

$$f: X \rightarrow Y : \forall x \in X \exists! y \in Y: y = f(x)$$

$$X = D(f) = \{x \in X : \exists y \in Y : y = f(x)\}$$

$$E(f) = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$$

$$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$$

$$g \circ f = g(f): X \rightarrow Z$$

$$\forall x \in X \rightarrow z = g(f(x))$$

$$1) \quad f(x) = \sin x \quad g(y) = y^2 \\ (g \circ f)(x) = (\sin x)^2 \\ (f \circ g)(x) = \sin(x^2)$$

$$2) \quad f(x) ; \quad \frac{f(x+z) - 2f(x^2)}{f(x+z) - 2f(x^2)}$$

$$3) \quad f: X \rightarrow Y \quad f(f^{-1}(y)) = y \\ f^{-1}: Y \rightarrow X \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f^{-1}(y) = \arcsin y$$

$$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \leftrightarrow [-1; 1]$$

монотонні функції на X

$$\nearrow, \searrow, \nearrow, \searrow \quad \forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2$$

$$\nearrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

$$\searrow \quad f(x_2) < f(x_1)$$

$$\nearrow \quad f(x_2) \geq f(x_1)$$

$$\searrow \quad f(x_2) \leq f(x_1)$$

непрерывність в τ . x_0 , якщо

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) ; \quad x_0 \in D(f)$$

обмеженість

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D(f) \quad m \leq f(x) \leq M$$

$$f(x+3) - 4f(x+1) + f(x) = 0$$

$$\text{ФР: } f(x+y) = f(x) + f(y) \quad y\text{-вільна змінна}$$

f -розб'яжок ФР в одн-ти $\mathbb{R}$

$$\text{Приклади: } 1) \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x) = x^a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$(xy)^a = x^a \cdot y^a$$

$$2) \quad f(x+2) - 5f(x+1) + 6f(x) = 0$$

$$f(x) = C_1 \cdot 3^x + C_2 \cdot 2^x$$

$$C_1 \cdot 3^{x+2} + C_2 \cdot 2^{x+2} - 5(C_1 \cdot 3^{x+1} + C_2 \cdot 2^{x+1}) +$$

$$+ 6C_1 \cdot 3^x + 6C_2 \cdot 2^x = 9C_1 \cdot 3^x - 15C_1 \cdot 3^x + 6C_2 \cdot 2^x +$$

$$+ 4C_2 \cdot 2^x - 10C_2 \cdot 2^x + 6C_2 \cdot 2^x = 0$$

$$\text{Додатково: } f(0) = 1 \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 = -1 \end{cases} \quad C_2 = 2$$

$$3) \quad f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = f(x)$$

$$f(x) = \Phi\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right); \quad \Phi - \text{говірка}$$

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \Phi\left(\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}+1}{\frac{x+1-x+1}{x-1}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} \cdot \frac{x-1}{x-1} + \frac{x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}}\right) = \Phi\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) = f(x)$$

$$4) \quad f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{парність}$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{непарність}$$

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{періодичність}$$

$$5) \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x) = \text{sign } x \quad \text{розривна}$$

$$x \vee y = 0 \quad 0 = 0$$

$$x \cdot y \neq 0 \rightarrow x \cdot y > 0 \rightarrow 1 = 1^{(-1) \cdot (-1)}$$

$$\rightarrow x \cdot y < 0 \rightarrow -1 = -1$$

$$y'(x) = x^2 \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$$

рівняння g' Адамберг

$$f^2(x) = f(x+y) \cdot f(x-y) \quad \text{Лобачевський}$$

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = f(x)$$

$$\left(\frac{x}{2}, \frac{f(x)}{2}\right)$$

$$\left(\frac{f(x)}{2}, x\right)$$

$$\frac{f\left(\frac{f(x)}{2}\right)}{\frac{f(x)}{2}} = x \quad f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$x \in [0; a] \quad \frac{f\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - (a^2 - x^2)} = \sqrt{x^2} = |x| \stackrel{x \geq 0}{=} x$$

Крилат: (аналитичний метод)

$$x > 0 \quad 3f(x) - \frac{f^2(x)}{2} - \log_2 x + 5x + 1 = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \frac{f^2(x)}{2} + \frac{1}{3} \log_2 x - 5x + 1$$

$$x=1: \quad \frac{f(1)}{2} = \frac{1}{3} \frac{f^2(1)}{2} - 5 + 1 = \frac{1}{3} \frac{f^2(1)}{2} - 4$$

$$\frac{f^2(1)}{2} - 3 \frac{f^2(1)}{2} - 12 = 0$$

$$\frac{f(1)}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+48}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$\text{розб'яжки: } f_1(x), f_2(x)$$

Рівняння Коші

$$1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{ад}$$

$$2) \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{ад}$$

$$3) \quad f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \quad \ln, x, 1$$

$$4) \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad x^a$$