Зр.1 $f(ax+b)=a^2 f(x)$ $\quad f\in D^2(\mathbb{R})$

$\cancel{a} f'(ax+b)=a^2 f'(x)$ $\quad a\in\mathbb{R}\setminus\{0;\pm1\}$

$\cancel{a} f''(ax+b)=\cancel{a} f''(x)$

$f''=g \Rightarrow g(ax+b)=g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$g(x)=\text{const } c$

$f'(x)=cx+d$

$f(x)=\frac{cx^2}{2}+dx+e$

$f(ax+b)=\frac{c(ax+b)^2}{2}+d(ax+b)+e=a^2\left(\frac{cx^2}{2}+dx+e\right)$

$\cancel{\frac{ca^2x^2}{2}}+abcx+\frac{cb^2}{2}+dax+db+e=\cancel{\frac{a^2cx^2}{2}}+a^2dx+a^2e$

$\begin{cases} abc+da-a^2d=0 \\ \frac{cb^2}{2}+db+e-a^2e=0 \end{cases}$

$bc=d(a-1) \Rightarrow d=\frac{bc}{a-1}$ ✓

$\frac{cb^2}{2}+\frac{b^2c}{a-1}+e(1-a^2)=0$

$b^2c\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a-1}\right)+e(1-a^2)=0$

$b^2c\,\frac{a+1}{2(a-1)}=e(a^2-1)$

$e=\frac{b^2c}{2(a-1)^2}$ ✓

$f(x)=\frac{cx^2}{2}+\frac{bcx}{a-1}+\frac{b^2c}{2(a-1)^2}=$

$=\frac{c}{2}\left(x^2+\frac{2bx}{a-1}+\frac{b^2}{(a-1)^2}\right)=\frac{c}{2}\left(x+\frac{b}{a-1}\right)^2$

Зр.2 $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$

$y=0:\quad f(x)=\frac{f(x)+f(0)}{1-f(x)\cdot f(0)}$

$\cancel{f(x)}-f^2(x)\cdot f(0)=\cancel{f(x)}+f(0)$

$f(0)\,(1+f^2(x))=0 \Rightarrow f(0)=0$

$f'(x+y)=\frac{f'(y)(1-f(x)f(y))+(f(x)+f(y))f(x)f'(y)}{(1-f(x)\cdot f(y))^2}$

$y=0:\quad f'(x)=\frac{f'(0)+f(x)\cdot f(x)\cdot f'(0)}{1}$

$f'(x)=\underbrace{f'(0)}_{c}(1+f^2(x))$

$f'=c(1+f^2)$

$\int\frac{d}{1+f^2}=\int c\,dx$

$\operatorname{arctg} f=cx+d \Rightarrow f=\operatorname{tg}(cx+d)$

$f(0)=\operatorname{tg} d=0 \quad d=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$f(x)=\operatorname{tg}(cx+\pi k)=\operatorname{tg} cx$

Перевірка $\quad \operatorname{tg} c(x+y)=\frac{\operatorname{tg} cx+\operatorname{tg} cy}{1-\operatorname{tg} cx\operatorname{tg} cy}$

$f(x)=\operatorname{tg} cx$

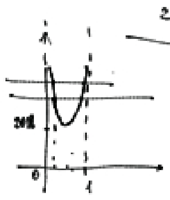
Зр.3 $f:(0;1)\to(2018;+\infty)$

одночасно $\begin{cases} 1)\ f(xy)=f(x)\cdot f(y) \quad \forall x,y\in(0,1) \\ 2)\ \forall y\in(2018;+\infty)\ \exists x\in(0;1): \\ \quad f(x)=y \end{cases}$

$\forall x\in(0;1)$

$f(x)=f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x})=f(\sqrt{x})\cdot f(\sqrt{x})>$

$>2018\cdot 2018=2018^2$



$y\to$

$\cancel{y>2018^2}$

$y=2020 \quad \exists x_0\in(0;1)$

$f(x_0)=2020$

$f(\sqrt{x_0}\cdot\sqrt{x_0})=f(\sqrt{x_0})\cdot f(\sqrt{x_0})\geq 2018^2$

Зр.4 $\quad f:\ (0;+\infty)\to(0;+\infty)$

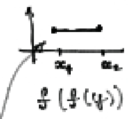
$\forall x,y\in(0;+\infty)$

$f(xf(y))=y\cdot f(x)$

↗ ↘

$0<x_1<x_2$

$f(x_1)=f(x_2)$



$x=1\quad:\quad f(f(y))=yf(1)$

$\forall y\in[x_1,x_2]\ f(y)=\text{const } c$

$f(c)=yf(1)$ не є тотожність

f ↗ або ↘

$f(xf(x))=xf(x)$

f ↗ $\quad:\quad x\cdot f(x)$ ↗ $\Rightarrow f(t)=t$

f ↘ $\quad:\quad x_1<x_2$ ✓

$f(x_1)>f(x_2)$ ✓

$x_1f(x_1)=f(x_1f(x_1))>f(x_2f(x_2))=x_2f(x_2)$

1) $x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$ неможл.

2) $x_1f(x_1)>x_2f(x_2)$, тоді

$x_1f(x_1)=f(x_1f(x_1))<f(x_2f(x_2))=x_2f(x_2)$

3) $x_1f(x_1)=x_2f(x_2)=c\ \forall x_1,x_2$

$xf(x)=c \Rightarrow f(x)=\frac{c}{x}$

$f(xf(y))=yf(x)$

$f\left(x\cdot\frac{c}{y}\right)=y\cdot\frac{c}{x}$

$\frac{c}{\frac{cx}{y}}=\frac{y}{x}$

$y\frac{c}{x}=\frac{y}{x}$

$c=1$

Відповідь: $f(x)=x$ ↗

$f(x)=\frac{1}{x}$ ↘