

$$F(f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), x) = 0$$

$$f(x) = y$$

$$\text{Зад. 1} \quad f^3(x) + (1-x^2)f^2(x) - x^2 = 0$$

$$f^2(x) = y \Rightarrow y^2 + (1-x^2)y - x^2 = 0$$

$$y = \frac{x^2 - 1 \pm \sqrt{(1-x^2)^2 + 4x^2}}{2} = \frac{x^2 - 1 \pm (x^2 + 1)}{2}$$

$$y_1 = x^2 \quad \text{або} \quad y_2 = -1$$

$$f^2(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = |x|$$

Перепишемо ...

Метод невідомих коефіцієнтів

$e_1, \dots, e_n$ - ліній незалежні.

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n = 0 \Leftrightarrow \forall i=1, n \quad a_i = 0$$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ - ліній незалежні.

$$a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0 \quad \forall x$$

$$a_i = 0$$

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$$

$$\text{Зад. 2} \quad 2f(x) + f(2-x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$2(a x^2 + b x + c) + a(2-x)^2 + b(2-x) + c = x^2$$

$$2a x^2 + 2bx + 2c + 4a - 4ax + ax^2 + 2b - bx + c = x^2$$

$$3ax^2 + (b-4a)x + 3c+4a+2b = x^2$$

$$\begin{cases} 3a=1 \\ b-4a=0 \\ 3c+4a+2b=0 \end{cases} \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{3} \\ b &= \frac{4}{3} \\ c &= -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{6}{3} = -2 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 4x - 6) \quad \text{перевіримо}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}f(x) + g(x) \quad \text{знайдемо } g(x)$$

$$2 \cdot \frac{1}{3}f(x) + 2g(x) + \frac{1}{3}f(2-x) + g(2-x) = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2g(x) + g(2-x) = 0$$

$$g(x) = 0 \quad \text{— перевіряємо}$$

$$g(x) \neq 0 \Rightarrow \exists x_0: g(x_0) \neq 0$$

$$x = x_0: \begin{cases} 2g(x_0) + g(2-x_0) = 0 \\ 2g(2-x_0) + g(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 8x_0^3 \\ x_0 \neq 0 \end{matrix}$$

$$x = 2-x_0: \begin{cases} 2g(2-x_0) + g(x_0) = 0 \\ 2g(x_0) + g(2-x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 8x_0^3 \\ x_0 \neq 0 \end{matrix}$$

$$g(x_0) = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 4x - 6) \quad \text{перевіримо}$$

$$\text{Зад. 3} \quad f\left(\frac{1}{f(x)}\right) - f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f - \text{лінійний функція} \quad n \geq 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(n=0 \Rightarrow f(x) = \text{const} \text{ не підходить})$$

$$\deg f = n \Rightarrow \deg f(f) = n^2 = 4$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c =$$

$$-(ax^2 + bx + c) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$$

$$\frac{a^3 x^4 + ab^2 x^2 + ac^2 + 2a^2 b x^3 + 2a^2 c x^2 + 2ab^2 x + bax^2 + b^2 x + bc + c - ax^2 - bx - c}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}$$

$$x^4: a^3 = 1 \quad \quad \quad 2abc + b^2 - b = -2$$

$$x^3: 2a^2 b = 2 \quad \quad \quad ac^2 + bc = 0$$

$$x^2: ab^2 + 2ab + ba - a = -1 \quad \quad \quad -2 + (-1) = -2$$

$$\frac{a=1, b=1}{1+2c=-1} \quad \quad \quad \frac{c=-1}{1-1=0}$$

$$f(x) = x^2 + x - 1 \quad \text{перевіримо}$$

$$\text{Зад. 4} \quad P(x) - \text{лінійний функція}$$

$$P(x+a) = P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

$$\Rightarrow P(x) = \text{const}$$

$$\text{Перевіримо} \quad P(x+a) = P(x) = 0$$

$$x_0 - \text{корінь} \Rightarrow x_0 + a - \text{корінь} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 + 2a - \text{корінь} \Rightarrow \dots \quad x_0 + na - \text{корінь} \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \text{линійна функція не підходить}$$

$$\text{Зад. 5} \quad (x+i)P(x) = (x-i)P(x+i), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} 0 = -i \cdot P(1) \Rightarrow P(1)=0 \\ x=2 \Rightarrow 3P(2)=0 \Rightarrow P(2)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ та } x=2 - \text{корені} \quad P(x) =$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-i)Q(x)$$

$$(x+i)x(x-i)Q(x) = (x-i)(x+i)Q(x+i)$$

$$xQ(x) = (x-i)Q(x+i)$$

$$x=1 \Rightarrow Q(1)=0 \Rightarrow Q(x) = (x-i)R(x)$$

$$\frac{x(x-i)R(x)}{2a \cdot 1} = \frac{(x-i)R(x+i)}{2a \cdot 1}$$

$$\text{Знач.} \quad R(x) = c = \text{const}$$

$$Q(x) = (x-i) \cdot c$$

$$P(x) = x(x-i)(x-i)c$$

$$\text{Перевіримо:} \quad (x+i)x(x-i)(x-i)c =$$

$$= (x-i)(x+i)x(x-i)c$$

$$c - \text{гочини}$$

$$f - \text{ін'єкційна функція}$$

$$\forall x_1, x_2: x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\text{або} \quad (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

$$f(x) = x^2 - \text{на } (0; +\infty) \text{ або на } (-\infty; 0), \text{ але}$$

$$\text{не ін'єкційна на } \mathbb{R}$$

$$f \nearrow (x) \Rightarrow f - \text{ін'єкційна}$$

$$f - \text{ін'єкційна непер.} \Rightarrow f \nearrow (x)$$

$$f \nearrow$$

$$\frac{x_1 < x_2}{f(x_1) > f(x_2)}$$

$$\frac{f(x_1) < f(x_2)}{f(f(x_1)) > f(f(x_2))}$$

$$f(f(x)) \nearrow$$

$$f \nearrow$$

$$\frac{x_1 < x_2}{f(x_1) < f(x_2)}$$

$$\frac{f(f(x_1)) < f(f(x_2))}{f(f(x_1)) < f(f(x_2))}$$

$$f(f(x)) \nearrow$$

$$\text{Зад. 6} \quad f\left(f\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ін'єкційна:} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \checkmark$$

$$\frac{f\left(f\left(\frac{1}{f(x_1)}\right)\right)}{x_1} = \frac{f\left(f\left(\frac{1}{f(x_2)}\right)\right)}{x_2} \quad \checkmark$$

$$f - \text{лінійна функція} \Rightarrow f - \text{лінійна функція}$$

$$1) f \nearrow \Rightarrow f(f(x)) \nearrow, \quad a \text{ не } \nearrow - \text{не підходить}$$

$$2) f \nearrow \quad \exists x_0: f(x_0) > x_0$$

$$f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$$

$$\frac{f(f(f(x_0))) > f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0}{\text{...}}$$

$$\Rightarrow \forall x \quad f(x) = x$$