ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 6 «Показникова функція, її властивості»

1. Яка з даних функцій є показниковою:

$$1)\ y=x^7;\quad 2)\ y=\sqrt[7]{x};\quad 3)\ y=7^x;\quad 4)\ y=7\,?$$

Розв'язання. Згідно з означенням, функція називається показниковою, якщо змінна x знаходиться в показнику степеня, а основа степеня a – є додатною, не рівною одиниці, сталою, тобто це функція виду 3).

Відповідь. 3) $y=7^x$.

2. Визначити характер монотонності функції:

$$1)\ y=7^x;\ 2)\ y=7^{-x};\ 3)\ y=3^x\cdot 4^x;$$

4) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$.

Розв'язання. Дана показникова функція є спадною, оскілки основа степеня $0<a=\frac{3}{4}<1$.

Відповідь. Функція спадає.

5) $y=\left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$.

Розв'язання. За властивостями степенів перетворимо вираз даної функції:

$$y=\left(\frac{3}{4}\right)^{-x}\Rightarrow y=\left(\frac{4}{3}\right)^x.$$

Оскільки основа степеня $a=\frac{4}{3}>1$, то функція є зростаючою.

Відповідь. Функція зростає.

6) $y=3^x\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^x$.

Розв'язання. Спростимо вираз даної функції:

$$y=3^x\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^x\Rightarrow y=\left(3\cdot\frac{1}{12}\right)^x\Rightarrow y=\left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

Основа степеня $0<a=\frac{1}{4}<1$, а, отже, функція є спадною.

Відповідь. Функція спадає.

3. Порівняти з 1 додатне число a, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}}>a^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання. Оскільки більшому значенню аргументу $\left(\frac{5}{6}>\frac{2}{3}\right)$ відповідає більше значення показникової функції (за умовою $a^{\frac{5}{6}}>a^{\frac{2}{3}}$), то ця показникова функція є зростаючою. А тоді основа степеня $a>1$.

Відповідь. $a>1$.

2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$;

3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$.

Розв'язання. В даному випадку меншому значенню аргументу $(-0,3<1,4)$ відповідає більше значення функції, а це означає, що показникова функція $y = a^x$ є спадною. А тоді $0 < a < 1$, тобто $a < 1$.

Відповідь. $a < 1$.

4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

4. Порівняти числа m та n, якщо:

1) $0,8^m < 0,8^n$.

Розв'язання. Функція $y = 0,8^x$ є спадною $(0 < a = 0,8 < 1)$, тому меншому значенню аргументу буде відповідати більше значення функції.

Отже, $n < m$.

Відповідь. $n < m$.

2) $3,2^m > 3,2^n$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

Розв'язання. Оскільки для $a = 1\frac{4}{7} > 1$ показникова функція $y = \left(1\frac{4}{7}\right)^x$ є зростаючою, то меншому значенню аргументу буде відповідати менше значення функції, тобто робимо висновок, що $m < n$.

Відповідь. $m < n$.

5. Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):

1) найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ на проміжку $[-1; 2]$ дорівнює 5;

2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;

3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$;

4) найменше значення функції $y = 0,25^x$ на проміжку $[-2; 2]$ дорівнює 16?

6. Знайти область значень функції:

1) $y = -9^x$.

Розв'язання. Згідно властивостей показникової функції, її множина значень – це проміжок $(0; +\infty)$, тобто

$$9^x > 0.$$

А тоді

$$-9^x < 0 \text{ або } E(y): y \in (-\infty; 0).$$

Відповідь. $E(y): y \in (-\infty; 0)$.

2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$;

3) $y = 7^x - 4$.

Розв'язання. Для функції $y = 7^x$ маємо, що

$$7^x > 0, \Big| -4$$

$$7^x - 4 > -4,$$

тобто $E(y): y \in (-4; +\infty)$.

Відповідь. $E(y): y \in (-4; +\infty)$.

4) $y = 9^{|x|}$.

7. Знайти найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ на проміжку $[-2; 3]$.

Розв'язання. Оскільки на проміжку $[-2; 3]$ задана функція $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ є монотонно спадною $\left(0 < a = \frac{1}{7} < 1\right)$, то свого найбільшого значення на цьому проміжку функція приймає в його лівому кінці. Тобто

$$y_{\substack{найб \\ [-2;3]}} = y(-2) = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = 7^2 = 49.$$

Відповідь. $y_{\substack{найб \\ [-2;3]}} = 49$.

8. На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше – $\frac{1}{9}$?

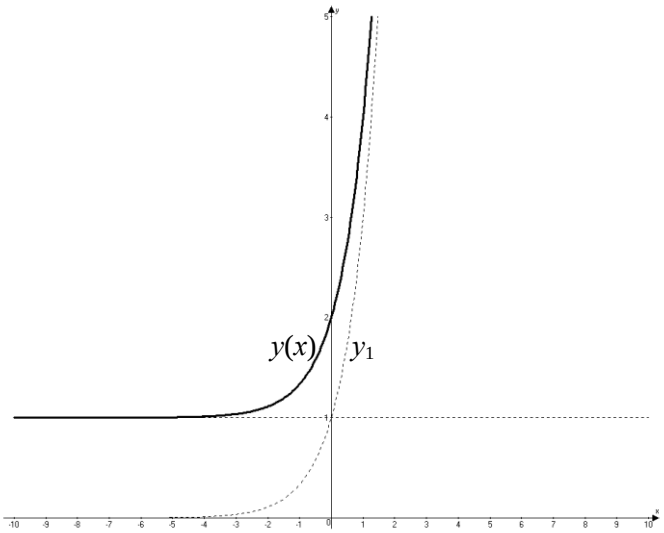
9. Побудувати графік функції:

1) $y = 3^x + 1$.

Розв'язання. Розпишемо ланцюжок елементарних перетворень:

$y_1(x) = 3^x$ – базова функція;

$y(x) = y_1(x) + 1 = 3^x + 1$ – графік функції $y_1(x)$ потрібно перенести на одну одиницю вгору вздовж осі ординат.

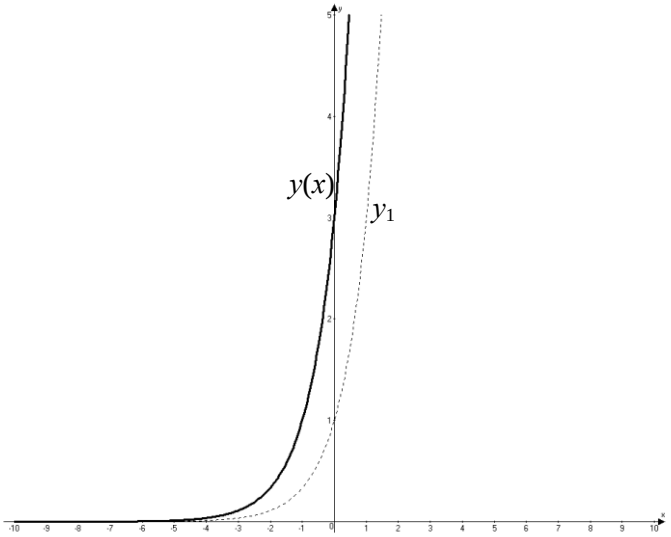


2) $y = 3^{x+1}$.

Розв'язання. Ланцюжок елементарних перетворень:

$y_1(x) = 3^x$ – базова функція;

$y(x) = y(x+1) = 3^{x+1}$ – графік функції $y_1(x)$ переносимо вліво на одну одиницю вздовж осі Ox.



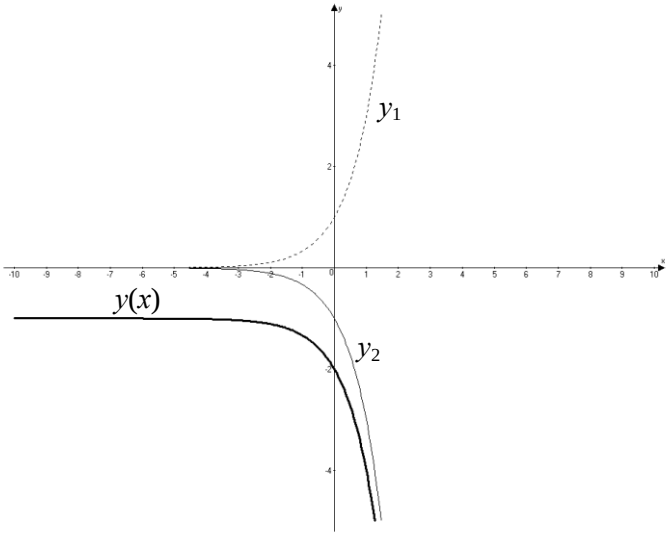
3) $y = -3^x - 1$.

Розв'язання. Ланцюжок елементарних перетворень:

$y_1(x) = 3^x$ – базова функція;

$y_2(x) = -y_1(x) = -3^x$ – графік функції $y_1(x)$ симетрично відображаємо відносно осі абсцис;

$y(x) = y_2(x) - 1 = -3^x - 1$ – графік функції $y_2(x)$ опустити вниз на одну одиницю вздовж осі Oy.



4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; 5) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$; 6) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 2$.