Пр.1 $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f – непр.

$f(ax+b)=f(x)\quad,\quad \forall x\in\mathbb{R}$

1) $a=0\;:\; f(b)=f(x) \Rightarrow f(x)\equiv const$

2) $b=0 \quad f(ax)=f(x)$

2.1) $a=1 \Rightarrow f(x)$ – непр.

2.2) $a=-1 \Rightarrow f(-x)=f(x) \Rightarrow f(x)$ – парна

3) $b\neq 0$ 3.1) $a=1 \quad f(x+b)=f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ – період. з період b

3.2) $a=-1 \quad f(-x+b)=f(x)$

$x=\frac{b}{2}$

4) $|a|<1,\ a\neq 0 \qquad x\to ax+b$

$\checkmark\ f(x)=f(ax+b)$

$f(ax+b)=f(a(ax+b)+b)=f(a^2x+ab+b)$

$\checkmark\ f(x)=f(a^2x+ab+b)$

$f(ax+b)=f(a^2(ax+b)+ab+b)=$

$=f(a^3x+a^2b+ab+b)$

$\checkmark\ f(x)=f(a^3x+b(a^2+a+1))$

...

$f(x)=f(a^nx+b(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a+1))=$

$=f\left(a^nx+b\frac{1-a^n}{1-a}\right)$ доведено за n-ною мат. інд.

$n\to\infty\;:\; f(x)=f\left(\lim_n\left(\underset{\to 0}{a^n}x+\frac{b(1-\overset{\to 0}{a^n})}{1-a}\right)\right)=$

$=f\left(\frac{b}{1-a}\right)\Rightarrow f\equiv const$

5) $|a|>1 \qquad ax+b=t \Rightarrow x=\frac{t-b}{a}=\frac{t}{a}-\frac{b}{a}$

$f(x)=f(ax+b)$

$f(t)=f\left(\frac{t}{a}-\frac{b}{a}\right) \qquad \left|\frac{1}{a}\right|<1$

...

як і в (4)

$f(x)\equiv const$

Висновок: $f(x)=f(ax+b)$

$f(x)\equiv const \quad \forall a: |a|\neq 1$

Пр.2 $\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\checkmark\quad f(x)=f\left(\frac{x}{1-x}\right)$

$x\to\frac{x}{1-x}\;:\; f\left(\frac{x}{1-x}\right)=f\left(\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}\right)=$

$x\neq\frac{1}{2}$

$=f\left(\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-2x}{1-x}}\right)=f\left(\frac{x}{1-2x}\right)$

$\checkmark\ f(x)=f\left(\frac{x}{1-2x}\right)$

$f\left(\frac{x}{1-x}\right)=f\left(\frac{\frac{x}{1-x}}{1-2\frac{x}{1-x}}\right)=$

$=f\left(\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-3x}{1-x}}\right)=f\left(\frac{x}{1-3x}\right)$

$x\neq\frac{1}{3} \qquad \checkmark\ f(x)=f\left(\frac{x}{1-3x}\right)$

...

$x\neq\frac{1}{n} \qquad f(x)=f\left(\frac{x}{1-nx}\right)$

індукція : $\quad n=1 \quad f(x)=f\left(\frac{x}{1-x}\right)$

істина

припустимо : $f(x)=f\left(\frac{x}{1-kx}\right) \quad x\neq\frac{1}{k}$

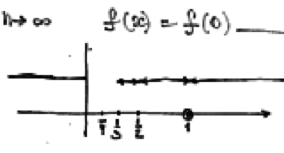
доведемо : $f(x)\overset{?}{=}f\left(\frac{x}{1-(k+1)x}\right) \quad x\neq\frac{1}{k+1}$

$f\left(\frac{x}{1-x}\right)=f\left(\frac{\frac{x}{1-x}}{1-k\cdot\frac{x}{1-x}}\right)=f\left(\frac{x}{1-(k+1)x}\right)$

$f(x)=f\left(\frac{x}{1-(k+1)x}\right)\quad,\quad x\neq\frac{1}{k+1}$

$f(x)=f\left(\frac{x}{1-nx}\right)$

$n\to\infty \qquad f(x)=f(0) \qquad x\neq\frac{1}{n}$



$f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0)$

за непр.

Пр.3 $\quad f(ax+b)=af(x) \qquad a\neq 0;\pm 1$

$\cancel{a}f'(ax+b)=\cancel{a}f'(x)$

$f'=g \qquad g(ax+b)=g(x)$

$f'(x)=g(x)=const\ c$

$f(x)=cx+d$

$f(ax+b)=c(ax+b)+d=a(cx+d)$

$\cancel{acx}+cb+d=\cancel{acx}+ad$

$cb=d(a-1)\Rightarrow d=\frac{cb}{a-1}$

$f(x)=cx+\frac{cb}{a-1}=c\left(x+\frac{b}{a-1}\right)$

$\forall c\in\mathbb{R}$

Пр.4 $\quad f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \qquad$ 1) $f(x)=0$

2) $\left.\begin{aligned} f'_x(x+y)&=f'(x)\cdot f(y)\\ f'_y(x+y)&=f(x)\cdot f'(y)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)f(y)=f(x)\cdot f'(y)$

$\forall x,y \qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(y)}{f(y)}=const$

$\frac{df}{dy}=cf \Rightarrow \frac{df}{f}=c\,dy$

$\ln f=cy+d$

$f(y)=e^{cy+d}=e^d\cdot e^{cy}=$

$=\bar{c}e^{cy}$

$f(y)=\bar{c}e^{cy}$

$f(0+0)=f^2(0)\Rightarrow f(0)=1$

$f(0)=\bar{c}\Rightarrow 1 \qquad f(y)=e^{cy}$

$e^{c(x+y)}=e^{cx}\cdot e^{cy}$