Значення t-статистик для параметрів моделі (10.34)

Параметри	розрахункові	критичні
Постійний параметр	2,912	1,711
Середньооблікова чисельність працівників ($Ч$)	5,278	1,711
Співвідношення власного й позикового капіталу ($\frac{ВК}{ПК}$)	2,329	1,711
Відношення витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали ($\frac{Воп}{Вм}$)	1,981	1,711

Економічна інтерпретація моделі (10.34) полягає в тому, що між середньообліковою чисельністю працівників і новим капіталом зв’язок лінійний. Зростання середньооблікової чисельності на одного працівника призведе до збільшення обсягу нового капіталу на 28,7 тис. грн. Між новим капіталом і чинниками: співвідношенням власного й позикового капіталу, відношенням витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали також існує лінійний зв’язок. Збільшення співвідношення власного й позикового капіталу на 10 $\frac{коп.}{грн.}$ приведе до зростання обсягів нового капіталу на 179,52 грн. Збільшення відношення витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали на 10 $\frac{коп.}{грн.}$ приведе до зростання нового капіталу на 0,9 грн. Слід відзначити, що коли розглядувані фактори моделі (10.34) будуть дорівнювати *0*, то новий (отриманий) капітал матиме значення -235,54 грн. Тобто на цей показник у відповідних умовах негативний вплив справляють інші економічні фактори. Тому в подальших дослідженнях необхідно враховувати їх вплив.

Таким чином, кількісний регресійний аналіз дозволяє встановити причинно-наслідковий зв'язок між декількома економічними факторами, побудувати багатофакторні економетричні моделі й розробити ефективні механізми управління підприємством.

Тема 11. Узагальнені економетричні моделі

11.1. Узагальнені економетричні моделі в економіко-математичному моделюванні

11.2. Види узагальнених еконметричних моделей

Поняття: узагальнена економетрична модель; узагальнена лінійна економетрична модель; узагальнена нелінійна економетрична модель.

Література: [17], [20], [34], [35], [36].

11.1. Узагальнені економетричні моделі в економіко-математичному моделюванні

Узагальнена економетрична модель – це окрема функція чи система функцій (рівнянь), що описує кореляційно-регресійний зв'язок між економічними показниками, один чи декілька з яких є залежною змінною, а всі інші – незалежними.

Узагальнені економетричні моделі являють собою окремий клас економіко-математичних моделей і характеризуються наступними особливостями:

1) економетричні моделі є ***моделі прикладні (емпіричні)***;
2) економетричні моделі є ***моделі дескриптивні***;
3) економетричні моделі є ***моделі стохастичні.***

Узагальнена економетрична модель у вигляді однієї функції (рівняння) має наступний вигляд :

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon), \qquad (11.1)$$

де y - залежна змінна; $x_1, x_2, ..., x_n$ - незалежні змінні; ε - випадковий член (складова). Приклади таких моделей розглядались в розділах 9, 10.

Узагальнені економетричні моделі можуть являють собою систему функцій, які мають наступний вигляд:

$$y_s = f_s(x_{s1}, x_{s2}, ..., x_{sm}, \varepsilon_s), (s = \overline{1, k}), \qquad (11.2)$$

де к – кількість рівнянь. Прикладом такої моделі може бути модель формування доходу Дж. М. Кейнса:

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \varepsilon_t, \\ y_t = C_t + I_t, \end{cases} \qquad (11.3)$$

де C_t - сукупне споживання, y_t - національний дохід, I_t - інвестиції, β_0, β_1 - параметри моделі.

Інформаційною базою для побудови узагальнених економетричних моделей є статистичні вибірки. Особливістю останніх є те, що в економетричних дослідженнях необхідно враховувати кількість спостережень на один фактор, що повинна перевищувати 8.

До статистичних вибірок, які враховуються при побудові узагальнених економетричних моделей, ставлять наступні вимоги:

- однорідність спостережень (якісна і кількісна);
- точність.

11.2. Види узагальнених економетричних моделей

Узагальнені економетричні моделі можуть бути лінійні й нелінійні.

Узагальнена лінійна економетрична модель - це регресійна модель, що встановлює лінійну залежність між економічними показниками, один з яких є залежною (пояснюваною) змінною, а всі інші – незалежними (пояснюючими) змінними моделі.

Залежна змінна для такої моделі розглядається як ендогенна змінна, а незалежні змінні – як екзогенні.

Теоретична узагальнена лінійна економетрична модель може бути специфікована у наступній формі :

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m + \varepsilon , \qquad (11.4)$$

де y – залежна (пояснювана) змінна моделі, x_1, x_2, … , x_m – незалежні (пояснюючі) змінні моделі або фактори, a_0, a_1, …. , a_m – параметри моделі, ε – випадковий член, m – кількість пояснюючих змінних моделі.

Представлена узагальнена модель (11.4) дійсна для всієї генеральної сукупності спостережень за змінними моделі й відображає відповідну економічну ситуацію, яка склалась на макро- або мікрорівні.

Вибіркова узагальнена лінійна економетрична модель має такий вигляд :

$$y = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_m x_m + e , \qquad (11.5)$$

де y – залежна (пояснювана) змінна моделі, x_1, x_2, … , x_m – незалежні (пояснюючі) змінні моделі (фактори), A_0, A_1, A_m – параметри вибіркової моделі, e – залишки моделі.

Вибіркову модель (11.5) розробляють для певної статистичної вибірки з генеральної сукупності. На відміну від моделі (11.4) параметри вибіркової моделі A_0, A_1, … , A_m є оцінками (наближеними значеннями) параметрів a_0, a_1, a_m і випадковими величинами, а залишки моделі e можна оцінити на основі статистичних даних. Таким чином, вибіркова модель завжди є тільки оцінкою реальної, але невідомої теоретичної моделі.

Вибіркова функція регресії для узагальненої лінійної економетричної моделі має наступний вигляд :

$$\hat{y} = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_m x_m , \qquad (11.6)$$

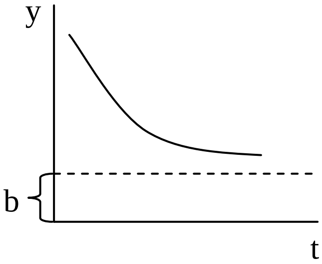
де $\hat{y}$ – оцінка математичного сподівання залежної (пояснюваної) змінної моделі, x_1, x_2, … , x_m – незалежні (пояснюючі) змінні моделі (фактори), A_0, A_1, A_m – параметри вибіркової регресії.

Узагальнена нелінійна економетрична модель - це регресійна модель, що встановлює нелінійну залежність між економічними показниками.

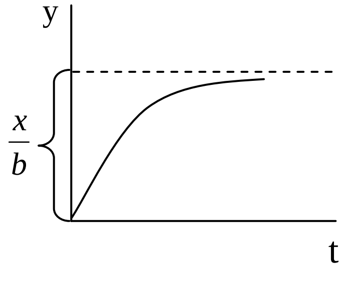
Узагальненими нелінійними економетричними моделями можуть бути відомі функції:

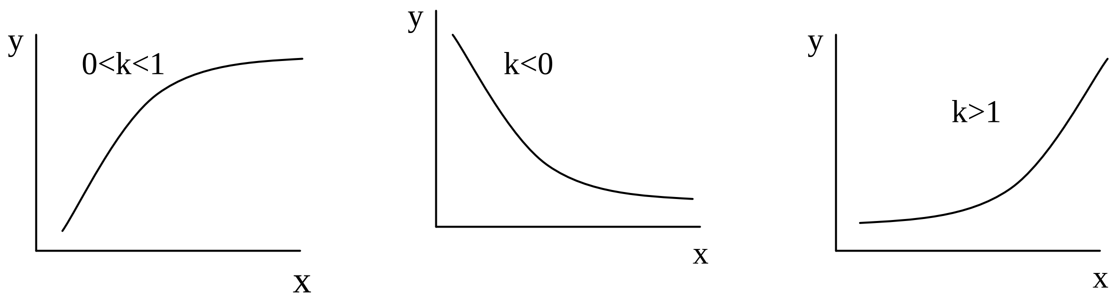
1. Квадратична - $\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x_2{}^2$ або $\hat{y} = b + k_1 x + k_2 x_2{}^2$.
2. Гіперболічна - $\hat{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}$ або $\hat{y} = b + \frac{k}{x}$.
3. Степенева - $\hat{y} = a_0 x^{a_1}$ або $\hat{y} = b x^k$.
4. Модифікована експонента - $\hat{y} = a_0 + a_1 a_2^x$ або $\hat{y} = b + k_1 k_2^x$.
5. Крива Гомперця - $\hat{y} = e^{a_0 + a_1 a^x{}_2}$ або $\hat{y} = e^{b + k_1 k^x{}_2}$.
6. Логістична - $\hat{y} = 1/(a_0 + a_1 a_2^x)$ або $\hat{y} = 1/(b + k_1 k_2^x)$.
7. Показова функція - $\hat{y} = a_0 e^{a_1 x}$ або $\hat{y} = b e^{kx}$

Більшість представлених функцій, що використовуються для опису техніко-економічних показників, шляхом функціональних перетворень y по x (роздільно або одночасно) можуть бути зведені до лінійного вигляду. При цьому метод перетворень залежить від форми зв'язку.



Гіпербола вигляду $\bar{y} = \frac{k}{x} + b$ перетвориться в лінійну шляхом заміни. Статична функція вигляду $\bar{y} = bk^x$ перетвориться в лінійну шляхом логарифмуванням. У результаті маємо $\lg \bar{y} = \lg b + k \lg x$. Позначимо $\bar{y}' + \lg \bar{y}, b' = \lg b, x' = \lg x$.

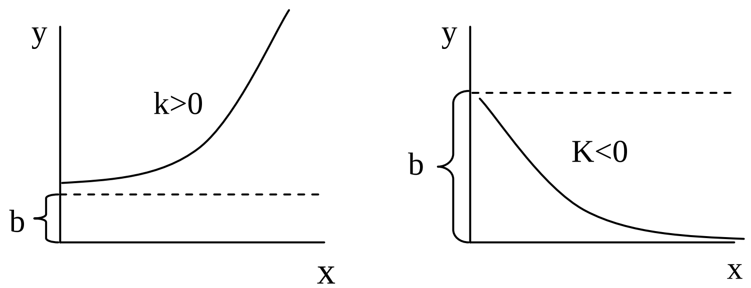




У результаті маємо $\bar{y}' = kx' + b'$.

Показова функція виду $y=be^{kx}$ перетвориться в лінійну логарифмуванням $\lg \bar{y} = \lg b + kx \lg e$.

Позначимо $\bar{y}' = \lg y'$, $b' = \lg b$, $k' = k \lg e$, при цьому $\lg e = 0.4343$. У результаті маємо $y_1 x + b_1$.



Теоретична лінія регресії може бути подана у вигляді плавної кривої, яка кількісно виражає зв'язок між середніми інтервальними значеннями $\bar{y}_{cp}$ і відповідними значеннями x (аргументами). Процес знаходження невідомих параметрів теоретичної залежності є однією з важливих проблем теорії кореляції і регресії. Наприклад, при знаходженні параметрів параболи виду $\bar{y} = ax^2 + bx + c$ необхідно складати й вирішувати систему з трьох нормальних рівнянь, яке розв'язують, виходячи з вимог методу найменших квадратів, тобто $\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \min$.

Підставляючи $\tilde{y} = ax_i^2 + bx + c$, маємо

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c\right)\right]^2 = \min = F(a,b,c). \qquad (11.7)$$

Знаходимо часткові похідні $\frac{dF}{da}, \frac{dF}{db}, \frac{dF}{dc}$ і прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{da} &= -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right]x_i^2 = 0 \\
\frac{dF}{db} &= -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right]x_i = 0 \\
\frac{dF}{dc} &= -2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)\right] = 0
\end{aligned} \qquad (11.8)$$

Після відповідного перетворення маємо:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 &= a\sum_{i-1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i-1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i-1}^{n} x_i^2 \\
\sum_{i=1}^{n} y_i x_i &= a\sum_{i-1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i-1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i-1}^{n} x_i \\
\sum_{i=1}^{n} y_i &= a\sum_{i-1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i-1}^{n} x_i^1 + cn
\end{aligned} \qquad (11.9)$$

В узагальнених економетричних моделях визначаються також коефіцієнти кореляції, детермінації, критерії адекватності (t-статистики, F-критерій Фішера, перевіряється на мультиколінеарність, гетероскедастичність, автокореляцію залишків).

Тема 12. Економетричні моделі динаміки

12.1. Сутність динамічних процесів в економіці

12.2. Аналіз часових рядів економічних показників і побудова економетричних моделей динаміки

12.3. Авторегресійні моделі й аналіз динаміки економетричних процесів і їх прогнозування

Поняття: динамічний ряд; часовий ряд; рівень рядів; похідні ряди; довжина часового ряду, тренд; трендова модель; сезонні коливання; циклічні скдадові, авторегресія

Література: [20], [63], [80].

12.1. Сутність динамічних процесів в економіці

Динамічні процеси, які характерні для економічних систем, відображаються у вигляді ряду послідовно розташованих в хронологічному порядку значень того чи іншого показника, який в своїх вимірах показує напрями розвитку дослідженого явища в економіці.

При дослідженні динамічних процесів необхідно враховувати наступні визначення та показники:

Динамичним рядом або рядом динаміки є послідовність спостережень одного показника, впорядкованих залежно від послідовно зростаючих або убуваючих значень другого показника.

Часовий ряд – це послідовність спостережень $У_t$, $У_{t2}…У_{tn}$, кожне з яких відноситься до деякого відрізку часу t_1, t_2,….t_n, або визначає результати за деякий період часу.

Складовими елементами рядів динаміки є цифрові значення показника, який називається ***рівнем рядів***.

Часові ряди, створені показниками, які характеризують економічні явища на визначені моменти часу, називаються ***моментними***. Приклад цього ряду подано в табл. 12.1.

Таблиця 12.1 - Списочна чисельність робітників підприємства

Дата	1.01	1.02	1.03	1.04	30.04
Списочна чисельність робітників	5600	5900	5400	5700	6000

Якщо рівні часового ряду створюються шляхом агрегування часового ряду за певний проміжок часу, то такі ряди називаються інтервальними часовими рядами (табл. 12.2).

Таблиця 12.2 - Фонд заробітної плати робітників підприємства

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень
Фонд заробітної плати робітників, тис. грн.	88978,2	94521,1	96219,3	95310,9

Часові ряди можуть бути створені як із абсолютних значень економічних показників, так і із середніх або відносних величин – це *похідні ряди* (табл. 12.3).

Таблиця 12.3 - Середньомісячна заробітна плата робітників підприємства

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень
Середня заробітна плата робітників, грн.	2300	2350	2410	2562

Під довжиною часового ряду розуміють час, який пройшов від початкового моменту спостереження до кінцевого. У наведених таблицях довжина всіх рядів дорівнює чотирьом місяцям.

Тренд – це рівняння $У=d(t)$, що виражає в середньому зміну в часі показника, заданого рядом динаміки. Таке рівняння можна розглядати як апроксимацію часового ряду або як окремий випадок регресії. У зв'язку з цим економіко-математична динамічна модель, в якій розвиток модельованої економічної системи відображається у вигляді тренду її основних показників, називається ***трендовою моделлю.***

У часових рядах економічних процесів можуть мати місце більш - менш регулярні коливання. Якщо вони мають строго періодичний або близький до нього характер і закінчуються протягом одного року, то їх називають ***сезонними коливаннями***. У таких випадках, коли період коливань складає декілька років, спостерігається ***циклічна складова.***

Тренд, сезонна і циклічна складові називаються ***регулярними, або систематичними складовими часового ряду.***

Складова частина часового ряду, яка залишається після виділення з нього регуляторних компонент, являє собою ***випадкову, нерегулярну компоненту.***

Якщо систематичні компоненти часового ряду визначені правильно, то залишкова після виділення з часового ряду цих компонент так звана ***залишкова послідовність буде компонентою ряду***. Ця компонента має наступні властивості:

- випадковість коливань рівня залишкової послідовності;
- відповідність розподілу випадкової компоненти нормальному закону розподілу;
- рівність математичного очікування випадкової компоненти нулю;
- незалежність значень рівней випадкової послідовності, тобто відсутність автокореляції.

Перевірка адекватності трендових моделей базується на перевірці виконання в залишковій послідовності вказаних чотирьох властивостей. Якщо не виконується одна з них, то модель визнається неадекватною; при виконанні всіх чотирьох властивостей модель адекватна.

Аналіз часових рядів є важливим етапом оцінки динаміки економічних процесів і побудови економетричних моделей динаміки.

12.2. Аналіз часових рядів економічних показників і побудова економетричних моделей динаміки

Прикладами часових рядів є щомісячна, щоквартальна, щорічна собівартість перевезення пасажирів, обсяг пасажирів, що перевозяться по депо. Вихідні дані слід формувати по кожному з об'єктів у зв'язку з тим, що інформація буде більш достовірною ніж по групі об'єктів.

Маючи в розпорядженні свій часовий ряд для досліджуваного показника і для всіх чинників, треба перш за все виявити загальну тенденцію зміни цих величин (тренд, еволюційну складову, лінію рівняння).

Як показує дослідження економічних часових рядів, в них завжди міститься загальна тенденція, яку необхідно виявити. Співвідношення $У=d(t)$

можна відшукувати безпосередньо за звітними або дослідженими даними, за *К*-членним ковзаним середнім.

Використання ковзаних середніх доцільне в разі достатньо довгого ряду. Число членів ковзаної середньої повинно бути обумовлено міркуваннями щодо суті процесу і залежно від кроку часового ряду.

При згладжуванні за допомогою ковзаних середніх доводиться втрачати частину даних: при тричленному вирівнюванні – дві сторони таблиці, при чотирьох- і п'ятичленному вирівнюванні - відповідно три і чотири рядки. Якщо число даних не правильне, то таке скорочення даних навряд чи буде доцільним.

Питання про доцільну довжину часового ряду дуже складне. З одного боку, як і завжди при пошуку апроксимуючої формули або рівняння регресії, виникає природне прагнення до збільшення масиву спостережень з метою підвищення точності надійності результатів, з другого боку, при обробці часових рядів слід враховувати небажаність використання старих даних. Приймати ці суперечливі вимоги можна тільки за рахунок зменшення довжини інтервалів часового ряду – скорочуючи крок ряду (шляхом переходу, наприклад від квартальних даних до місячних, від місячних до тижневих і т.п., якщо такі дані за матеріалами звітності можна мати).

Приклад. Дані собівартості пасажироперевезень міським електричним транспортом, поданих в табл. 12.4, вирівняти за ковзною середньою і побудувати графік.

Вирішення

Статистичні дані собівартості пасажироперевезень по депо й розрахунок ковзних наведено в табл. 12.4.

Таблиця 12.4 - Статистичні дані про собівартість пасажироперевезень по депо

t	Собівартість С, коп.	Тричленні суми	Тричленні ковзні середні	Чотиричленні суми	Чотиричленні ковзні середні	П'ятічленні суми	П'ятичленні ковзні середні
1	65,9	-	-	-	-	-	-
2	66,9	201,3	67,3	269,4	67,3	-	-
3	69,1	203,5	67,8	271,7	67,9	338,2	67,6
4	67,5	204,8	68,2	274,7	68,6	339,3	6,8
5	68,2	205,6	68,5	276,5	69,1	345,6	69,1
6	69,9	209,0	69,5	281,8	70,4	349,3	69,7
7	70,9	213,6	71,2	285,7	71,4	358,5	71,7
8	72,8	215,8	71,9	288,5	72,1	361,4	72,2
9	72,1	217,7	72,5	290,5	72,6	363,7	72,7
10	72,8	217,7	72,5	290,9	72,7	365,7	72,9
11	72,8	278,8	72,9	-	-	-	-
12	73,1	-	-	-	-	-	-

Як бачимо, середні дані більш наочно виражають основну тенденцію собівартості перевезення пасажирів. Вихідні дані, що різно ковзають, подані на рис. 12.1.

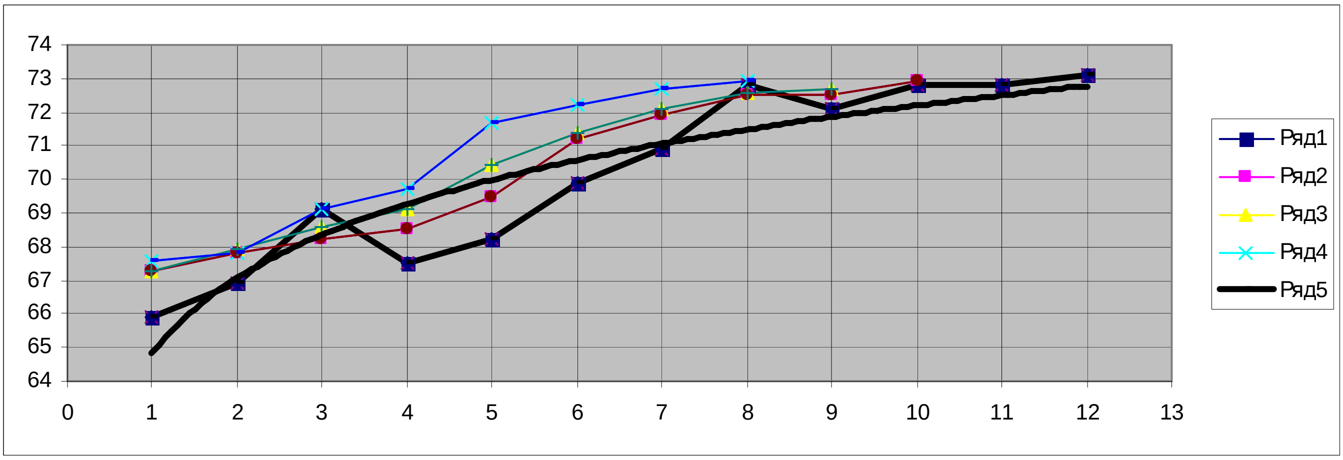


Рис. 12.1 - Вихідні дані, ковзні й вирівнююча парабола:

1- вихідні дані; 2- тричленні ковзні; 3- чотиричленні ковзні; 4- п'ятичленні середні; 5- вирівнююча парабола.

При визначенні загальної тенденції виникають два завдання: вибір форми рівняння, тобто вид функції *d(t)*; обчислення параметрів рівняння.

Слід зазначити, що аналіз часових рядів спрямований не тільки на визначення загальної тенденції і побудову моделі динаміки, а й на прогнозування економічних показників.

При виборі форми рівняння необхідно, як у статистичному регресійному аналізі, добре знати процес за суттю. Так, для короткострокового прогнозування багатих механіко– економічних показників найкращою формою тренда є показова, що описує зростання за законом складних процесів, для більш тривалого періоду прогнозування по цілому ряду показників - експонента з насиченням. Якщо ж сутність процесу не вимагає певної форми управління, то вибір проводять за якнайменшою залишковою дисперсією. Графічна ілюстрація часового ряду також допоможе в цьому виборі.

Практика показує, що доцільно піддавати випробуванню залишкову дисперсію по чотирьох монотонних функціях:

1. Лінійна

$\bar{Y}_t = at + b$;

2. Степенева

$\bar{Y}\, at^{\alpha} или \ln y_t + \alpha \ln t$

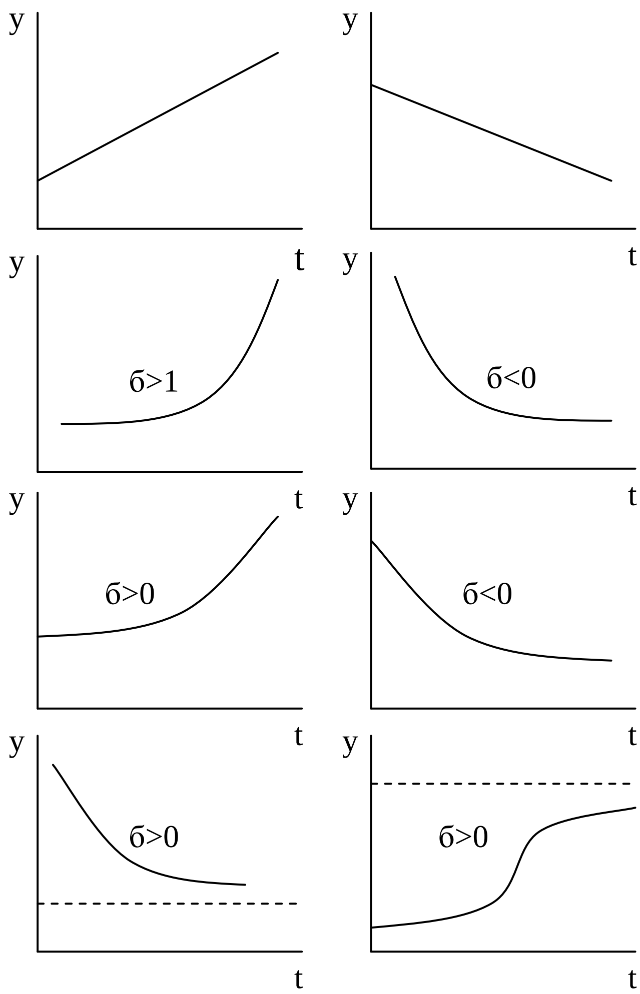
3. Експоненціальна

$\bar{Y}\, at^{\alpha} или \ln y_t = \ln a + \alpha t$

4. Експоненти з насиченням

$\bar{Y}\, ae^{\frac{\alpha}{t}} или \ln y_t = \ln a + \frac{\alpha}{t}$

При цьому відхилення від тренду визначаються відповідно у вигляді:



$$E_t = Y_t - (a + kt);$$
$$E_t = \ln y_t - (\ln a + \alpha \ln t);$$
$$E_t = \ln y_t - (\ln a + \alpha t); \qquad (12.1)$$
$$E_t = \ln y_t - (\ln a + \frac{\alpha}{t}).$$

Всі параметри α знаходять за методом якнайменших квадратів, що приводить до системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} Y_t = \alpha \sum\limits_{t=1}^{n} t + na \\ \sum\limits_{t=1}^{n} tY_t = \alpha \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 + a \sum\limits_{t=1}^{n} t; \end{cases} \qquad (12.2)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} \ln Y_t = \alpha \sum\limits_{t=1}^{n} \ln t + n \ln a \\ \sum\limits_{t=1}^{n} \ln t \ln y_t = \alpha \sum\limits_{t=1}^{n} \ln t^2 + \ln a \sum\limits_{t=1}^{n} \ln t; \end{cases} \qquad (12.3)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} \ln Y_t = \alpha \sum\limits_{t=1}^{n} t + n \ln a \\ \sum\limits_{t=1}^{n} t \ln y_t = \alpha \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 + \ln a \sum\limits_{t=1}^{n} t; \end{cases} \qquad (12.4)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{n} \ln Y_t = \alpha \sum\limits_{t=1}^{n} \frac{1}{t} + n \ln a \\ \sum\limits_{t=1}^{n} \frac{1}{t} \ln y_t = \alpha \sum\limits_{t=1}^{n} \frac{1}{t^2} + \ln a \sum\limits_{t=1}^{n} \frac{1}{t}. \end{cases} \qquad (12.5)$$

Знайшовши $\min \delta_y^2$ для відповідної залежності, знаходять функцію, яка в порівнянні з іншими найкраще апроксимує початковий часовий ряд.

Використання з метою апроксимації багатопараметричних функцій недоцільне. Хоч за допомогою таких функцій можна отримати добре наближення вихідних даних, але, таким чином математично описується не стільки загальна тенденція, скільки випадкові від неї відхилення; з'являються невиправдані особливості процесу - максимуми і мінімуми. Крім того, складання таких функцій і їх застосування для практичних розрахунків різко ускладнюється.

Приклад. Для вищеперерахованих даних, використовуючи степеневу залежність $Yt = at^{\alpha}$, розраховуємо її параметри.

Вирішення

Для визначення параметрів рівняння розрахунки подано в табл. 12.5.

Таблиця 12.5 - Розрахунок статистичних характеристик рівняння.

	Y_t	ln t	ln t^2	ln Y_t	ln Y_t ln t	ln Yt	Y_t	ε	ε^2
1	65,9	0,00	0,00	1,8189	0,00	1,8035	63,6	2,3	5,29
2	66,9	0,3010	0,0906	1,8254	0,5494	1,8211	66,24	0,66	0,44
3	69,1	0,4771	0,2276	1,8395	0,8774	1,8314	67,32	1,28	1,64
4	67,5	0,6021	0,3625	1,8293	1,1014	1,8387	68,98	-1,48	2,19
5	68,2	0,6990	0,4886	1,8331	1,2813	1,8443	69,88	-1,68	2,82
6	69,9	0,7782	0,6056	1,8445	1,4354	1,8490	70,13	0,73	0,53
7	70,9	0,8451	0,7142	1,8505	1,5639	1,8524	71,19	-0,29	0,08
8	72,9	0,9031	0,8156	1,8627	1,6822	1,8566	71,88	1,02	1,04
9	72,1	0,9542	0,9109	1,8579	1,7728	1,8593	72,33	-0,23	0,05
10	72,8	1,000	1,00	1,8621	1,8626	1,8620	72,88	-0,08	0,00
11	72,8	1,0414	1,0845	1,8621	1,9392	1,8644	73,16	-0,36	0,13
12	73,2	1,0792	1,1647	1,8645	2,0122	1,8666	73,52	-0,32	0,12
∑		8,6824	7,4648	22,1506	16,0959				14,32

Система нормальних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \ln Y_t = \alpha \sum_{i=1}^{n} \ln t + n \ln a \\ \sum_{i=1}^{n} \ln t \ln Yt = \alpha \sum_{t=1}^{n} \ln t^2 + \ln a \sum_{i=1}^{n} \ln t. \end{cases} \quad (12.6)$$

Підставивши відповідні значення з табл. 12.5, отримаємо

$$\begin{cases} 22{,}1506 = 8{,}6824\alpha + 12 \ln a \\ 16{,}0959 = 7{,}4648\alpha + 8{,}6424 \ln a. \end{cases} \quad (12.7)$$

Вирішивши систему рівнянь, одержимо:

α=0,0585, lna=1,8035.

Маємо рівняння:

$$\overline{\ln} Y_t = \ln a + \alpha \ln t \rightarrow \overline{\ln} Y_t = 1.8035 + 0.0585 \ln t, или Yt - at^{\alpha} \rightarrow \overline{Y}t = 63{,}60 t^{0{,}0585} \quad (12.8)$$

Прогноз на 13 і 14 періоди складе: Y_{13}=72,83; Y_m=73,02.

Середній квартал відхилення вихідних значень від розрахункових (дисперсія)

$$\delta_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon^2 = \frac{14.33}{12} = 1.194, \quad (12.9)$$

а середні квадратичні відхилення $\delta_y \sqrt{1.194} = 1.092,$ що в порівнянні з середнім розміром складає $\tilde{y}$ $\frac{1.092}{71.11} * 100\% = 1.53\%$

Зазначимо, що похибки апроксимації особливо великі на кінцях базисного періоду, що обумовлюють велику помилку прогнозу. Можна сказати, що залежність підібрана невдало.

Якщо протягом базисного періоду досліджений процес суттєво змінився в результаті появи нових чинників (сезонні коливання), то для апроксимації часового ряду слід скористатися двома або більше окремими аналітичними виразами, розглядаючи їх як частини науково – безперервної функції. При цьому прогнозування проводиться за останньою дугою і необхідно уточнити, який допустимий інтервал прогнозування. Факт істотності змін для показника слід встановлювати як якісно, так і статистично.

Можна скористатися і графічним способом: побудувавши три тренди по кожному періоду в цілому по всьому ряду, порівняти графічно, на скільки близько загальний тренд огинає обидва часткових.

Статистична перевірка може бути здійснена наступним прикладом дисперсійного аналізу. Нехай значення показника до і після деякого моменту задані рядами:

$$Y_{11,\,12} \ldots Y_{1h1}; \tag{12.10}$$

$$Y_{21,\,22} \ldots Y_{2h1}. \tag{12.11}$$

з середніми значеннями і дисперсіями, визначуваними за формулами

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \; ; \; \sigma^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{h_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_j \right)^2, \; j = 1.2. \tag{12.12}$$

Обчислюємо загальну середня і загальну дисперсію з'єднаного ряду

$$\bar{y} = \frac{1}{h} \sum_{i=1,2}^{h_i} \sum_{j=1}^{h_i} y_{ij} \; ; \; \sigma_y^2 = \frac{1}{h-1} \sum_{t=1,2}^{h_i} \left(y_{ij} - \bar{y} \right)^2 . \tag{12.13}$$

Розчленувавши повну дисперсію ряду на частини, одержуємо

$$\sum_{i=1,2}^{h_i} \sum_{j=1}^{h_i} \left(y_{ij} - \bar{y} \right)^2 = \sum_{i=1,2}^{h_i} \sum_{j=1}^{h_i} \left(y_{ij} - \bar{y} \right)^2 + \sum_{i=1,2}^{h_i} \left(\bar{y}_i - \bar{y} \right)^2 h_i . \tag{12.14}$$

Враховуючи число ступенів свободи кожної з сум в рівнянні, визначаємо

$$S_i^2 = \frac{\sum_{i=1,2}^{h_i} \sum_{j=1}^{h_i} \left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}{n-2}; \; S_2^2 = \frac{\sum_{i=1,2}^{h_i} \left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2 h_i}{n-2} \quad . \tag{12.15}$$

Відношення $\frac{S_2^2}{S_1^2}$ порівнюємо з відповідним значенням розподілу Фішера. Якщо $\frac{S_2^2}{S_1^2}$ < F(5%) [1, n-2] при рівні значущості 5% вважаємо періоди, що вивчаються, неістотно різними у значенні даного показника Y. Якщо $\frac{S_2^2}{S_1^2} < F_{5\%}$ [*1*, *n*-*2*] при рівні значущості 1% вважаємо періоди, що вивчаються, суттєво різними за показником Y і будуємо тренд з двох частин, різних тільки за параметрами або видом функції *d(t)*.

Приклад. Методику обробки рядів динаміки за наявності сезонних коливань можна проілюструвати на прикладі собівартості пасажироперевезень одним з тролейбусних рівнянь за період 2002-2007 рр.

Вирішення

Виявлення загальної тенденції на підставі даних табл. 12.6 починаємо з побудови графіка.

Таблиця 12.6 - Динаміка статистичних показників

Роки	t	Значення показника, С, коп.	Квартал			
			I	II	III	IV
2002	1	58,71	62,3	56,88	59,34	56,72
2003	2	60,13	62,78	58,35	60,84	58,78
2004	3	60,83	63,47	57,88	62,58	59,4
2005	4	65,70	69,52	63,02	63,89	66,51
2006	5	66,08	67,23	62,99	65,65	67,54
2007	6	66,76	68,59	60,56	66,00	68,29

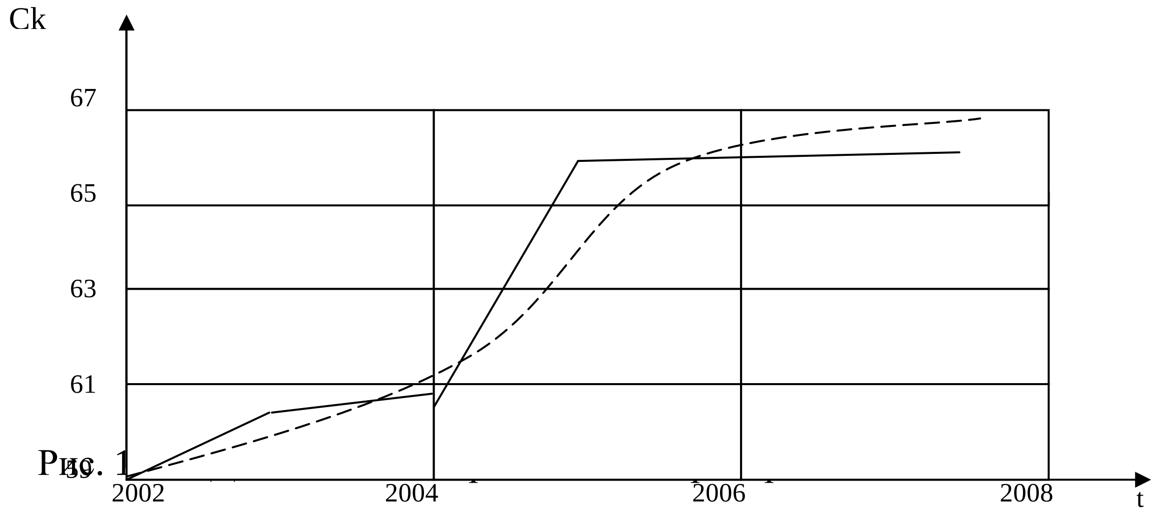


Рис. 1

У цьому прикладі (рис. 12.2) спостерігається різкий перелом характеру змін в 2004 р. Тому неможливо підібрати єдину математичну функцію зростання, задовільно апроксимуючу дані про собівартість пасажироперевезень за всі роки. У зв'язку з цим розбиваємо тимчасовий діапазон на дві частини - 2002-2005 рр. і 2005-2007 рр. Для першого ряду підбираємо експоненту, для другого - експоненту з насиченням. При визначенні параметрів рівнянь використовуємо розрахунки, зведені відповідно в табл. 12.7, 12.8.

Таблиця 12.7 - Розрахунок параметрів експоненти

Ро-ки	Y	ℓ_{ny}	t	$V=\ell_{ny}-1{,}78$	Vt	t^2	$\overline{V}$	$\ell_{ny}=1{,}78+\overline{V}$	$\overline{Y}$	ε	ε^2	β%
2002	58,71	1,7761	0	-0,0039	0	0	-0,013	1,7787	60,08	-1,37	1,88	2,28
2003	60,13	1,7791	1	-0,0004	-0,004	1	0,0021	1,7821	60,53	-0,4	0,16	0,66
2004	60,83	1,7841	2	0,0041	0,0082	4	0,0155	1,7955	62,44	-1,61	2,59	2,57
2005	65,70	1,8176	3	0,0376	0,1182	9	0,0289	1,8089	64,40	1,3	1,69	2,01
∑	x	x	6	0,0374	0,1206	14	x	x	x	x	6,32	x

Таблиця 12.8 - Розрахунок параметрів експоненти з насиченням

Роки	Y	ℓ_{ny}	t	t^1=t-2	V= ℓ_{ny}-1,82	$\frac{1}{t^1}$	$\frac{V}{t^1}$	$\frac{1^2}{t^1}$	$\overline{V}$	ℓ_{ny}= 1,82+$\overline{V}$	$\overline{Y}$	ε	$ε^2$	β%
2005	65,7	1,8176	3	1	-0,0024	1	-0,024	1	-0,0084	1,8116	64,8	0,9	0,81	1,388
2006	65,08	1,82	4	2	0,000	0,50	0,00	0,250	0,0033	1,8233	66,58	-0,5	0,25	0,75
2007	66,76	1,8245	5	3	0,0045	0,333	0,0015	0,111	0,0072	1,8272	67,16	-0,4	0,16	0,59
∑	x	x	x	x	0,0021	1,833	-0,0009	1,361	x	x	x	x	1,22	x

Системи нормальних рівнянь має наступний вигляд:

$$\begin{cases} 0{,}0374 = 6\alpha + 4\ell na \\ 0{,}1206 = 14\alpha + 6\ell na \end{cases}; \quad \begin{cases} 0{,}0021 = 1{,}833\alpha^1 + 3\ell na^1 \\ -0{,}0009 = 1{,}361\alpha^1 + 1{,}833\ell na^1 \end{cases}. \qquad (12.16)$$

Звідки

ℓ_{na} =-0,0113, a= 0,0134; $\ell_{na}{}^1$ =0,015, a^1= -0,0234;

V = -0,0113+0,0134 t; V^1=0,015 - $\frac{0{,}0234}{t}$.

Тоді одержуємо

$\ell_n \overline{Y}_t$ = 1,7687 + 0,0134 t; $\ell_n \overline{Y}_t$ = 1,835 - $\frac{0{,}0234}{t}$;

$\overline{Y}$ =$58{,}7^{0{,}0134\,t}$ $0 \le t \le 3$; $\overline{Y}_t = 68{,}39 - \frac{0{,}034}{t}$ $3 \le t \le 5$

max β% = 2,58; max β% = 1,388.

Апроксимація цілком задовільна.

Для 2005 р. приймаємо значення собівартості

$\overline{Y} = \frac{64{,}40 + 64{,}80}{2}$ = 64,60.

Прогноз на 2004 р. При t=6

ℓ_{ny} = 1,835 - $\frac{0{,}0234}{4}$ = 1,829, Y_{2004} = 67,49.

Проте через сезонні коливання прогнозування за сумарними річними даними є абсолютно недостатнім. Тому необхідно прогнозувати за окремими періодами, в даному прикладі за вихідними квартальними даними.

12.3. Авторегресійні моделі в аналізі динаміки економічних процесів і їх прогнозуванні

При оцінки динаміки економічних процесів і їх прогнозуванні необхідно спиратись на обґрунтовану теорію, що встановлює правомочність оцінки і прогнозування за допомогою моделі й помилки вірогідності прогнозу. Оцінка такої помилки за допомогою функції зростання неможлива, тому особливий інтерес становлять авторегресійні моделі.

Авторегресією називається рівняння, що визначає змінну x_j в момент t (або *t-й* період) через її значення в попередні періоди: *(t-1) (t-2)... (t-к)*. Лінійне авторегресійне рівняння записуємо у вигляді

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \quad + a_к X_{t-к}. \qquad (12.17)$$

Першим етапом дослідження часового ряду змінної X є виділення загальної тенденції у вигляді функції $d(t)$ і визначення залишків ε_t у формі $\varepsilon_t = X_t - d(t)$ чи $\varepsilon_{t} = d(x_t)$.

Якщо залишки ε_t незалежні, тобто не можуть бути подані як функція часу, то функція $d(t)$ охоплює повністю еволюційну складову змінної X_t. При цьому залишається знайти закон їх розподілу ε_t і, прийнявши гіпотезу про збереження цього закону розподілу на прогнозований період, побудувати довірчий інтервал для прогнозованої величини X_t за функцією $d(t)$. Якщо ж залишки ε_t залежні, тобто містять деяку тенденцію, то її можна виявити за допомогою коефіцієнта автокореляції. Проводячи зсув значень ε_t на один рядок і останнє значення перемістивши на перше місце, одержуємо табл. 12.9.

Таблиця 12.9 - Залишки змінних ряду динаміки

ε_t	ε_{t-1}
ε_1	ε_n
ε_2	ε_1
ε_3	ε_2
…………	…………..
ε_n	ε_{n-1}

Обчислюємо циклічний коефіцієнт кореляції між рядами ε_t і ε_{t-1} за формулою

$$r(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \frac{\sum \varepsilon_t * \varepsilon_{t-1}}{\sum \varepsilon_t^2} . \qquad (12.18)$$

Ця формула (12.18) виходить із звичайної формули для визначення коефіцієнта кореляції, якщо покласти

$$\sum \varepsilon_t = \sum \varepsilon_{t-1} = 0; \qquad (12.19)$$

$$\sum (\varepsilon_{t-1})^2 = \sum (\varepsilon_t)^2 . \qquad (12.20)$$

Формула (12.19) виходить з того, що параметри функції d(t) визначаються за методом якнайменших квадратів, а формула (12.20) - з циклічної табл. 12.9.

Аналогічно, зсовуючи ε_t на 2,3….К рядків, одержуємо циклічну таблицю послідовних відхилень.

Таблиця 12.10 - Циклічна таблиця послідовних відхилень

t	ε_t	ε_{t-1}	ε_{t-2}	………	$\varepsilon_{t-к+1}$	$\varepsilon_{t-к}$
1	ε_1	ε_n	ε_{n-1}		ε_{n-k+2}	ε_{n-k+1}
2	ε_2	ε_1	ε_n		ε_{n-k+3}	ε_{n-k+2}
3	ε_3	ε_2	ε_1		ε_{n-k+4}	ε_{n-k+3}
….	….	….	….	….		….
К	ε_k	ε_{k-1}	ε_{k-2}		ε_1	ε_n
К+1	ε_{k+1}	ε_k	ε_{k-1}		ε_2	ε_1
К+2	ε_{k+2}	ε_{k+1}	ε_k		ε_3	ε_2
…..	…..	….	….	….	….	….
n	ε_n	ε_{n-1}	ε_{n-2}		ε_{n-k+1}	ε_{n-k}

За даними табл. 12.10 визначаємо всі циклічні коефіцієнти автокореляції:

$$r(\varepsilon_{xt}\ \varepsilon_{xt-j}) = \frac{\sum_t \varepsilon_{xt}\varepsilon_{xt-j}}{\sum_t (\varepsilon_t)^2},\ i,\ j = 1,2,\ldots..K; \qquad (12.21)$$

$$r(\varepsilon_{xt-1}\ \varepsilon_{xt-j}) = \frac{\sum_n \varepsilon_{xt-i}\varepsilon_{xi-j}}{\sum_t (\varepsilon_{xt})^2}. \qquad (12.22)$$

Циклічний коефіцієнт автокореляції не підпорядковується нормальному закону розподілу, його розподіл асиметричний, суттєві величини коефіцієнтів автокореляції при певному рівні значущості різні для позитивних і негативних його значень. 5% - й і 1% - й рівні значущості коефіцієнтів автокореляції подані в спеціальних таблицях. Знайдені значення r_1, r_2… $r_{n\text{-к-}1}$ перевіряємо за таблицею 5% - х і 1% - х рівнів вірогідності коефіцієнтів автокореляції. Якщо $|\ r_{\text{стат. (n)}}\ | < |\ r_{5\%.\ (n)}\ |$, то приймаємо гіпотезу неавтокорельованості залишків ε_t; якщо $|\ r_{\text{стат. (n)}}\ | > |\ r_{1\%.\ (n)}\ |$ відкидаємо гіпотезу їх неавтокорельованості.

За циклічними коефіцієнтами автокореляції складаємо матрицю і її обертаємо. Як і в разі звичайної регресії багаточинника, перевіряємо наявність мультиколінеарності кожного з чинників ε_{xt-j}, j=1,2-k від сукупності інших і зберігаємо тільки лінійно незалежні аргументи.

Будуємо лінійну авторегресійну модель

$$\varepsilon_t = a_1\ \varepsilon_{t-1} + a_1\ \varepsilon_{t-2} + \ldots. + a_к\ \varepsilon_{t-к}, \qquad (12.23)$$

що виражає ε_t в період t за допомогою значень ε_{t-j}, j = 1,2…К за К попередніх періодів. При цьому в рівнянні повинні бути збережені тільки суттєві й лінійно незалежні коефіцієнти.

Якщо виявляються a_j – коефіцієнти, що не задовольняють вказаним вимогам, то модель потребує перерахунку (починаючи з розрахунку автокореляційної матриці більш низького порядку).

Оскільки параметри рівняння тренда визначали за методом найменших квадратів, то в разі його коректного підбору відповідні відхилення підкоряються нормальному розподілу і, отже, рівняння регресії можна відшукувати в лінійній формі

$$\ell_n X_t = a_1 \ell_n X_{t-1} + a_2 \ell_n X_{t-2} + \ldots\ldots + a_k \ell_n X_{t-k} + F(t); \qquad (12.24)$$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 \ell_n X_{t-2} + \ldots\ldots + a_n X_{t-k} + F(t). \qquad (12.25)$$

Яким повинне бути число членів рівняння, це питання слід вирішувати в поєднанні професійних вимог процесу, що по суті вивчається, з математико-статистичними критеріями. Так, якщо статистичний ряд містить тижневі дані, то особливий інтерес являє чотиричленна модель залежності рівня показника від тижневих рівнів за весь попередній місяць. У разі місячних даних цікава тричленна авторегресія, а для даних, зібраних по роках, – п'ятичленна.

Статистичні критерії покликані встановити відсутність автокорельованості залишків від віднімання з табличних значень ε_t їх розрахункових значень

$$\eta_t = \varepsilon_t - (a_1 \varepsilon_{t-1} + a_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + a_k \varepsilon_{t-2k}). \qquad (12.26)$$

Існує декілька статистичних критеріїв. Один з них заснований на порівнянні середнього квадрата послідовних різниць η_t:

$$\frac{1}{n-k-1} \; \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=k+2}^{n} (\eta_t - \eta_{t-1})^2 \qquad (12.27)$$

з дисперсією величини

$$\frac{1}{n-k} \; \frac{1}{n-k} \sum_{t=k-1}^{n} (\eta_t)^2. \qquad (12.28)$$

Складаємо відношення середнього квадрата послідовних різниць, до середнього квадрата самих величин:

$$K = \frac{\frac{1}{n-k-1} \sum_{l=k+2}^{n} (\eta_t - \eta_{t-1})^2}{\frac{1}{n-k \sum_{l=k+1}^{n} (\eta_t) 2}}. \qquad (12.29)$$

Якщо $K_{стат.}$, потрапляє в допустиму область при рівні значущості 5%, а саме $K_{5\%}$ (n-k) < $K_{стат}$ (n-k) < $K^1_{5\%}$ (n-k), то приймаємо гіпотезу неавтокорельованості залишків η_t, а, отже, достатності числа членів К авторегресійної моделі.

Якщо ж $K_{стат}$ (n-k) < $K_{\%}$ (n-k) або $K_{стат}$ > $K_{1\%}$ (n-k), то відкидаємо гіпотезу неавтокорельованості залишків η_t і рахуємо число членів рівняння недостатності. У цьому випадку число членів рівняння треба збільшити, якщо довжина ряду дозволяє це.

Користуючись для прогнозу розробленими рівняннями, можна знайти довірчий інтервал для значення прогнозованого показника.

Якщо прогнозований показник рівний $\tilde{X}_t$, то розмір показника X_t записуємо у вигляді

$$\tilde{X}_t - t\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{xt}^2 \le Xt \le + t\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_{xt}^2 . \qquad (12.30)$$

Викладена методика складання авторегресійних моделей, використані критерії і побудований довірчий інтервал можна застосовувати тільки для великих вибірок, коли довжина ряду n не менше 30.

Помилка прогнозу за отриманими рівняннями визначається при дисперсії ε_t. Оскільки

$$\tilde{X}_t - X_t = \varepsilon_t, \qquad (12.31)$$

то $В_{ер}\{|\bar{x}_t - x_t| = |\varepsilon_t| \le t_\alpha\,\sigma_\varepsilon\} = P_\alpha$, (12.32)

де P_α – задана вірогідність, P_α = 1-α, а t_α - відповідна межа по С (n-k) ступеням свободи Ст'юдента:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{t=k+1}^{n}\varepsilon_t^2}{n-k}} . \qquad (12.33)$$

Розглянемо *приклади* складання авторегресійних моделей.

Приклад. Одночленна модель. Щомісячний пробіг рухомого складу міського електротранспорту на 1000 пасажирів, що перевозяться, заданий рядом у графі 2 табл. 12.11. Знайдіть параметри одночленної авторегресійної моделі і спрогнозуйте щомісячний пробіг рухомого складу міського електротранспорту.

Вирішення

Наявність експоненціального ряду (див. рис. 12.3) дозволяє розраховувати на придатність одночленної моделі $\overline{X}_t$ = a_1X_{t-1}.

Система нормальних рівнянь для визначення параметра a_1 має вигляд

$$\sum_{1=2}^{15} x_t x_{t-1} = a_1 \sum_{t=2}^{15} x_{t-1}^2 . \qquad (12.34)$$

З табл. 12.11 (графи 4 і 5) виходить 367673,4 = 364278,2 a_1.

Звідки $a_1 = \dfrac{367673{,}4}{364278{,}2} = 1{,}0087 \approx 1{,}01.$

Одержуємо рівняння $\overline{X}_t$ = 1,01 X_{t-1}. Обчислюємо значення $\overline{X}_t$= 1,01 X_{t-1} (графа 6) і знаходимо значення $\varepsilon_t = X_t - X_{t-1}$ (графа 7) $\sum \varepsilon_t = 9{,}4$, що несуттєво в порівнянні з розмірами X_t.

Обчислюємо коефіцієнт циклічної автокореляції r_1. За графами 9 і 10 отримаємо

$$r_1 = r(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} \varepsilon_t * \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=k+1}^{n} \varepsilon_t^2} = \frac{-184{,}14}{661{,}79} = -0{,}278. \qquad (12.35)$$

З табл. 12.11 знаходимо n^1 = 15-1=14, r<0, $r_{5\%}$ = -0,479.

Оскільки $|r_1| < |r_{5\%}|$, кореляція ε_t, ε_{t-1} несуттєва.

Аналогічно за графами 12 і 10 (табл. 12.11) одержуємо $r_2 = \dfrac{-275{,}68}{661{,}68}$ = 0,416, що свідчить про несуттєвість кореляції ε_t и ε_{t-2}.

У даному випадку переважний критерій Дж. Неймана. Обчислюємо різницю $\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ за графами 13 і $(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$ – за графами 14. Одержуємо

$$K = \frac{\frac{1}{n-k-1}\sum_{t=k+2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n} \varepsilon_t^2} = \frac{1369{,}15/13}{661{,}79/14} = \frac{105{,}32}{47{,}27} = 2{,}23. \qquad (12.36)$$

За табл. 12.11 для n_1 = 14 рівень значущості $K_{5\%}$ рівний 1,2725 при r > 0 і 3,0352 у разі r < 0. Розрахунки свідчать, що коли в генеральній сукупності автокореляція між залишками ε_t відсутня, то в 95% вибірок буде К > 1,272 у випадку r > 0 и К < 3,0352 при <.

У даному прикладі значення К потрапляє в допустиму область при 5% рівні значущості К > 1,2725. Отже гіпотеза неавтокорельованості залишків ε_t стверджується і авторегресійне рівняння $X_t = 1{,}01\ X_{t-1}$ приймається.

Помилка прогнозу при середньоквадратичному відхиленні

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{t=k+1}^{n}\varepsilon_t^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{661{,}79}{14}} = 6{,}87 . \qquad (12.37)$$

Складаємо

$$B_{cp} = \{|x_t - \bar{x}_t| \le t_\alpha * 6{,}87\} = P_a. \qquad (12.38)$$

При 95%-й гарантійної вірогідності t_α = 2,1 за табл. П.4[12] і помилка прогнозу не перевищить 14,42, що складає приблизно 8%:

$$\bar{X} - 14{,}42 \le 1{,}01\ X_{t-1} \le \bar{X} + 14{,}42. \qquad (12.39)$$

Визначаємо прогноз на 16-й і 17-й періоди з похибкою, що не перевершує 14,42 (рис. 12.3.):

$$\bar{X}_{16} = 1{,}01 * X15 = 1{,}01 * 175{,}3 = 177{,}05; \qquad (12.40)$$

$$\bar{X}_{17} = 1{,}01\ \ X17 = 1{,}01 * 175{,}5 = 177{,}06. \qquad (12.41)$$

Таблиця 12.11 - Розрахунок параметрів одночленної авторегресійної моделі

t	X_t	X_{t-1}	$X_t X_{t-1}$	X_{t-1}^2	$\tilde{x}_{t=1,01} x_{t-1}$	$\varepsilon_t = X_{t-} \tilde{x}_{t-1}$	ε_{t-1}	$\varepsilon_{t*}\ \varepsilon_{t-1}$	ε_t^2	ε_{t-2}	et* et-2	et - et-1	(et - et-1)^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	153,1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	153,3	153,1	23470,2	23439,6	154,6	-1,3	5,4	-7,02	1,69	1,7	2,21	5,1	26,01
3	148,4	153,3	22749,7	23500,9	154,8	-6,4	-1,3	8,32	40,96	5,4	-34,56	-5,4	29,16
4	148,9	148,4	22096,8	22026,6	149,9	-1,0	-6,4	6,4	1,0	-1,3	1,3	-11,0	14,0
5	160,4	148,9	23883,6	22171,2	150,4	10	1,0	10,0	1,0	-6,4	-64,6	11,5	132,25
6	160,5	160,4	25744,2	25728,2	162,0	-1,5	10,0	-15,0	2,25	-1,0	1,5	33	10,89
7	157,3	160,5	25246,6	25760,2	162,1	-4,8	-1,5	7,2	23,04	10,0	-48,0	-16,5	272,25
8	170,6	157,3	26835,4	24743,3	158,9	11,7	-4,8	-16,5	136,89	-1,5	-17,55	3,3	10,89
9	163,9	170,6	27961,3	29104,4	172,3	-8,4	11,7	-98,27	70,56	-4,8	40,32	-7,4	54,76
10	164,3	163,9	26928,3	26863,2	165,3	-1,0	-8,4	8,4	1,0	11,7	-11,7	-16,1	259,21
11	170,9	164,3	28078,9	26994,5	155,8	15,1	1,0	15,1	228,01	-8,4	-126,84	19,8	292,04
12	167,9	170,9	28694,1	29206,8	172,6	-4,7	15,1	-70,97	22,09	-1,0	4,7	-3,2	10,24
13	168,1	167,9	28223,9	28190,4	169,6	-1,5	-4,7	7,05	2,25	15,1	-22,65	0,2	0,04
14	168,2	168,1	28274,4	28257,6	169,9	-1,7	-1,5	2,55	2,89	-4,7	7,99	-7,1	50,41
15	175,3	168,2	29485,5	28291,2	169,9	5,4	-1,7	9,18	29,16	-1,5	-8,4	-	-
16	175,5	x	367673,4	364278,2	x	9,4	x	-184,64	661,179	x	-275,68	x	1369,15

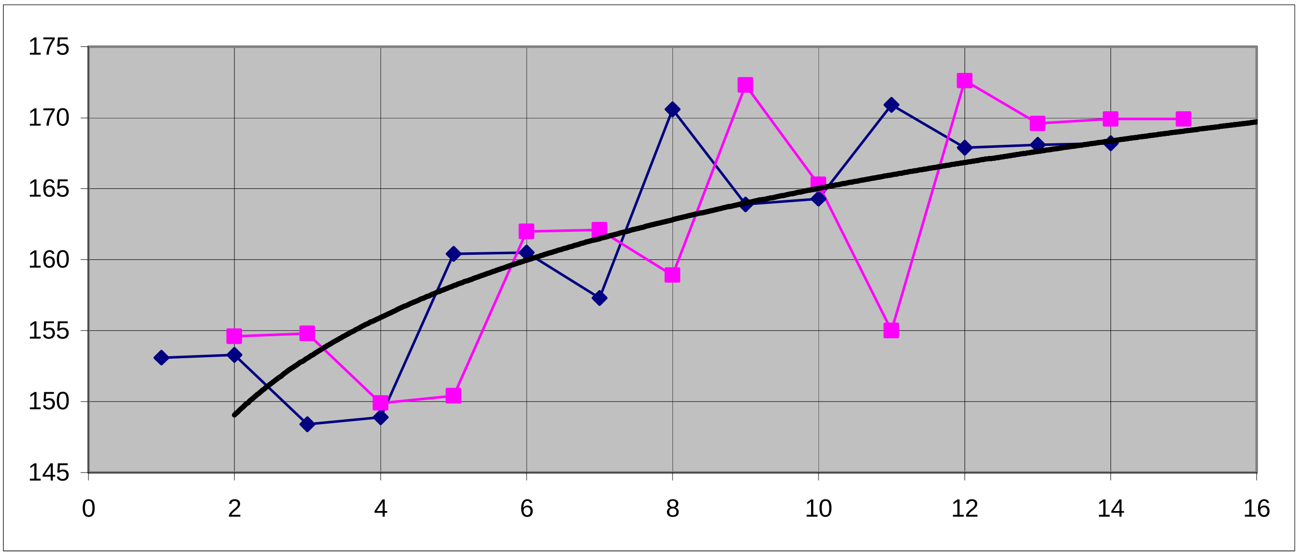


Рис. 12.3 - Одночленна авторегресійна модель:

1-вихідні дані; 2-одночленна авторегресія; 3-вирівнююча гіпербола.

Багаточленна модель. Щомісячна реалізація цегли (в тисячах штук) на базі будівельних матеріалів за 18 місяців подана в табл. 12.12 (графа 2). Треба скласти модель для прогнозування місячної потреби в цеглі на найближчі місяці.

Вирішення

Розрахунок багаточленної авторегресійної моделі наведений в табл. 12.12.

Таблиця 12.12 - Розрахунок параметрів багаточленної авторегресійної моделі

t	X_t	X_{t-1}	$\bar{x}_t = 1{,}103x_{t-1}$	$\varepsilon_t=X_t-X_{t-1}$	ε_{t-1}	$\varepsilon_t*\varepsilon_{t-1}$	ε_t^2	$\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1}$	$(\varepsilon_t-\varepsilon_{t-1})^2$	X_{t-2}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	17	15	16,55	0,55	2,84	-1,5	0,3	-	-	-
3	23	17	18,75	4,25	0,55	2,34	18,06	-3,7	13,68	15
4	27	23	25,37	1,63	4,25	6,93	2,66	2,62	6,86	17
5	32	27	29,78	2,22	1,63	3,62	4,92	-0,59	0,35	23
6	26	32	35,29	-6,29	2,22	-20,6	86,3	11,51	132,48	27
7	21	26	28,68	-7,68	-9,29	71,35	58,98	1,61	2,59	32
8	18	21	23,16	-5,16	-7,68	39,63	26,63	-2,62	6,35	26
9	15	18	19,55	-4,55	-5,16	23,48	20,70	-0,61	0,37	21
10	19	15	16,55	2,45	-4,55	-11,15	6,00	7,0	49	18
11	24	19	20,96	3,04	2,45	7,45	9,24	-0,59	0,35	15
12	33	24	26,47	6,53	3,04	19,85	42,64	-3,49	12,18	19
13	37	33	36,40	0,6	6,53	3,92	0,36	6,47	41,86	24
14	41	37	40,81	0,19	0,6	0,11	0,36	0,41	1,68	33
15	43	41	45,22	-1,78	0,19	-0,34	3,17	1,97	3,88	37
16	45	43	47,43	-2,43	-1,78	4,33	5,9	0,75	0,56	41
17	47	45	49,64	-2,64	-2,43	6,42	6,97	0,21	0,04	43
18	49	47	51,24	-2,84	-2,64	7,5	8,07	0,2	0,04	45
$\sum$	530	x	x	x	x	162,28	301,26	x	272,2	434

Продовження табл. 12.12

$X_t{*}X_{t-1}$	$X_t{*}X_{t-2}$	$X_{t-1}{*}X_{t-2}$	X_{t-1}^2	X^2t_{-2}	0,1175 X_{t-1}	1,061 X_{t-2}	$\bar{x}_t$	$\varepsilon_t = X_t - \bar{X}_t$	ε_t^2	$\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
391	345	255	529	225	1,99	15,91	17,9	5,1	26,01	-	-
621	459	391	729	289	2,70	18,04	20,74	6,26	39,8	-1,13	1,27
864	736	621	1024	529	3,17	24,40	27,57	4,43	19,62	1,83	3,35
832	702	864	676	729	3,76	28,64	32,30	-6,3	39,69	10,73	115,13
546	672	832	441	1024	3,05	33,95	37,00	-16,0	25,6	9,7	94,09
378	468	546	324	676	2,46	27,58	30,04	-12,04	144,96	-3,96	15,68
270	315	378	225	441	2,11	22,28	24,38	-9,38	86,49	-2,66	7,07
285	342	270	361	324	1,76	19,09	20,85	-1,85	3,42	-7,52	56,55
456	360	285	576	225	2,23	15,92	18,15	5,95	35,4	-7,80	60,84
792	627	456	1089	361	2,82	25,46	22,98	10,02	100,4	-4,07	16,54
1221	888	792	1369	576	3,87	26,52	29,33	7,67	58,82	2,35	5,52
1517	1353	1221	1681	1089	4,34	33,20	37,54	3,46	11,97	4,21	17,72
1763	1591	1517	1849	1369	4,82	39,25	44,07	-1,07	1,14	4,53	20,52
1935	1845	1763	2025	1681	5,05	43,50	48,55	-3,55	12,6	-2,48	6,15
2115	1935	1935	2209	1849	5,29	45,62	50,91	-3,91	15,29	0,36	0,12
2303	2205	2115	2405	2025	5,52	47,74	52,26	-4,26	18,14	0,35	0,12
16289	14893	14241	17508	13187	х	х	х	15,47	428,33	х	х

Використовуючи перші 18 членів ряду, складемо одночленну модель $\overline{X}_t$ = $a_1 \times X_{t-1}$. Визначаємо a_1 за методом середніх (табл. 12.12, графи 2.3):

$$a = \frac{\sum_{l=2}^{18} X_t}{\sum_{l=2}^{17} X_{t-1}} = \frac{530}{481} = 1{,}103. \qquad (12.42)$$

Обчислюємо значення $\overline{X}_t$ = 1,103 X_{t-1} і залишків ε_t = $\overline{X}_t$ - X_t (графи 4, 5). Для використання першого критерію автокорельованості складаємо циклічний ряд ε_{t-1} (графа 6), обчислюємо $\varepsilon_t * \varepsilon_{t-1}$ (графа 7) і ε_t^2 (графа 8). У результаті одержуємо

$$r_1 = r(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} \varepsilon_t * \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=k+1}^{n} \varepsilon_t^2} = \frac{162{,}28}{301{,}36} = 0{,}528. \qquad (12.43)$$

За табл. 12.12 знаходимо n_1 = 18 – 1 =17 і $r > 0$, маємо $r_{1\%}$ = 0,475.

Отже r_1 потрапляє в критичну область при 1% рівні значущості, що дає підставу відкинути гіпотезу неавтокорельованості ε_t.

Таким чином, модель $\overline{X}_t$ = a_1 X_{t-1} не приймається. До такого ж висновку приводить і другий критерій Дж. Неймана. На підставі граф 8,10 отримуємо

$$K = \frac{\frac{1}{n-k-1}\sum_{t=k+2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\frac{1}{n-k}\sum_{t=k+1}^{n} \varepsilon_t^2} = \frac{272{,}8/16}{301{,}26/17} = \frac{17{,}01}{17{,}72} = 0{,}959. \qquad (12.44)$$

За табл. 12.12 знаходимо: n_1 = 17 маємо $K_{1\%}$ = 1,035. Значить, K потрапляє в критичну область при 1% рівні значущості, що дає підставу забракувати гіпотезу відсутності автокорельованості ε_t.

Складаємо двочленну модель $\overline{X}_t$ $\overline{X}_t$ = a_1 $X_{t-1.}$ + $a_2 X_{t-2.}$ Система нормальних рівнянь для визначення параметрів методом якнайменших квадратів має вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{t=3}^{18} X_t * X_{t-1} = a_1 \sum_{t=3}^{18} X_{t-1}^2 + a_2 \sum_{t=3}^{18} X_{t-1} X_{t-2} \\ \sum_{t=3}^{18} X_t * X_{t-2} = a_1 \sum_{t=3}^{18} X_{t-1} X_{t-2} + a_2 \sum_{t-3}^{18} X_{t-2}^2 \end{cases}. \quad (12.45)$$

Визначивши суми для вирішення системи (табл. 12.12, графи 12-16), отримаємо 16289=1728 a_1 + 14241 a_2 ; 14853 = 14241 a_1 + 13187 a_2, звідки a_1 = 0,1175; a2 = 1,061. У графах 17-19 наведено значення X_t, розраховані за формулою $\overline{X}_t$ = 0,1175 X_{t-1} + 1,061 X_{t-2} . Відхилення ε_t знаходимо за графами 20 і критерієм Дж. Неймана перевіряємо неавтокорельованість залишків. З граф 21,23

$$K= \frac{\frac{1}{n-k-1} \sum (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\frac{1}{n-k} \sum \varepsilon_t^2} = \frac{528{,}12/15}{428{,}33/16} = \frac{35{,}21}{26{,}77} = 1{,}315. \quad (12.46)$$

За табл. 12.12 маємо:

$K_{5\%}$ (16) = 1,309 при r > 0;

$K_{5\%}$ (16) = 2,9577 при r < 0.

Отже розрахункове значення К потрапляє в допустиму область при 5% рівні значущості, що дає підставу для ухвалення гіпотези неавтокорельованості залишків ε_t для затвердження двочленній моделі: $\overline{X}_t$ = 0,1175 X_{t-1} + 1,061 $X_{t-2.}$ При середньоквадратичному відхиленні

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{t-k+1}^{n} \varepsilon_t^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{428{,}33}{16}} = 5{,}17 \quad (12.47)$$

помилка прогнозу B_{cp} = $\left\{ \left| X_t - \overline{X}_t \right| \le t_\alpha * 5{,}17 \right\}$ = P_α; при 90%-й гарантійної ймовірності t_α = 1,74 помилка прогнозу не перевищить 8,84.

Прогноз на 19 і 20 періоди X_{19} = 55,61; X_{20} = 58,20 з 90%-ю вірогідністю непереходу за межі

$$\overline{X} - 8{,}84 \le 0{,}1175\, X_{t-1} + 1{,}061\, X_{t-2} \le \overline{X} + 8{,}84. \quad (12.48)$$

Таким чином, представлені методики оцінки динаміки економічних процесів і розробки відповідних економетричних моделей динаміки дають змогу приймати управлінські рішення з урахуванням періодів функціонування підприємства та прогнозування економічних показників.

Питання і завдання для самоконтролю до змістового модулю 5

Питання для самоконтролю:

1. Назвіть принципи при побудові економетричних моделей?
2. Охарактеризуйте критерії оцінки адекватності економетричних моделей?
3. Що таке мультиколінеарність? Назвіть причини її виникнення.
4. У чому полягає парний регресійний аналіз?
5. У чому полягає кількісний регресійний аналіз? Який вигляд має кількісна регресійна модель?
6. Охарактеризуйте етапи побудови багатофакторної економетричної моделі?
7. Охарактеризуйте t-критерій Ст'юдента і F-критерій Фішера для оцінки адекватності багатофакторної економетричної моделі.
8. Охарактеризуйте тест Дарбіна-Уотсона для оцінки адекватності багатофакторної економетричної моделі.
9. Проінтепретуйте отримані результати на основі розробленої Вами багатофакторної економетричної моделі.
10. Охарактеризуйте узагальнені економетричні моделі.
11. Назвіть види узагальнених економетричних моделей і охарактеризуйте їх.
12. Назвіть поняття і визначте сутність динамічних процесів в економіці.
13. Що таке часовий ряд і назвіть напрями його оцінки.
14. Що таке авто регресія, і як будують авторегресійні моделі?
15. Назвіть статистичні критерії оцінки автокорельованості залишків, як вони визначаються.

Завдання для самоконтролю:

1. За статистичними даними 10 підприємств розробити рівняння регресії рівня витрат на виробництво продукції (Рввп) від фондоозброєності праці робітників (ФЗп):

1) побудувати поле кореляції і за ним визначити характер й обґрунтувати математичну форму рівняння регресії;
2) визначити коефіцієнти регресії a_0 і a_1, їх економічний зміст, записати рівняння регресії;
3) визначити коефіцієнти кореляції;
4) визначити з ймовірністю 0,95 довірчі границі помилки апроксимації, записати рівняння регресії в остаточному вигляді;
5) обґрунтувати економічну сутність отриманих результатів.

Таблиця 12.13 - Статистичні дані діяльності підприємств

№ п/п	Рввп, коп./грн.	ФЗп, тис.грн./чол.
1	91,7	1,9
2	91,2	2,1
3	87,7	5,4
4	89,2	2,7
5	90,2	2,2
6	88,8	2,9
7	91,7	2,6
8	92,8	2,7
9	85,7	6,3
10	91,1	4,6

2. За статистичними даними 10 підприємств розробити рівняння регресії рівня витрат на виробництво продукції (Рввп) від фондовіддачі основних засобів (ФФоз):

1) побудувати поле кореляції і за ним визначити характер й обґрунтувати математичну форму рівняння регресії;
2) визначити коефіцієнти регресії a_0 і a_1, їх економічний зміст, записати рівняння регресії;
3) визначити коефіцієнти кореляції;
4) визначити з ймовірністю 0,95 довірчі границі помилки апроксимації, записати рівняння регресії в остаточному вигляді;
5) обґрунтування економічної сутності отриманих результатів.

Таблиця 12.14 - Статистичні дані діяльності підприємств

№ з/п	Рввп, коп./грн.	ФФоз, тис. грн./тис. грн.
1	91,7	12,9
2	91,2	12,6
3	87,7	11,9
4	89,2	12,3
5	90,2	12,4
6	88,8	11,6
7	91,7	12,7
8	92,8	12,9
9	85,7	11,2
10	91,1	12,8

3. За статистичними даними 10 підприємств розробити рівняння регресії рентабельності реалізації продукції (Ррп) від коефіцієнта вибуття робітників (Квр):

1) побудувати поле кореляції і за ним визначити характер й обґрунтувати математичну форму рівняння регресії;

2) визначити коефіцієнти регресії a_0 і a_1, їх економічний зміст, записати рівняння регресії;
3) визначити коефіцієнти кореляції;
4) визначити з ймовірністю 0,95 довірчі границі помилки апроксимації, записати рівняння регресії в остаточному вигляді;
5) обґрунтування економічної сутності отриманих результатів.

Таблиця 12.15 - Статистичні дані діяльності підприємств

№ з/п	Ррп, коп./грн.	Квр, %
1	4,3	4,1
2	4,8	3,3
3	5,3	3,5
4	6,8	2,8
5	5,5	3,9
6	5,2	3,6
7	6,3	2,9
8	7,2	2,7
9	6,4	2,9
10	7,9	2,1

4. Наведені статистичні дані собівартості пасажироперевезень міським електричним транспортом, (табл. 12.16), вирівняти за ковзаною середньою і побудувати графік і обґрунтувати тенденції зміни собівартості пасажироперевезень.

Таблиця 12.16 - Статистичні дані собівартості пасажироперевезень по депо

t	Собівартість С, коп
1	89,9
2	90,9
3	87,6
4	87,5
5	88,2
6	89,9
7	90,5
8	92,8
9	92,1
10	92,8
11	91,8
12	93,1

5. На основі даних динаміки статистичних показників поданих в табл. 12.17, виявіть загальну тенденцію їх зміни, побудуйте економетричну модель динаміки і розрахуйте прогноз на два наступних роки.

Таблиця 12.17 - Динаміка статистичних показників

Роки	t	Значення показника, С, коп.	Квартал			
			I	II	III	IV
2002	1	68,59	72,4	65,88	69,53	66,54
2003	2	69,95	72,8	67,34	71,21	68,44
2004	3	75,37	74,53	77,49	72,88	76,59
2005	4	75,49	79,22	73,21	73,34	76,19
2006	5	82,34	77,34	82,29	85,45	87,29
2007	6	91,80	88,92	90,72	93,19	94,39

6. Щомісячний пробіг рухомого складу міського електротранспорту на 1000 пасажирів, що перевозяться, поданий в табл. 12.18. Розрахуйте параметри авторегресійної моделі і складіть прогноз на наступні два місяці.

Таблиця 12.18 - Щомісячний пробіг рухомого складу міського електротранспорту на 1000 пасажирів

Період (t)	Щомісячний пробіг рухомого складу міського електротранспорту на 1000 пасажирів (X_t), км.
1	167,1
2	163,3
3	168,4
4	158,9
5	160,4
6	160,5
7	177,3
8	171,6
9	173,9
10	174,2
11	174,8
12	171,3
13	169,7
14	170,2
15	173,2
16	185,5

7. Щомісячна реалізація покрівельних матеріалів (в тисячах штук) заводом за 18 місяців подана в табл. 12.19. Треба скласти авторегресійну економетричну модель і спрогнозувати місячну потребу в покрівельних матеріалах на два наступні місяці.

Таблиця 12.19 - Щомісячна реалізація покрівельних матеріалів (в тисячах штук) заводом

Період (t)	Щомісячна реалізація покрівельних матеріалів (X_t), тис. штук
1	32
2	36
3	33
4	37
5	32
6	29
7	31
8	38
9	35
10	39
11	27
12	33
13	37
14	43
15	46
16	49
17	51
18	54

ПРИКЛАД
ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

1. Альтернативні прості тест-завдання

Обведіть правильну відповідь, визначену літерою під запитанням:

1.1. Твердження «На ідеї моделювання по суті базується будь-який метод наукового пізнання як теоретичний, так і експериментальний»

А) правильне **Б) неправильне**

1.2. Економіко-математичне моделювання - це комплекс економічних і математичних дисциплін.

А) так **Б) ні**

1.3. Система – це модель прийняття управлінських рішень.

А) так **Б) ні**

1.4. Модель – це оригінал, яким управляємо або повинні управляти.

А) так **Б) ні**

1.5. Твердження «низько структуровані проблеми, вони пов'язані з розробкою довгострокових напрямів дій, які висвітлюють багато аспектів у діяльності підприємств. У цьому разі важко або майже неможливо описати математичні зв'язки. Ці проблеми вирішуються переважно з використанням методології системного аналізу».

А) правильне **Б) неправильне**

1.6. Твердження «Розв’язати оптимізаційну задачу - вирішити питання математичної доцільності й прийняти управлінські рішення».

А) правильне **Б) неправильне**

1.7. Економіко-математичні моделі оптимізації містять одну цільову функцію, в якій основною є ефективність виробництва, і систему обмежень, куди входять чинники, у сфері яких модель не втрачає своєї практичної цінності.

А) так **Б) ні**

2. Альтернативні, побудовані за принципом класифікації і подвійної альтернативи

Зробіть правильний вибір із запропонованих альтернатив і обведіть відповідну літеру відповіді:

1.8. Лінійне програмування – це:
а) перехід від фактів, що спостерігаються, і окремих висновків до загальних висновків, які утворюють правила (закони)
б) напрямок, який включає математичний інструментарій, що базується на теорії і методах вирішення задач про екстремуми лінійних функцій на множинах n-мірного векторного простору, що задається системами лінійних рівнянь;
в) перевірка висновків і пропозицій.

1.9. Ризик – це:
а) загроза, небезпека виникнення збитку, потенційно можливої вірогідної втрати ресурсів, недоотримання доходів або поява додаткових витрат у результаті здійснення певної виробничої і фінансової діяльності;
б) подія або група споріднених випадкових подій, що наносять збиток об'єкту;
в) подія, яка обов’язково здійсниться.

1.10. Управління ризиком включає:
а) прогнозування майбутнього;
б) формування цілей у відповідній сфері діяльності підприємства;
в) вибір управлінських параметрів.

1.11. Етапи управління ризиками складаються із:
а) 5 етапів;
б) 3 етапів;
в) 4 етапів.

1.12. З позиції методів оцінки ризику визначають наступні компоненти:
а) ймовірність настання негативної події;
б) економічні показники;
в) тривалість періоду впливу ризику.

3. Тест-завдання множинного вибору, побудованих за принципом класифікації

Зробіть правильний вибір з наведеного переліку і обведіть правильну відповідь:

1.13. Квантифікація – це:
а) узагальнена модель дій, необхідних для досягнення поставлених цілей шляхом координації та розподілу ресурсів компанії;
б) місце, де здійснюється купівля-продаж фінансових ресурсів;
в) ризики не піддаються кількісному вимірюванню;
д) управління підприємством.

1.14. Для оцінки величини фінансових ризиків використовують:
а) показники економічного аналізу;
б) показники стратегічного аналізу;
в) статистичні величини;
г) аналітичні показники.

1.15. Математичне сподівання дискретної величини представляє:
а) суму добутків можливих варіантів величини на їх імовірність;
б) суму показників діяльності підприємства;
в) суму результатів математичних розрахунків показників;
г) суму мінливості реальних даних деякої випадкової величини навколо математичного сподівання.

1.16. У відносному вираженні ризик визначається:
а) середньо квадратичним відхиленням;
б) математичним сподіванням;
в) коефіцієнтом бета;
г) відношенням величини максимальних втрат від даного виду діяльності до деякої бази порівнянь.

1.17. Ймовірність допустимого ризику визначається за залежністю:

а) $F(x) = \int_{0}^{X_{доп}} f(x)dx$ **.**

в) $F(x) = \int_{X_{кр}}^{X_{кат}} f(x)dx$.

б) $F(x) = \int_{X_{доп}}^{X_{кр}} f(x)dx$ **.**

г) Кр = Х/К

1.18. Коефіцієнт ризику визначається:

а) $F(x) = \int_{0}^{X_{доп}} f(x)dx$.

в) $F(x) = \int_{X_{кр}}^{X_{кат}} f(x)dx$.

б) $F(x) = \int_{X_{доп}}^{X_{кр}} f(x)dx$.

г) Кр = Х/К

1.19. Критичні ризиком визначаються за залежністю:

а) $F(x) = \int_{0}^{X_{доп}} f(x)dx$.

в) $F(x) = \int_{X_{кр}}^{X_{кат}} f(x)dx$.

б) $F(x) = \int_{X_{доп}}^{X_{кр}} f(x)dx$.

г) Кр = Х/К

1.20. Катастрофічний ризик визначається:

а) $F(x) = \int_{0}^{X_{доп}} f(x)dx$.

в) $F(x) = \int_{X_{кр}}^{X_{кат}} f(x)dx$.

б) $F(x) = \int_{X_{доп}}^{X_{кр}} f(x)dx$.

г) Кр = Х/К

1.21. Показник допустимого ризику:

а) ймовірність того, що втрати виявляться більшими за допустимий критичний рівень;

б) ймовірність того, що втрати виявляться більшими за гранично допустимий рівень (таким рівнем є прибуток від проекту);

в) ймовірність того, що втрати по проекту виявляться більшими за граничний катастрофічний рівень (вартість майна підприємця).

1.22. Показник критичного ризику:

а) ймовірність того, що втрати виявляться більшими за допустимий критичний рівень;

б) ймовірність того, що втрати виявляться більшими за граничнодопустимий рівень (таким рівнем є прибуток від проекту);

в) ймовірність того, що втрати по проекту виявляться більшими за граничний катастрофічний рівень (вартість майна підприємця).

1.23. Показник катастрофічного ризику:
а) ймовірність того, що втрати виявляться більшими за допустимий критичний рівень;
б) ймовірність того, що втрати виявляться більшими за граничнодопустимий рівень (таким рівнем є прибуток від проекту);
в) ймовірність того, що втрати по проекту виявляться більшими за граничний катастрофічний рівень (вартість майна підприємця).

1.24. Розташуйте в логічній послідовності етапи моделювання:
а) аналіз економічної системи, її ідентифікація і визначення достатньої структури для моделювання.
б) верифікація моделі і уточнення її параметрів;
в) уточнення всіх параметрів системи і відповідність параметрів моделі, їх необхідне виправлення, коректування;
г) синтез і побудова моделі з урахуванням її особливостей і математичної специфікації.

1.25. Розташуйте в логічній послідовності етапи прийняття управлінських рішень:
а) постановка, формулювання проблеми;
б) прийняття рішень;
в) пошук рішень;
г) виявлення проблеми;
д) виконання рішення;
е) оцінка і аналіз отриманих рішень.

1.26. Для розв'язування задач умовної оптимізації використовуються:
а) метод штрафних функцій;
б) метод Лагранжа;
в) метод синтезу;
г) модель МакНейра.

1.27. У господарській діяльності можна орієнтуватись на такі критерії:
а) критерії маркетингового дослідження ринку;
б) критерії підбору найбільш подібних одиниць об’єктів;
в) критерії виявлення конкурентних переваг підприємства;
г) критерії допустимого ризику Кд=0,1.

1.28. Критерії ризику означають, що на угоду треба йти:
а) критичний ризик складає 0,2;
б) показник допустимого ризику не повинен перевищувати 0,1;
в) в 1 випадку зі 100 можна втратити всю розрахункову виручку.

1.29. Приймаючи рішення, підприємець на підставі попередніх розрахунків повинен орієнтуватись на наступні умови::
а) показник допустимого ризику не повинен перевищувати 0,1;
б) показник критичного ризику не повинен перевищувати 0,01;
в) критерії катастрофічного ризику складає 0,03;
г) в 10 випадках зі 100 можна втратити весь прибуток від угоди.

1.30. Для оцінки ліквідності ризику використовують:
а) 5 критеріїв;
б) 2 критерія;
в) 6 критеріїв;
г) 3 критерія.

1.31. Терміноволіквідні інвестиції з незначним ризиком – це:
а) час трансформації яких від 7 до 30 днів;
б) час трансформації яких від 1 до 3 місяців;
в) час трансформації яких більше 3 місяців;
г) час трансформації яких до 7 днів.

1.32. Високоліквідні інвестиції з низьким ризиком - це:
а) час трансформації яких від 7 до 30 днів;
б) час трансформації яких від 1 до 3 місяців;
в) час трансформації яких більше 3 місяців;
г) час трансформації яких до 7 днів.

1.33. Середньоліквідні із середнім ризиком – це:
а) час трансформації яких від 7 до 30 днів;
б) час трансформації яких від 1 до 3 місяців;
в) час трансформації яких більше 3 місяців;
г) час трансформації яких до 7 днів.

1.34. Малоліквідні об’єкти з високим ризиком – це:
а) час трансформації яких від 7 до 30 днів;
б) час трансформації яких від 1 до 3 місяців;
в) час трансформації яких більше 3 місяців;
г) час трансформації яких до 7 днів.

Зробіть правильний вибір з наведеного переліку і запишіть номер поряд з відповідною літерою:

1.35. Які критерії використовуються [А] або не використовуються [Б] для оцінки адекватності моделі

1) критерії ліквідності;
2) t-критерій Ст'юдента;
3) F-критерій Фішера;
4) критерій прибутковості;
5) критерії ризику;
6) мультиколінеарність;
7) критерії ділової активності.

А___________________ Б_________________________

1.36. Для оцінки гетероскедастичності застосовуються [А] або не застосовуються [Б] тести або критерії

1) тест рангової кореляції Спірмена;
2) t-критерій Ст'юдента;
3) F-критерій Фішера;
4) мультиколінеарність;
5) тест Голфреда-Квандта;
6) тест Глейзера.

А___________________ Б_________________________

1.37. Для рівняння перевіряється, чи перевищує r^2 те значення, яке може бути отримано випадково [А] або не перевіряється [Б] критеріями

1) t-критерій Ст'юдента;
2) F-критерій Фішера;
3) тест рангової кореляції Спірмена;
4) тест Голфреда-Квандта;
5) тест Глейзера;
6) тест на мультиколінеарність;
7) коефіцієнт парної кореляції.

А___________________ Б_________________________

1.38. Для оцінки надійності коефіцієнта кореляції використовують [А] або не використовують [Б] наступні критерії або тести

1) t-критерій Ст'юдента;
2) F-критерій Фішера;
3) тест рангової кореляції Спірмена;
4) тест Голфреда-Квандта;
5) тест Глейзера;
6) тест на мультиколінеарність;
7) коефіцієнт парної кореляції.

А__________________ **Б________________________**

1.39. Основними напрямами перевірки адекватності моделі можуть бути [А] або не бути [Б]

1) оцінка фінансового стану
2) оцінка обсягу використання основного капіталу підприємства
3) перевірка за допомогою F-теста (F-критерій Фішера);
4) аналіз використання основного капіталу в минулому періоді;
5) перевірка моделі на гомо-гетескедастичність;
6) забезпечення високої ефективності використання основних активів;
7) перевірка факторів економетричної моделі на мультиколінеарність.

А__________________ **Б________________________**

1.40. Випадковий член існує[А] або не існує [Б] за такими причинами

1) невключення пояснювальних змінних;
2) агрегирування змінних;
3) наявності мультиколінеарності;
4) наявності гомоскедастичності;
5) помилкового опису структури моделі;
6) помилкової функціональної специфікації;
7) **помилкового розрахунку економічних показників.**

А__________________ **Б________________________**

4. Тест завдання множинного вибору, побудовані за принципом кумуляції

Зробіть правильний вибір з наведеного переліку і обведіть правильну відповідь:

1.41. У разі моделювання економічних систем задачами аналізу є:
а) задачі пов’язані з задачами синтезу;
б) маркетингові задачі;
в) математичні задачі;
Г) економічні задачі.

1.42. У разі структуризації проблеми стандартною є:
а) проблеми, які потребують вибору оптимального варіанту з багатьох можливих (найбільш широко використаних методів);
б) проблеми, які пов'язані з розробкою довгострокових напрямів дій, які висвітлюють багато аспектів в діяльності підприємств;
в) проблема, пов'язана з одноваріантними розрахунками (розрахунок потреб в матеріальних і трудових ресурсах);
г) проблеми, які відзначаються невизначеностю як мета діяльності, так і можливими напрямками діяльності.

1.43. У разі структуризації проблеми високо структурованими є:
а) проблеми, які потребують вибору оптимального варіанту з багатьох можливих (найбільш широко використаних методів);
б) проблеми, які пов'язані з розробкою довгострокових напрямів дій, які висвітлюють багато аспектів в діяльності підприємств;
в) проблема, пов'язана з одноваріантними розрахунками (розрахунок потреб в матеріальних і трудових ресурсах);
г) проблеми, які відзначаються невизначеності як мета діяльності, так і можливими напрямками діяльності.

1.44. У разі структуризації проблеми низько структуровані проблеми – це:
а) проблеми, які потребують вибору оптимального варіанту з багатьох можливих (найбільш широко використаних методів);
б) проблеми, які пов'язані з розробкою довгострокових напрямів дій, які висвітлюють багато аспектів в діяльності підприємств;
в) проблема, пов'язана з одноваріантними розрахунками (розрахунок потреб в матеріальних і трудових ресурсах);
г) проблеми, які відзначаються невизначеністю як мета діяльності, так і можливими напрямками діяльності.

5. Тест-завдання множинного вибору, побудовані за принципом циклічності і перестановки:

1.45. Для прийняття управлінських рішень здійснюють:
а) оцінку і аналіз отриманих рішень;
б) оцінку ліквідності;
В) оцінку параметрів економетричних моделей;
Г) оцінку функціональності.

1.46. Для вирішення задач лінійного програмування симплексним методом необхідно:
а) розрахувати логарифми бар'єрних функцій;
б) здійснювати пошук уздовж траєкторій у просторі змінних задачі, що не проходять через вершини багатокутника;
в) обчислити елементи рядка оцінки плану $d[0:n]$**.**
г) знайти рядок з номером r, де $\theta = \min T[i]$ **для всіх** $T[i] > 0$**.**

6. Фасетні тест-завдання, побудовані за принципом циклічності:

Знайдіть правильну відповідь для всіх варіантів тверджень:

1.47-1.50. Типова крива щільності розподілу ймовірностей випадкових втрат характеризує:

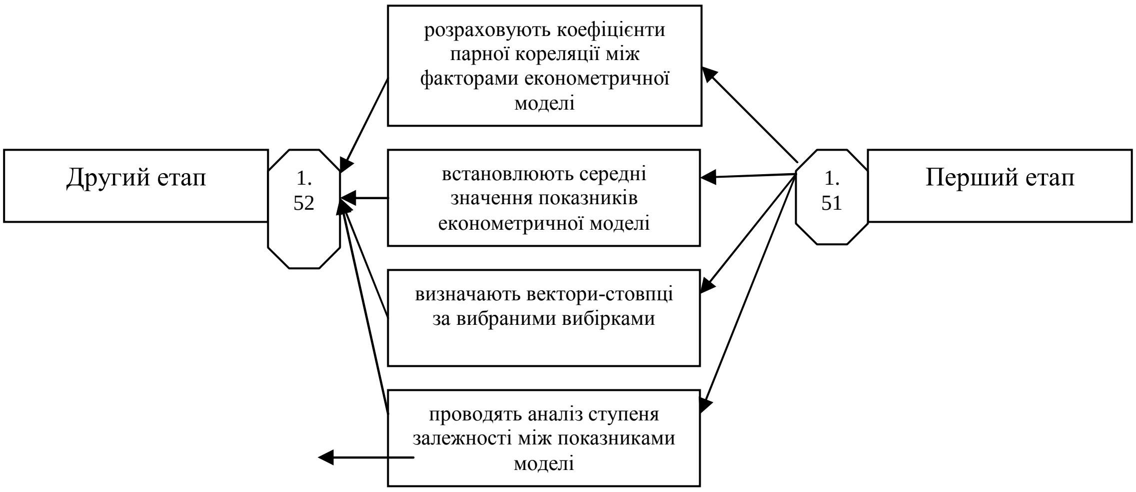
а) збитки, які матимуть величину, що дорівнює загальній величині прибутку від проекту;
б) ризик втрат, що сягають розміру всього майна підприємства;
в) ризик втрат, що сягають величини розрахункової виручки від проекту;
г) найбільш ймовірні збитки за проектом.

47. точка сподіваної або середньої віддачі проекту. 48. точка допустимого ризику. 49. точка гранично допустимого критичного ризику. 50. точка гранично-катастрофічного ризику.

1.51-1.52. Мультиколінеарність – це поняття, яке використовується для опису проблеми, коли нестрога лінійна залежність між пояснювальними змінними призводить до отримання ненадійних оцінок регресії.

А) вірно **Б) невірно**

Схема проведення



1.51.______________________________1.52.____________________________

7. Фасетні тест-завдання, побудовані за принципом перестановки (відтворення вірної послідовності)

Встановити правильну послідовність, вказуючи порядок цифрами

1.53. Для побудови багатофакторної економетричної моделі здійснюють наступні етапи:

☐ - **включення або виключення економічних факторів на основі розрахованих коефіцієнтів парної кореляції;**

☐ - **перевірка основних припущень класичного регресійного аналізу;**

☐ - **перевірка моделі на адекватність;**

☐ - **аналіз отриманих результатів.**

1.54. Основні етапи моделювання наступні:

☐ - **верифікація моделі і уточнення її параметрів;**

☐ - **аналіз економічної системи, її ідентифікація і визначення достатньої структури для моделювання;**

☐ - **уточнення всіх параметрів системи і відповідність параметрів моделі, їх необхідне виправлення, коректування;**

☐ - **синтез і побудова моделі з урахуванням її особливостей і математичної специфікації.**

8. Тест-завдання множинного типу на відновлення відповідної частини

Встановіть відповідність у вигляді комбінації цифр і літер:

1.55. Якому методу вирішення задач лінійного програмування відповідає характеристика

а) симплексний метод
б) метод віток і меж

1) відправляючись з деякої довільної вершини багатокутника обмежень, переходять до обчислення тільки такої вершини, в якій значення лінійної форми буде більше, ніж в попередній

1.56. Встановіть відповідність етапу і його характеристиці при здійсненні методу віток і меж

а) перший етап
б) другий етап
в) третій етап
г) четвертий етап

1) якщо отримане рішення цілочисельне - сформувати нову оцінку z_{t+1}, яка відповідає якнайкращому оптимальному решенню поточної задачі;
2) якщо вибрана задача не має рішення, або її оптимальне рішення гірше прийнятої оцінки, то необхідно виключити цю задачу із списку і перейти до попереднього етапу;
3) вибирається одна із змінних x_k, яка за умовою повинна бути цілочисельною. Проводиться розгалуження, тобто в основний список додається дві підзадачі, для яких зберігаються ті ж обмеження, але для однієї;
4) вибирають задачу з основного списку і знаходять її оптимальне рішення.

А__________________ Б_________________ В_________________

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Альгин А.П. Грани экономического риска. М., 1991.
2. Ашманов С. А. Введення в математичну економіку. М. : Наука 1984.
3. Балабанов И.Т. Риск-менеджмент. М.: Финансы и статистика, 1996.
4. Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989.
5. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финанси и статистика, 2001.
6. Бернстайн П. Против Богов. Укрощение риска / Пер. с англ. - М.: ЗАО «Олимп-бизнес», 2006.
7. Бирман И. Оптимальное программирование - М.: Радио и Связь, 1976.
8. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование. Ч. 1. - М., МГУ, 2001.
9. Буянов В. П., Кирсанов К. А., Михайлов Л. А. Рискология. Управление рисками. - М., 2002.
10. Вітлінський В.В., Наконечний С.І. Ризик у менеджменті. – К. Тов. “Борисфен-М”, – 1996. – 336 с.
11. Воробьёв Ю.Л. Малинецкий Г.Г. Махутов Н.А. Управление риском и устойчивое развитие. Человеческое измерение // Общественные науки и современность. – 2000. - №6.
12. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2003.
13. Горчаков А.А., Орлова И.В. Компьютерные экономико-математические модели. – М.: ЮНИТИ, 1995.
14. Горчаков А.А., Орлова И.В., Половников В.А. Методы экономико-математического моделирования и прогнозирования в новых хозяйственных условиях хозяйствования. – М.: ВЗФЭИ, 1991.
15. Грубер Й. Економетрія: Посібник для студ. екон. спец., т. 2. Переклад. – К.: ЗАТ «Нічлава», 1998. – 295 с.
16. Демченков В.С., Милета В.И. Системный анализ деятельности

предприятий: М/. Финансы и статистика, 1990. - 182 с.

17. Джонстон Д.Ж. Эконометрические методы. – М.: Финансы и статистика, 1980.
18. Доля В.Т. Економетрія: Методичний посібник з вивчення дисципліни (для студентів за напрямами підготовки «Економіка підприємництва», «Менеджмент»). Вид. 2-е. – Харків: ХДАМГ, 2002. – 43 с.
19. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Статистика, 1973.
20. Доугерти К. Введение в економетрику / Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 2001.- 402 с.
21. Дубров А.М. и др. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе. М.: «Финансы и статистика», 2001.
22. Жданов С. Экономические модели и методы управления. М.Эльта 1998.
23. Замков О.О., Толстонятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. - М.: ДНСС. 1997 г.
24. Ефимова М.Р., Петрова Е.В., Румянцев В.Н. Общая теория статистики: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 416 с.
25. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 1975, 2003.
26. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.Н. Математические методы и модели в планировании. - М.: Экономика. 1987.
27. Кенэ Ф. Избранные экономические произведения / Пер. с франц. – М.: Соцэкгиз, 1960. – 551 с.
28. Конспект лекцій з дисципліни «Економетрія» (для студентів 3 курсу, напряму 0305 «Економіка і підприємництво») / Укл.: Скоков Б.Г., Мамонов К.А. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 59 с.
29. Конюховский П. Математические методы исследования в экономике. – СПб.: Питер, 2000. – 208 с.

30.Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н.; под ред. Проф.Н.Ш.Кремера: Исследование операций в экономике; учеб. пособие для вузов.
31.Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. М.: Финстат, 2003.
32.Лапуста М. Г., Шаршукова Л. Г. Риски в предпринимательской деятельности. - М.: Инфра-М, 1996.
33.Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2000.
34.Лещинський О.Л., Рязанцева В.В., Юнькова О.О. Економетрія: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – Л.: МАУП, 2003.-208 с.
35.Лук’яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика: Підручник. – К.: Т-во “Знання”, КОО, 1998. – 494 с.
36.Лук’яненко І.Г., Городніченко Ю.О. Сучасні економетричні методи у фінансах. Навчальний посібник.-К.: Літера ЛТД, 2002.- 352 с.
37.Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. — К.: Вища шк., 1999.
38.Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. М. Из-во УРАО 1998г.
39.Малыхин В.И. Финансовая математика. – М.: ЮНИТИ, 2002.
40.Малиш Н. А. Моделювання еколого-економічних систем агропромислового комплексу на території радіоактивно забрудненого регіону. Дис. на здоб. вч. ступ. к. е. н. КНУ ім. Тараса Шевченка, 1993.
41.Макаревич Л.М. Управление предпринимательскими рисками. - М.: Издательство «Дело и Сервис», 2006.
42.Малинецкий Г.Г. Управление риском и редкие катастрофические события // Математическое моделирование, т.14, №8, 2002.
43.Мерков А.М., Поляков Л.Е. «Санитарная статистика» (пособие для врачей). М.: Медицина. – 1976. – 384 с.
44.Методичні вказівки для вивчення курсу “Економетрія” / Укл. Скоков Б.Г. – Х.: ХНАМГ, 2002. – 39 с.

45.Методичні вказівки до виконання практичних завдань і самостійної роботи з дисципліни «Економетрія» (для студентів 3 курсу денної форми навчання спец. 7.050201 «Менеджмент організацій») / Укл. Мамонов К.А. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 27 с.

46.Методичні вказівки «Використання пакету програм «Statistica» в економетричних дослідженнях» (для студентів 3 курсу денної форми навчання, спец. 6.050200 «Менеджмент організацій») / Укл. Скоков Б.Г., Мамонов К.А. – Х.: ХНАМГ, 2007. – 51 с.

47.Методические указания к самостоятельному изучению курса «Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении», проведению практических занятий и выполнению контрольных работ (для студентов 4, 5 курсов всех форм обучения, специальности 1722) / Составитель Скоков Б.Г. – Харьков.: Харьковское межвузовское полиграфическое предприятие, 1988. – 58 с.

48.Методична розробка практичного заняття із студентами 4 – 5 курсів з теми: «Оцінка достовірності результатів дослідження» / Укл. Таралло В.Л., Зубович А.П., Ясинська Е.Ц. – Чернівці, 2001. – 6 с.

49.Миксюк С.Ф., Комкова В.Н. Экономико-математические методы и модели – Мн.: БГЭУ, 2006.

50.Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретично-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К. Інформтехніка. – 1995. – 380 с.

51.Монахов А. Математические методы анализа экономики. – СПб.: Питер, 2002. – 176 с.

52.Егоров А.А. Об оценке достоверности результатов моделирования боевых действий (операции) объединения ВВС. – Военная теория и практика. С. 60-65.

53.Петі У. «Політична арифметика». – Кембрідж: Юниверситі Прес, 1899.

54. Петров Е. Г., Новожилова М. В.. Методи і засоби прийняття рішень у соціально – економічних системах: Навч. посібник./ За ред. Е. Г. Петрова. – К.: Техніка, 2004. – 256с.
55. Ракитов А.И. Принципы научного мышления. - М.: Политиздат, 1975. – 143 с.
56. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применение. - М.: Наука, 1968.
57. Райзберг Б.А. Предпринимательство и риск. – "Знание". Новое в жизни, науке и технике. – 1992. – № 4.
58. Риски в современном бизнесе. / П.Г. Грабовый, С.Н. Петрова, С.И. Полтавцев и др. - М.: Алане, 1994.
59. Робоча програма і короткий конспект лекцій до самостійного вивчення курсу «Економетрія» (для студентів денної і заочної форм навчання спеціальностей «Менеджмент організацій», «Облік і аудит» та «Економіка підприємства») / Укл. Скоков Б.Г., Мамонов К.А. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 105 с.
60. Руденко А.В. Переход от вероятности к достоверности в доказывании по уголовным делам / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата юридических наук. – Краснодар, 2001. – 24 с.
61. Самойленко М.І., Скоков Б.Г. Дослідження операцій (Математичне програмування. Теорія масового обслуговування): Навч. посібник. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 176 с.
62. Сергеев М. Предпринимательский риск и стратегии предпринимателя (http://www.fact.ru/archiv/ num01/serg.html).
63. Сивый В.Б., Скоков Б.Г. Математические методы и модели в планировании и управлении жилищно-коммунальным хозяйством: Учеб. пособие для вузов. – Х.: Изд-во «Основа» при Харьковском гос. уни-те, 1991. – 208 с.
64. Скурихин Н.П. Математическое моделирование. - М.: Высш. шк. 1989.

65. Сытник В.Ф. Каратодава Е.А. Математические модели в планировании и управлении предприятиями. К. Выща школа 1985.
66. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2-х томах. / Пер. с англ. 1991. 360 с.
67. Терехов Л.Л. Экономико- математические методы. М. Статистика 1988.
68. Тони Райс, Брайан Койли. Финансовые инвестиции и риск / Пер. с англ. – Торгово-издательское бюро BHV, 1995. – 592 с.
69. Уткин Э. А. Риск-менеджмент: Учебник. - М.: Тандем, 1998.
70. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. – М.: Финстатинформ, 1996.
71. Чернов В. А. Анализ коммерческого риска. - М.: Финансы и статистика, 1998.
72. Чернышевский Н.Г. Полн. собр. соч.: в 16 т. – М.: 1939 – 1953.
73. Четыркин Е.М. Статистические методи прогнозирования. – М.: Финансы и статистика, 1979.
74. Хазанова Л. Математическое моделирование в экономике. - М. 1998.
75. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. - М.: Наука, 1978.
76. Хохлов Н.В. Управление риском: Учеб. пособие для вузов. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999.
77. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Пер. с англ. 1974.
78. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Уч. пособие для вузов. — М.: ЮНИ-ТИ-ДАНА, 2000.
79. Шрейдер Ю.А., Шаров А.А. Системы и модели. М.: Радио и Связь, 1982.
80. Экономико-математические методы и прикладные модели: Уч. пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
81. Ястремський О.І. Моделювання економічного ризику. – К.: Либідь, 1992. – 176 с.

82. Ястремський О.І. Основи теорії економічного ризику: Навч. посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – К.: "АртЕк", 1997. – 248 с.
83. Daenzer B. J. Fact-Finding Techniques in Risk Analysis. - AMA, 1970. -P. 63-67.
84. Hayes R. И., Wheelwright S. C., Clark К. B. Dynamic Manufacturing: Creating Learning Organization. The Free Press, NY, 1988.
85. Head G., Horn S. Essentials of Risk Management. V. 1, IIA, 1991. - P. 136.
86. Merril William C., Fox Karl A. Introduction to Economic statistics.- John. Wiley&Sans.- 1970.-658.
87. Robert N. Charette. Applications Strategies for Risk Analisis. McGraw-Hill Book Cjmpany, 1990. New York, N-Y 10020. – ISBN 0-07-010888-9.
88. Simon J. D. Political Risk Assessment. - «Columbia Journal of World Business». - 17, no. 3. - 1982.
89. V.Lofti, C. Pegels. Decision Support System for Production and Operations Managament (DSSPOW). IRWIN, 1991.-359 с.
90. http://www.ur.freecopy.ru.
91. ttp://www.vseslova.ru.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Мамонов Костянтин Анатолійович

Скоков Борис Григорович,

Політучий Сергій Якович

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

(модульний варіант)

.

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Редактор *М.З. Аляб'єв*

Комп'ютерне верстання *І.В. Волосожарова*

Підп. до друку 25.06.09 Формат 60x84 1/16 .
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 9,8.
Тираж 500 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731
від 19.12.2001